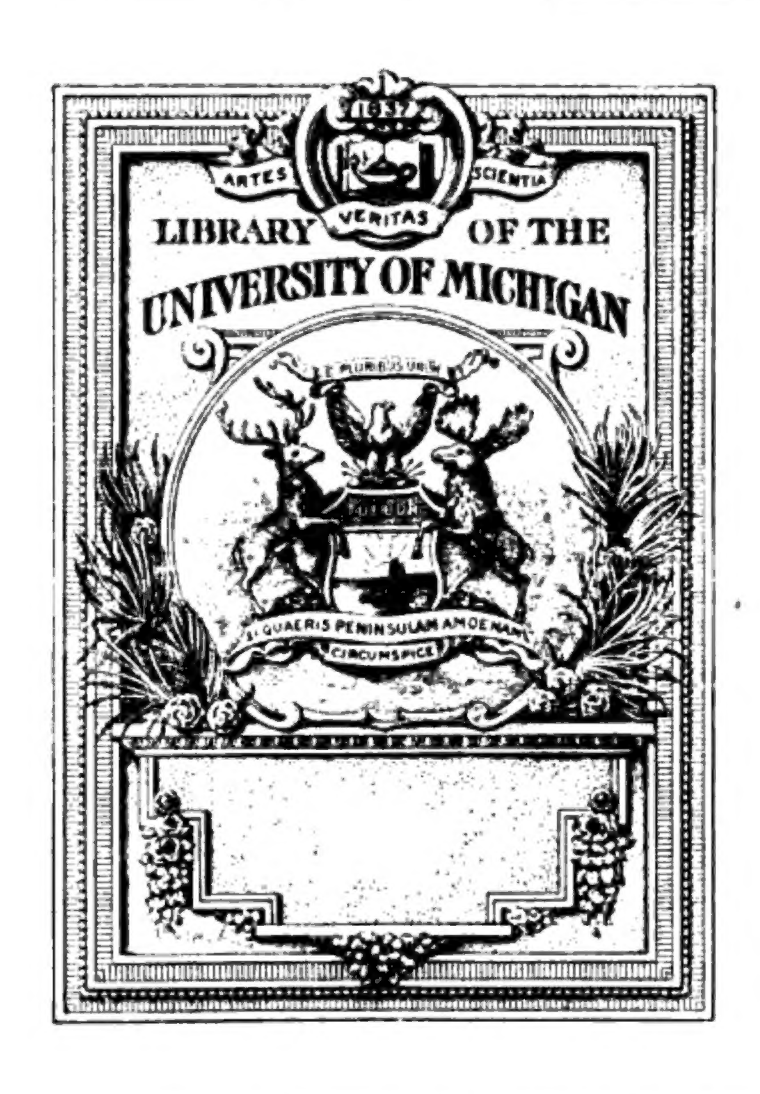
	1h a.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h m.
Jänner	2·2	2·2	2·1	**2·2**	**2·2**	1·8	1·4	1·1	0·7	–0·4	– 1·9	– 3·3
Februar	2·9	3·0	3·1	3·2	3·3	**3·4**	3·3	2·8	1·3	–1·1	– 3·6	– 5·5
März	4·4	4·6	5·0	5·2	5·5	**5·7**	5·2	3·0	–0·5	–4·1	– 7·0	– 8·8
April	5·2	5·4	5·4	5·5	**5·8**	5·7	4·1	0·7	–3·0	–5·8	– 7·8	– 8·8
Mai	6·4	6·9	7·3	7·7	**7·9**	7·5	5·2	0·7	–3·6	–6·7	– 8·6	– 9·8
Juni	8·9	9·2	9·6	9·7	**9·8**	8·8	5·1	–0·8	–6·2	–9·5	–11·1	–11·7
Juli..........	9·1	9·3	9·6	9·8	**9·9**	8·8	5·1	–0·8	–6·1	–9·4	–11·4	–12·3
August.......	8·1	8·4	8·8	**9·1**	**9·1**	8·6	5·9	0·4	–5·4	–9·4	–11·7	–12·7*
September ...	6·1	6·2	6·6	**6·9**	6·8	6·7	5·4	1·3	–4·4	–9·0	–11·3	–12·1*
October	2·9	3·0	3·2	3·3	3·4	**3·6**	3·4	2·1	–0·4	–3·4	– 5·5	– 6·5
November ...	1·5	1·6	1·8	1·9	2·0	2·1	**2·2**	2·1	1·1	–0·6	– 2·6	– 4·1
December ...	1·5	1·4	1·3	1·5	**1·6**	1·5	1·4	1·4	0·9	–0·3	– 1·9	– 3·0
Winter	2·2	2·2	2·2	**2·3**	**2·3**	2·2	2·0	1·7	0·9	–0·7	– 2·5	– 4·0

Sitzungsberichte

Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTACHTER BAND.

WIEN, 1899.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.



SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CVIII. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1899. — HEFT I BIS X.

(MIT 34 TAFELN, 1 KARTE UND 93 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1899.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

	Seite
I. Sitzung vom 5. Jänner 1899: Übersicht	3
II. Sitzung vom 12. Jänner 1899: Übersicht	24
III. Sitzung vom 19. Jänner 1899: Übersicht	25
IV. Sitzung vom 3. Februar 1899: Übersicht	29
V. Sitzung vom 9. Februar 1899: Übersicht	163
VI. Sitzung vom 16. Februar 1899: Übersicht	165
VII. Sitzung vom 2. März 1899: Übersicht	169
VIII. Sitzung vom 9. März 1899: Übersicht	225
IX. Sitzung vom 16. März 1899: Übersicht	445
X. Sitzung vom 13. April 1899: Übersicht	459
XI. Sitzung vom 20. April 1899: Übersicht	463
XII. Sitzung vom 4. Mai 1899: Übersicht	467
XIII. Sitzung vom 12. Mai 1899: Übersicht	470
XIV. Sitzung vom 18. Mai 1899: Übersicht	511
XV. Sitzung vom 8. Juni 1899: Übersicht	615
XVI. Sitzung vom 15. Juni 1899: Übersicht	618
XVII. Sitzung vom 22. Juni 1899: Übersicht	684
XVIII. Sitzung vom 6. Juli 1899: Übersicht	689
XIX. Sitzung vom 13. Juli 1899: Übersicht	811
XX. Sitzung vom 12. October 1899: Übersicht	1003
XXI. Sitzung vom 19. October 1899: Übersicht	1229
XXII. Sitzung vom 3. November 1899: Übersicht	1231
XXIII. Sitzung vom 9. November 1899: Übersicht	1250
XXIV. Sitzung vom 16. November 1899: Übersicht	1267
XXV. Sitzung vom 30. November 1899: Übersicht	1341
XXVI. Sitzung vom 7. December 1899: Übersicht	1513
XXVII. Sitzung vom 14. December 1899: Übersicht	1514

Benndorf H., Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. II. Messungen des Potentialgefälles in Sibirien. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] . . 341

Cohn B., Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1853 I. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 83

Seite

Eder J. M., System der Sensitometrie photographischer Platten. (Mit 16 Tafeln und 5 Textfiguren.) [Preis: 2 fl. = 4 Mk.] . . 1407

Eichberg F. und *Kallir L.*, Über Lichterscheinungen in elektrolytischen Zellen mit Aluminium- und Magnesiumelektroden. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 212

Escherich G., v., Über Systeme von Differentialgleichungen der I. Ordnung. [Preis: 50 kr. = 1 Mk.] 621

— Die zweite Variation der einfachen Integrale. (IV. Mittheilung.) [Preis: 65 kr. = 1 Mk. 30 Pfg.] 1269

Exner F., Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. I. Messungen des Potentialgefälles in Oberägypten. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 50 kr. = 1 Mk.] 371

— und *Haschek E.*, Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente. (XV. Mittheilung.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] . . 825

— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente (XVI. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 75 kr. = 1 Mk. 50 Pfg.] 1071

— — Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente (XVII. Mittheilung). [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 1123

— *F. M.*, Über die Absorptionsspectren der seltenen Erden im sichtbaren und ultravioletten Theile des Spectrums. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1252

Gegenbauer L., Über transcendente Functionen, deren sämmtliche Wurzeln transcendente Zahlen sind. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 423

Grünwald J., Über die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art und die zu ihnen perspectiven ebenen Curven. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 1009

Harting H., Über die Lage der astigmatischen Bildflächen bei optischen Systemen. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 1387

Hasenöhrl F., Über ein Problem der Potentialtheorie. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 27½ kr. = 55 Pfg.] 1667

Hock J., Über die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten homologer Reihen von der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung und über die Oberflächenspannungen unterkühlter Flüssigkeiten. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 1516

Jäger G., Zur Grösse der Molekel. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] . . . 54

— und *Meyer St.*, Die magnetische Susceptibilität des Wassers. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 261

— Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 447

— Über das Verhalten der Flüssigkeiten im magnetischen Felde. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: kr. 15 = 30 Pfg.] 1499

Seite

Jahoda R., Über eine Methode zur Bestimmung der Gasdichte mittelst angeblasener Pfeifen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 803

Jaumann G., Rotirendes Magnetfähnchen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1529

Kerner F., v., Die theoretische Temperaturvertheilung auf Prof. Frech's Weltkarten der altpaläozoischen Zeit. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 220

Klemenčič I., Untersuchungen über permanente Magnete. I. Über die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten vom Dimensionsverhältniss. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 491

— Über die Wärmeentwicklung durch Foucault'sche Ströme bei sehr schnellen Schwingungen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 568

— Untersuchungen über permanente Magnete. II. Über die Abhängigkeit des Inductionscoëfficienten vom Dimensionsverhältniss. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 989

Kohn G., Über die Oktaëderlage und die Ikosaëderlage von zwei cubischen Raumcurven. ([Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 58

Lampa A., Über einen Beugungsversuch mit elektrischen Wellen. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 786

Lang V., v., Magnetische Orientirung einer Anzahl einaxiger Krystalle. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 557

— Über longitudinale Töne von Kautschukfäden. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 692

Lecher E., Einige Versuche mit dem Wehnelt-Interruptor. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 677

— Über einen theoretischen und experimentellen Trugschluss in der Elektricitätslehre. (Mit 11 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 977

Lenard P., Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . . 1649

Ludwig R., Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. IV. Über eine während der totalen Sonnenfinsterniss vom 22. Jänner 1898 ausgeführte Messung der atmosphärischen Elektricität. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 436

Mach L. und *Schumann V.*, Über ein neues Spiegelmetall und dessen optische Untersuchung. (Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 135

Mache H., Über die Temperaturverhältnisse in der Flamme. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1152

Mazelle E., Zur täglichen Periode und Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit. [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 281

Mertens F., Eine asymptotische Aufgabe. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 32

Seite

Mertens F., Zur Theorie der symmetrischen Functionen. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 473
— Beweis, dass jede lineare Function mit ganzen complexen theilerfremden Coëfficienten unendlich viele complexe Primzahlen darstellt. [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 517
— Zur Theorie der Elimination (I. Theil). [Preis: 50 kr. = 1 Mk.] 1173
— Zur Theorie der Elimination. (II. Theil.) Anwendungen. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 1344
Meyer St., Über die magnetischen Eigenschaften der Elemente. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 171
— Über Krystallisation im magnetischen Felde. (I. Mittheilung.) (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 513
— Volumenometrische Bestimmung des specifischen Gewichtes von Yttrium, Zirkonium und Erbium. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 767
— Magnetisirungszahlen anorganischer Verbindungen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 861
Nabl J., Über den Widerstand strömender Elektrolyte. (Mit 2 Textfiguren). (Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1535
Niessl G. v., Bahnbestimmung des grossen Meteors vom 20. November 1898. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 185
Oekinghaus E., Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche und der Integrabilität (äussere Ballistik). (Mit 1 Tafel.) [Preis: 85 kr. = 1 Mk. 70 Pfg.] 1559
Pfaundler L., Über den Begriff und die Bedingungen der Convergenz und Divergenz bei den Linsen. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 477
Przibram K., Beiträge zur Kenntniss des verschiedenen Verhaltens der Anode und Kathode bei der elektrischen Entladung. (Mit 1 Doppeltafel.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 1161
Radaković M., Über die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkt. (Mit 7 Textfiguren.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 577
Scheimpflug Th. und *Holler M.*, Temperaturmessungen im Quecksilberbergwerk von Idria (Mit 1 Karte.) [Preis: 60 kr. = 1 Mk. 20 Pfg.] 950
Schicht F., Das äussere elektrische Feld einer Entladungsröhre. (Mit 16 Textfiguren.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 814
Schweidler E., R. v., Über die lichtelektrischen Erscheinungen. (II. Mittheilung.) (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 273
— Zur Theorie unipolarer Gasentladungen. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 899

Seite

Smoluchowski Ritter v. Smolan M., Weitere Studien über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 5

Sterneck R., v., Untersuchungen über den Zusammenhang der Schwere unter der Erdoberfläche mit der Temperatur. [Preis: 60 kr. = 1 Mk. 20 Pfg.] 697

Stolz O., Über die absolute Convergenz der uneigentlichen bestimmten Integrale. (II. Mittheilung.) [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] . . 1234

Tuma J., Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. III. Luftelektricitätsmessungen im Luftballon. (Mit 9 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 227

Tumlirz O., Mechanische Erklärung der Verdünnungswärme von Lösungen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 323

— Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1058

— Die beiden specifischen Wärmen des Wasserdampfes. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1395

Wallaschek R., Die Entstehung der Scala. (Mit 4 Tafeln, 1 Textfigur und einer Tabelle.) [Preis: 75 kr. = 1 Mk. 50 Pfg.] . 905

Wegscheider R., Über die Dissociation der Gase bei constantem Druck und bei Überschuss eines der Dissociationsproducte. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 69

— Über die Dissociation des Chlorwasserstoffmethyläthers. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 119

Weinek L., Berghöhenbestimmung auf Grund des Prager photographischen Mondatlas. (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 38

— Über die beim Prager photographischen Mondatlas angewandte Vergrösserungsmethode. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 771

Wirtinger W., Zur Theorie der automorphen Functionen von *n* Veränderlichen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1239

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

I. SITZUNG VOM 5. JÄNNER 1899.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 19, Heft IX (November 1898).

Se. Excellenz der Herr Oberstkämmerer Sr. k. und k. Apostolischen Majestät übersendet ein Exemplar der aus Anlass des 50jährigen Regierungsjubiläums Seiner Majestät des Kaisers geprägten Erinnerungsmedaille.

Der Bürgermeister von Wien, Herr Dr. Karl Lueger, übermittelt eine ebenfalls zur Erinnerung an das Allerhöchste Regierungsjubiläum von der k. k. Reichshaupt- und Residenzstadt Wien geprägte Gedenkmedaille.

Herr Dr. Fritz Blau spricht den Dank für die ihm gewährte Subvention im Betrage von 500 fl. zur Fortsetzung der Untersuchungen über neue organische Metallverbindungen aus.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Privatdocenten Herrn Dr. M. Smoluchowski Ritt. v. Smolan vor, betitelt: »Weitere Studien über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen«.

Herr Prof. Dr. L. Weinek in Prag übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Berghöhenbestimmung auf Grund des Prager photographischen Mond-Atlas«.

Herr k. und k. Hauptmann Paul Wostrowsky in Wien übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Graphische Berechnung der Bewegungsgleichungen eines in einem Punkte gestützten starren Körpers, der von einer Kraft bewegt wird«.

Herr Gymnasial-Supplent Karl Langer in Mödling übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Directe Construction der Contouren von Rotationsflächen II. Ordnung in orthogonaler Darstellung«.

Herr Regimentsarzt d. R. Dr. Isidor Aschkenasy in Fiume übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beschreibung einer neuen radicalen Heilmethode des chronischen Harnröhrentrippers beim Manne«.

Zur Erlangung des Baumgartner-Preises ist eine Abhandlung unter dem Motto: »Scire, per causas scire (Bacon)«, eingelaufen, welche den Titel führt: »Différences d'actions de la lumière ultraviolette sur les potentiels explosifs, statiques et dynamiques«.

Weitere Studien über den Temperatursprung bei Wärmeleitung in Gasen

von

Dr. **M. Smoluchowski** Ritter v. **Smolan.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

I. Versuche bei stationärer Wärmeleitung.

Die Methode, welche ich früher[1] zur Constatirung und Messung des Temperatursprunges, welcher bei der Wärmeleitung in Gasen an der Oberfläche der festen Körper auftritt, benützt hatte, ist gewissermassen eine indirecte gewesen, indem dessen Grösse aus der beobachteten Verminderung der zwischen ihnen vor sich gehenden Wärmeströmung berechnet wurde.

Es ist nun der Gedanke naheliegend, zu versuchen, ob man nicht auch eine directe Methode anwenden könnte, indem man bei stationärer Wärmeströmung die Temperatur des Gases in seinen verschiedenen Schichten misst. Vielleicht wäre dies mittelst optischer Methoden zu erreichen (z. B. vermittelst des Einflusses der Temperatur auf den Brechungsindex). Wenn man dagegen feste Körper, die in das Gas eingetaucht sind, als Thermometer (z. B. Thermoelemente) zur Temperaturmessung benützt, so muss man in Betracht ziehen, dass auch an ihrer Oberfläche ein Temperatursprung stattfindet, daher die ursprüngliche Temperaturvertheilung modificirt wird.

Man kann also auch bei dieser Methode den Temperatursprung nicht direct beobachten, sondern muss ihn aus den

[1] Wied. Ann., 64, S. 101 (1898).

gemessenen Grössen berechnen, wobei auch noch auf den Einfluss der Strahlung Rücksicht zu nehmen ist.

Es ist dabei aber nicht nöthig, den Thermometerkörper zu verschieben, um den ganzen Temperaturverlauf kennen zu lernen, was mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden wäre, sondern es genügt, wenn man ihn in einer gewissen Distanz fix befestigt und nun seine Temperatur misst, einerseits wenn ein Temperatursprung so besteht, und anderseits bei normaler

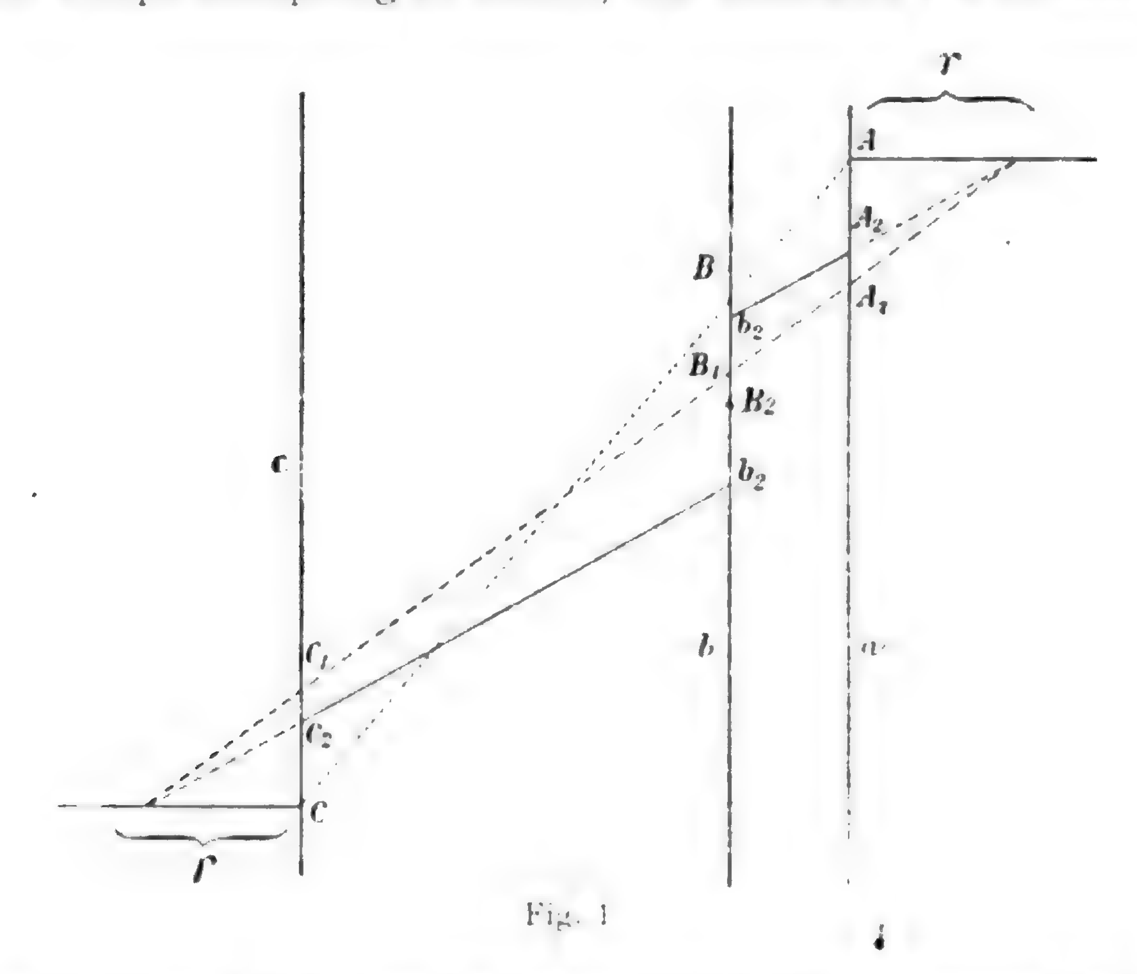


Fig. 1

Verhältnissen, d. h. wenn er unmerklich klein ist; letzteres ist ja bei höheren Drucken der Fall, da der Coëfficient γ in $\Delta\vartheta = \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ dem Drucke verkehrt proportional ist. Fig. 1 gibt eine Übersicht dieser Verhältnisse für den Fall, dass die Strahlung zu vernachlässigen ist. AC stellt das lineare Temperaturgefälle für den Fall vor, wo kein Temperatursprung besteht, also z. B. bei höherem Drucke, A_1C_1 für den Fall, wo an den beiden festen Wänden a, c der Temperatursprung AA_1, respective CC_1 stattfindet, und die gebrochene Linie $A_2b_2b_2C_2$ für den Fall, wo noch die feste, zur Temperaturmessung dienende Platte b eingeschoben ist. Deren Temperatur wird dann durch den Punkt B_2 bestimmt

(wo $AA_2 = b_2B_2 = B_2b_2 = C_2C$), während sie im ersten Falle dem Punkte B entsprechen würde, und aus dieser Differenz B_2B kann der Temperatursprung berechnet werden.

Man könnte diese Methode auch als eine Zusammenfassung der Versuche ansehen, welche ich loc. cit. mittelst separater Gefässe verschiedener Dimensionen angestellt habe; denn auch sie stützt sich auf den Umstand, dass der Einfluss des Temperatursprunges bei einem kleinen Zwischenraum viel bedeutender ist als bei einem grossen, da derselbe äquivalent ist mit einer Zurückschiebung der festen Wände um die Strecke γ.

Bezeichnen wir das Verhältniss der Temperaturdifferenzen $\frac{\vartheta_A-\vartheta_B}{\vartheta_B-\vartheta_C}$ mit a für das beste Vacuum, wo also bloss die Strahlung wirksam ist, mit b für normale Drucke, wo Strahlung und gewöhnliche Wärmeleitung besteht, und mit c für ein derart verdünntes Gas, dass auch der Temperatursprung in Betracht kommt, ferner mit σ_1 und σ_2 die Coëfficienten der Strahlung zwischen der mittleren Platte b und der Wand a, respective c, mit δ_1 und δ_2 die Abstände zwischen b und a, respective c, und mit d das Verhältniss $d = \frac{\delta_1}{\delta_2}$, dann gelten für den stationären Zustand folgende Gleichungen:

$$a = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$b = \frac{\sigma_2 + \frac{\varkappa}{\delta_2}}{\sigma_1 + \frac{\varkappa}{\delta_1}}, \qquad c = \frac{\sigma_2 + \frac{\varkappa}{\delta_2 + 2\gamma}}{\sigma_1 + \frac{\varkappa}{\delta_1 + 2\gamma}}.$$

Durch Elimination von σ_1, σ_2 und $\varkappa$ erhält man hieraus:

$$\frac{2\gamma}{\delta_2} = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}, \tag{1}$$

wobei

$$A = 1 + d\left[1 + \frac{(1-c)(a-b)}{(b-d)(a-c)}\right], \quad B = d\left[-1 + \frac{(c-d)(a-b)}{(b-d)(a-c)}\right]. \tag{2}$$

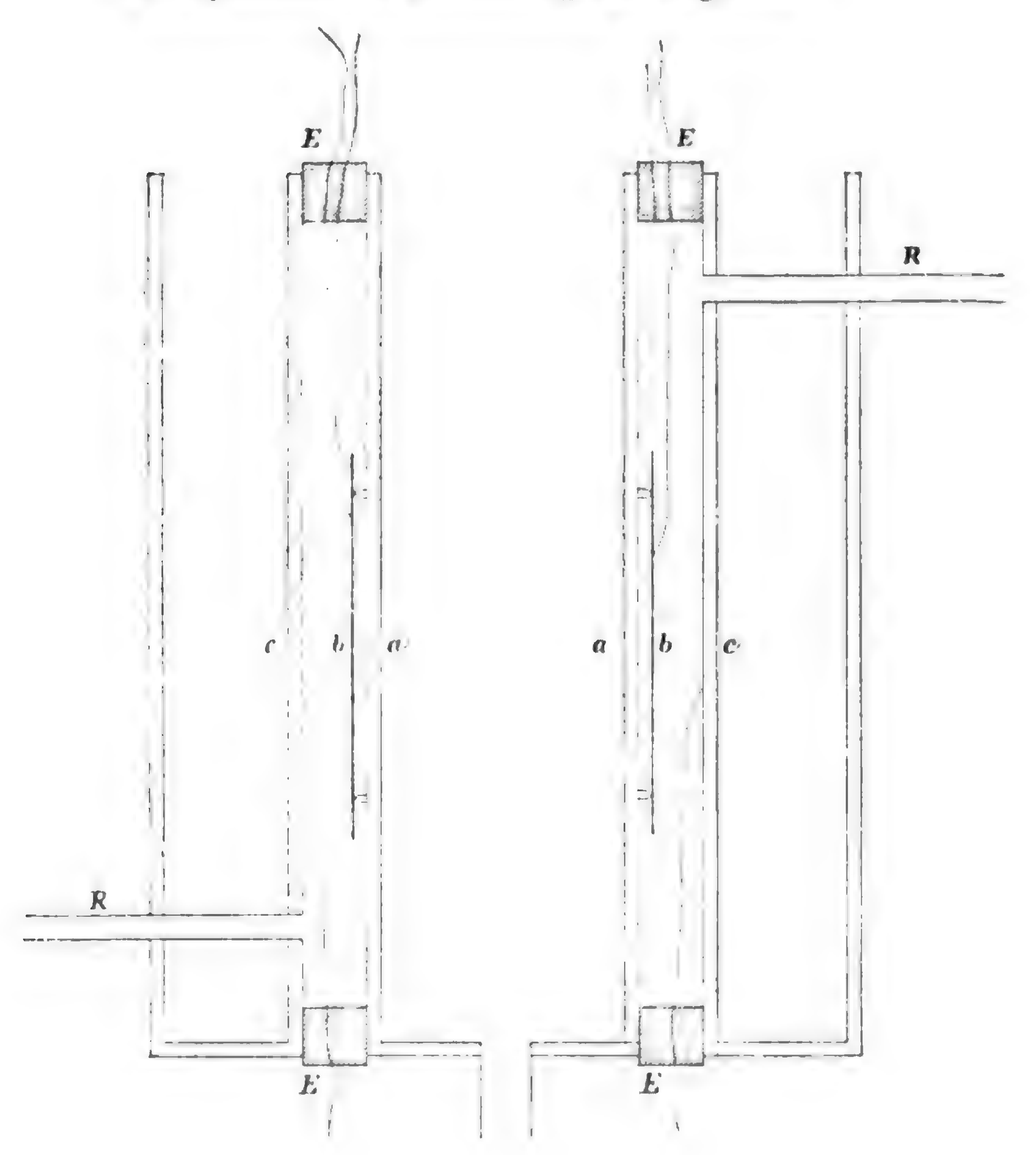
Die Vortheile dieser Methode gegenüber der in jener Abhandlung gebrauchten sind, dass man bei stationärem Wärme-

strom arbeitet, somit die Kenntniss von specifischen Wärmen etc. nicht benöthigt, dann dass sie, falls die Strahlung zu vernachlässigen ist, auch dann noch giltig bleibt, wenn $\varkappa$ selbst sich ändern würde.

Dagegen zeigten sich bei der praktischen Durchführung grosse Schwierigkeiten, welche bewirkten, dass die hier erhaltenen Resultate jenen früheren an Genauigkeit nachstehen.

Trotzdem scheint es mir von Interesse, darauf etwas näher einzugehen, insbesondere da dadurch — wie ich weiter unten ausführen werde — ein augenscheinlicher Beweis für die Richtigkeit der hier angenommenen Theorie geliefert wird.

Die experimentelle Anordnung war folgende:



Ein cylindrisches Messinggefäss aa ist innerhalb eines hohlcylinderförmigen Messinggefässes cc concentrisch befestigt, indem es darin mittelst zweier schwach conischer Ebonitringe E, die von oben und unten fest eingepresst sind, festgehalten wird. In den so gebildeten Hohlraum wird das zu untersuchende Gas mit Hilfe zweier Röhrenansätze R eingefüllt, respective daraus ausgepumpt (Sprengelpumpe Tuma'scher Construction und Macleod-Manometer).

Das innere Gefäss wird durch den Strom der Wasserleitung gekühlt (circa 8°), während das äussere mittelst eingefüllten Wassers ungefähr auf Zimmertemperatur (15—18°) erhalten wird. Zwischen den beiden Wänden stellt sich ein sehr angenähert linearer Temperaturabfall her, welcher die Temperatur der eingeschobenen Platte b — hier in Form eines dünnen cylindrischen Kupferblechringes — in der Art, wie Fig. 1 angibt, bestimmt. Der stationäre Zustand ist wegen der geringen Masse des Ringes b in sehr kurzer Zeit hergestellt. In seiner Stellung wird b durch ganz kleine, aus der Wand von a herausragende Ebonitstifte fixirt; die Temperaturdifferenzen AB und BC werden mittelst sehr dünner, als Thermoelemente dienender Drahte aus Eisen und Neusilber gemessen, welche einerseits an der Aussenfläche von a, b und der Innenfläche c angelöthet sind, anderseits mit einem Commutator und einem D'Arsonval-Galvanometer in Verbindung stehen; die Löthstellen, wo sich die kupfernen Leitungsdrähte mit ihnen vereinigen, sind (selbstverständlich von einander isolirt) in einem kleinen massiven Bleigefäss, das mit Petroleum gefüllt ist, untergebracht, so dass hier zwischen ihnen keine Temperaturdifferenzen entstehen können.

Aus den Ausschlägen des Galvanometers — mit geringen Correcturen wegen der Abweichung von der Proportionalität mit der elektromotorischen Kraft versehen — ergeben sich unmittelbar die Werthe von a, b, c; das Verhältniss $d = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ wurde nicht aus den gemessenen Dimensionen abgeleitet, da dies zu ungenau wäre, sondern aus den Werthen von b für Luft und Wasserstoff mit Hilfe deren bekannter relativer Leitfähigkeit extrapolirt; die Unsicherheit, die durch diese Bestimmungsart hervorgerufen wird, verschwindet gegenüber anderen Fehlerquellen.

Folgende Tabellen geben die für Wasserstoff, Luft und Kohlensäure gefundenen Resultate:

I. Alle Flächen vernickelt.

$a = 1·0343,\ d = 0·2447,\ \delta_2 = 0·7873\ cm.$

Wasserstoff				Luft				Kohlensäure			
Druck p	b, respective c	γ berechnet	$p\gamma$	Druck p	b, respective c	γ berechnet	$p\gamma$	Druck p	b, respective c	γ berechnet	$p\gamma$
69 *mm*	0·2508		0·0		0·2917		0·0		0·3163	0·0	0·0
1·97 *mm*	0·3328	0·0466	918	1·05 *mm*	0·3202	0·0105	111	1·21 *mm*	0·3360	0834	101
0·827 *mm*	0·4043	0·0973	805	0·315 *mm*	0·3686	0·0354	121	0·494 *mm*	0·3631	204	101
0·397 *mm*	0·5129	0·2090	829					0·316 *mm*	0·3791	280	0885
Mittel			0·0851				0·0116				0·00968
$\gamma = 0·000112\ cm.\ \frac{760}{p}$				$\gamma = 0·0000153\ cm.\ \frac{760}{p}$				$\gamma = 0·0000127\ cm.\ \frac{760}{p}$			

II. Alle Flächen vergoldet.

$a = 1 \cdot 0310,\ d = 0 \cdot 2572,\ \delta_2 = 0 \cdot 7754\ cm.$

Wasserstoff				Luft				Kohlensäure			
Druck p	b, respective c	γ berechnet	γp	Druck p	b, respective c	γ berechnet	γp	Druck p	b, respective c	γ berechnet	γp
76 *mm*	0·2590		0·0	22·5 *mm*	0·2711	0·0	0·0	21 *m*	0·2863	0 0	0·00
1·44 *mm*	0·3378	0·0457	657	1·60 *mm*	0·2855	0725	116	1·06 *mm*	0·3044	0873	924
0·725 *mm*	0·3904	0·0827	599	1·20 *mm*	0·2895	0935	112	0·482 *mm*	0·3205	168	811
0·469 *mm*	0·4304	0·115	841	0·905 *mm*	0·2964	130	118	0·327 *mm*	0·3298	216	708
				0·269 *mm*	0·3409	380	102				
Mittel			0·0599				0·0112				0·00814
$\gamma = 0 \cdot 0000788\ cm. \frac{760}{p}$				$\gamma = 0 \cdot 0000147\ cm. \frac{760}{p}$				$\gamma = 0 \cdot 0000107\ cm. \frac{760}{p}$			

Das Resultat dieser Versuche ist insofern ein befriedigendes, als es die theoretische Brauchbarkeit dieser Methode beweist und zeigt, dass durch dieselbe für den Temperatursprung zwischen jenen Gasen und den metallischen Flächen Werthe ganz ähnlicher Grössenordnung gefunden werden, wie nach der früheren, gänzlich verschiedenen Methode für Gase in Contact mit Glasflächen. Damals hatte ich nämlich gefunden: $\gamma = 0\cdot000129\,cm.\,\frac{760}{p}$ für Wasserstoff und $\gamma = 0\cdot0000171\,cm\cdot\frac{760}{p}$ für Luft oder, in mittleren Weglängen ausgedrückt, $\gamma_H = 6\cdot96\,\lambda$ und $\gamma_L = 1\cdot70\,\lambda$.

Allerdings dürften aber diese Resultate den früheren an Genauigkeit erheblich nachstehen; dies zeigt sich auch in den Schwankungen des Werthes $p\gamma$, der constant bleiben soll, wenn γ proportional der mittleren Weglänge ist, welche mitunter recht bedeutend sind, viel grösser als bei den früher erwähnten Versuchen. Es rührt das davon her, dass γ aus den kleinen Differenzen $c-b$ berechnet wird, welche sich nicht mit der wünschenswerthen Sicherheit bestimmen lassen, wie daraus hervorgeht, dass die einzelnen Versuche, aus denen die in den Tabellen angegebenen Zahlen als Mittelwerthe gefunden werden, merkliche Unterschiede aufweisen. Ich überzeugte mich, dass die Ursache davon grösstentheils in thermoelektrischen Kräften liegt, welche an den Verbindungsstellen verschiedener Leiterstücke (z. B. im Commutator, beim Galvanometer, an etwaigen Knickstellen der Drähte etc.) entstehen und welche leicht den Betrag von 1% der geringen, zu messenden elektromotorischen Kraft (also bis zu 20% in γ) — die ja bloss einer Temperaturdifferenz von 2—5° entspricht — erreichen können.

Grössere Temperaturdifferenzen wollte ich nicht anwenden, da man dann auch die Veränderlichkeit von $\varkappa$ und σ mit steigender Temperatur berücksichtigen und auch die Thermoelemente erst aichen müsste, was die Sache bedeutend compliciren würde.

Durch besonders sorgfältige Anordnung könnte man allerdings jene Fehlerquellen reduciren, aber dies schien mir dann aus einem anderen Grunde nicht der Mühe werth zu sein.

Mein Hauptzweck bei diesen Versuchen war nämlich die Untersuchung von verschiedenen Dämpfen in Contact mit Metallflächen gewesen, bei welchen der Temperatursprung wegen ihrer relativ kleinen Weglänge erst bei grösseren Verdünnungen merklich wird, und hiebei konnte ich ein genügendes Dichthalten des Apparates nicht erzielen. Wenn ich es auch durch Anwendung verschiedener Schmiermittel und Kitte erreichen konnte, dass der Apparat hinreichend luftdicht war, so traten doch bald wieder Undichtigkeiten auf, wenn Äther-, Chloroformdämpfe etc. eingeführt wurden, wahrscheinlich desshalb, weil diese Dämpfe die Schmiermittel erweichen.

Ich begnügte mich also mit diesen provisorischen Zahlen, nachdem ich nun eine viel bequemere Methode gefunden habe, die im Folgenden anlässlich der Versuche Schleiermacher's erwähnt werden wird, und welche ich zur Sammlung weiteren Beobachtungsmateriales zu benützen gedenke.

Auf einen Versuch möchte ich aber noch näher eingehen, da er gewissermassen ein experimentum crucis für die hier vertretenen Grundanschauungen bildet.

Wählt man nämlich die Strahlungscoëfficienten σ_1 und σ_2 derart, dass σ_2 klein ist gegenüber σ_1, dieses aber immer noch geringen Einfluss ausübt im Vergleich mit der Wärmeleitung selbst, so muss offenbar die Temperatur von b bei einem gewissen Drucke ein Maximum erreichen. Denn solange die Leitung den grösseren Einfluss hat, wird c mit steigender Verdünnung wachsen, wie in den obigen Versuchen; wenn sie aber — bei grosser Verdünnung — schon sehr klein geworden ist im Vergleich zu σ, so wird c annähernd gleich $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, also auch sehr klein geworden sein, muss also dazwischen einen grössten Werth erreicht haben.

Würde dagegen die Verringerung der Wärmeleitung bei Verdünnung des Gases durch eine Abnahme des Werthes der Leitungsfähigkeit $\varkappa$ hervorgerufen sein, wie früher wohl ziemlich allgemein angenommen wurde, so müsste der Werth von c bei wachsender Verdünnung von Anfang an fortwährend abnehmen.

Bei der Berechnung dieses Falles können wir $\sigma_2 = 0$ setzen, dann verwandelt sich die Formel (2), wenn $a = 0$ gesetzt wird, in

$$A = 1 + d\,\frac{d - \frac{b}{c}}{d-b}\,, \quad B = d^2 .\, \frac{1 - \frac{b}{c}}{b-d}\,. \tag{3}$$

Ein Maximum erreicht dann c für den Werth:

$$2\gamma = -\delta_1 + \sqrt{\frac{\varkappa}{\sigma_1}\,(\delta_2 - \delta_1)}. \tag{4}$$

Um die Bedingungen für diesen Fall angenähert zu realisiren, schwärzte ich die Innenfläche von b und die Aussenfläche von a mit Tusche, während die übrigen Oberflächen vergoldet waren (wobei also die Strahlung sehr gering ist, wie auch aus dem Vergleich der Zahlen für b_{II} für Luft und Wasserstoff hervorgeht) und füllte Wasserstoff ein.

Folgende Tabelle gibt die dabei gemachten Beobachtungen und die daraus nach Formel (1) und (3) berechneten γ an:

$p =$ 64	1·61	0·709	0·295	0·104	0·0084 *mm*	Mittel:
b resp. $c =$ 0·1985	0·2585	0·3151	0·3904	0·4919	0·3899	
$\gamma =$	0·0359	0·0791	0·160	(0·419)	*cm*	
$\gamma p =$	0·0577	0·0560	0·0472	(0·0435)		0·0537

Es tritt also wirklich ein deutliches Maximum von c ein, was unsere Theorie vollkommen bestätigt.

Die Formel (4) gilt eigentlich nicht mehr genau für so grosse Verdünnungen, doch scheint sich der Maximalwerth $c = 0·548$, welcher daraus für $p = 0·067$ *mm* folgen würde, den beobachteten Werthen gut einzufügen.

II. Discussion anderer Experimentaluntersuchungen.

Es wäre auffallend gewesen, wenn in den zahlreichen älteren Experimentaluntersuchungen über Wärmeleitung der Gase sich keine Anhaltspunkte hätten finden lassen, welche auf die bezüglich des Temperatursprunges entwickelten Gesetze hätten schliessen lassen, und es scheint mir daher von Interesse, dieselben von diesem Standpunkte aus näher zu untersuchen.

Schon in der ersten Arbeit von Winkelmann[1] findet man Angaben, die sich diesbezüglich verwerthen lassen; so gibt er für den Betrag des Wärmeflusses $L = v \log e$ zwischen zwei concentrischen Messingcylindern bei einer Dicke der Gasschichte von $R-r = 0\cdot314\,cm$ für Wasserstoff folgende Zahlen an:

$p =$ 750	91·9*	4·7	3·0	1·92 *mm*
$L =$ 294	290*	258	245	216.

Der Werth 290* ist als das normale L_0 aufzufassen, während der erste in Folge der Convectionsströme etwas vermehrt, die übrigen nach unserer Anschauungsweise in Folge des Temperatursprunges vermindert sind.

Da dessen Einfluss einer Vermehrung der Dicke der Gasschichte äquivalent ist, so folgt:

$$\frac{L_0}{L} = \frac{R-r+2\gamma}{R-r}, \quad \text{also} \quad \gamma = \frac{R-r}{2} \frac{L_0-L}{L_0}.$$

Hieraus folgen für γ und die Producte γp die Werthe:

$\gamma =$ 0·0195	0·0288	0·0538 *cm*	
$\gamma p =$ 0·0916	0·0864	0·1003	Mittel: 0·0928.

Somit ergibt sich für γ der Werth $0\cdot000122\,cm.\frac{760}{p}$, welcher mit den von mir für Glas und Nickel gefundenen überraschend gut übereinstimmt. Bei Luft ist dies, des viel kleineren Werthes von γ wegen, schwieriger nachzuweisen; aus der einzigen dazu verwendbaren Angabe würde circa ein Fünftel des obigen Werthes folgen, während er nach meinen Versuchen circa ein Siebentel beträgt.

Bei den Versuchen von Kundt und Warburg[2] über Abkühlung von Thermometern in Glasgefässen war die Abnahme erst bei geringeren Drucken merklich, da die Dimensionen der verwendeten Gefässe relativ gross waren (freier Raum circa $2\cdot5\,cm$), und aus demselben Grunde war die Wirkung

---

[1] Pogg. Ann., 156, S. 497 (1876).

[2] Kundt und Warburg, Pogg. Ann., 156, S. 177 (1875).

der Convectionsströme ziemlich beträchtlich; diese Versuche eignen sich mithin nicht gut zur Berechnung von γ, da die grösseren Verdünnungen nicht mehr gemessen wurden.

Genauere derartige Versuche hat Crookes[1] mit Luft innerhalb der Drucke von 1 *mm* und 2 Milliontel Atmosphären angestellt, und die von ihm erhaltenen Resultate stimmen qualitativ vollkommen mit den meinigen und den sofort zu besprechenden von Brush überein; aber leider lässt sich eine quantitative Berechnung nicht ausführen, da keine Beobachtungen zwischen Atmosphärendruck und 1 *mm* ausgeführt wurden und da die Dimensionen der Apparate nicht angegeben sind.

Crookes äusserte auch bereits die Muthmassung, dass der Grund, warum diese Erscheinungen erst bei niedrigen Drucken auftreten, der sei, dass dann die Grösse der mittleren Weglänge im Verhältniss zu den Gefässdimensionen nicht mehr ganz zu vernachlässigen sei.

Die Arbeit von Brush,[2] die fast gleichzeitig mit der meinigen erschien, dürfte die einzige sein, welche die Untersuchung der hier in Betracht kommenden Erscheinungen von Atmosphärendruck bis zu den grössten Verdünnungen umfasst. Das umfangreiche, mittelst derselben Kundt-Warburg'schen Methode gewonnene Beobachtungsmaterial ist aber nicht in Tabellen, sondern in Form von Curven dargestellt.

Ich habe an anderer Stelle[3] nachgewiesen, dass dasselbe mit der hier vertretenen Theorie bestens übereinstimmt und sogar eine Berechnung von γ auszuführen gestattet, wobei das Product γp innerhalb weiter Druckgrenzen sich als constant erweist. Die aus der graphischen Darstellung berechneten Werthe waren:

$$\text{für Luft} \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma = 0\cdot0000155\, cm. \frac{760}{p}$$

$$\text{für Wasserstoff} \ldots\ldots \gamma = 0\cdot0000724\, cm. \frac{760}{p}.$$

[1] Crookes, Proc. R. S., 31, p. 239 (1881).
[2] Brush, Phil. Mag., 45, p. 31 (1898).
[3] Smoluchowski, Phil. Mag., 46, p. 192 (1898).

wobei zu bemerken ist, dass das Thermometer mit Schellack gefirnisst war, was die Ursache sein mag, dass diese Werthe etwas kleiner sind als die früheren.

Auch insofern sind Brush's Experimente von Interesse, als sie zu bestätigen scheinen, dass bei den allergrössten Verdünnungen die durch das Gas geleitete Wärmemenge dem Drucke desselben proportional ist, wie ich[1] aus der kinetischen Gastheorie gefolgert habe.

Dagegen scheinen mir die theoretischen Speculationen Brush's, namentlich das anlässlich der vermeintlichen Entdeckung des neuen Gases Etherion ausgesprochene Gesetz,[2] dass die relative Wärmeleitungsfähigkeit verschiedener Gase der Moleculargeschwindigkeit derselben proportional ist, vollständig unberechtigt zu sein.

Die Zahlen, durch welche er dieses Gesetz zu begründen sucht, sind nicht etwa den bei höherem Drucke angestellten normalen Beobachtungen entnommen, sondern sind ein Mittel aus dem Intervall von 0 bis 500 Milliontel Atmosphärendruck; er hätte ganz andere Werthe erhalten, wenn er Apparate anderer Dimensionen, oder ein anderes Druckintervall benützt hätte.

Sämmtliche vorerwähnten Untersuchungen sind auf die Messung der Abkühlungsgeschwindigkeit basirt. Ganz verschieden ist die im Folgenden zu besprechende Methode, welche mir für die Erforschung der hier in Betracht kommenden Erscheinungen am besten geeignet zu sein scheint.

Für den Wärmefluss zwischen concentrischen Cylindern habe ich loc. cit. die Formel abgeleitet:

$$L = \frac{2\pi l}{\log \frac{R}{r} + \gamma\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)}$$

und daraus

$$\gamma = \frac{\log \frac{R}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}}\left(\frac{L}{L_0} - 1\right). \tag{5}$$

[1] Diese Berichte, 107, S. 304 (1898).

[2] Science, VIII, p. 490. Was dieses Gas anbelangt, ist es wohl höchst wahrscheinlich, dass dasselbe nur Wasserdampf ist, dessen Druck durch das

Man sieht daraus, dass der Einfluss von γ desto grösser sein wird, je kleiner r ist; er muss also besonders gross sein, wenn an Stelle des Thermometers ein dünner Draht verwendet wird, was bei der Methode, welche das galvanische Glühen von Drähten benützt, der Fall ist. Von der grossen Zahl von diesbezüglichen Untersuchungen sind für unseren Zweck nur wenige verwendbar, am besten wohl jene Schleiermachers.[1]

Dieser fand folgende Werthe für die Wärmemenge, welche von einem 0·405 *mm* dicken Platindrahte an die Wände der 24·2 *mm* weiten, ihn umgebenden Glasröhren geleitet wurde, wenn der Zwischenraum mit Luft erfüllt war:

$p =$	91*	22	5·2	1·2	0·3	(0·07) *mm*
$L =$	2138*	2121	2071	1867	1344	(497).

Die Werthe, welche sich daraus mittelst der Formel für das Product γp ergeben, und die aus dem Mittelwerth rückwärts berechneten L sind:

$p\gamma =$		0·0125	119	124	125	(164) Mittel: 0·0123
$L =$	2138*	2121	2060	1867	1353	(613).

Der letzte Werth fällt etwas heraus, wahrscheinlich in Folge Fehlers in p, da Drucke unter 1 *mm* nicht mehr direct gemessen, sondern nach der Pumpenwirkung geschätzt wurden, die anderen ergeben aber eine treffliche Übereinstimmung; der Mittelwerth ist $\gamma = 0{\cdot}0000163\ cm . \frac{760}{p}$.

Noch bedeutend grösser ist die Veränderlichkeit von L bei Wasserstoff z. B.:

$p =$	214	40	7·0 *mm*
$L =$	1996	1922	1660,

woraus sich, mit den früheren Werthen gut übereinstimmend, $\gamma = 0{\cdot}000132 . \frac{760}{p}$ ergeben würde.

von Brush verwendete Macleod-Manometer nicht angezeigt werden konnte (vergl. Crookes, Chem. News, 78, p. 221, 277; Smoluchowski, Nature, 59, p. 223 (1899).

[1] Schleiermacher, Wied. Ann., 34, S. 623 (1888).

Es war auch schon Eichhorn[1] aufgefallen, dass bei den Schleiermacher'schen Versuchen die Veränderlichkeit der Wärmeleitung mit abnehmendem Druck so gross sei, viel grösser als man den anderen Versuchen zu Folge erwarten konnte, und er glaubte, dass dies auf irgend welchen Fehlerquellen beruhen müsse.

Wenn man dagegen die hier gegebene Theorie berücksichtigt, zeigt sich, dass diese auf den ersten Blick sehr verschiedenen Ergebnisse mit einander in bester Übereinstimmung sind; es folgt aber daraus auch, dass man bei der Anwendung dieser Methoden zur Bestimmung der Wärmeleitung der Gase, deren Temperaturcoëfficient etc. auf die Wirkung des Temperatursprunges Rücksicht nehmen muss, und dass manche der älteren Resultate diesbezüglich zu corrigiren sind.

III. Theoretische Berechnung des Temperatursprunges nach der Maxwell'schen Theorie.

In der vorigen Mittheilung[2] habe ich eine angenäherte theoretische Berechnung des Temperatursprunges auf Grundlage der Clausius'schen Theorie zu geben versucht. Da nun aber, wie ich auch daselbst erwähnte, die vereinfachenden Grundannahmen dieser Theorie in mancher Hinsicht bedenklich erscheinen, ist es wohl von Interesse, diese Verhältnisse auch vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie zu untersuchen, für welche allein bisher die strenge Berechnung der Wärmeleitung durchgeführt worden ist.

Allerdings werden wir auch dabei Vernachlässigungen begehen, indem wir voraussetzen werden, dass der Zustand des Gases bis an die Oberfläche überall gleich ist, so dass die Geschwindigkeitsvertheilung der Moleküle dieselbe ist wie bei gewöhnlicher Wärmeleitung. Auch diese Rechnung wird somit quantitativ nicht genau sein, ebenso wie die entsprechende Rechnung Maxwell's in seiner Abhandlung[3] »On Stresses in Rarefied Gases arising from Inequalities of Temperature«

[1] Eichhorn, Wied. Ann., 40, S. 697 (1890).
[2] Smoluchowski, diese Berichte, 107, S. 304 (1898).
[3] Maxwell, Trans. R. S., 152, p. 231 (1879).

bezüglich des Gleitungscoëfficienten der Gase, was aber für unsere Zwecke nicht in Betracht kommt.

Der Weg, welchen wir hier einschlagen, ist jenem von Maxwell loc. cit. benützten vollkommen analog;[1] auch die Bezeichnungsweise wähle ich möglichst gleich, um mir längere Entwicklungen durch den Hinweis auf die betreffenden Maxwell'schen Formeln zu ersparen; so werden auch die Grössen, welche sich auf Moleküle beziehen, die sich zur festen Wand hinbewegen, mit dem Index 1, jene entgegengesetzter Art mit dem Index 2 versehen.

Wir nehmen an, dass die zur X-Axe senkrechte Oberfläche des festen Körpers so wirke, als ob von derselben der Bruchtheil f vollständig »reflectirend,« dagegen der Rest $1-f$ vollkommen diffus »zerstreuend« wäre. Die Moleküle, welche auf den reflectirenden Theil fallen, werden mit ungeänderter Geschwindigkeit zurückgeworfen, jene welche auf den übrigen Theil der Fläche stossen, sollen absorbirt und dann wieder mit der Geschwindigkeitsvertheilung, welche der Temperatur des festen Körpers entspricht, nach allen Richtungen gleichmässig ausgesendet (zerstreut) werden.

Offenbar müssen nun folgende zwei Sätze gelten:

1. Die Menge der pro Zeiteinheit die Fläche verlassenden Moleküle $\rho_2 \xi_2$ setzt sich zusammen aus den reflectirten $(1-f)\rho_1 \xi_1$ und zerstreuten $f\rho_2' \xi_2'$ Theilen, also:

$$\rho_2 \xi_2 = (f-1)\rho_1 \xi_1 + f\rho_2' \xi_2'. \tag{6}$$

2. Dasselbe gilt bezüglich der hindurchgeführten Energiemenge:

$$\rho_2 \xi_2 c_2^2 = (f-1)\rho_1 \xi_1 c_1^2 + f\rho_2' \xi_2' c_2'^2. \tag{7}$$

Die Ausdrücke $\rho_2 \xi_2$ etc. sind eigentlich Summen über alle Moleküle der Volumeinheit, z. B.:

$$\rho_2 \xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int d\eta\, d\zeta \int_0^{\infty} \xi f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi,$$

wobei $f(\xi, \eta, \zeta)$ die Anzahl der Moleküle bedeutet, deren Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ sind, welche nach Maxwell gleich einem Ausdruck (22 jener Abhandlung):

[1] Eine vereinfachte Ableitung: Prace mat. fiz., X, p. 34 (1899, Warschau).

$$f = N\Big[1+\sqrt{2h}\,(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)+2h\Big(\frac{\alpha^2}{2}\xi^2+\alpha\beta\xi\eta+\ \ldots\Big)+$$

$$+(2h)^{3/2}\Big(\frac{\alpha^3}{6}\xi^3+\frac{\alpha^2\beta}{2}\xi^2\eta+\alpha\beta\gamma\,\xi\eta\zeta+\ldots\Big)\Big]\Big(\frac{h}{\pi}\Big)^{3/2}e^{-h(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} \quad (8)$$

gesetzt werden kann. Dabei bedeuten α^2, $\alpha\beta$ etc. nicht Potenzen, respective Producte von α, β etc., sondern eigene Constanten.

Führt man die Integrationen[1] aus, wobei zu bemerken ist, dass die Integrale nach ξ bei den Molekülen 1 zwischen $-\infty$ und 0, bei den Molekülen 2 zwischen 0 und $+\infty$ auszuführen sind, so erhält man, wenn zugleich die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 0\\ \alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2 &= -2\alpha\end{aligned}\right\}\ \text{Maxwell's Gleichungen (25) und (27)}$$

berücksichtigt werden:

$$\rho\xi = \pm\frac{1}{2\sqrt{\pi h}}\Big[1+\frac{\alpha^2}{2}\Big]N$$

$$\rho\xi c^2 = \Big[\pm\frac{1}{h\sqrt{\pi h}}-\frac{\alpha\sqrt{2}}{4h\sqrt{h}}\pm\frac{3\alpha^2}{4h\sqrt{\pi h}}\Big]N,$$

wo das obere Zeichen für 2 und das untere für 1 gilt.

Die Grösse α^2 ist bei ruhendem Gase und linearem Temperaturgefälle $= 0$; für die »zerstreuten« Moleküle ist auch $\alpha = 0$. Führt man diese Grössen in die Gleichungen (6) und (7) ein und berücksichtigt, dass $\frac{1}{2h} = R\Theta$, $\frac{1}{2h'} = R\vartheta$, wo ϑ die Temperatur der Wand, R die Constante des Gases bedeutet, so erhält man:

$$fN\Theta^{1/2} = fN'\vartheta^{1/2}$$

$$N\Theta^{1/2}\Big[f-\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(2-f)\Big] = N'f\vartheta^{1/2}$$

---

[1] Die Rechnung wird erleichtert, wenn man anstatt h im Exponenten von e vorerst eine andere Constante k setzt und dann $\rho\xi$ berechnet, da man dann $\rho\xi c^2$ einfach durch Differentiation dieses Ausdruckes nach k erhält; hinterdrein wird wieder $k = h$ gesetzt.

und daraus durch Elimination von N':

$$\Theta - \vartheta = \frac{2-f}{f} \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \Theta. \tag{9}$$

Für α hat man:

$$\alpha = -\frac{\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2}{2} = \frac{15}{4} \frac{\mu}{p} \left(\frac{R}{\Theta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial\Theta}{\partial x}$$ (Maxwell'sche Gleichung 51),

somit:

$$\Theta - \vartheta = \frac{2-f}{f} \frac{15}{16} \sqrt{2\pi} \frac{\mu}{\sqrt{p\rho}} \frac{\partial\Theta}{\partial x}. \tag{10}$$

Um diese Gleichung leichter zu interpretiren, wollen wir noch die mittlere Weglänge $\lambda = \frac{\mu\pi\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{p\rho}}$ nach Meyer (oder auch $\lambda = \frac{3\sqrt{2\pi}\,\mu}{4\sqrt{p\rho}}$ nach Clausius) einführen, obwohl wir da eigentlich nicht ganz consequent verfahren, da in der Maxwell'schen Theorie keine mittlere Weglänge vorkommt. Hierdurch erhalten wir:

$$\Theta - \vartheta = \frac{15}{4\pi} \frac{2-f}{f} \lambda \frac{\partial\Theta}{\partial x}; \text{ also: } \gamma = \frac{15}{4\pi} \frac{2-f}{f} \lambda. \tag{11}$$

Diese Formel wird mit der von mir nach Clausius abgeleiteten

$$\gamma = \left[0\cdot70 + \frac{4\beta}{3(1-\beta)}\right]\lambda$$

vollständig analog, nämlich

$$\gamma = \frac{15}{4\pi}\left(1 + \frac{2\beta}{1-\beta}\right)\lambda, \tag{12}$$

wenn $1-f=\beta$ gesetzt wird, und unterscheidet sich nur dadurch, dass sie etwas grössere Zahlencoëfficienten enthält; es bleiben somit auch nach dieser Theorie alle Folgerungen, die ich loc. cit. an die Form dieser Gleichung geknüpft habe, giltig.

Die numerischen Coëfficienten würden uns erst interessiren, wenn die Grösse von β selbst in Betracht käme.

Es scheint mir ziemlich merkwürdig, dass zu Folge den in den ersten zwei Abschnitten angeführten Zahlen der Coëfficient γ, also auch β, relativ wenig von der Natur des festen Körpers abhängt, mit welchem das Gas in Berührung steht.

Freilich weiss man nicht, inwieweit die Oberfläche desselben durch Oxydschichten, Wasserhaut, absorbirte Gasschichten etc. modificirt sein mag; letztere würden vielleicht sogar eine gewisse Abhängigkeit von β von dem Gasdruck hervorrufen können; aus einem reichhaltigeren Versuchsmaterial werden sich, umgekehrt, Folgerungen bezüglich jener Verhältnisse ableiten lassen.

II. SITZUNG VOM 12. JÄNNER 1899.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt ein Exemplar der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1899, Cap. IX. »Ministerium für Cultus und Unterricht«, Abtheilung *A*, *B* und *C*.

Die Société mathématique de France in Paris übersendet eine Einladung zu dem im Jahre 1900 zu Paris tagenden internationalen mathematischen Congresse.

Das w. M. Herr Prof. F. Becke in Wien überreicht einen Bericht über den Fortgang der Arbeiten zur petrographischen Durchforschung der Centralkette der Ostalpen.

Herr Dr. Berthold Cohn in Wien überreicht eine Abhandlung, welche den Titel führt: »Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1853 I«.

Herr Dr. Victor Hammerschlag legt eine im physiologischen Institut der Wiener Universität ausgeführte Untersuchung vor, betitelt: »Über die Reflexbewegung des Musculus tensor tympani und ihre centralen Bahnen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Mazelle E., Meteorologia ed Oceanografia. Con autorizzazione ed a spese dell' eccelso R. Ung. Ministerio del Commercio e per incarico dell' inclita direzione della R. Ung. Accademia Nautica di Fiume. Con 77 figure intercalate nel testo e 2 grandi carte. Fiume, 1898; 8°.

Dufet H. Recueil de données numériques, publié par la société française de physique. Optique. Ier fasc. Paris 1898; 8°.

III. SITZUNG VOM 19. JÄNNER 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. I, Heft VII (Juli 1898) und Abth. II. b, Heft VII (Juli 1898). — Denkschriften, Bd. 66, II. Abth. (1898).

Der Vorsitzende, Herr Präsident E. Suess, gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 18. Jänner l. J. erfolgte Ableben ihres w. M. Herrn Hofrath Professor Dr. Karl Claus erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der prov. Secretär legt das im Auftrage Sr. k. und k. Hoheit des Durchlauchtigsten Herrn Erherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Druckwerk »Alboran« vor.

Das k. und k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine-Section) übermittelt die für die akademischen Denkschriften bestimmten wissenschaftlichen Arbeiten über die von den k. und k. See-Officieren während der Reise in das Rothe Meer 1897/98 angestellten Beobachtungen.

Das Elaborat besteht aus folgenden Abtheilungen:

I. »Zeit- und Orts-Bestimmungen«, von k. und k. Linienschiffs-Lieutenant Karl Koss.

II. »Relative Schwerebestimmungen«, von k. und k. Linienschiffs-Lieutenant Anton Edlen von Triulzi.

III. »Magnetische Beobachtungen«, von k. und k. Linienschiffs-Fähnrich Karl Rössler.

Die Bearbeitung des beschreibenden Theiles ist bereits dem Abschlusse nahe

Herr E. Kittl übersendet folgenden vorläufigen Bericht über die im Spätsommer 1898 mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften unternommene Bereisung des westlichen Bosnien und des nördlichen Theiles der Hercegovina.

Herr Prof. Dr. Karl Fritsch legt eine Abhandlung vor unter dem Titel: »Beitrag zur Flora von Constantinopel. Bearbeitung der von J. Nemetz in den Jahren 1894 bis 1897 in den Umgebungen von Constantinopel gesammelten Pflanzen. Erster Theil: Kryptogamen«. (Mit einer Farbentafel.)

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

IV. SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1899.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung.

Die Stadtvorstehung Korneuburg übersendet eine von der Stadtgemeinde Korneuburg anlässlich des 50jährigen Regierungsjubiläums Seiner k. und k. Apostolischen Majestät und des 600jährigen Stadtjubiläums geprägte silberne Erinnerungsmedaille.

Herr Heinrich Friese in Innsbruck dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Herausgabe des V. Bandes seines Werkes: »Die Bienen Europas«.

Herr Prof. Dr. Vincenz Hilber in Graz spricht seinen Dank für die ihm zur Fortsetzung seiner geologischen Arbeiten in Nordgriechenland bewilligte Subvention aus.

Der prov. Secretär legt eine von Herrn Günther Enderlein in Leipzig eingesendete Abhandlung vor, welche den Titel führt: »Die Respirationsorgane der Gastriden.«

Der prov. Secretär legt ferner folgende eingelaufene Abhandlungen vor:

1. »Über die Oktaëderlage und die Ikosaëderlage von zwei cubischen Raumcurven«, von Prof. Dr. Gustav Kohn in Wien.
2. »Chemische Untersuchung eines antiken Wasserleitungskittes«, Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz von Friedrich Dörner.

3. »Über färbende Bestandtheile des Amethysten, Citrines und gebrannten Amethysten«, Arbeit aus dem III. chemischen Universitätslaboratorium in Wien von Arnold Nabl.
4. »Über ein neues Spiegelmetall«, von Dr. Ludwig Mach, d. Z. in Jena, und dessen »Optische Untersuchung« von Dr. Victor Schumann in Leipzig.

Das c. M. Herr Director Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des cand. phil. A. Jakowatz, betitelt: »Die Arten der Gattung *Gentiana*, Sect. *Thylacites* Ren. und ihr entwicklungsgeschichtlicher Zusammenhang«.

Der Obmann der Erdbeben-Commission, w. M. Herr Obergrath E. v. Mojsisovics, legt die Beobachtungen vor, welche Se. Hochwürden Herr P. Fr. Schwab, Director der Stiftssternwarte zu Kremsmünster, an den von der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in der Sternwarte zu Kremsmünster aufgestellten Seismographen bisher, insbesondere aber am 22. Jänner 1899, zu machen Gelegenheit hatte.

Hiezu bemerkt Herr Oberbergrath v. Mojsisovics, dass die Erdbeben-Commission auf seinen Antrag beschlossen hat, die Leiter der vier Seismometerstationen zu ersuchen, allmonatlich (in besonderen Fällen sofort) einen Bericht über die Beobachtungen an den Apparaten einzusenden, welcher im akademischen Anzeiger veröffentlicht werden wird.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht folgende Arbeiten:

1. »Zur Grösse der Molekel«, von Prof. Dr. G. Jäger in Wien.
2. »Die magnetische Susceptibilität des Wassers«, von Prof. Dr. G. Jäger und Dr. St. Meyer in Wien.
3. »Über die Dissociation der Gase bei constantem Druck und bei Überschuss eines der Dissociationsproducte«, von Dr. Rud. Wegscheider in Wien.
4. »Über die Dissociation des Wasserstoffmethyläthers«, ebenfalls von Dr. Rud. Wegscheider.

Das w. M. Herr Obersanitätsrath A. Weichselbaum überreicht eine Arbeit aus dem pathologisch-anatomischen Institute in Wien, betitelt: »Über die bactericide Wirkung des Blutes bei Infectionen«, von Dr. G. Pierallini.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Eine asymptotische Aufgabe«.

Das w. M. Herr Prof. G. v. Escherich legt das 2. Heft des I. Bandes von Theil I. der mit Unterstützung der cartellirten Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Statistisches Jahrbuch der Stadt Wien für das Jahr 1896, 14. Jahrgang. Bearbeitet von Dr. Stephan Sedlaczek, Magistratsrath, Dr. Wilhelm Löwy, Magistratssecretär und Dr. Wilhelm Hecke, Magistratsconcipist. Wien, 1898; 8°.

Carte géologique internationale de l'Europe, Livraison III contenant les feuilles *A* III, *A* IV, *B* III, *B* IV, *C* V, *D* V, *D* VI. Berlin, Dietrich Reimer, 1898. Gr. 4°.

P. Angel Rodriguez de Prada. Pubblicazioni della Specola Vaticana. Fascic. I (1891), Fascic. II (1891), Fascic. III (1893), Roma. Volume IV (1894), Torino. Volume V (1898) Roma. Gr. 8°.

K. k. Handelsministerium: Annuario Marittimo per l'anno 1899, compilato per cura dell' I. R. Governo Marittimo in Trieste. XLIX annuata. Trieste, 1899. 8°.

Philippi Georg: Landwirthschaftliches und Etwas für Alle. Selbstverlag, Berlin, 1898. 8°.

Eine asymptotische Aufgabe

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Ich habe gezeigt,[1] dass das Nichtverschwinden der unendlichen Reihen, welche in Dirichlet's Beweis für das Vorkommen unendlich vieler Primzahlen in einer gegebenen arithmetischen Reihe $Mx+N$ auftreten und nur reelle Glieder enthalten, mit einfachen Mitteln ohne Inanspruchnahme des quadratischen Reciprocitätssatzes und der Theorie der binären quadratischen Formen bewiesen werden kann. In dem Folgenden soll ein noch einfacherer Beweis der fraglichen Eigenschaft mitgetheilt werden.

Es werde nach Kronecker ein vollständiges System primitiver Wurzeln $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ für den Modul M aufgestellt, welche beziehungsweise zu den Exponenten $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu$ nach M gehören mögen, und es seien $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$ beliebige reelle Wurzeln der Gleichungen

$$x^{\tau_1} = 1 \quad x^{\tau_2} = 1 \ldots x^{\tau_\nu} = 1,$$

wobei jedoch die Wurzelcombination

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_\nu = 1$$

auszuschliessen ist. Setzt man dann für jede zu M theilerfremde Zahl n

$$c_n = \omega_1^{\operatorname{ind}_1 n} \omega_2^{\operatorname{ind}_2 n} \ldots \omega_\nu^{\operatorname{ind}_\nu n},$$

[1] Über das Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen mit reellen Gliedern. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV.

Über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält. Diese Sitzungsberichte, Bd. CVI.

wo

$$n \equiv g_1^{\mathrm{ind}_1 n} g_2^{\mathrm{ind}_2 n} \ldots g_\nu^{\mathrm{ind}_\nu n}, \qquad (\mathrm{mod}\ M)$$

und für Zahlen n, welche nicht zu M theilerfremd sind,

$$c_n = 0,$$

so handelt es sich um den Beweis, dass die Reihe

$$L = c_1 + \frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{3} c_3 + \ldots$$

von Null verschieden ist.

1.

Es sei, über alle Theiler δ von n erstreckt,

$$f(n) = \Sigma c_\delta.$$

Für zwei theilerfremde Zahlen m, n ist dann der Gleichung $c_\alpha c_\beta = c_{\alpha\beta}$ zufolge

$$f(mn) = f(m) f(n)$$

und für eine Primzahlpotenz p^π

$$f(p^\pi) = c_1 + c_p + (c_p)^2 + \ldots + (c_p)^\pi.$$

Je nachdem also c_p den Werth 1, -1, 0 hat, ist $f(p^\pi) = \pi+1, \frac{1+(-1)^\pi}{2}, 0$. Die Zahl $f(m)$ kann hienach nie negativ sein und für jede Quadratzahl m^2 insbesondere ist

$$f(m^2) \geqq 1.$$

Dies vorausgeschickt, sei

$$\Theta(n) = 2(n-1) f(1) + 2(n-2) f(2) + 2(n-3) f(3) + \ldots \\ \ldots + 2(n-n) f(n).$$

Ordnet man $\Theta(n)$ nach den in $f(1)$, $f(2)$, $f(3), \ldots$ vorkommenden Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$, so ergibt sich bei c_k der Coëfficient

$$C_k = 2(n-k) + 2(n-2k) + \ldots + 2(n - n_k k)$$
$$= 2nn_k - kn_k^2 - kn_k,$$

wo n_k die grösste in $\frac{n}{k}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Es ist aber, wenn

$$n = kn_k + r_k$$

gesetzt wird,

$$C_k = \frac{1}{k} n^2 - n + r_k - \frac{1}{k} r_k^2$$

und es wird

$$\begin{aligned} \Theta(n) &= \Sigma c_k C_k \\ &= n^2 \Sigma \frac{1}{k} c_k - n \Sigma c_k + \Sigma c_k r_k - \Sigma \frac{1}{k} c_k r_k^2 \\ &\qquad k = 1, 2, 3, \ldots n. \end{aligned}$$

Bezeichnet man eine Grösse, deren absoluter Betrag die Grenze G nicht übersteigt, kurz mit $|G|$, so ist

$$c_a + c_{a+1} + \ldots + c_b = \left| \frac{1}{2} \varphi M \right|$$

und daher

$$\begin{aligned} L - \Sigma \frac{1}{k} c_k &= \frac{c_{n+1}}{n+1} + \frac{c_{n+2}}{n+2} + \ldots \\ &= \left| \frac{1}{2} \frac{\varphi M}{n+1} \right| = \frac{1}{n^2} \left| \frac{1}{2} n \varphi M \right| \\ \Sigma \frac{1}{k} c_k &= L + \frac{1}{n^2} \left| \frac{1}{2} n \varphi M \right| \\ -n \Sigma c_k &= \left| \frac{1}{2} n \varphi M \right|. \end{aligned}$$

Um die weiteren Summen abzuschätzen, sei g die grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene ganze Zahl und man setze

$$\Sigma c_k r_k = \sum_{1}^{n_g} c_k r_k + \sum_{1+n_g}^{n_{g-1}} c_k r_k + \sum_{1+n_{g-1}}^{n_{g-2}} c_k r_k + \ldots + \sum_{1+n_2}^{n} c_k r_k$$

$$\Sigma \frac{1}{k} c_k r_k^2 = \sum_{1}^{n_g} \frac{1}{k} c_k r_k^2 + \sum_{1+n_g}^{n_{g-1}} \frac{1}{k} c_k r_k^2 + \ldots + \sum_{1+n_2}^{n} \frac{1}{k} c_k r_k^2.$$

Hierin ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\sum_1^{n_g} c_k r_k \leqq \sum_1^{n_g} (k-1) = \frac{1}{2} n_g(n_g-1)$$

$$\leqq \frac{1}{2}(g+2)(g+1)$$

$$\leqq \frac{1}{2}(n+3\sqrt{n}+2)$$

$$\sum_1^{n_g} \frac{1}{k} c_k r_k^2 \leqq \sum_1^{n_g} (k-1)$$

$$\leqq \frac{1}{2}(n+3\sqrt{n}+2).$$

Bezeichnet ferner s eine der Zahlen $g, g-1, \ldots 2$, so hat n_k von $k = 1 + n_s$ bis $k = n_{s-1}$ denselben Werth $s-1$, und die Werthe von r_k bilden demzufolge eine abnehmende Reihe; daher ist

$$\sum_{1+n_s}^{n_{s-1}} c_k r_k \leqq \frac{1}{2} \varphi(M) r_{1+n_s} \leqq \frac{1}{2} \varphi(M) n_s$$

$$= \left[\frac{n\varphi M}{2s}\right]$$

und aus demselben Grunde

$$\sum_{1+n_s}^{n_{s-1}} \frac{1}{k} c_k r_k \leqq \frac{1}{2} \varphi(M) \frac{r_{1+n_s}^2}{1+n_s} < \frac{1}{2} \varphi(M) n_s$$

$$= \left[\frac{n\varphi M}{2s}\right].$$

Hieraus folgt

$$\sum_{1+n_g}^{n_{g-1}} c_k r_k + \sum_{1+n_{g-1}}^{n_{g-2}} c_k r_k + \ldots \leqq \frac{n\varphi M}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{g}\right)$$

$$< \frac{n\varphi(M)}{2} \log g$$

$$< \frac{n\varphi M}{4} \log n$$

$$\sum_{1+n_g}^{n_{g-1}} c_k r_k + \sum_{1+n_{g-1}}^{n_{g-2}} c_k r_k + \ldots < \frac{n\varphi M}{4} \log n$$

und man hat

$$\Sigma c_k r_k - \Sigma \frac{1}{k} c_k r_k^2 = \left| n + 3\sqrt{n} + 2 + \frac{1}{2}\varphi(M) n \log n \right|.$$

Hienach ergibt sich für $\Theta(n)$ der asymptotische Ausdruck

$$\Theta(n) = Ln^2 + \left[n(1+\varphi M) + 3\sqrt{n} + 2 + \frac{1}{2}\varphi(M) n \log n \right|.$$

Anderseits ist

$$\Theta(n) \geqq 2(n-1)f(1) + 2(n-2^2)f(2^2) + \ldots + 2(n-g^2)f(g^2)$$

$$\geqq 2(n-1) + 2(n-2^2) + \ldots + 2(n-g^2)$$

$$\geqq 2ng - \frac{1}{3} g(g+1)(2g+1).$$

Man hat also

$$Ln^2 + (1+\varphi M)n + 3\sqrt{n} + 2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi(M) n \log n \geqq 2ng - \frac{1}{3} g(g+1)(2g+1).$$

Wird $n = (2+\varphi M)^4$ genommen und

$$\frac{1}{2} \log (2+\varphi M)^4 = \log (2+\varphi M)^2$$

durch die grössere Zahl $2+\varphi M$ ersetzt, so ergibt sich

$$L(2+\varphi M)^8+(1+\varphi M)(2+\varphi M)^4+3(2+\varphi M)^2+$$
$$+2+\varphi(M)(2+\varphi M)^5$$
$$>\frac{4}{3}(2+\varphi M)^6-(2+\varphi M)^4-\frac{1}{3}(2+\varphi M)^2$$

oder

$$L(2+\varphi M)^8>\frac{1}{3}(2+\varphi M)^6+(2+\varphi M)^5-\frac{1}{3}10(2+\varphi M)^2-2.$$

Umsomehr ist also

$$L(2+\varphi M)^8>\frac{1}{3}(2+\varphi M)^6$$

und daher

$$L>\frac{1}{3(2+\varphi M)^2}.$$

Berghöhenbestimmung auf Grund des Prager photographischen Mond-Atlas

von

Prof. Dr. **L. Weinek,**

Director der k. k. Sternwarte in Prag.

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Jänner 1899.)

Der von mir seit April 1893 in Angriff genommene und im December 1897 zur Veröffentlichung gelangte photographische Mond-Atlas[1] beruht im Wesentlichen auf focalen Original-Negativen der Lick-Sternwarte (Mt. Hamilton, Californien) und der Pariser Sternwarte, deren einzelne Partien auf rein photographischem Wege nahezu 24-mal vergrössert wurden. Bislang sind vier Hefte mit je 20 Tafeln erschienen, welche die abgebildeten Mondgegenden in doppelter und entgegengesetzter Beleuchtung d. i. mit östlichem (I. Lunationshälfte) und westlichem (II. Lunationshälfte) Schattenwurfe zur Darstellung bringen, während das ganze Werk zunächst aus 10 Heften mit zusammen 200 Tafeln und einem kurzen Begleittexte bestehen soll. Letzterer wird den speciellen Maassstab einer jeden Tafel und zwar den Durchmesser (D) der Vergrösserung in Millimetern, sowie den Werth eines Millimeters derselben (μ) in Kilometern anführen, so dass auf den Atlasblättern auch Messungen bewerkstelligt werden können. Überdies wird noch für den Ort und die Aufnahmezeit eines jeden Negatives das Complement der selenographischen Länge der Sonne

[1] »Photographischer Mond-Atlas, vornehmlich auf Grund von focalen Negativen der Lick-Sternwarte im Maassstabe eines Monddurchmessers von 10 Fuss«, ausgeführt von Prof. Ladislaus Weinek, Ph. Dr., Sc. Dr., Director der k. k. Sternwarte in Prag. Verlag von Carl Bellmann in Prag.

(Colongitude[1] $= c_{\odot} = 90° - \lambda_{\odot}$), die selenographische Breite der Sonne ($\beta_{\odot}$), die topocentrische Libration in Länge und Breite, der scheinbare (mit Parallaxe behaftete) dunkle Mondhalbmesser in Bogensecunden (s') und der Positionswinkel der Mondaxe (P) gegeben werden.

Es soll nun gezeigt werden, dass diese Atlastafeln sehr geeignet erscheinen, aus den Schattenlängen der Mondberge deren Höhen zu finden, dass diese Bestimmung auf Grund der Daten $c_{\odot}$ und $\beta_{\odot}$ eine relativ einfache ist und dass es

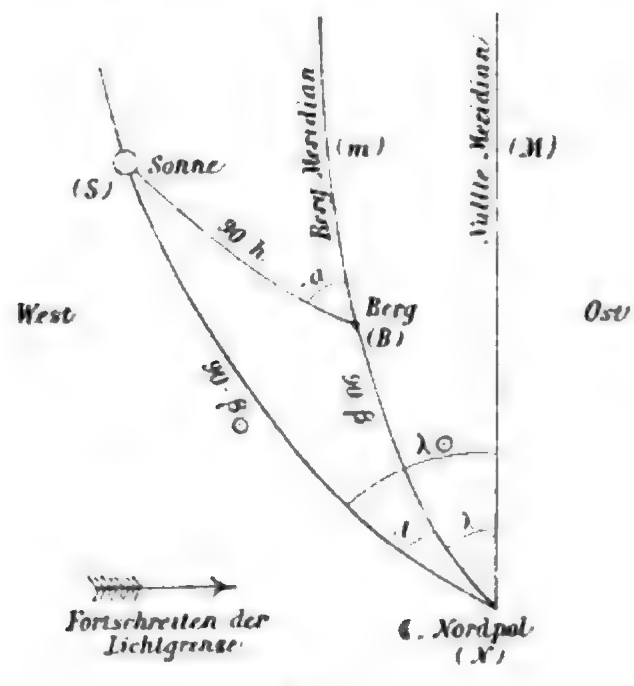


Fig. 1.

recht wünschenswerth wäre, durch zahlreiche Ermittlungen dieser Art die wenig sicheren Resultate der früheren Selenographen zu controliren, beziehungsweise zu verbessern und zu ergänzen.

Ermitteln wir vorerst aus $c_{\odot}$ und $\beta_{\odot}$ die Winkelhöhe h und das Azimut a der Sonne für den fraglichen Berg, dessen selenographische Länge λ (positiv nach West) und Breite β (positiv nach Nord) aus Beer-Mädler's »Mappa Selenographica«, respective aus dem sich darauf beziehenden Begleitwerke »Der Mond« (Berlin 1837) entnommen werden.

In Fig. 1, welche die Verhältnisse im umkehrenden astronomischen Fernrohre darstellt, sei B der Berg, S die Sonne,

[1] Conform zu A. Marth's Ephemeriden für physikalische Beobachtungen des Mondes in »Monthly Notices of the Royal Astronomical Society«.

gesehen vom Mondmittelpunkte aus, und N der Nordpol des Mondäquators. Da $\beta_{\odot}$ als selenographische Breite der Sonne nichts anderes als die selenocentrische Declination derselben in Bezug auf den Mondäquator ist, so folgt $SN = 90° - \beta_{\odot}$. Ferner ist, weil NBm den Meridian des Berges kennzeichnet, $BN = 90° - \beta$, endlich SB = Abstand der Sonne von der Zenithlinie des Berges $= 90° - h$. Verstehen wir noch unter NM den 0ten Meridian, d. i. jenen, welcher bei mittlerer Libration das Centrum der Mondscheibe passirt, so ist $\sphericalangle MNS = \lambda_{\odot}$, $\sphericalangle MNB = \lambda$ und, wenn dem Fortschreiten der Lichtgrenze von West nach Ost (hier von links nach rechts) Rechnung getragen wird, $\sphericalangle mNS = -t$, wobei t den Stundenwinkel der Sonne mit Bezug auf den Bergmeridian bezeichnet und derselbe vor diesem negativ, nach diesem positiv gezählt wird. Analog hierzu ist $\sphericalangle mBS = -a$.

Die Auflösung des sphärischen Dreieckes NBS ergibt nun,

weil $$-t = \lambda_{\odot} - \lambda = 90° - (c_{\odot} + \lambda) \text{ ist:}$$

$$\sin h = \sin \beta \sin \beta_{\odot} + \cos \beta \cos \beta_{\odot} \sin (c_{\odot} + \lambda). \qquad (1) \quad \text{Sonnenhöhe}$$

woraus die Höhe der Sonne über dem Berghorizonte gefunden wird. Für die Lichtgrenze des Mondes steht die Sonne im Horizonte. Es ist deshalb für alle Orte derselben $h = 0$, somit aus (1):

$$0 = \sin \beta \sin \beta_{\odot} + \cos \beta \cos \beta_{\odot} \sin (c_{\odot} + \lambda)$$

und $$\sin (c_{\odot} + \lambda) = -\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta_{\odot}. \qquad (2)$$

Diese Formel gibt die Länge λ der Lichtgrenze als Function von β, d. i. von der Lage des betreffenden Breitenparallels, für welchen sie gesucht wird. Wird diese für den Mondäquator gewünscht, so ist $\beta = 0$ zu setzen, und man hat wegen $\sin (c_{\odot} + \lambda) = 0$: $c_{\odot} + \lambda = 0°$ oder $180°$, folglich

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= -c_{\odot} && \text{I. Lunationshälfte.} \\ &= 180° - c_{\odot} && \text{II. Lunationshälfte.} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Diese Grösse ist es, welche auf der rechten Kopfseite eines jeden Atlasblattes angeführt erscheint, um die Phase des Mondes zu charakterisiren.

Um das Azimut der Sonne a zu finden, welches in diesem Falle nur für die Ermittlung der Lage des Bergprofils zum Bergmeridian in Betracht käme, folgt aus demselben sphärischen Dreiecke:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos h \sin a = -\cos(c_\odot+\lambda) \cos\beta_\odot \\ \cos h \cos a = -\cos\beta \sin\beta_\odot + \sin\beta \cos\beta_\odot \sin(c_\odot+\lambda), \end{array}\right\}$$

daher

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\cos\beta \operatorname{tg}\beta_\odot}{\cos(c_\odot+\lambda)} - \sin\beta \operatorname{tg}(c_\odot+\lambda). \qquad (4) \text{ Sonnenazimut}$$

Die Formeln (1) und (4) können noch für die logarithmische Rechnung geeigneter gestaltet werden. Aus (1) ist

$$\sin h = \sin\beta_\odot [\sin\beta + \cos\beta \operatorname{cotg}\beta_\odot \sin(c_\odot+\lambda)],$$

und führt man die Hilfsgrösse G gemäss

$$\operatorname{tg} G = \operatorname{cotg}\beta_\odot \sin(c_\odot+\lambda) \qquad (5)$$

ein, so resultirt

$$\sin h = \frac{\sin\beta_\odot \sin(G+\beta)}{\cos G}, \qquad (6) \text{ Sonnenhöhe}$$

ferner aus (4)

$$\operatorname{cotg} a = \operatorname{tg}(c_\odot+\lambda) \left[-\sin\beta + \cos\beta \frac{\operatorname{tg}\beta_\odot}{\sin(c_\odot+\lambda)} \right],$$

$$= \operatorname{tg}(c_\odot+\lambda) [-\sin\beta + \cos\beta \operatorname{cotg} G],$$

somit

$$\operatorname{cotg} a = \operatorname{tg}(c_\odot+\lambda) \cdot \frac{\cos(G+\beta)}{\sin G}. \qquad (7) \text{ Sonnenazimut}$$

Nachdem auf solche Weise aus (1) oder (6) die Winkelhöhe der Sonne h gefunden worden, gehen wir an die Bestimmung der Berghöhe H aus seiner, auf der vergrösserten Photographie in der Richtung des Sonnenstandes gemessenen, Schattenlänge l_0. Als Erläuterung diene hierzu Fig. 2.

AC wäre der grösste Kreis an der Mondoberfläche, in welchen der Schattenwurf der Bergspitze B fällt. Von B gesehen stünde die Sonne in ⊙, die Erde in ♁. Da in der

Zeichnung im ebenen Dreieck ☉B♁ der Winkel an B grösser als 90° genommen wurde, so entspricht dieselbe demjenigen Falle, wo die Mondscheibe weniger als zur Hälfte beleuchtet erscheint, d. i. der Phase vom Neumond bis zum ersten Viertel oder vom

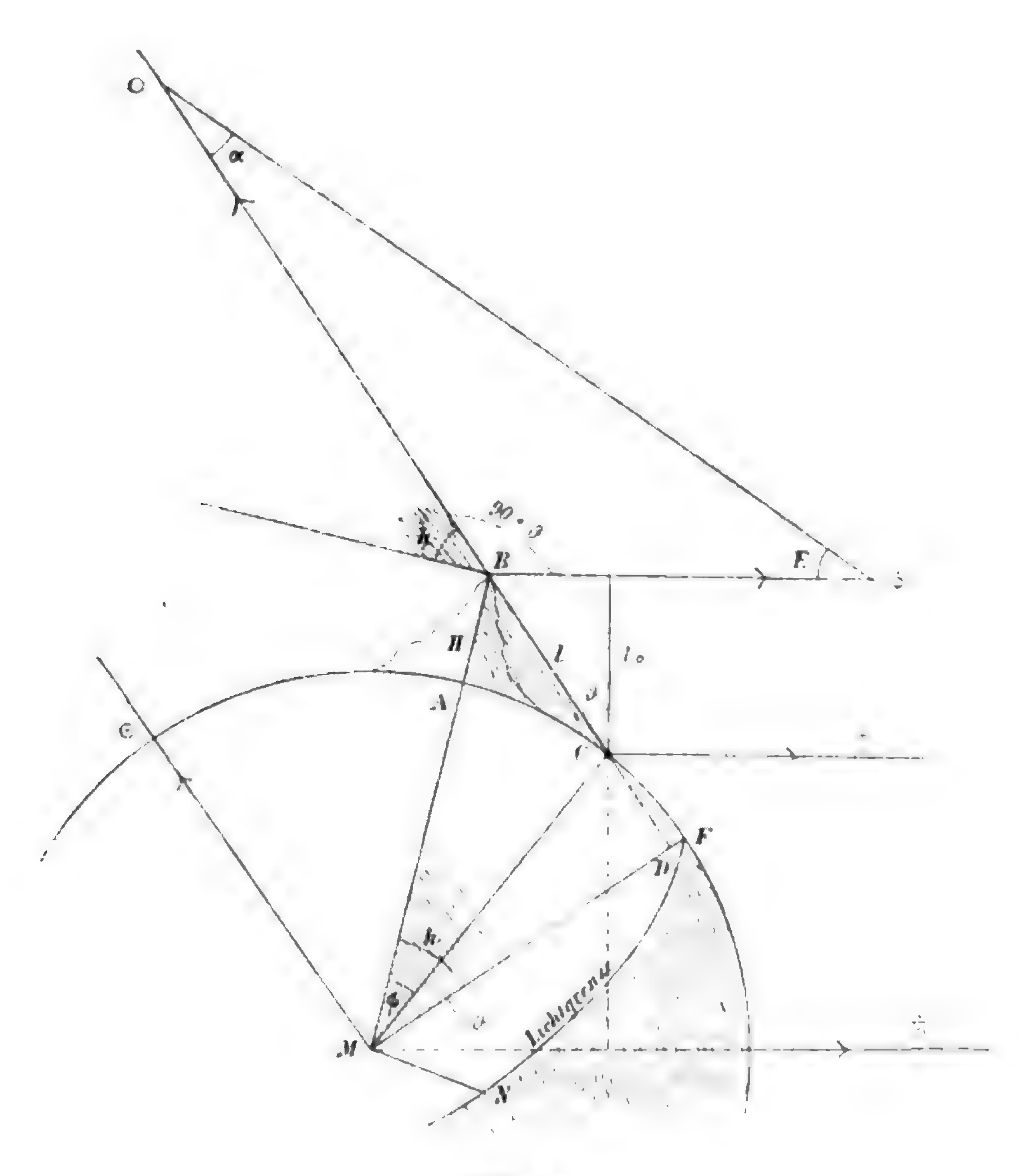


Fig. 2.

letzten Viertel bis zum Neumond. Indem der Bergschatten $BC = l$ von der Erde aus in der Richtung B♁ betrachtet wird, erscheint dieser verkürzt als l_0, und es ist die erste Aufgabe, aus der gemessenen Grösse l_0 die Länge l zu finden, wozu der Winkel ϑ benöthigt wird. Da C♁ in der Ebene ☉B♁ gelegen ist, folgt aus letzterem Dreiecke:

$$\sphericalangle B = 90° + \vartheta = 180° - (E + \alpha),$$
$$\vartheta = 90° - (E + \alpha),$$

wenn E der Elongationswinkel an der Erde zwischen Mondberg und Sonne, α der Elongationswinkel an der Sonne zwischen Mondberg und Erde ist. Naturgemäss ist α sehr klein, da die Richtungen ☉♁ und ☉B wegen der grossen Entfernung der Sonne von Erde und Mond nahezu parallel zu einander sind. Bei E wäre eigentlich der Oberflächenort der Erde, an welchem die photographische Aufnahme geschehen ist, zu denken. Doch genügt es für die Ermittlung von E und den beabsichtigten Zweck, ♁ mit dem Erdmittelpunkt und B mit dem Mondmittelpunkt zu identificiren. Ähnlich braucht auch für α nur ein genäherter Werth abgeleitet zu werden. Mit Bezug auf die Ermittlung von ϑ ist noch der zweite Fall zu berühren, wo der Winkel an B im △☉B♁ kleiner als 90° ist, also für die Erde die Mondscheibe mehr als zur Hälfte beleuchtet erscheint. Derselbe ist in Fig. 3 dargestellt. Jetzt ist für ϑ der Winkel an der Bergspitze B zu nehmen und insoferne

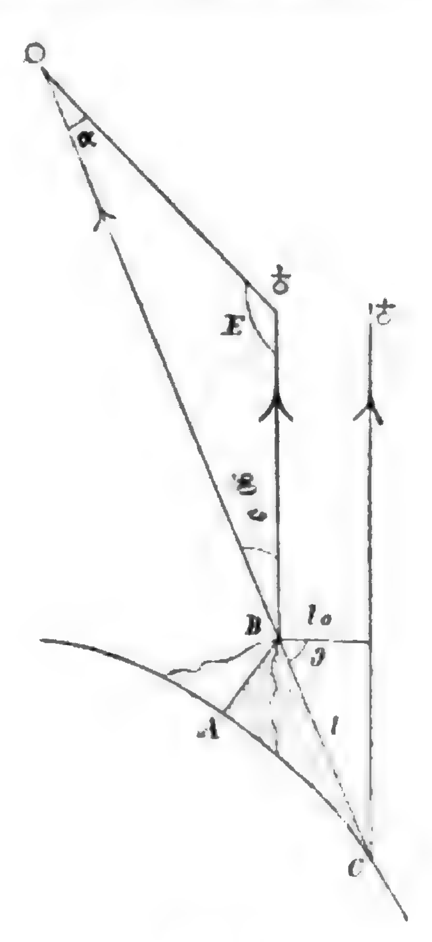


Fig. 3.

folgt $\sphericalangle$☉B♁ $= 90° - \vartheta$, woraus $\vartheta = E + \alpha - 90°$ resultirt. Wir haben deshalb für die Berechnung von ϑ die Doppelgleichung

$$\vartheta = \pm 90° \mp (E + \alpha), \tag{8}$$

worin die oberen Zeichen für weniger als halbe Beleuchtung der Mondscheibe, die unteren für mehr als halbe Beleuchtung gelten. Hiermit ergibt sich dann

$$l = l_0 \sec \vartheta. \tag{9}$$

Die Grösse E erhält man sofort aus Fig. 4, worin ♈ den Frühlingsnachtgleichenpunkt, $\odot$ die geocentrische Länge der Sonne, ☾ die geocentrische Länge des Mondes und $\beta_☾$ die geocentrische Breite desselben bezüglich der Ekliptik darstellt. Es ist nämlich

$$\cos E = \cos \beta_☾ \cos (☾ - \odot). \tag{10}$$

Um α zu finden, folgt aus dem ebenen Dreiecke $\odot B$♁ (Fig. 2):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin E} = \frac{B♁}{B\odot}.$$

Nennt man die Horizontalparallaxe der Sonne π, jene des Mondes p und erlaubt sich, für B♁ ... ☾♁ oder auch ☾T

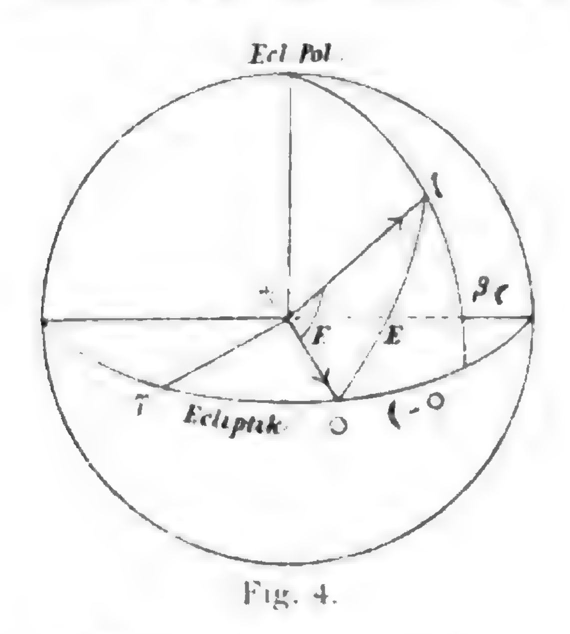


Fig. 4.

(Fig. 5), ebenso für $B\odot$ ... ☾$\odot$ und schliesslich wegen der relativen Nähe des Mondes zur Erde und der grossen Entfernung

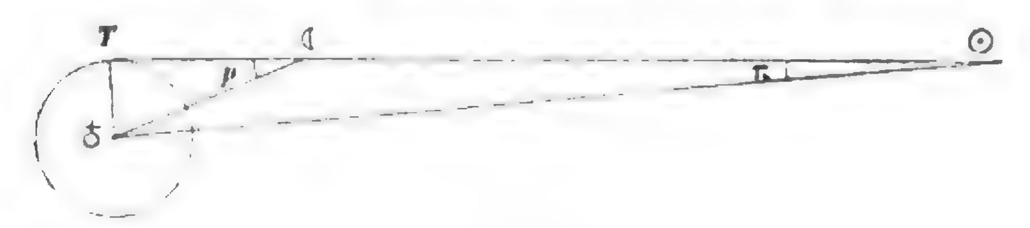


Fig. 5.

nung der Sonne von Erde und Mond für ☾$\odot$ ... $T\odot$ zu setzen, so ist

$$\frac{\sin \alpha}{\sin E} = \frac{T☾}{T\odot} = \frac{T♁ \operatorname{cotg} p}{T♁ \operatorname{cotg} \pi} = \frac{\operatorname{tg} \pi}{\operatorname{tg} p}$$

und wegen der Kleinheit von π:

$$\alpha = \frac{\pi}{\operatorname{tg} p} \sin E, \tag{11}$$

eine Näherungsformel, welche für den vorliegenden **Fall** als ausreichend genau betrachtet werden darf.

Kehren wir nun wieder zu Fig. 2 zurück. Nennen wir den Winkel am Mondcentrum, welcher dem Bogen AC entspricht, ψ und ziehen wir MF senkrecht zu BC, so geben die Dreiecke MDB, MDC und MCB sofort die gewünschte Berghöhe H. Zum Verständniss der Figur sei nur noch erwähnt, dass die Ebene $\odot B \male$ allgemein nicht mit der Ebene ABC zusammenfällt. Dies findet bloss statt, wenn der Berg im Beleuchtungsäquator, d. i. in einer Ebene durch den Mondmittelpunkt, welche parallel zu $\odot B \male$ liegt, sich befindet. Liegt hingegen der Berg in der Nähe des Beleuchtungspoles N, so wird die Ebene $\odot B \male$ nahe senkrecht zur Ebene ABC stehen. Aus bemerktem Grunde schneidet $M\male$ nicht die Peripherie des grössten Kreises AC, während dies für $M\odot$ der Fall ist. $M\male$ ist hinter der Ebene BMD, $M\odot$ in dieser Ebene zu denken. Es ist:

$$MD = (MA + H) \cos h,$$

folglich

$$H = \frac{MD}{\cos h} - MA,$$

aber $MD = MC \cos(h - \psi) = MA \cos(h - \psi)$, daher

$$H = \left[\frac{\cos(h - \psi)}{\cos h} - 1\right] MA. \tag{12}$$

Dies ist dieselbe Formel, welche in Beer-Mädler's »Der Mond«, S. 92, gegeben wird, mit dem Unterschiede, dass dort für $H \ldots h$, für $h \ldots \varphi$ steht und der Mondradius $MA = 1$ gesetzt ist.

Der für (12) benöthigte Winkel ψ berechnet sich aus der Näherungsform

$$AC = MA \sin \psi = l \cos h,$$

$$\sin \psi = \frac{l}{MA} \cos h. \tag{13}$$

Kann der Winkel ψ als klein angenommen und $\cos\psi = 1$ gesetzt werden, so geht (12) über in:

$$H = \left[\cos\psi + \sin h \frac{\sin\psi}{\cos h} - 1\right] MA = \sin h \frac{\sin\psi}{\cos h} MA$$

und wegen (13):

$$H = l \sin h, \tag{14}$$

wie natürlich, wenn AC als geradlinig und senkrecht zu AB betrachtet werden darf.

Es wird noch zu untersuchen sein, in welchem Betrage ein Fehler dl_0 in der gemessenen Länge l_0 auf die Höhe H übergeht. Durch Differentiation von (9) und (13) erhält man:

$$dl = dl_0 \sec\vartheta, \qquad \cos\psi\, d\psi = \frac{\cos h}{MA}\, dl_0 \sec\vartheta$$

und aus (12)

$$dH = MA \frac{\sin(h-\psi)}{\cos h} d\psi =$$

$$= MA \frac{\sin(h-\psi)}{\cos h} \cdot \frac{\cos h}{MA} dl_0 \sec\vartheta \frac{1}{\cos\psi},$$

somit:

$$dH = \frac{\sin(h-\psi)}{\cos\psi \cos\vartheta} dl_0 \tag{15}$$

oder genähert, wenn $\cos\psi = 1$ gesetzt und das Glied mit $\sin\psi . dl_0$ als ein Glied von Kleinheit zweiter Ordnung vernachlässigt wird:

$$dH = \frac{\sin h}{\cos\vartheta} dl_0. \tag{16}$$

Die Zusammenstellung der hier in Betracht kommenden Formeln lautet sonach in der Reihenfolge der zu berechnenden Grössen:

$$\left\{\begin{array}{rcll}
\sin h & = & \sin\beta \sin\beta_{\odot} + \cos\beta \cos\beta_{\odot} \sin(c_{\odot} + \lambda) & (1) \\
\cos E & = & \cos\beta_{☾} \cos(☾ - \odot) & (10) \\
\alpha & = & \pi \sin E \operatorname{cotg} p & (11) \\
\vartheta & = & \pm 90^\circ \mp (E + \alpha) & (8)
\end{array}\right|$$

$$\left\{\begin{array}{ll} l = l_0 \sec \vartheta & (9) \\ \sin \psi = \dfrac{2l}{D} \cos h & (13) \\ H = a_{☾} [\cos(h-\psi) \sec h - 1] & (12) \\ dH = \sin(h-\psi) \sec \psi \sec \vartheta \, dl_0 & (15) \end{array}\right\}$$

Hierin ist, wenn l_0 in Millimetern gemessen wird, auch D in Millimetern zu verwenden. Das Zeichen von ϑ kommt in diesem Falle nicht in Betracht, da nur cos ϑ gebraucht wird. $a_{☾}$ ist der Mondhalbmesser in Metern, wenn H in diesem Maasse gewünscht wird. Mit F. Peters' dunklem Mondhalbmesser $s_0 = 15' 32''59$ (»Astronom. Nachr.« Nr. 3297) und Hansen's Mondparallaxe $p_0 = 57' 2''27$ für mittlere Mondentfernung von der Erde, sowie mit Bessel's Äquatorealhalbmesser der Erde folgt in Kilometern:

$$a_{☾} = 1737 \cdot 9544 \, km, \quad \log a_{☾} = 3 \cdot 2400384.$$

Da in der Formel für H das Product $\cos(h-\psi) \sec h$ wegen der Kleinheit von ψ wenig von der Einheit verschieden ist, wird es zweckmässig sein, diese Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen auszuführen. Dasselbe wird sich auch für die Ermittlung von h empfehlen, sobald die Position des Berges genau genug bekannt und die Sonnenhöhe sehr klein, also der Bergschatten sehr lang ist. Wie aus (15) ersichtlich, gewinnt in letzterem Falle die Bestimmung von H an Genauigkeit, ebenso dann, wenn ϑ sich dem Werthe Null nähert, also die Visurlinie des Beobachters nahezu senkrecht zur Schattenhypothenuse l liegt.

Es werde noch Einiges über die Ermittlung von D in Millimetern für die einzelnen Tafeln meines Atlas gesagt. Bei der photographischen Vergrösserung der zahlreichen focalen Lick-Negative, welche für den Atlas zur Verwendung gelangten, wurde eine constante Distanz der Vergrösserungsebene vom Originale eingehalten, und zwar derart, dass dieselbe einer nahezu 24-maligen Linearvergrösserung im Bilde entsprach. Später wurde durch die photographische Vergrösserung eines Halbmillimeternetzes auf Glas unter völlig gleichen Verhältnissen dieser Vergrösserungsfactor empirisch zu 23·766

ermittelt. Da nun die focalen Lick-Negative je nach der Entfernung des Mondes von der Erde zur Zeit der Aufnahme die verschiedensten Monddurchmesser zeigen und der erwähnte Vergrösserungsfactor stets derselbe blieb, muss jedes Negativ einen anderen vergrösserten Monddurchmesser D ergeben. Bei der relativ geringen Anzahl von Pariser Negativen, welche mir zur Verfügung standen, erfolgte hingegen von Platte zu Platte nach sorgfältigster Ausmessung des speciellen focalen Monddurchmessers eine stetige Modification des Vergrösserungsfactors in dem Sinne, dass in jedem Falle das Resultat einen constanten vergrösserten Monddurchmesser von 4 m ergab, welcher schliesslich durch das bemerkte photographische Experiment etwas kleiner und zwar $D = 3\cdot961001$ m gefunden wurde. Für die Lick-Vergrösserungen ist also D von Negativ zu Negativ variabel, für die Pariser dagegen constant. Für letztere hat man daher durchwegs $D = 3961\cdot001$ mm und $\log D = 3\cdot5978049$, ferner als Werth eines Millimeters in der Vergrösserungsebene $\mu = 0\cdot877533$ km und $\log \mu = 9\cdot9432635$ anzunehmen. — Was anderseits die Lick-Vergrösserungen betrifft, so kann vorerst für die mittlere geocentrische Mondentfernung Δ_0 der focale Monddurchmesser d_0 für den 36-zölligen Lick-Refractor berechnet werden. Wird die photographische Brennweite desselben zu $570\cdot2$ Inches $= 14\cdot48295$ m[1] und der helle Winkelhalbmesser des Mondes s_0, welcher bei photographischen Aufnahmen in Betracht zu ziehen ist, nach Hansen für $\Delta_0 = 384391\cdot86$ km zu $15' 34''\!.09$ angenommen, so folgt $d_0 = 13\cdot11757$ cm, welcher Werth je nach der Mondentfernung auf $12\cdot44$ cm herab- und bis $13\cdot88$ cm hinaufgehen kann. Der mittlere vergrösserte Monddurchmesser ergibt sich dann in Anwendung des Vergrösserungsfactors $23\cdot766$ zu $D_0 = 3\cdot117522$ m, der Werth eines Millimeters der photographischen Vergrösserung zu $\mu_0 = 1\cdot114959$ km; ferner resultirt $D_{\text{Min.}} = 2\cdot96$, $D_{\text{Max.}} = 3\cdot30$ m. Heisst nun die Entfernung des Mondes zur Aufnahmezeit des Mt. Hamilton von diesem Orte Δ', der vergrösserte Monddurchmesser in Milli-

[1] Vide: »Astronomische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag in den Jahren 1888, 1889, 1890 und 1891« S. 58 (Prag, 1893) und »Publications of the Lick Observatory« Vol. III, p. 1 (Sacramento, 1894).

metern D, der Werth von 1 *mm* der Vergrösserungsebene in Kilometern μ, während diese Grössen für $\Delta' = \Delta_0$ lauten: D_0 und μ_0, so bestehen die Beziehungen: $D = D_0 \frac{\Delta_0}{\Delta'}$, $\mu = \mu_0 \frac{\Delta'}{\Delta_0}$ und wegen $\Delta' = \frac{a_☾}{\sin s'}$, wobei s' sich auf s_0 zu stützen hat:

$$D = D_0 \frac{\Delta_0}{a_☾} \sin s', \qquad \mu = \mu_0 \frac{a_☾}{\Delta_0} \operatorname{cosec} s'$$

oder, wenn die Factoren von $\sin s'$ und $\operatorname{cosec} s'$ durch ihre Logarithmen gegeben werden:

$$\left\{\begin{array}{ll} D = [5\cdot8385454] \sin s' & \text{in Millimetern} \\ \mu = [0\cdot7025230] \operatorname{cosec} s' & \text{in Metern.} \end{array}\right\}$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass für $s' = s_0 \ldots D = D_0$, $\mu = \mu_0$ wird und dass $D.\mu = 2a_☾$ in Metern sein muss. Ist also s' gegeben, so können D und μ für jede Lick-Vergrösserung des Atlas leicht berechnet werden.

Im Anschluss an die voranstehenden theoretischen Erörterungen folge nun die Messung der Schattenlänge des Berges Pico, südlich von Plato, auf den Atlas-Tafeln Nr. 7 und Nr. 8. Erstere ist eine Vergrösserung nach einem Pariser Negativ und zeigt östlichen Schattenwurf, letztere ist eine Vergrösserung nach einer Lick-Aufnahme und besitzt westlichen Schattenwurf. Es wurde gerade dieser Berg für die Messung gewählt, weil Mädler, l. c. S. 266, von dieser Mondgegend bemerkt: »Hier sind die Höhenmessungen leicht und sicher; Anfang und Ende des Schattens können bei einiger Aufmerksamkeit nicht wohl um 1″ fehlerhaft gemessen werden und die freie Ebene bildet eine schöne Basis«, also den bezüglichen optischen Resultaten grosses Gewicht beilegt und auch die Position des Berges verhältnissmässig genau zu $\lambda = -9° 12' 21''$ und $\beta = +45° 28' 7''$ (aus 10 Messungen) angibt. Auf Nr. 7 wurde l_0 in der Richtung des Sonnenstandes, welche s e h r s o r g f ä l t i g festzustellen ist und nahe zur Bergmitte, wo der Schattenwurf am längsten erschien, zu 14·5 bis 15·0 *mm*, auf Nr. 8 zu 10·0 bis 10·5 *mm* gemessen. Zur Controle wurden gleichzeitig die betreffenden vergrösserten Glas-Diapositive, deren Zeichnung naturgemäss

etwas feiner als jene der Reproductionen ist, zu Rathe gezogen. Möglicherweise sind diese Werthe l_0 aus den am Schlusse angeführten Gründen zu klein gemessen, wofür jedoch kaum ein höherer Betrag als 0·5 *mm* zu veranschlagen wäre. — Die Rechnung ergibt für Nr. 7 und $l_0 = 14 \cdot 75$ *mm*, ferner für Nr. 8 und $l_0 = 10 \cdot 25$ *mm* bei Benützung des Greenwicher »Nautical Almanac« das auf nachstehender Tabelle (siehe die nächste Seite) Folgende.

Die Unsicherheit in H für $dl_0 = 0 \cdot 5$ *mm* ist bei Nr. 7 kleiner als bei Nr. 8, ebensowohl, weil im ersten Falle der Maassstab des Blattes grösser, als auch, weil für die Pariser Aufnahme die Sonnenhöhe h kleiner ist.

Vergleichen wir diese Resultate von H mit jenen, welche die bekannten namhaften Selenographen Schröter, Mädler und Schmidt durch directe Messungen der Schattenlänge am Fernrohr erhalten haben. Schröter führt in seinen »Selenotopographischen Fragmenten« 1791, I. Theil, S. 95, 349 und 350, drei Bestimmungen an, und zwar $H = 1478$ und 1550 Toisen nach Ost, ferner $H = 1470$ Toisen nach West (1 Toise $=$ 1·949 *m*). Mädler hat l. c. S. 99, 103 und 115, ebenfalls drei Messungen: $H = 1104$ und 1104 (dasselbe) Toisen nach Ost, ferner $H = 1019$ Toisen nach West. Endlich gibt Schmidt in »Charte der Gebirge des Mondes«, Berlin 1878, S. 240 und 241, 28 Bestimmungen nach Ost und 9 Bestimmungen nach West. Erstere verbindet er mit den angeführten zwei analogen Messungen von Schröter und den beiden von Mädler zu dem Mittelwerthe 1203 Toisen $=$ 2345 *m* nach Ost, letztere mit je einer Bestimmung von Schröter und Mädler zu 1175 Toisen $=$ 2290 *m* nach West. — Beachtet man, dass bei den Schmidt'schen wiederholten Messungen nach Osten der kleinste Werth $=$ 1032 Toisen, der grösste Werth 1649 Toisen, bei jenen nach Westen der kleinste Werth $=$ 845 Toisen, der grösste Werth $=$ 1405 Toisen ist, so folgt im ersten Falle eine Maximaldifferenz in H von 617 Toisen $=$ 1203 *m*, im zweiten Falle eine solche von 560 Toisen $=$ 1091 *m*, so dass auch die Schmidt'schen mehrfachen Bestimmungen ein noch recht unsicheres Resultat ergeben und keineswegs überzeugend nachweisen, dass die Berghöhe nach Osten grösser als nach Westen sei.

Tafel	Negativ	$l_\odot$	β.	s'	h
Nr. 7	Paris 1895, März 5, 7h 54m1 M. Z. Paris (I)	23°04	−0″21	979″8	9° 30′11
Nr. 8	L. O. 1895, October 9, 16h 20m 2s0—2s5 P. s. t. (II) ..	172·34	−0·91	956·0	11 4·60

Tafel	☾	β☾	p	☉	π	E	α	ϑ
Nr. 7	91° 36′ 9″7	+5° 12′ 51″6	58′ 57″8	345° 0′ 35″4	8″91	106° 31′33	0° 8′30	16° 39′63
Nr. 8	93 14 24·6	+4 51 32·3	57 31·6	196 56 41·1	8·86	103 39·25	0 8·57	13 47·82

Tafel	log D (Millimeter)	log μ (Meter)	ξ	H (Meter)	dH (Meter) für $dl_0 = 0·5$ *mm*
Nr. 7	3·5978049	2·9432635	0° 26′ 21″51	2179·22 nach Ost	72·14
Nr. 8	3·5045766	3·0364918	0 22 17·07	2169·31 nach West	104·02

4*

d. h. dass der östliche Mondboden eine tiefere Lage als der westliche habe, wie dies Mädler aus seinen drei Bestimmungen annehmen zu können glaubt. Dies schien auch Schmidt zu empfinden, da er schliesslich für die Berghöhe das Mittel beider Werthe (nach Ost und West) = 1189 Toisen = 2317 *m* ansetzte. Thuen wir das gleiche bei den Mädler'schen und bei den photographischen Werthen, so ist

$$H = 2069\,m \quad \text{Mädler}$$
$$= 2174\,m \quad \text{Weinek}$$
$$= 2317\,m \quad \text{Schmidt,}^{1}$$

woraus die Brauchbarkeit der Atlas-Resultate ohneweiters hervorgeht, so dass in Anbetracht der grossen Unsicherheit, welche den bisherigen optischen Bestimmungen anhaftet, eine ausgiebige Verwerthung des Prager photographischen Mond-Atlas in der hier dargestellten Richtung als sehr empfehlenswerth bezeichnet werden muss. — Wenn Mädler die Sicherheit für die Schattenlängenmessung bei Pico gleich einer Bogensecunde setzt, so würde diese auf der Vergrösserung Nr. 7 einem Betrag von 2·12 *mm* gleichkommen. Eine so grosse Unsicherheit, welcher ein $dH = 306\,m$ entsprechen würde, dürfte bei der photographischen Abmessung von l_0 kaum anzunehmen sein, obwohl in dieser Beziehung einige Fehlerquellen, welche die photographische Aufnahme im Focus und deren nachträgliche Vergrösserung mit sich bringt, nicht ausseracht zulassen sind. Dieselben haben ihren Ursprung vornehmlich in der Verschwommenheit der photographischen Schattengrenze, insbesondere dort, wo diese an helle Berg-, beziehungsweise Wallpartien anschliesst. Wird die erwähnte Unbestimmtheit nur der Luftunruhe zugeschrieben, insoferne als die Trennungslinie zwischen hellem Bergkamme und schwarzem Schatten während der Dauer der Exposition hin- und herschwankt, so wäre die Mitte der Verwaschenheit als Ausgangspunkt für die Messung l_0 zu nehmen. Bei der photographischen Aufnahme wirken aber noch die Diffraction und die sogenannte Solarisation (Lichthofbildung) mit, welch' letztere darin besteht, dass helle Partien

[1] Combinirt mit Schröter und Mädler.

sich in die dunklen hinein ausbreiten, und zwar desto mehr, je greller der Contrast an der Trennungsstelle und je länger die Dauer der Exposition ist (vergl. Cornu's Methode in »Comptes Rendus«, Bd. CX, p. 551, um solche Lichthöfe, soweit dieselben von Reflexionen des hellen Lichtes an den Rückseiten der Glasplatten herrühren, zu vermeiden). Günstiger Weise wirken die Verhältnisse bei der focalen Mondaufnahme, wo der abzubildende Berg hell und der Schatten schwarz ist, und bei der photographischen Vergrösserung, welche nach einem Negative geschieht und wo der Berg schwarz, der Schatten hell erscheint, einander entgegen, wenn auch nicht gesagt werden kann, dass sie sich völlig ausgleichen. Im ersten Falle wird der helle Bergrand in den Schatten hineinverschoben, wobei die kurze Exposition günstig, das sehr helle Licht des Berges ungünstig erscheint. Im zweiten Falle erfolgt eine Ausbreitung des hellen Negativ-Schattens nach zwei Seiten hin, wobei die von mir angewandte matte Beleuchtung des Negatives günstig, die lange Expositionszeit minder günstig wirkt. Vielleicht könnte es der ersteren, den Originalaufnahmen anhaftenden Solarisationserscheinung zugeschrieben werden, dass der photographische Werth für H kleiner als der von Schröter und Schmidt gefundene resultirt, wobei noch in Erwägung zu ziehen ist, dass Schmidt l. c. S. 241 seinen Mittelwerth von $H = 2317\ m$ für noch zu klein hält, indem er wörtlich bemerkt: »Indessen zweifle ich nicht, dass der Berg ansehnlich höher sei; aber nur selten wird die feine Schattenspitze deutlich erkannt«.

Da die Ausmessung der Bergschattenlängen l_0 auf den Prager Atlas-Blättern nur einen einfachen Millimeter-Maassstab erfordert und die Berechnung der Berghöhen H, sobald einmal der Winkel ϑ für die betreffende Platte ermittelt worden (derselbe soll gleichfalls in dem Atlas-Texte gegeben werden), bloss geringe Mühe verursacht, da anderseits die dargelegte photographische Methode, wie gezeigt, zu werthvollen Resultaten führt, ist zu wünschen, dass der Prager photographische Mond-Atlas in möglichst umfassender Weise auch für die Erkenntniss des Reliefs der Mondoberfläche ausgenützt werden möge.

Zur Grösse der Molekel

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger**.

Die Frage, ob ein Zusammenhang besteht zwischen der elektrolytischen Leitfähigkeit von Lösungen und deren innerer Reibung, ist zu wiederholten Malen schon untersucht worden, und am auffälligsten ist wohl der Gang der Leitfähigkeit verdünnter wässeriger Lösungen mit der Temperatur, welcher fast vollständig mit dem Gang der inneren Reibung des Wassers zusammenfällt. Es ist dies in ausführlichster Weise durch Herrn F. Kohlrausch nachgewiesen worden.[1] Wir dürften deshalb wohl nicht besonders fehlgehen, wenn wir den elektrolytischen Leitungswiderstand einer Lösung lediglich durch den mechanischen Widerstand erklären, welchen die Ionen bei ihrer Wanderung durch die Lösung erfahren. Betrachten wir ferner die Ionen als Raumgebilde, deren drei Dimensionen nicht sehr von einander abweichen, so dürften wir den Reibungswiderstand, welchen sie bei ihrer Bewegung finden, in erster Annäherung darstellen können durch den Widerstand, den eine Kugel bei constanter Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit erfährt. Dieser ist gegeben durch die Formel[2]

$$W = 6\pi\eta c R, \qquad \ldots 1)$$

wobei η den Reibungscoëfficienten der Flüssigkeit, c die Geschwindigkeit und R den Radius der Kugel bedeutet. Die Kraft, welche die Kugel in constanter Geschwindigkeit erhält, leistet daher in der Zeiteinheit die Arbeit

$$a = 6\pi\eta c^2 R.$$

[1] Wied. Ann., 6, S. 193.

[2] Siehe G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik (3. Aufl.), S. 380 (1883).

Übertragen wir dies nun auf einen Elektrolyten, für welchen wir annehmen wollen, dass Anion und Kation dieselbe Geschwindigkeit c besitzen — wie es in Wirklichkeit thatsächlich vorkommt —, und es seien in der Volumseinheit der Lösung N Molekeln gelöster Substanz vorhanden, so ist die Arbeit, welche die elektromotorische Kraft bei deren Transport leistet,

$$A = 12 N \pi \eta c^2 R.$$

Sobald nämlich die Geschwindigkeiten der Ionen gleich sind, müssen nach Formel 1) auch deren Radien gleich sein, da ja auf beide Ionen dieselbe Kraft wirkt. Die Arbeit, welche bei diesem Vorgang die elektromotorische Kraft leistet, ist nichts Anderes als die im Leiter entwickelte Wärmemenge. Diese Arbeit kann in Folge dessen auch ausgedrückt werden durch

$$A = wi^2,$$

wenn w den Leitungswiderstand eines Cubikcentimeters Lösung vom Querschnitt eines Quadratcentimeters und i die Stromstärke bedeutet, die wir also durch $\frac{e}{w}$ ersetzen können, woraus nach leicht zu erkennender Reduction resultirt:

$$NR = \frac{e^2}{12 w \pi \eta c^2}. \qquad \ldots 2)$$

Wir setzen nun voraus, in der Volumseinheit der Lösung sei eine Gramm-Molekel des Elektrolyten gelöst. Ist daher M sein Moleculargewicht, so ist dies gleichzeitig die Zahl der in der Volumseinheit gelösten Gramme; wenn ferner ρ die Dichte des Elektrolyten im festen (tropfbar flüssigen) Zustande bedeutet, und wenn wir annehmen, dass die kugelförmigen Molekeln in diesem Zustande möglichst nahe an einander liegen, so wird das Volumen der N gelösten Molekeln angenähert sein:

$$\frac{4\pi R^3}{3} N = \frac{M}{\rho},$$

woraus folgt

$$NR^3 = \frac{3M}{4\pi\rho}. \qquad \ldots 3)$$

Dividiren wir Gleichung 3) durch 2), so ergibt dies

$$R^2 = \frac{9 w \eta c^2 M}{\rho e^2};$$

für den Durchmesser $d = 2R$ erhalten wir somit:

$$d = \frac{6c}{e} \sqrt{\frac{w \eta M}{\rho}}.$$

Da alle Grössen auf der rechten Seite dieser Gleichung der Messung zugänglich sind, so ergibt sie uns demnach die Grösse der Molekeln der wandernden Ionen.

Beträgt das Potentialgefälle auf 1 *cm* ein Volt, so erhalten wir für die Geschwindigkeit des Kaliums 0·00052 *cm*, für die des Chlors 0·00053 *cm*;[1] in dem Chlorkalium KCl haben wir somit einen Elektrolyten, für welchen die Geschwindigkeit des Anions gleich jener des Kations gesetzt werden kann, so dass wir die Beobachtungen an diesem Salz zur Auswerthung unserer Formel benützen können. Wir wollen also $c = 0·00053$ und die elektromotorische Kraft $e = 10^8$ ($= 1\,V$) schreiben; der Reibungscoëfficient des Wassers bei 18° C. ist 0·0107;[2] für die Dichte ρ des Chlors wollen wir die grösste Dichte, welche bei flüssigem Chlor beobachtet wurde, einsetzen; dieselbe beträgt $\rho = 1·66$.[2] Für den Widerstand w können wir auch den reciproken Werth des molecularen Leitvermögens des Chlors einführen, welches nach dem Obigen die Hälfte des molecularen Leitvermögens Λ des KCl ist; dies ergibt, auf absolutes Maass umgerechnet, $w = \frac{1}{\Lambda} = \frac{10^5}{1·08\lambda}$, wobei $\lambda = \frac{975}{2\,.\,10^8}$ anzunehmen ist. Die moleculare Leitfähigkeit Λ ist dabei gerechnet für eine Lösung von einer Gramm-Molekel KCl in einem Liter Wasser; im Cubikcentimeter haben wir daher die Menge $M = \frac{35·5}{1000}$ Gramm-Molekeln. Führen wir die hier gegebenen Zahlen in die Formel ein, so ergibt dies

$$d = 66\,.\,10^{-9}\,cm.$$

[1] F. Kohlrausch, l. c., S. 206.

[2] S. Landolt und Bornstein, physikalisch-chemische Tabellen.

Vergleichen wir damit den durch die kinetische Gastheorie gefundenen Werth, welcher für Chlor $d = 96 . 10^{-9}$ cm[1] beträgt, so finden wir bezüglich der Grössenordnung eine ausgezeichnete Übereinstimmung.

Es bestätigt sich somit die schon von Herrn F. Kohlrausch aufgestellte Ansicht, »dass die Annahme, der elektrolytische Widerstand sei eine Grösse von der Ordnung des capillaren Widerstandes«,[2] auf Moleculargrössen von der gleichen Ordnung führt, wie die anderen Ableitungen dieser Grösse.

---

[1] O. E. Meyer, Gastheorie, S. 226.

[2] l. c., S. 210.

Über die Oktaëderlage und die Ikosaëderlage von zwei cubischen Raumcurven

von

Gustav Kohn in Wien.

Den zahlreichen Anwendungen, welche die endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik gefunden haben, soll im Folgenden eine neue auf dem Gebiete der Geometrie hinzugefügt werden.

Es handelt sich um zweierlei besondere Lagenbeziehungen, welche zwei cubische Raumcurven gegen einander aufweisen können. Jedesmal ist die Beziehung dadurch definirt, dass es eine gewisse Gruppe von Collineationen des Raumes gibt, welche jede der beiden cubischen Raumcurven in sich selbst überführt. Das eine Mal soll die Gruppe der Collineationen so geartet sein, dass sie zwischen den Elementen einer jeden von den beiden Curven die Projectivitäten einer Oktaëdergruppe, das andere Mal so, dass sie die Projectivitäten einer Ikosaëdergruppe hervorruft.

Diese beiden Lagenbeziehungen, die ich als Oktaëderlage und Ikosaëderlage der zwei cubischen Raumcurven bezeichne, sind von einer solchen Fülle von geometrischen Beziehungen zwischen den beiden Curven begleitet, dass es mir geboten scheint, an dieser Stelle nur über die Ergebnisse meiner Untersuchungen zu berichten, ihre ausführliche Herleitung aber einer anderen Publication vorzubehalten.

Die Oktaëderlage.

1. Die Oktaëderlage von zwei cubischen Raumcurven C und C' ist schon oben definirt. Um den Sinn dieser Definition

besser hervortreten zu lassen, fügen wir die folgende Bemerkung hinzu.

Durch die Annahme der 24 Projectivitäten einer Oktaëdergruppe zwischen den Elementen einer cubischen Raumcurve C ist die Gruppe der 24 Collineationen des Raumes bestimmt, welche diese Projectivitäten auf C hervorrufen. Bei diesen 24 Collineationen geht neben C noch eine und nur eine zweite cubische Raumcurve C' in sich selbst über, und auch diese erleidet die Projectivitäten einer Oktaëdergruppe.

Für die Lagenbeziehung der beiden Curven C und C' besitzen diejenigen Systeme von Elementen (Punkten, Ebenen, Tangenten) auf jeder Curve eine besondere Bedeutung, welche weniger als 24 Elemente umfassen und doch bei allen 24 Projectivitäten der Oktaëdergruppe, welche die Curve erfährt, in sich transformirt werden, nämlich die »Oktaëdersechs«, die »Würfelacht« und die »Kantenmittenzwölf«.[1]

2. Die Tangenten der Oktaëdersechs auf den beiden Curven C und C' sind dieselben sechs geraden Linien.

Zwei cubische Raumcurven mit sechs gemeinsamen Tangenten befinden sich stets in Oktaëderlage, und diese Tangenten bilden auf jeder der beiden Curven eine Oktaëdersechs, d. h. sie zerfallen in drei Paare, von denen jedes die beiden anderen harmonisch trennt.

Drei Tangentenpaare einer cubischen Raumcurve, von denen jedes die beiden anderen harmonisch trennt, berühren noch eine ganz bestimmte zweite cubische Raumcurve.

3. Neben den sechs gemeinsamen Tangenten besitzen die cubischen Raumcurven C und C' noch vier gemeinsame Sehnen und vier gemeinsame Axen. Die Treffpunktepaare dieser vier Sehnen bilden sowohl auf der einen, wie auf der anderen Curve die vier »Paare«, in welche die Würfelacht zerfällt, und die Ebenenpaare dieser vier Axen bilden auf jeder der beiden Curven die Ebenenpaare dieser Würfelacht.

Die beiden Transversalen t, t' der vier gemeinschaftlichen Sehnen sind zugleich die Transversalen der vier gemeinschaft-

[1] Die verwendete Ausdrucksweise schliesst sich auf das engste der von F. Klein benützten Terminologie an; vgl. insbesondere dessen »Vorlesungen über das Ikosaëder«, Leipzig, 1884.

lichen Axen. Zu diesen beiden Transversalen gelangt man noch auf einem anderen Wege, wenn man das Zerfallen der Würfelacht in zwei Quadrupel, eine Tetraëdervier und die Vier des Gegentetraëders, in Betracht zieht. Von den beiden Tetraëdervieren, in welche die Würfelacht zerfällt, haben die Tangenten der einen die Gerade t, die der anderen die Gerade t' zur einzigen Transversale.

4. Die vier ausser den sechs gemeinsamen Tangenten vorhandenen gemeinschaftlichen Sehnen und Axen der Curven C und C' lassen sich auch aus der Oktaëdersechs von Ebenen und Punkten irgend einer der beiden Curven ableiten.

Die Oktaëdersechs lässt sich auf vier Arten in zwei Tripel so zerlegen, dass jedes »Paar« der Oktaëdersechs eines seiner Elemente in jedes der beiden Tripel wirft. Die Schmiegungsebenen eines solchen Tripels bestimmen einen Punkt, seine Punkte eine Ebene. Die durch zwei Tripel, in welche die Oktaëdersechs sich zerlegt, bestimmten zwei Punkte haben eine der vier gemeinsamen Sehnen zur Verbindungslinie, die durch diese Tripel bestimmten zwei Ebenen eine der vier gemeinsamen Axen zur Schnittlinie.

5. Die Transversalen t, t' der gemeinsamen vier Sehnen und Axen der Curven C und C' sind die Axen für eine geschaarte Involution des Raumes, welche diese beiden Curven ineinander überführt.

Nennt man mit Voss zwei Leitstrahlen eines Nullsystems in Bezug auf eine cubische Ordnungscurve C desselben zugeordnet, wenn die vier Tangenten von C, welche der eine Leitstrahl trifft, die Hesse'sche Covariante des Quadrupels der Tangenten, welche der andere Leitstrahl trifft, darstellen, so kann man sagen:

Aus einer cubischen Raumcurve C kann man die zu ihr in Oktaëderlage befindlichen cubischen Raumcurven durch Anwendung der geschaarten Involutionen ableiten, deren Axenpaare zwei in Bezug auf C zugeordnete Leitstrahlen des Nullsystems dieser Curve sind.

6. Durch zwei Elemente (Punkte, Ebenen, Tangenten) einer cubischen Raumcurve ist das zugehörige Schmiegungstetraëder der Curve völlig bestimmt. Dieses Tetraëder hat zu Gegenkanten:

erstens die zwei Tangenten, zweitens die zugehörige Sehne und Axe der Curve, und drittens die beiden Strahlen, welche durch einen der beiden Punkte gehen, in seiner Schmiegungsebene liegen und dabei die Tangente des zweiten Punktes treffen. Will man Weitläufigkeiten vermeiden, so erweist es sich als nothwendig, für das dritte Gegenkantenpaar des Schmiegungstetraëders einen besonderen Namen einzuführen. Wir nennen es ein »Hauptstrahlenpaar der Curve«. Durch zwei Elemente der Curve (Punkte, Ebenen, Tangenten) ist das »zugehörige« Hauptstrahlenpaar völlig bestimmt.

Wir können jetzt sagen:

Zwei in Oktaëderlage befindliche cubische Raumcurven C, C' haben neun Hauptstrahlenpaare gemein. Drei davon gehören zu den drei Paaren der Oktaëdersechs, die sechs übrigen zu den sechs »Paaren« der Kantenmittenzwölf auf jeder der beiden Curven. Die drei ersten liegen in der Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung F, welche sich noch vielfach für die Lagenbeziehung der Curven C und C' wichtig erweisen wird, und bilden in dieser Regelschaar die Paare einer Oktaëdersechs; die sechs übrigen sind Paare reciproker Polaren bezüglich der Fläche F und treffen in der Regelschaar dieser Fläche die sechs Strahlenpaare, welche die zur genannten Oktaëdersechs gehörige Kantenmittenzwölf bilden.

7. Die Fläche F stützt die beiden Curven C und C' und ruht gleichzeitig auf ihnen. Es gibt eine Schaar von ∞^1 Poltetraëdern dieser Fläche, welche der Curve C eingeschrieben und zugleich der Curve C' umschrieben sind, und eine zweite Schaar von ∞^1 Poltetraëdern, welche sich zu den beiden Curven umgekehrt verhalten. Bilden vier Punkte einer der beiden Curven ein Tetraëder der einen Schaar, so bilden ihre vier Schmiegungsebenen ein Tetraëder der anderen Schaar und die zugehörigen vier Tangenten haben zwei Strahlen der Leitschaar der Fläche F zu gemeinschaftlichen Transversalen. Die Quadrupel der Ecken und Ebenen der Tetraëder der beiden Schaaren bilden auf jeder der beiden Curven die biquadratische Punkt- und Ebeneninvolution, welche durch die beiden Tetraëdervieren der Würfelacht gegeben ist.

Die Gegenkantenpaare der Tetraëder der ersten Schaar bilden die Regelschaaren von drei Flächen zweiter Ordnung, welche sämmtlich die Punkte von C und die Ebenen von C' gemein haben, die Gegenkantenpaare der Tetraëder der zweiten Schaar bilden die Regelschaaren von drei Flächen zweiter Ordnung, welche sich zu den beiden Curven umgekehrt verhalten.

8. Die Oktaëderlage von zwei cubischen Raumcurven lässt sich durch den folgenden Satz sowie durch den zu ihm dualen definiren.

Verbindet man je eines der drei Paare von Gegenkanten eines beliebigen, der Curve C eingeschriebenen Tetraëders mit dieser cubischen Raumcurve durch eine Fläche zweiter Ordnung, so haben die erhaltenen drei Flächen unendlich viele Tangentialebenen gemein, welche die Schmiegungsebenen einer zu C in Oktaëderlage befindlichen cubischen Raumcurve darstellen.

Eine weitere Definition der Oktaëderlage liegt in dem Satze:

Haben zwei Tetraëder eine solche Lagenbeziehung, dass eine cubische Raumcurve C durch die Ecken des einen hindurchgeht und in ihnen die Ebenen des zweiten zu Schmiegungsebenen hat, so gibt es auch eine cubische Raumcurve C', welche durch die Ecken des zweiten Tetraëders hindurchgeht und in ihnen die Ebenen des ersten zu Schmiegungsebenen hat. Die beiden Curven C und C' befinden sich in Oktaëderlage.

9. Die drei Schmiegungstetraëder der Curve C, welche zu den Paaren der Oktaëdersechs gehören, sind zu gleicher Zeit (aber in anderer Weise) die Schmiegungstetraëder der Paare der Oktaëdersechs der Curve C'. Die Fläche F geht durch die vier Kanten, welches jedes dieser drei Tetraëder ausser dem von zwei gemeinsamen Tangenten gebildeten Gegenkantenpaar noch besitzt

Es gilt der Satz, der zur Definition der Oktaëderlage dienen kann:

Eine beliebige Fläche zweiter Ordnung, welche durch die vier Kanten hindurchgeht, die ein Schmiegungstetraëder einer cubischen Raumcurve C ausser den beiden Curventangenten besitzt, steht noch zu zwei weiteren Schmiegungstetraëdern

der Curve in derselben Beziehung. Die reciproke Polare von C in Bezug auf eine solche Fläche zweiter Ordnung ist eine zu dieser Curve in Oktaëderlage befindliche cubische Raumcurve.

10. Eine beliebige Transversale der beiden schon oben (Nr. 3 und 5) betrachteten Geraden t, t' trifft ein Tangentenquadrupel jeder der Curven C und C'. Das zugehörige Punktquadrupel auf irgend einer dieser Curven stellt die Eckpunkte eines der Fläche zweiter Ordnung F umschriebenen und das zugehörige Quadrupel von Schmiegungsebenen die Ebenen eines dieser Fläche eingeschriebenen Tetraëders dar.

Man kann ein beliebiges dieser ∞^2 Quadrupel auf der Curve C noch in anderer Weise ableiten.

Betrachtet man irgend ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Curve C' hindurchgehen, so kommen darin ausser den sechs Flächen, welche je eine der gemeinschaftlichen Tangenten von C und C' enthalten, noch vier vor, welche C berühren, und deren vier Berührungspunkte bilden die Ecken eines der Fläche F umschriebenen Tetraëders.

Diese vier Berührungspunkte bilden auf der Curve C ein äquianharmonisches Quadrupel, wenn die Basiscurve des Büschels von der Curve C zusammen mit einer ihrer Tangenten gebildet wird. Ein solches äquianharmonisches Punktquadrupel kann mit der Curve C' durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, und diese Fläche schneidet C sonst noch in zwei zusammenfallenden Punkten. Die Tangenten eines solchen äquianharmonischen Quadrupels haben immer einen Strahl der Regelschaar der Fläche zweiter Ordnung F zur einzigen gemeinschaftlichen Transversale.

11. Die Gruppe von 24 Collineationen, welche jede der beiden Curven C und C' in sich selbst transformirt, kann man in mehrfacher Weise erweitern.

Eine solche Erweiterung besteht darin, dass man die 24 Collineationen hinzufügt, welche die beiden Curven C und C' unter einander vertauschen. Eine zweite Art der Erweiterung besteht in Hinzufügung der 24 Correlationen, welche zu gleicher Zeit jede der beiden Curven in sich transformiren. Die dritte, umfassendste Erweiterung entsteht, wenn man nebst diesen

24 Correlationen noch die 24 Collineationen und die 24 Correlationen hinzunimmt, welche die beiden Curven unter einander vertauschen. Unter diesen 96 projectiven Verwandtschaften sind es die involutorischen, die ein besonderes Interesse beanspruchen dürfen.

Es gibt neun geschaarte Involutionen, welche jede der beiden Curven C und C' in sich und zehn geschaarte Involutionen, welche jede der beiden Curven in die andere überführen. Neben der Nullcorrelation, welche jede der Curven C und C' in sich transformirt, gibt es drei andere, zu ihr und unter einander apolare, welche die Curven unter einander vertauschen. Es gibt neun polare Correlationen, welche jede der beiden Curven C und C' in sich selbst, und sieben polare Correlationen, welche die eine in die andere überführen.

Eine Reihe von Beziehungen, welche die Axenpaare der 19 geschaarten Involutionen und die Ordnungsflächen der 16 polaren Correlationen unter einander und zu den von uns hier schon eingeführten Figuren aufweisen, lässt sich leicht angeben, doch wollen wir auf deren Aufzählung an dieser Stelle verzichten.

Die Ikosaëderlage.

12. Durch Annahme der Projectivitäten einer Ikosaëdergruppe zwischen den Elementen einer cubischen Raumcurve C ist eine Gruppe von 60 Collineationen des Raumes bestimmt, welche sämmtlich ausser C noch eine und nur eine zweite cubische Raumcurve C^* in sich selbst transformiren, und auch diese erleidet die Projectivitäten einer Ikosaëdergruppe. Die Lagenbeziehung der beiden Curven C und C^* bezeichnen wir als Ikosaëderlage derselben.

Für diese Lagenbeziehung besitzen diejenigen Systeme von Elementen (Punkten, Ebenen, Tangenten) auf jeder der beiden Curven eine besondere Wichtigkeit, welche weniger als 60 Elemente umfassen und doch bei allen 60 Projectivitäten der Ikosaëdergruppe, welche die Curve erfährt, in sich übergehen. Es sind dies die »Ikosaëderzwölf«, die »Dodekaëderzwanzig« und die »Kantenmittendreissig«.

13. Die beiden Curven C und C^* haben sechs gemeinsame Schmiegungstetraëder. Dieselben gehören bei der einen

und der anderen Curve zu den sechs Paaren der Ikosaëderzwölf.

Genauer wird die Beziehung, welche wir im Auge haben, durch den folgenden Satz ausgedrückt, welcher zur Definition der Ikosaëderlage dienen kann.

Die sechs Hauptstrahlenpaare (siehe Nr. 6) einer cubischen Raumcurve C, welche zu den Paaren einer Ikosaëderzwölf auf dieser Curve gehören, berühren eine ganz bestimmte zweite, zur ersten in Ikosaëderlage befindliche cubische Raumcurve C^* und bilden auf ihr die Tangenten einer Ikosaëderzwölf. Jedes Paar der Ikosaëderzwölf auf der Curve C ist mit einem Paar der Ikosaëderzwölf auf der Curve C^* eindeutig umkehrbar verknüpft, dergestalt, dass die zum Paare der Curve C gehörigen Curventangenten gleichzeitig das zum Paare der Curve C^* gehörige Hauptstrahlenpaar darstellen, und umgekehrt.

14. Die Curven C und C^* besitzen zehn gemeinsame Sehnen und zehn gemeinsame Axen. Die Punktepaare, welche diese zehn Sehnen mit irgend einer der beiden Curven gemein haben, bilden auf ihr die »Paare« der Dodekaëderzwanzig und die Ebenenpaare, welche diese zehn Axen mit der Curve gemein haben, sind die Ebenenpaare dieser Dodekaëderzwanzig.

Die zehn Sehnen und zehn Axen, welche zu den Paaren einer Dodekaëderzwanzig auf einer cubischen Raumcurve gehören, stellen zehn Sehnen und zehn Axen noch für eine ganz bestimmte zweite, zur ersten in Ikosaëderlage befindliche cubische Raumcurve dar.

Die Ikosaëderzwölf auf jeder der beiden Curven C und C^* lässt sich auf zehn Arten so in vier Tripel zerlegen, dass die vier Schmiegungsebenentripel vier Punkte einer der zehn gemeinsamen Sehnen, die vier Punktetripel vier Ebenen durch eine der vier gemeinsamen Axen bestimmen.

15. Zwei cubische Raumcurven in Ikosaëderlage C und C^* haben 15 gemeinsame Hauptstrahlenpaare. Dieselben gehören zu den 15 Paaren der Kantenmittendreissig auf jeder der beiden Curven.

Die 15 gemeinsamen Hauptstrahlenpaare der Curven C und C^* zerfallen in fünf Tripel in der Weise, dass die drei Strahlenpaare eines Tripels immer einer Regelschaar angehören

und in der Regelschaar die Paare einer Oktaëdersechs bilden. Jede der so definirten fünf Flächen zweiter Ordnung stützt die beiden Curven C und C^* und ruht zugleich auf ihnen.

16. Eine Eigenschaft, welche zur Definition der Ikosaëderlage dienen kann, spricht der Satz aus:

Die zu einer cubischen Raumcurve C in Ikosaëderlage befindlichen cubischen Raumcurven gehen aus der Curve C durch Anwendung der geschaarten Collineationen hervor, deren Doppelverhältniss einen der beiden Werthe

$$\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{-15})$$

besitzt und deren Axen durch irgend zwei in Bezug auf die Curve C zugeordnete Leitstrahlen ihres Nullsystems (vergl. Nr. 5) dargestellt werden.

17. Eine Doppelsechs von Geraden bildet den Kern, um welchen sich die Gebilde gruppiren, welche wir noch zu besprechen haben. Wir bezeichnen die Geraden dieser Doppelsechs durch

$$\begin{matrix} i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 \\ i'_1, i'_2, i'_3, i'_4, i'_5, i'_6, \end{matrix}$$

wobei $i_1 i_2 \ldots i_6$ die sechs Sehnen, $i'_1 i'_2 \ldots i'_6$ die sechs Axen bedeuten, welche zu den Paaren der Ikosaëderzwölf auf der Curve C gehören. Es sind dann zugleich die sechs Geraden i die Axen und die sechs Geraden i' die Sehnen, welche zu den Paaren der Ikosaëderzwölf auf der Curve C^* gehören.

Je zwei Geraden aus den beiden Sextupeln der Doppelsechs, die in ihrer Bezeichnung denselben Index aufweisen, entsprechen einander in dem Nullsystem, das die Curven C und C^* zu Ordnungscurven hat. Zwei solche Geraden werden immer von den zehn Strahlen gewisser fünf unter den 15 gemeinsamen Hauptstrahlenpaaren der Curven C und C^* getroffen.

18. Die Lagenbeziehung der sechs Geraden i (und ebenso die Lagenbeziehung der sechs Geraden i') lässt sich durch die Eigenschaft definiren, dass zu jeder geraden Vertauschung der sechs Geraden eine Collineation des Raumes gehört, welche sie hervorruft.

Eine Gruppe von 360 Collineationen des Raumes, welche ein Sextupel von Geraden in sich transformirt und innerhalb desselben die geraden Permutationen hervorbringt,[1] verhält sich noch gegen ein zweites Sextupel von Geraden in der gleichen Weise. Die beiden Sextupel sind einander durch ein Strahlengewinde (linearer Complex) zugeordnet, das bei allen 360 Collineationen der Gruppe in sich übergeht. Jede cubische Raumcurve, welche die Strahlen des einen Sextupels zu Sehnen hat, hat die Strahlen der anderen zu Axen, und umgekehrt.

19. Die Doppelsechs der Strahlen i und i' führt zu einer Doppelsechs von cubischen Raumcurven

$$C,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5$$
$$C',\ C'_1,\ C'_2,\ C'_3,\ C'_4,\ C'_5,$$

welche sehr eigenthümliche Beziehungen aufweist.

Die Curven des ersten Sextupels haben die sechs Geraden i zu Sehnen und die sechs Geraden i' zu Axen, während die Curven des zweiten Sextupels die sechs Geraden i zu Axen, die sechs Geraden i' zu Sehnen haben.

Jede Curve des einen Sextupels befindet sich zu der ihr im zweiten Sextupel entsprechenden in Ikosaëderlage, zu den fünf übrigen Curven des zweiten Sextupels aber in Oktaëderlage.

Die zehn Sehnen und zehn Axen, welche zwei entsprechende Curven der beiden Sextupel gemein haben, sind dieselben zwanzig geraden Linien, welches von den sechs Paaren entsprechender Curven man auch betrachtet.

Aus diesen zwanzig geraden Linien recrutiren sich auch die vier Sehnen und vier Axen, welche je zwei demselben Sextupel angehörige Curven neben den Geraden i und i' gemein haben.

20. Die zehn Geradenpaare, welche als die gemeinsamen Sehnen und Axen von irgend zwei entsprechenden (in Ikosaëderlage befindlichen) cubischen Raumcurven unserer Doppelsechs auftreten, lassen sich aus dem Sextupel der Strahlen i (oder der Strahlen i') in einfacher Weise ableiten.

---

[1] In dieser Weise lässt sich die Gruppe von 360 räumlichen Collineationen geometrisch charakterisiren, deren Kenntnis man Felix Klein verdankt (Math. Ann., Bd. IV).

Die sechs Strahlen i lassen sich auf zehn Arten in zwei Tripel zerlegen. Die zwei Flächen zweiter Ordnung, von denen jede durch eines von zwei solchen Strahlentripeln hindurchgeht, durchdringen sich in den vier Seiten eines windschiefen Vierecks. Die zehn Paare von Diagonalen der zehn windschiefen Vierecke, welche man auf diesem Wege erhält, sind die zehn gesuchten Geradenpaare.

21. Die Gruppe von 60 Collineationen des Raumes, welche zwei in Ikosaëderlage befindliche cubische Raumcurven in sich transformirt, lässt sich in mehrfacher Weise erweitern.

Eine solche Erweiterung ist schon oben angegeben als die Gruppe der 360 Collineationen, welche jedes der beiden Strahlensextupel i und i' in sich überführt. Man kann zu diesen 360 Collineationen noch die 360 Collineationen hinzunehmen, welche die beiden Sextupel untereinander vertauschen, und erhält so eine Gruppe von 720 Collineationen, welche mit der Gruppe der 6! Permutationen von 6 Dingen holoëdrisch isomorph ist.

Man kann die ursprüngliche Gruppe aber auch durch Hinzufügung von Correlationen erweitern, zunächst, indem man zu den 60 Collineationen die 60 Correlationen hinzunimmt, welche die beiden Curven C und C^* in sich überführen. Eine zweite Erweiterung resultirt als die Gesammtheit der 360 Collineationen und 360 Correlationen, welche jedes der beiden Geradensextupel i und i' in sich überführen, und die dritte umfassendste, aus 1440 linearen Verwandtschaften bestehende erweiterte Gruppe ergibt sich, wenn man noch die 360 Collineationen und die 360 Correlationen hinzunimmt, welche die beiden Geradensextupel untereinander vertauschen.

Über diese Gruppen, welche vielleicht an und für sich ein Interesse beanspruchen dürfen, soll in einer besonderen Mittheilung berichtet werden.

Über die Dissociation der Gase bei constantem Druck und bei Überschuss eines der Dissociationsproducte

von

Dr. **Rud. Wegscheider.**

I. Theoretisches.

Die meisten chemischen Reactionen vollziehen sich in Wirklichkeit bei (annähernd) constantem Druck. Es scheint mir daher nicht überflüssig, auf eine einfache Beziehung aufmerksam zu machen, die bei constantem Druck und constanter Temperatur für den Einfluss des Überschusses eines der Dissociationsproducte bei Gasen gilt, deren Moleküle durch Dissociation in je zwei einfachere Moleküle zerfallen.

Für die Betrachtung der Reactionen bei constantem Druck verwendet man am einfachsten die numerischen[1] Concentrationen, die ich zum Unterschiede von den gewöhnlich verwendeten räumlichen Concentrationen mit $\varkappa$ bezeichnen will und die definirt sind durch $\varkappa_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots}$, wo μ_1, μ_2 u. s. w. die Mengen der vorhandenen Stoffe in Gramm-Molekülen bedeuten.

Beim Gleichgewicht ist $\log K_\varkappa = \Sigma n \log \varkappa$, wo $K_\varkappa$ eine von der Natur der Reaction, von Temperatur und Druck abhängige Constante, n die in der Reactionsgleichung vorkommenden Molekülzahlen bedeutet. Der Index $\varkappa$ bei $K_\varkappa$ soll diese Gleichgewichtsconstante von der gewöhnlichen, auf die räumlichen

[1] Planck, Wied. Ann., *32*, 491 (1887).

Concentrationen $\left(c_1 = \frac{\mu_1}{v} \text{ u. s. w.}\right)$ bezüglichen und daher mit K_c zu bezeichnenden unterscheiden.

Der Vortheil, den die Benützung von K_x bei constantem Druck bietet, beruht darauf, dass $\Sigma n \log x$ nur die Massen enthält und dass daher bei gegebenen Massen das Gleichgewicht durch K_x (welches den Einfluss der Temperatur und des Druckes auf das Gleichgewicht vollständig enthält) völlig bestimmt ist.

Dagegen ist K_c bei Gasen nur von der Temperatur abhängig. $\Sigma n \log c$ enthält aber auch das Volum, und es sind daher bei gegebenen Massen und gegebenem K_c verschiedene Gleichgewichte je nach dem Drucke möglich (ausgenommen den Fall, dass sich bei der Reaction die Molekülzahl nicht ändert).

Es seien nun bei constantem äusserem Druck und constanter Temperatur μ Gramm-Moleküle eines Gases gegeben, dessen Moleküle durch Dissociation in je zwei Moleküle zerfallen. Die Reactionsgleichung hat also die Form $A \rightleftarrows A_1 + A_2$. Der Dissociationsgrad beim Gleichgewichte sei α, d. h. von je einem Gramm-Molekül seien $1-\alpha$ undissociirt. Die Molekülzahlen sind dann: Undissociirtes Gas $\mu(1-\alpha)$, Dissociationsproducte $\mu\alpha$ und $\mu\alpha$. Die Summe der Molekülzahlen ist $\mu(1+\alpha)$, die Gleichgewichtsbedingung

$$K_x = \left[\frac{\mu\alpha}{\mu(1+\alpha)}\right]^2 : \frac{\mu(1-\alpha)}{\mu(1+\alpha)} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}. \qquad 1)$$

Daraus folgt

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_x}{K_x+1}}. \qquad 1a)$$

Nun sollen bei unverändert bleibendem äusserem Druck und unveränderter Temperatur μ_1 Moleküle des einen Dissociationsproductes beigemischt werden. Der Dissociationsgrad beim Gleichgewicht sei nunmehr α_1. Die Molekülzahlen sind: Undissociirtes Gas $\mu(1-\alpha_1)$, Dissociationsproducte $\mu\alpha_1$ und $\mu_1+\mu\alpha_1$, die Summe der Molekülzahlen $\mu_1+\mu(1+\alpha_1)$. Die Gleichgewichtsbedingung ist:

$$K_x = \frac{\mu\alpha_1}{\mu_1+\mu(1+\alpha_1)} \cdot \frac{\mu_1+\mu\alpha_1}{\mu_1+\mu(1+\alpha_1)} : \frac{\mu(1-\alpha_1)}{\mu_1+\mu(1+\alpha_1)}$$

oder

$$K_x = \frac{\alpha_1(\mu_1+\mu\alpha_1)}{(1-\alpha_1)[\mu_1+\mu(1+\alpha_1)]}. \qquad 2)$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Gleichung 1*a*)

$$\alpha_1 = -\frac{\mu_1}{2\mu} + \sqrt{\frac{\mu_1^2}{4\mu^2} + \frac{K_x}{1+K_x} \cdot \frac{\mu+\mu_1}{\mu}} =$$

$$= -\frac{\mu_1}{2\mu} + \sqrt{\frac{\mu_1^2}{4\mu^2} + \frac{\mu+\mu_1}{\mu}\alpha^2}. \qquad 2b)$$

Das Minuszeichen vor der Wurzel kommt nicht in Betracht, weil α_1 nicht negativ sein kann.

Für einen sehr grossen Überschuss des einen Dissociationsproductes ($\mu_1 = \infty$) geht Gleichung 2) über in

$$K_x = \frac{\alpha_\infty}{1-\alpha_\infty}, \qquad 3)$$

wo α_∞ den Dissociationsgrad bei sehr grossem Überschuss des einen Dissociationsproductes bedeutet. Aus Gleichung 1) und 3) folgt $\alpha^2 : (1-\alpha^2) = \alpha_\infty : (1-\alpha_\infty)$ oder

$$\alpha_\infty = \alpha^2. \qquad 4)$$

Bei gleichem äusserem Druck und gleicher Temperatur ist der Dissociationsgrad bei unendlich grossem Überschuss des einen Dissociationsproductes gleich dem Quadrat des Dissociationsgrades bei Abwesenheit eines Überschusses.

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung 2) mit dem Nenner der rechten Seite und differenzirt bei constantem μ, so ergibt sich unter Berücksichtigung von 1*a*):

$$\frac{d\alpha_1}{d\mu_1} = -\frac{\alpha_1 - \frac{K_x}{K_x+1}}{\mu_1+2\alpha_1\mu} = -\frac{\alpha_1-\alpha^2}{\mu_1+2\alpha_1\mu}.$$

$\frac{d\alpha_1}{d\mu_1}$ kann nur Null werden, wenn $\alpha^2 = \alpha_1$. Das ist nach Gleichung 4) der Fall, wenn μ_1 unendlich wird. α_1 hat also für endliche μ_1 kein Maximum oder Minimum, beziehungsweise der Differentialquotient wechselt sein Zeichen nicht, so lange μ_1 endlich ist. Da $\alpha^2 < \alpha$, folgt:

Wenn Druck und Temperatur constant sind, sinkt der Dissociationsgrad mit wachsendem Überschusse des einen Dissociationsproductes bis zu einem Grenzwerthe, der dem Quadrat des Dissociationsgrades bei Abwesenheit eines Überschusses gleich ist. Bei constantem äusserem Druck überwiegt also immer die dissociationshemmende Wirkung des Überschusses gegenüber der dissociationsfördernden Herabminderung des Partialdruckes des in Dissociation begriffenen Gases. Es ist aber bei constantem Druck nicht möglich, durch Zuführung eines Überschusses eines der Dissociationsproducte die Dissociation auf einen zu vernachlässigenden Betrag herabzudrücken, wenn nicht der Dissociationsgrad der reinen Verbindung unter gleichen Umständen einen ziemlich kleinen Werth hat.

Verwickeltere Dissociationen. In ähnlicher Weise kann man auch den Einfluss des Überschusses eines der Dissociationsproducte unter constantem Druck bei verwickelteren Dissociationen darstellen; doch sind die Gleichungen für α_1 von höherem als dem zweiten Grade, wenn auf einer Seite der Reactionsgleichung mehr als zwei Moleküle stehen.

Für den Grenzwerth des Dissociationsgrades bei sehr grossem Überschusse des einen Dissociationsproductes findet man $\alpha_\infty = 1$ bei Dissociationen nach der Gleichung $A \rightleftarrows n_1 A_1 + n_2 A_2 + \ldots$, wenn $\Sigma n > n_1 + 1$ oder $n_2 + n_3 + \ldots > 1$, wo n_1 sich auf jene Molekelart bezieht, von der ein Überschuss zugesetzt wurde. In diesem Falle wird also die Dissociation bei sehr grossem Überschusse vollständig; die Wirkung des Überschusses verschwindet gegenüber der Herabminderung des Partialdruckes von A.

Im Falle $\Sigma n = n_1 + 1$ lautet die Dissociationsgleichung $A \rightleftarrows n_1 A_1 + A_2$. Der Fall $n_1 = 1$ ist bereits besprochen. Wenn $n_1 > 1$, also $\Sigma n > 2$, so fällt ein Überschuss von A_2 unter den

eben erwähnten Fall, wo $\alpha_\infty = 1$. Für einen Überschuss von A_1 bekommt α_∞ einen zwischen 0 und 1 liegenden Werth, der aus

$$\frac{\alpha_\infty}{1-\alpha_\infty} = \frac{n_1^{n_1}\alpha^{n_1+1}}{(1-\alpha)(1+n_1\alpha)^{n_1}}$$

berechnet werden kann.

Bei **Dissociationen im weiteren Sinne** (Reactionsgleichung $n_0 A \rightleftarrows n_1 A_1 + n_2 A_2 + \ldots$) ist $\alpha_\infty = 1$, wenn $n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots > n_0 + n_1$ oder $n_2 + n_3 + \ldots > n_0$ ist, wo n_1 sich wieder auf den Körper bezieht, von welchem ein Überschuss zugesetzt wurde.

Für $n_1 + n_2 + \ldots = n_0 + n_1$ ist

$$\left(\frac{\alpha_\infty}{1-\alpha_\infty}\right)^{n_0} = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{n_1} \frac{\alpha^{n_1+n_2+\ldots}}{\left(1+\frac{n_1}{n_0}\alpha\right)^{n_1}(1-\alpha)^{n_0}}.$$

Für $n_1 + n_2 + \ldots < n_0 + n_1$ ist $\alpha_\infty = 0$; ein grosser Überschuss des einen Dissociationsproductes hindert also die Dissociation völlig. Das ist z. B. bei der Dissociation des Jodwasserstoffes der Fall, wo $n_1 = n_2 = 1$, $n_0 = 2$.

Ein Beispiel für beide letzterwähnten Fälle bietet die Dissociation der Kohlensäure dar (Reactionsgleichung $2\,CO_2 \rightleftarrows O_2 + 2\,CO$; $n_0 = 2$, $n_{O_2} = 1$, $n_{CO} = 2$).

Ist der Sauerstoff in sehr grossem Überschuss, so ist $n_{O_2} + n_{CO} = n_0 + n_{O_2}$. Es kann also durch Zufuhr von überschüssigem Sauerstoff das Kohlenoxyd nie vollständig verbrannt werden, wenn bei gleicher Temperatur und gleichem Druck das Kohlendioxyd merklich dissociirt ist.

Man hat

$$\left(\frac{\alpha_\infty}{1-\alpha_\infty}\right)^2 = \frac{\alpha^3}{(2+\alpha)(1-\alpha)^2}.$$

Daraus berechnen sich folgende Werthe für den Dissociationsgrad bei unendlichem Überschusse von Sauerstoff und constantem Druck:

α	0·01	0·1	0·3	0·5	0·7	0·9
α_∞	0·0007	0·024	0·134	0·309	0·543	0·834

Man sieht daraus, dass ein grosser Sauerstoffüberschuss die Dissociation der Kohlensäure um so stärker zurückdrängt, je kleiner sie an sich ist.

Ist das Kohlenoxyd in sehr grossem Überschusse, so ist $n_{O_2}+n_{CO} < n_0+n_{CO}$; die Dissociation der Kohlensäure bei constantem äusserem Druck wird also durch einen sehr grossen Kohlenoxydüberschuss völlig aufgehoben.

Eine Erweiterung dieser Betrachtungen auf beliebige Gasreactionen ist vorläufig ohne Interesse; es gelten dieselben Regeln, die im folgenden für Lösungen besprochen werden. Bei constant gehaltenem Volum drängt bekanntlich ein Überschuss eines der Dissociationsproducte die Dissociation unter allen Umständen zurück; ein unendlich grosser Überschuss verhindert sie völlig, unabhängig von der Art der Dissociation.

In **Lösungen** gelten natürlich analoge Beziehungen für den Grenzwerth der Umsetzung bei unendlich grosser Verdünnung. Es finde bei constanter Temperatur und constantem äusserem Druck die Reaction statt:

$$n_0 A_0 + n_1 A_1 + n_2 A_2 + \ldots \rightleftarrows n'_1 A'_1 + n'_2 A'_2 + \ldots,$$

wo A_0 das Lösungsmittel bedeutet und n_0 auch Null sein kann. Wenn kein indifferentes Lösungsmittel da ist, ist der im Überschusse befindliche Bestandtheil als Lösungsmittel zu betrachten.

Unter Einführung der Zeichen $\Sigma n = n_1 + n_2 + \ldots$ und $\Sigma n' = n'_1 + n'_2 + \ldots$ gelten folgende Sätze:

1. Wenn $\Sigma n' - \Sigma n > 0$, so verläuft die Reaction bei unendlich grosser Verdünnung vollständig.

Ein Beispiel hiefür ist die Hydrolyse von Salzen, wenn entweder die Säure oder die Base sehr schwach ist, also als undissociirt betrachtet werden kann, während das zweite Product der Hydrolyse und das Salz selbst als völlig dissociirt angenommen werden können. Bezeichnet $\overset{-}{S}$ das ν-werthige Säureradical, $\overset{+}{B}$ das π-werthige basische Radical, so ist die Reactionsgleichung

$$\pi \overset{-}{S} + \nu \overset{+}{B} + \nu\pi H_2O = \pi S H_\nu + \nu \overset{+}{B} + \nu\pi \overset{-}{O}H,$$

wenn die Säure als schwach angenommen wird. Es ist $\Sigma n' = \nu + \pi + \nu\pi$, $\Sigma n = \pi + \nu$.

Ein weiteres Beispiel ist die elektrolytische Dissociation, und zwar auch dann, wenn man im Sinne der Anschauungen von Werner[1] die Ionen mit Molekülen des Lösungsmittels verbunden betrachtet, die nicht dissociirten Moleküle dagegen nicht Reactionsgleichung für einwerthige Ionen $BS + (m+n) H_2O = = \overset{+}{B}. m H_2O + \overset{-}{S}. n H_2O$, $\Sigma n' = 2$, $\Sigma n = 1$).

Ferner gehören hieher die Esterbildung bei Überschuss von Säure oder Alkohol, wo dann der im Überschuss befindliche Bestandtheil als Lösungsmittel zu betrachten ist ($\Sigma n' = 2$, $\Sigma n = 1$), die Dissociation des gelösten N_2O_4 u. s. w.

2. Wenn $\Sigma n' - \Sigma n < 0$, so wird die Reaction durch unendliche Verdünnung vollständig gehemmt.

3. Wenn $\Sigma n' = \Sigma n$, so nähert sich der umgesetzte Bruchtheil unter sonst gleichen Umständen mit steigender Verdünnung einem endlichen (von Null verschiedenen) Grenzwerth. Ist ausserdem $n_0 = 0$, betheiligt sich also das Lösungsmittel nicht an der Reaction, so ist der umgesetzte Bruchtheil unter sonst gleichen Umständen unabhängig von der Verdünnung.

Beispiele sind die Bildung von Amyläthern aus Amylen und Säuren bei Überschuss von Amylen[2] oder von Säure, die Hydratbildung in wässeriger Lösung,[3] die Hydrolyse von Salzen schwacher Säuren und Basen,[4] wenn man das Salz als völlig dissociirt, die Säure und Base als undissociirt annehmen darf (Reactionsgleichung $\pi \overset{-}{S} + \nu \overset{+}{B} + \nu\pi H_2O = \pi S H_\nu + \nu B(OH)_\pi$, $\Sigma n' = \Sigma n = \nu + \pi$), die Umlagerung tautomerer Substanzen in verdünnten Lösungen u. s. w.

Die Sätze 1. und 2. lassen sich auch folgendermassen aussprechen: Wenn eine in verdünnter Lösung verlaufende Reaction mit einer Änderung des osmotischen Druckes verbunden ist, so tritt bei weiterer Verdünnung eine Verschiebung des Gleichgewichtes ein, welche den osmotischen Druck steigert, also im entgegengesetzten Sinne beeinflusst

[1] Zeitschr. für anorg. Chemie, *3*, 294 (1893).

[2] Nernst, Theor. Chem., 2. Aufl., S. 421.

[3] Ebendort, S. 430.

[4] Arrhenius, Zeitschr. für phys. Chemie, *5*, 20 (1890).

wie die Verdünnung. Dieser Satz über den Einfluss der Verdünnung auf das Gleichgewicht ist völlig analog den Sätzen über den Einfluss von Temperatur- und Druckänderungen auf das Gleichgewicht.

II. Dissociation des Phosphorpentachlorids bei Gegenwart von Phosphortrichlorid.

Versuche, welche eine genaue Prüfung der vorstehenden Gleichungen gestatten würden, sind mir nicht bekannt.[1] Immerhin ist es nicht ohne Interesse, sie zur Besprechung der Versuche von Wurtz[2] über die Dampfdichte des Phosphorpentachlorids bei Gegenwart eines Überschusses von Phosphortrichlorid unter Atmosphärendruck anzuwenden.

Wurtz hat seine Versuche in der Absicht angestellt, durch den Zusatz des Phosphortrichlorids die Dissociation des Pentachlorids aufzuheben, und hat in der That unter diesen Umständen für die Dampfdichte des Pentachlorids Werthe erhalten, welche der theoretischen Dampfdichte der unzersetzten Verbindung (7·21) grösstentheils nahekommen; er fand bei Temperaturen zwischen 160 und 177° Werthe zwischen 6·66 und 8·30. Nur ein bei 190° ausgeführter Versuch gab 6·25. Wurtz zog daher den Schluss, dass das Phosphorpentachlorid unter seinen Versuchsbedingungen die normale Dampfdichte habe.

Gibbs[3] hat die in den Comptes rendus mitgetheilten endgiltigen Versuche von Wurtz auf Grund der von ihm aufgestellten Gesetze des chemischen Gleichgewichtes einer Berechnung unterzogen. Er zeigte zunächst, dass die Versuche von Mitscherlich, Cahours, Wurtz und Troost und Hautefeuille über die Dampfdichten des reinen oder mit Luft gemischten Phosphorpentachlorids in der Regel mit genügender Annäherung durch die Formel

$$\log \frac{3\cdot 6(D-3\cdot 6)}{(7\cdot 2-D)^2} = \frac{5441}{t_c+273} + \log p - 14\cdot 353. \qquad 5)$$

[1] Die Versuche von Friedel über den Chlorwasserstoff-Methyläther bespreche ich in einer besonderen Mittheilung.

[2] Ber. der Deutschen chem. Gesellsch., 3, 573 (1870); Comptes rendus, 76, 601 (1873).

[3] American Journal of Science and arts. III. Series, 18, 383 (1879).

dargestellt werden können, wo D Dampfdichte, t_c Temperatur in Celsiusgraden und p Druck in Millimetern Quecksilber bedeutet.

Für die Partialdrucke beim Gleichgewicht gilt daher die Formel

$$\log \frac{p_5}{p_2 p_3} = \frac{5441}{t_c + 273} - 13 \cdot 751,$$

wo p_2, p_3 und p_5 die Partialdrucke von Cl_2, PCl_3 und PCl_5 bedeuten.

Gibbs führte in letztere Formel den Gesammtdruck p und die Drucke P_2 und P_3 ein, welche die zum Aufbau des Systems nöthigen Mengen von Chlor und Phosphortrichlorid im gleichen Volum bei der gleichen Temperatur haben würden, und erhielt so die Gleichung

$$\log \frac{P_2 + P_3 - p}{(p - P_2)(p - P_3)} = \frac{5441}{t_c + 273} - 13 \cdot 751,$$

welche aus den Beobachtungen von Wurtz den Gesammtdruck des Systems zu berechnen gestattet.

Gibbs verglich diese berechneten Drucke mit den aus den Angaben von Wurtz über den Barometerstand und die bei den Dichtebestimmungen zurückgebliebenen Luftreste abgeleiteten und fand, dass die berechneten Drucke durchschnittlich um 18 *mm* oder etwas mehr als 2% höher waren als die beobachteten. Er schätzte die Abweichungen des (wie bei allen Dämpfen zu kleinen) Productes von Druck und Volum vom theoretischen Werth beim Phosphortrichlorid zwischen 160 bis 180° unter einer Atmosphäre Druck auf etwas mehr als 3% und kam daher zu dem Schlusse, dass die Abweichungen der Drucke von den berechneten Werthen in derselben Richtung liegen und ungefähr von dem Betrage sind, wie man erwarten muss. Er machte ferner darauf aufmerksam, dass die von Wurtz beobachtete Übereinstimmung zwischen den gefundenen Dampfdichten des Phosphorpentachlorids und den für unzersetztes Pentachlorid berechneten nach den Versuchen von Troost und Hautefeuille darauf beruht, dass die zu geringe Dichte des Phosphorpentachlorids durch die zu grosse des Trichlorids mehr oder weniger ausgeglichen wird, sagte

aber doch schliesslich, dass das Ergebniss der Versuche von Wurtz, die Dissociation des Pentachlorids könne (wenigstens annähernd) durch Mischung mit viel Trichlorid verhütet werden, nicht entkräftet sei.

Es fragt sich nun, ob die Schlussfolgerung von Wurtz und Gibbs, das Phosphorpentachlorid sei (nach Gibbs wenigstens annähernd) unzersetzt geblieben, vereinbar ist mit der im Vorigen gegebenen Gleichung 4), welche den endlichen Grenzwerth angibt, dem sich der Dissociationsgrad bei steigendem Überschusse von Phosphortrichlorid unter constantem Drucke nähert. Dies ist umsomehr zu prüfen, als Wurtz keineswegs sehr grosse Überschüsse anwendete.

Die Antwort ergibt sich aus der Berechnung der zu erwartenden Dissociationen auf Grund der Formel 2*b*). Die hiezu nöthigen Dissociationsgrade (α) bei Abwesenheit eines Überschusses von Trichlorid lassen sich aus der durch die Beobachtungen bestätigten, hier unter 5) angeführten Gibbs'schen Formel ableiten, indem man $D = \frac{7 \cdot 2}{1+\alpha}$ einführt. Man erhält so

$$\log \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{5441}{t_c+273} + \log p - 13 \cdot 751.$$

Als Druck ist nicht der von Wurtz abgelesene Barometerstand einzusetzen, sondern es ist der Partialdruck der zurückgebliebenen Luftreste unter den Bedingungen beim Zuschmelzen des Ballons abzuziehen. Diese corrigirten Drucke wurden bereits von Gibbs berechnet; ich habe sie daher seiner Tabelle entnommen.

(Durch Extrapolation aus den von Cahours bei 182°, 190° und 200° unter Atmosphärendruck beobachteten Dampfdichten würde man höhere Dissociationswerthe erhalten. Indess sind die Dampfdichten bei 182° und 190° entsprechend den Ausführungen von Gibbs[1] als fehlerhaft zu betrachten.)

Die Molekülzahlen μ und μ_1 habe ich direct aus den Wurtz'schen Analysen berechnet, während Gibbs P_2 und P_3 aus den Angaben über Dampfdichte und Partialdruck des

[1] L. c. S. 382.

Phosphorpentachlorids ableitete. Bei jenen sieben Versuchen, bei welchen Wurtz nicht bloss das Chlor, sondern auch den Phosphor bestimmte, habe ich diese Angaben benützt. Bei den fünf anderen Versuchen mussten neben den Chlorbestimmungen die Gewichte des Balloninhaltes benutzt werden. Da Angaben über Luftfeuchtigkeit und Barometerstand beim Wägen nicht vorliegen, wurde das (über ein Drittel des scheinbaren Gewichtes ausmachende) Gewicht der verdrängten Luft unter der Annahme trockener Luft und mit dem angegebenen, jedenfalls auf die Zeit des Zuschmelzens bezüglichen Barometerstand berechnet. Wo Phosphorbestimmungen vorliegen, unterscheiden sich zwar die nach beiden Arten berechneten Gesammtgewichte nur um Milligramme, wie auch Wurtz hervorhebt. Die μ jedoch werden naturgemäss stärker beeinflusst.

Aus den berechneten Dissociationsgraden wurden die nach der Theorie zu erwartenden Dampfdichten berechnet. Zum Vergleich sind auch die α_∞ beigesetzt.

Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Es bedeuten:

Nr. die Versuchsnummer von Wurtz; jene Versuche, bei denen auch Phosphorbestimmungen gemacht wurden, sind durch einen Stern gekennzeichnet;

t die Versuchstemperatur in Celsiusgraden;

p den Druck des aus PCl_5, PCl_3 und Cl_2 bestehenden Systems bei der Dampfdichtebestimmung nach Gibbs (Barometerstand weniger Druck des Luftrestes);

α den Dissociationsgrad des reinen PCl_5 beim Druck p und der Temperatur t;

α_∞ den Dissociationsgrad des mit einem sehr grossen Überschusse von PCl_3 gemischten PCl_5 unter denselben Umständen;

$\frac{\mu_1}{\mu}$ das Verhältniss der zum Aufbau des Systems nöthigen Molekülzahlen von PCl_3 und PCl_5;

α_1 den berechneten Dissociationsgrad;

D_1 die berechnete Dampfdichte;

D die von Wurtz gefundene Dampfdichte;

Δ die Differenz zwischen gefundener und berechneter Dampfdichte.

Nr.	t	p	a	a_∞	$\frac{\mu_1}{\mu}$	a_1	D_1	D	Δ
I	165·4	760·0	0·167	0·028	2·876	0·037	7·0	7·25	0·25
II	164·9	758·5	0·165	0·027	1·200	0·048	6·9	7·38	0·5
III *	174·28	742·7	0·221	0·049	2·5431	0·0666	6·8	7·74	0·9
IV *	175·26	756·3	0·227	0·051	1·5881	0·0798	6·7	7·06	0·4
V *	175·26	743·3	0·229	0·052	1·0712	0·0932	6·6	7·03	0·4
VI	170·34	751·2	0·196	0·038	2·853	0·0510	6·9	8·30	1·4
VII	176·24	751·0	0·234	0·055	0·860	0·105	6·5	6·88	0·4
VIII *	169·35	724·1	0·194	0·038	0·7113	0·0811	6·7	7·16	0·5
IX *	160·47	753·5	0·143	0·021	2·0124	0·0304	7·0	7·44	0·4
X *	165·4	748·4	0·169	0·028	0·9552	0·0550	6·8	6·80	0
XI	175·75	760·0	0·229	0·053	1·396	0·090	6·6	7·00	0·4
XII *	173·29	756·1	0·214	0·046	0·8615	0·0894	6·6	6·68	0·1

Es ergibt sich, dass die von Wurtz erhaltenen Dampfdichten (wenn man von dem stark abweichenden Versuch Nr. VI absieht) durchschnittlich um 0·4 Einheiten höher sind als die berechneten.

Dieser Unterschied kann jedenfalls durch die Abweichungen von den idealen Gasgesetzen erklärt werden, da hiefür Abweichungen von wenigen Procenten ausreichen. Dass diese Erklärung zulässig ist, geht aus den Versuchen von Troost und Hautefeuille[1] über die Dampfdichte des mit Chlorkohlenstoff vermischten Chlorsiliciums hervor. Für eine genauere Schätzung der Beeinflussung der Wurtz'schen Ergebnisse durch die Abweichungen von den Gasgesetzen liegen keine ausreichenden Grundlagen vor. Es sind nämlich nicht bloss die Abweichungen beim reinen Phosphortrichloriddampf zu berücksichtigen, die von Gibbs wohl zu hoch veranschlagt worden sind, da der Partialdruck des Phosphortrichlorids bei den Versuchen im Mittel etwa 400 *mm* betrug. Nimmt man mit Gibbs bei Atmosphärendruck 3% Abweichung an, so hat man bei 400 *mm* etwa 1·6%, entsprechend 7 *mm* Druckverminderung.

[1] Jahresber. für Chemie, 1876, S. 28.

Es kommen aber noch die Abweichungen beim Phosphorpentachloriddampf selbst in Betracht und insbesondere die durch die Arbeiten von Andrews, F. Braun[1] und Margules[2] beleuchtete Thatsache, dass die Abweichungen in Gasgemischen, deren beide Bestandtheile Abweichungen im selben Sinne zeigen wie Luft, grösser sind als die Summen der Abweichungen der einzelnen Gase.

Übrigens ist auch der Einfluss der Versuchsfehler auf die Dampfdichte des Phosphorpentachlorids sehr bedeutend. Bei Versuch III z. B. macht ein Analysenfehler von 0·3% des erhaltenen Chlorsilbers die Dampfdichte um 0·3 Einheiten fehlerhaft, ein Fehler von 0·5% im Gesammtgewicht von PCl_5 und PCl_3 ebenfalls um 0·3. Es sind auch diesbezüglich constante Fehler (z. B. eine kleine Ungenauigkeit des Titers der Silberlösung) nicht ausgeschlossen.

Die unwahrscheinliche Annahme, dass bei den Dampfdichtebestimmungen das Gleichgewicht nicht erreicht worden sei, oder mit anderen Worten, dass die Dissociation des Phosphorpentachlorids bei 160—180° mit messbarer Geschwindigkeit vor sich geht, braucht bei dieser Sachlage nicht herangezogen zu werden.

In der Ableitung der Formeln 1) bis 4) stecken die idealen Gasgesetze nur insofern, als sie eine Voraussetzung für die strenge Giltigkeit des Massenwirkungsgesetzes sind. Da aber dieses Gesetz auch bei Nichterfüllung der Gasgesetze erfahrungsgemäss recht annähernd richtig ist, ist anzunehmen, dass die berechneten Dissociationswerthe α_1 sich von den thatsächlich vorhandenen nicht weit entfernen, dass also Wurtz keinen undissociirten Phosphorpentachloriddampf in Händen hatte, sondern 3—10% desselben dissociirt waren. Die jetzt ohnehin der Geschichte angehörige Bedeutung seiner Versuche für die Frage der abnormen Dampfdichten wird dadurch nicht erheblich geschmälert.

[1] Wied. Ann., *34*, 943 (1888).

[2] Diese Sitzungsber., Abth. II.a, *97* (Nov. 1888) und *98* (Juni 1889).

Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1853 I

von

Dr. **Berthold Cohn.**

(**Vorgelegt in der Sitzung am 12. Jänner 1899.**)

§. 1.

Der Komet 1853 I wurde am 6. März 1853 von Secchi in Rom und unabhängig davon von Schweizer in Moskau, Tuttle in Cambridge (Mass.) am 8. und von Hartwig in Leipzig am 10. März entdeckt. Bei der Entdeckung stand der neue Himmelskörper im Sternbilde des Hasen; er bewegte sich dann in nordwestlicher Richtung durch den Orion, wo er gegen Mitte April in Folge der raschen Abnahme seiner Helligkeit zum letztenmal beobachtet werden konnte. Auf der Sternwarte zu Leiden ist er zwar noch am 28. April gesehen worden, eine Messung seiner Position vorzunehmen, war aber unmöglich.

Wie aus den Berichten der Beobachter hervorgeht, zeigte sich der Komet als ein sehr heller Nebel mit einzelnen hellen Punkten. Da die letzteren namentlich beim Ein- und Austritt des Gestirnes gut gesehen werden konnten, so mussten sie natürlich die Beobachtungen mit dem Kreismikrometer nachtheilig beeinflussen. Kurz nach der Entdeckung wurde die Erscheinung sogar wahrgenommen, wenn der Komet mitten im Gesichtsfeld stand. Der Kern selbst schien sehr ausgebreitet und hatte einen Durchmesser von circa 3 Minuten. Auf der südlichen Halbkugel hätte der Himmelskörper mit dem blossen Auge gesehen werden müssen, worüber aber nichts bekannt geworden ist. Er näherte sich der Erde im Perihel bis auf

0·380; nehmen wir an, dass die Lichtintensitäten sich verhalten wie $\frac{1}{r^2\Delta^2}$, so wird das Verhältniss der Helligkeiten des Kometen beim Durchgang durch das Perihel, bei der Entdeckung und bei seiner letzten Beobachtung durch die Zahlen gegeben, deren Logarithmen 0·76, 0·40, 9·60 sind.

Die Bahn des Kometen 1853 I ist schon wiederholt gerechnet worden. Es sind nicht weniger als 5 parabolische Elementensysteme aus nur je 3 Beobachtungen von d'Arrest, Bruhns, Tuttle, Marth und v. Reedtz abgeleitet worden, die sich in den Astronomischen Nachrichten und im Astronomical Journal veröffentlicht finden. Eine die ganze Beobachtungsreihe umfassende Bahn hat Hartwig hergeleitet; er kommt dabei zu dem Schlusse, dass eine Ellipse mit einer Umlaufszeit von 1215 Jahren die Beobachtungen besser darstellt als die Parabel. Lindelöf, dem die Ähnlichkeit zwischen den Elementen des Kometen 1664 mit dem unserigen aufgefallen war, hat dann auf Grund einer eingehenden Untersuchung in der Abhandlung: »De orbita cometae, qui anno 1664 apparuit« dargethan, dass die vermuthete Identität nicht wahrscheinlich sei; er hat ausserdem aus ausschliesslich Pulkowaer Beobachtungen eine parabolische Bahn für unseren Kometen gerechnet. Auch Hornstein hat über denselben Gegenstand eine etwas ausführlichere Abhandlung geschrieben. Dieselbe ist enthalten in diesen Sitzungsberichten, XII, S. 11; in einer zweiten, kürzeren Abhandlung, die sich ebendaselbst S. 320 findet, beschäftigt er sich mit der von Lindelöf vermutheten Identität der beiden genannten Himmelskörper. Wir werden im Laufe dieser Arbeit Veranlassung haben, auf die Hornstein'schen Untersuchungen mehrmals zurückzukommen. Der Grund, warum ich eine nochmalige definitive Bahnbestimmung desselben Kometen für nicht überflüssig halte, liegt darin, dass Hornstein eine Reihe von Beobachtungen nicht hat benutzen können, weil sie erst später veröffentlicht worden sind. Ausserdem sind die Positionen der Vergleichssterne seit jener Zeit durch die in den letzten Jahrzehnten erschienenen Sternkataloge nicht unwesentlich verbessert worden, so dass die Beobachtungen einen erhöhten Grad von Genauigkeit erlangen

dürften, und schliesslich schien mir die von Hornstein durchgeführte Untersuchung bezüglich der Identificirung mit dem Kometen 1664 nicht einwandfrei, worüber wir im Verlaufe der Arbeit zu sprechen haben werden.

Am Schlusse dieser einleitenden Worte möchte ich Herrn Prof. Weiss, dem ich die Anregung zu der Bearbeitung dieses Themas zu verdanken habe, und der mir während derselben mit Rath und That zur Seite gestanden hat, öffentlich meinen innigsten Dank abstatten.

§. 2.

Zur Herleitung einer Ephemeride habe ich das folgende parabolische Elementensystem zu Grunde gelegt, welches Hornstein mit Rücksicht auf alle ihm zugänglichen Beobachtungen als das wahrscheinlichste bezeichnet hat.

Perihelzeit: 1853, Febr. 24·04189 m. Z. B.

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 275^\circ\ 50'\ 24''5 \\ \Omega &= \ \ 69\ \ \ 54\ \ \ \ 4\cdot4 \\ i &= 159\ \ \ 44\ \ \ 52\cdot4 \end{aligned}\right\}\ \text{m. Aeq. } 1853\cdot0$$

$\log q = 0\cdot038272$

Ich habe die Rechnung von 2 zu 2 Tagen direct geführt und in diesen Intervallen die Logarithmen der Entfernungen des Kometen von der Sonne, beziehungsweise der Erde, sowie die Aberrationszeit angegeben und zur Erleichterung der Vergleichung mit den Beobachtungen die auf das wahre Äquinoctium bezogenen Örter des Kometen für den mittleren Berliner Mittag eines jeden Tages innerhalb der Beobachtungszeit interpolirt. Die Sonnencoordinaten wurden ebenfalls von 2 zu 2 Tagen direct aus den Leverrier'schen Sonnentafeln berechnet, die Sonnenbreiten wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt, und die Grössen *f, G, g* dem Berliner Jahrbuch für 1853 entnommen. Es schien nicht nöthig, die Ephemeride in kürzeren als täglichen Zeiträumen zu interpoliren, da zur Herleitung derselben für die Zeit der Beobachtung, selbst in den ersten Tagen, als die Bewegung des Kometen eine raschere war, die vierten Differenzen sowohl in Rectascension, als in Declination vernachlässigt werden konnten.

Sonnencoordinaten.

Datum	L	R	X	Y	Z
März 6	345°50′37″03	0·9928416	+0·9626692	−0·222750	−0·096662
8	347 50 29·11	33775	0·971096	0·191931	0·083288
10	349 50 13·28	39166	0·978322	0·160880	0·069814
12	351 49 50 53	44574	0·984364	0·129632	0·056254
14	353 49 20·47	50004	0 989222	0·098224	0·042624
16	355 48 42·57	55453	0·992885	0·066698	0·028943
18	357 47 57·41	60945	0·995362	0·035089	0·015227
20	359 47 4·98	66485	0·996644	−0·003435	−0·001491
22	1 46 5·60	72086	0·996735	+0·028227	+0·012249
24	3 44 59·00	77763	0·995640	0·059860	0·25976
26	5 43 44 68	83526	0·993370	0·091424	0·39673
28	7 42 21·74	89359	0·989915	0 122877	0·053322
30	9 40 49·42	95253	0 985292	0·154181	0·066907
April 1	11 39 7·39	1·0001163	0·979504	0·185297	0·080409
3	13 37 15·95	07953	0·972514	0·216359	0·093889
5	15 35 15·72	12907	0·964464	0·246822	0·107108
7	17 33 6 60	18704	0·955230	0·277161	0·120274
9	19 30 49·54	24424	0·744862	0·307173	0·133297
11	21 28 24·62	30058	+0·933380	+0·336840	+0·146265

Ephemeride.

Datum	α app.	δ app.	log r	log Δ	Aberr. Zeit
März 6	4ʰ 53ᵐ 46ˢ11	−16°46′ 24″2	0·043100	9·767382	4ᵐ 47ˢ5
7	51 13·44	14 20 40·9			
8	49 0·16	12 8 57·7	0·045195	9·805570	5 18·3
9	47 3·30	10 9 37·4			
10	45 20·05	8 21 13·7	0·047642	9·847547	5 50·6
11	43 48·61	6 42 29·7			
12	42 27·21	5 12 17·2	0·050428	9·886977	6 23·9
13	41 14·55	3 49 38·2			
14	40 9·51	2 33 41·8	0·053537	9·923815	6 57·9
15	39 11·14	1 23 42·9			
16	38 18·71	− 0 19 2·1	0·056950	9·958155	7 32·3
17	37 31·56	+ 0 40 54·3			
18	36 49·09	1 36 36·1	0·060653	9·990157	8 6·9
19	36 10·80	2 28 28·2			
20	35 36·40	3 16° 54·0	0·064625	0·020055	8 41·5
21	35 5·40	4 2 13·5			
22	34 37·68	4 44 45·0	0·068849	0·047878	9 16·1
23	34 12·80	5 24 43·0			
24	33 50·51	6 2 21·5	0·073306	0·073950	9 50·4
25	33 30·55	6 37 53·0			
26	33 12·87	7 11 28·3	0·077977	0·098376	10 24·6
27	32 57·33	7 43 17·4			
28	43·83	8 13 28·5	0·082842	0·121278	10 58·4
29	32·13	8 42 9·9			
30	21·87	9 9 26·7	0·087885	0·142820	11 31·9
31	13·25	9 35 26·3			
April 1	6·23	10 0 18·1	0·093087	0·163085	12 5·0
2	0·99	10 24 6·8			
3	31 57·13	10 46 52·1	0·098431	0·182227	12 37·6
4	53·71	11 8 36·7			
5	51·10	11 29 26·3	0·103900	0·200205	13 9·7
6	49·76	11 49 27·3			
7	50·49	12 8 48·7	0·109478	0·217230	13 41·2
8	51·80	12 27 25·2			
9	54·05	12 45 18·8	0·115155	0·233334	14 12·3
10	57·62	12 52 37·6			
11	32 1·22	+13 9 17·0	0·120912	0·248630	14 42·8

§. 3.

Die folgenden Örter der Vergleichssterne beziehen sich auf das mittlere Äquinoctium des Jahres 1853·0. Die Präcession wurde mit Hilfe der Struve'schen Constanten aus der von Prof. Becker in Strassburg herausgegebenen Tafel zur Berechnung der Präcession ermittelt, die Reduction auf den scheinbaren Ort mit Hilfe der bekannten Formeln und der im Berliner Jahrbuch für 1853 veröffentlichten Werthe für f, g, G u. s. w. vorgenommen. Es wurden fast sämmtliche mir zugängliche Kataloge benutzt. Bei der Herleitung des angenommenen Ortes wurde den älteren Katalogen gegenüber den neueren nur ein sehr geringes Gewicht gegeben, der Katalog von Lalande nur zur Ableitung einer sich bemerkbar machenden Eigenbewegung benutzt; deshalb konnten auch die von Auwers in den A. N., Bd. 134 und 143 veröffentlichten Tafeln zur Reduction von Sternörtern auf das System des Fundamentalkatalogs enthaltenen Correctionen unberücksichtigt bleiben, da sie nur für die älteren Kataloge eine merkbare Grösse erreichen. Von den Sternwarten Cambridge (Mass.), Nicolajew, Strassburg, Wien (Ottakring) wurden mir die Örter der Sterne mitgetheilt, welche in den an ihnen beobachteten Zonen vorkommen und noch nicht publicirt sind. Ich nehme an dieser Stelle gern Veranlassung, den Directoren der betreffenden Institute für ihre Freundlichkeit zu danken.

Was die in Bessel's Zonen enthaltenen Sterne betrifft, so wurden sie mit Hilfe der von Luther herausgegebenen neuen Hilfstafeln zur Reduction der Bessel'schen Zonenbeobachtungen auf 1825·0 reducirt; zur Verbesserung der Lalande'schen Sterne, respective zur Ermittelung ihrer Epoche wurden die in dem 5. Bande der Annalen der Wiener Sternwarte von Prof. Weiss veröffentlichten Tabellen benutzt.

Im Folgenden seien die von Argelander gewählten Chiffren erläutert, unter denen die Sternkataloge angeführt sind:

Br.	Katalog von Bradley, neu reducirt von Auwers.
Pi.	Piazzi's Katalog.
Ll.	Katalog von Lalande, herausgegeben von Baily.
BZ.	Bessel's Zonenbeobachtungen.
Rü.	Katalog von Rümker.
Si_2	Santini's Kataloge, enthaltend die Sterne von 0° bis +10°.
Si_4	Santini's Kataloge von 2706 Sternen.
Pulk.	Katalog von Otto Struve im 8. Bande der Pulkowaer Beobb.
Lam.	Zonenkataloge von Lamont, herausgegeben von Seeliger.
Schj.	Schjellerup Stjernefortegnelse.
Qu.	Katalog von Quetelet in den Annales de l'observ. de Bruxelles.
Par.	Pariser Katalog.
Gött. II	Sternkatalog von Klinkerfues, herausgegeben von Schur.
Jarn.	Jarnall-Frizby Katalog.
Glasg. I, Glasg. II	Die beiden Glasgower Kataloge von Grant
Gu.	Generalkatalog von Gould.
Gött.	Börgen und Copeland, Göttinger Katalog
IX y.	Nine year catalogue.
X y.	Ten year catalogue.
Rom.	Romberg's Katalog von 5634 Sternen.
Cinc.	Katalog von 2000 Sternen, beobachtet zu Cincinnati.
Rc.	Radcliffe's Katalog von 6424 Sternen, herausgegeben von Stone.

A.-G. Alb., Cam., Lpz., Nic., Str., Ott. die Zonenkataloge der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von den Sternwarten zu Albany, Cambridge, Leipzig, Nicolajew, Strassburg und Wien-Ottakring.

Nr.	Gr.	1855·0 α	1855·0 δ	Epoche 1800+	Zahl der Beobb.	Autorität	Gew.	Angen. Ort in α	Red. ad l. app.	Angen. Ort in δ	Red. ad l. app.
1	8	4h 25m 41s56	+10°12′ 15″3	22·1	1	B. Z. 53	1	4h 25m 41s57	1s05	+10°12′ 15″3	4″2
	9	41·58	15·3	62·1		Schj. 1455	1				
2	8·0	26 25·51	9 42 30·4	22·1	1	B. Z. 53	1	26 25·76	1·03	9 42 26·3	4·4
	8·0	25·89	24·6	68·1	2 3	Qu. 1756	2				
3	4·6	27 34·91	9 51 16·7			Br. 632		27 34·91	1·04	9 51 16·7	4·3
4	9	28 12·99	8 54 14·9	23·0	2	B. Z. 135, 53	1	28 12·98	0·99	8 54 13·9	4·6
	8·8	12·97	13·5	87·1	3 2	A. G. Lpz. 1693	3				
5	9	29 1·79	10 32 22·2	—4·0		Ll. 8691	0				
	8·3	2·10	20·2	70·8	4	A. G. Lpz. 1340		29 2·10	1·04	10 32 20·2	4·1
6	9	29 6·04	9 5 42·9	22·5	2	B. z. 53, 135	1	29 5·99	0·99	9 5 45·0	4·6
	9	5·97	46·0	62·0		Schj. 1474/75	2				
7	4·4	29 56·71	12 12 42·9			Br. 639		29 56·71	1·07 1·12	12 12 42·9	4·6
8		30 16·15	8 23 48·4	—6·1		Ll. 8733	0				
	8	16·35	44·3	70·9 73·9	2 3	Glasg. I, 1119	1	30 16·38	0·97	8 23 45·4	4·7
	8·8	16·41	46·5	74·0	2	Par. 5305	1				
9	9	30 37·69	9 53 36·9	22·1	1	B. Z. 53	1	30 37·64	1·01 1·03	9 53 36·2	4·3
	8·8	37·62	36·0	75·7	6	A. G. Lpz. 1742	3				

10	8	4h 30m 38s85	+ 7°52′30″3	23·0			1	B. Z. 135	1					
	8·4	38·60	38·2	87·1			2	A. G. Lpz. 1712	3	4h 30m 38s66		0s95	+ 7°52′38″5	4″9
11	7·5	30 55·38	12 42 37·5	—1·9				Ll. 8752	0					
	8	55·33	31·8	62·0				Schj. 1483	1	30 55·47		1·13	12 42 31 1	3·4
	7·8	55·52	30·1	72·5	74·6	2	3	Glasg. I, 1121	2					
	7·8	55·49	31·7	87·7	30·6	3	5	Glasg. II, 405	2					
12	8·9	30 57·84	9 20 35·8	22·1			1	B. Z. 53	1	30 57·75	0·98	1·01	9 20 36·4	4·4
	9	57·66	37·0			2	1	Rü. 1253	1					
13	7	31 7·73	7 34 34·5	—6·1				Ll. 8759						
	6·7	8·12	32·2			8	5	Pi. 146						
	7	8·73	29·2	21·9			1	B. Z. 36		31 8·67	0·91	0·97	7 34 29·5	5·0
	5·7	8·96	28·1	75·0	77·0		4	Glasg. I, 1122						
	5·5	8·87	28·3	86·3			3	X. y. 744						
14	9	31 19·65	12 50 5·0	23·0			1	B. Z. 137		31 20·19	1·15	1·16	12 50 1·1	3·4
	8·8	20·68	49 57·6	79·8			4	A. G. Lpz. 1350						
15	9	31 22·44	13 22 45·4	23·0			1	B. Z. 137	1	31 22·91		1·15	13 22 43·9	3·2
	9·1	23·00	43·6	69·7			3	A. G. Lpz. 1351	5					
16	9	31 39·98	9 35 44·4	22·1			1	B. Z. 53	1	31 39·74		1·01	9 35 27 0	4·4
	8·8	39·66	21·2	85·6			2	A. G. Lpz. 1724	3					
17	9	31 44·66	13 11 35·6	23·0			2	B. Z. 137	1	31 44·44		1·14	13 11 38·1	3·3
		44·33	39·4	62·1				Schj. 1489	2					

Nr.	Gr.	1853·0 α	1853·0 δ	Epoche 1800+	Zahl der Beobb.	Autorität	Gew.	Angen. Ort in α	Red. ad l. app.	Angen. Ort in δ	Red. ad l. app.
18	5·6	4h 31m 52s55	+11°54′ 15″7			Br. 646		4h 31m 52s55	1s09	+11°54′ 15″7	3″6
19	8·5	32 24·29	7 30 45·7	−6·1		Ll. 8797					
	8·9	24·78	26·8	23·0		B. Z. 135		32 24·97	0·93	7 30 26·7	5·0
	8·5	24·95	28·7	62·1		Schj. 1493					
	8·8	25·27	25·8	72·0		Par. 5346					
		25·38	25·6	90·2		Cinc. 507					
20	9	32 57·69	5 2 58·5	22·1	3	B. Z. 47, 51, 54	1	32 57·80	0·86	5 2 58·6	5·8
	9·2	57·86	58·7	81·1		A. G. Alb. 1363	2				
21	9	33 13·74	7 59 32·0	23·0	1	B. Z. 135	1	33 14·00	0·95	7 59 31·0	4·8
	8·7	14·08	30·7	84·1	1	A. G. Lpz. 1735	3				
22	9	33 45·48	7 32 16·6	23·1	1	B. Z. 135	1	33 45·89	0·92 0·94	7 32 19·0	5·0
	8·6	46·00	19·7	84·5	2	A. G. Lpz. 1738	4				
23	9	34 8·64	8 34 4·2	−6·1		Ll. 8843	0	34 9·20	1·00	8 34 0·7	4·6
	8·6	9·20	0·7	84·6	2	A. G. Lpz. 1740	1				
24	8	34 11·75	9 21 3·4	−4·0		Ll. 8845		34 12·18	1·00	9 21 1·0	4·4
	6	12·02	4·2			Rü. 1257					
	7·8	12·28	1·3	63·1 61·8	2 3	Par. 5376					
	7·8	12·38	20 57 7	70·3		Glasg. I 1135					
	8	12·36	58·7	88·7		Glasg. II 408					

25	8·9	4h 34m 14s11	+ 4°11′51″0	22·1		1	B. Z. 51	1	4h 34m 14s25	0s83	+ 4°11′48″5	0″1
	8·7	14·28	48·9	80·4			A. G. Alb. 1369	4				
26	7	34 32·40	+ 2 42 19·4	−1·9			Ll. 8865	0	34 32·84	0·80	2 42 17·4	6·6
	8	32·84	19·5	22·0		1	B. Z. 41	1				
	7·8	32·86	18·5	68·1		1	Par. 5382	2				
	7·9	32·81	15·3	80·1			A. G. Alb. 1371	2				
27	7·5	34 36·52	11 56 17·2	−1·9			Ll. 8859	1	34 36·74	1·09	11 56 13.6	3·6
	8·9	36·81	—	58·5		2	Par. 5388	2				
	8	36·81	10·1	23·0		1	B. Z. 137	1				
28	8·5	35 17·90	2 8 6·5				Ll. 8883	0	35 18·37	−1·05	2 8 8·2	7·0
	8·9	18·45	10·2	22·0		1	B. Z. 41	1				
	8·9	18·31	8·5	75·4		3	Par. 5400	2				
	8·9	18·26	8·8	78·7			Glasg. I 1143	2				
	8·0	18·45	8·5	80·0		4	Rom. 1068	2				
	8·0	18·43	7·5	80·4			A. G. Alb. 1376	2				
	8·5	18·36	8·4				Glasg. II 816	2				
29	9·1	35 23·39	1 55 7·3	80·0			A. G. Alb. 1377		35 23·39	0·77	1 55 7·3	6·8
30	8·9	36 6·73	3 11 51·9	22·0	2	2	B. Z. 41, 51	1	36 6·79	0·79	3 11 51·4	6·4
	7	6·83	51·7			2	Si_2 49	1				
	8·3	6·82	50·6	79·7			A. G. Alb. 1384	1				

Nr.	Gr.	1853·0 α	1853·0 δ	Epoche 1800+	Zahl der Beobb.	Autorität	Gew.	Angen. Ort in α	Red. ad l. app.	Angen. Ort in δ	Red. ad l. app.
31	6·0	4h 36m 16s66	+10°52′ 5″2	−3·0	1	Ll. 8898	0	4h 36m 17s31	0s98	+10°52′ 4″3	3″9
	6	16·55	5·0			Pi. 169	0		1·01		3·8
	6	17·38	7·3	22·1	1	B. Z. 53	0		1·03		3·8
	6	16·91	4·3		4 3	Rü. 1264	0				
	5·6	17·14	4·1	47·4		Pulk. 717	1				
	6	17·38	4·7	60·4 64·5	3 4	Qu. 1818	1				
	7	17·32	4·3	63·3 67·3	3 2	Yarn. 2064	1				
	6·7	17·36	4·6	70·0	1	Par. 5419	1				
	5·3	17·37	3·6	83·9	4	X. y. 761	1				
32	9	36 33·14	− 4 34 42·0	23·0	1	B. Z. 140	1	36 32·90	0·68	− 4 34 43·1	8·9
		32·84	43·4	89·0	2	A. G. Str.	4				
33	8	36 43·43	+ 7 50 20·9	23·0	1	B. Z. 135	1	36 43·46	0·92	+ 7 50 23·1	4·9
	8·9	43·47	23·7	84·4	3	A. G. Lpz. 1765	4				
34	8	37 0·52	2 55 51·3	−1·4		Ll. 8926	0	37 1·39	0·77	+ 2 55 51·8	6·5
	8	1·42	50·3	22·1	2	B. Z. 41, 51	1				
	8·9	1·43	52·5	72·0	2	Par. 5433	1				
	8·4	1·36	52·1	80·1		A. G. Alb. 1390	2				

35	8	4h 37m 10s01	+ 0°17' 39"6	6·0			Ll. 8931	0	4h 37m 9s40	0s73	+ 0°17' 32"0	6"3
	7·8	9·92	32·3	22·0		1	B. Z. 39	0				
	7·8	9·35	32·2	73·0	2	1	Par. 5437	1				
	7	9·45	31·6	85·0			A. G. Nic.	1				
	8	9·40	32·3	88·0 90·2	3	4	Glasg. II 411	1				
36	9	37 12·18	— 1 42 34·1	—2·9			Ll. 8936	0	37 12·32	0·68	— 1 42 35·7	8·0
	8	12·47	35·0	42·1		2	Lam. 1196	1				
	8·5	12·24		84·1			A. G. Nic.	2				
37	8	37 50·75	— 3 21 10·0	1·0			Ll. 8948	0	37 50·89	0·66	— 3 21 7·6	8·5
	8·9	50·89	7·6	76·1	4	3	Par. 5449	1				
38	3·6	38 9·28	— 3 31 40·1				Br. 657		38 9·28	0·73	— 3 31 40·1	7·1
39	9	38 25·32	+ 1 0 0·5	22·1		2	B. Z. 41, 51	1	38 25·29	0·73	+ 1 0 0·0	7·1 6·8
	8·9	25·28	0 0 59·8	79·1			A. G. Alb. 1401	2				
40	9	40 10·69	— 0 21 10·2	—6·0			Ll. 9021	0				
	8·3	10·11	18·0	68·0		2	Gött. 1314/5	1	40 10·25	0·69	— 0 21 16·2	7·5
	9	10·25	16·5	76·0	3	2	Par. 5490	1				
	8·2	10·32	15·2	84·4			A. G. Nic.	2				
41	8·9	40 57·98	— 2 7 47·7	22·1		1	B. Z. 50	0	40 58·39	0·66	— 2 7 50·4	14·4
		58·55	48·1	43·0		1	Lam. 1199	1				
	9·0	58·31	51·5	89·5			A. G. Nic.	2				

Nr.	Gr.	1853·0 α	1853·0 δ	Epoche 1800 +	Zahl der Beobb.	Autorität	Gew.	Angen. Ort in α	Red. ad l. app.	Angen. Ort in δ	Red. ad l. app.
42	8·3	4h 40m 45s76	— 0°39′ 20″5		1	Lam. 1198	1	4h 40m 45s82	0s69	— 0°39′ 20″2	9″4
	8	45·85	20·0		3	Gött. 1316/7 8	1				
	8·4	45·83	20·1	85·7		A. G. Nic.	2				
43	8·5	41 38·64	— 6 6 29·4	—2·2		Ll. 9061	0	41 39·02	0·59	— 6 6 38·3	11·4
	8·9	39·02	36·6	24·1	1	B. Z. 211	1				
	9	—	35·2	58·1	1	Par. 5516	2				
		39·04	41·9	91·1	2	A. G. Str.	3				
		39·01	37·3	93·6		A. G. Ott.	3				
44	9	41 48·75	— 7 22 17·7			Ll. 9068	0				
	9	49·02	18·2	77·0	1	Par. 5519	1	41 48·97	0·63	— 7 22 18·5	9·7
	8	48·94	18·6	91·8	3	Re. 1190	2				
45	4·6	42 36·24	+ 8 38 39·5			Br. 667		42 36·24	0·77	+ 8 38 39·5	6·8
46	8·5	44 8·34	— 3 23 37·8	1·0		Ll. 9135	0				
	9	8·67	42·2	23·0	1	B. Z. 140	1	44 8·53	0·63	— 3 23 45·7	8·5
	8	8·39	49·2	63·1 60·6	2	Par. 5560	1				
47	8·5	46 48·45	+ 9 54 45·9			Br. 679		46 48·45	0·91	+ 9 54 45·9	4·0
48	9	46 51·55	10 53 18·4	25·1	1	B. Z. 271	1	46 51·81	0·58	10 53 17·4	10·7
	9	51·91	16·1		4	Si_3 452	2				
	9	51·83	17·9	89·1	2	A. G. Cam.	3				

49	7	$4^h 46^m 50^s 85$	+ 7°32′ 20″6	0·1			Ll. 9243	0				
	7	51·32	15·5	23·0		1	B. Z. 135	1				
	6	51·16	13·0	69·0		3	IX y. 453	2	$4^h 46^m 51^s 01$	0ˢ86	+ 7°32′ 12″4	4″8
	7	50 80	11·5	70·9	2	4	Glasg. I 1195	2				
	6·7	50·92	11·8	81·0		1	Par. 5626	2				
	6·7	50·94	11·8	91·7		3	Glasg. II 430	2				
50	5·5	52 26·86	−16 36 39·1	−0·9			Ll. 9420	0	52 26·74	0·41	−16 36 27·6	
	6	26·91	30·1	69·4		2	Par. 5739	1				
	6	26·69	26·2	78·1	3	4	Gu. 5673	1				
	5·4	26·62	26·4	85·4 84·8		4	X y. 814	1				
51	7·5	53 54·35	−13 43 24·3	−0·9			Ll. 9460	0	53 54·75	0·43	−13 43 28·9	11·4
	8	54·59	26·6	24·1		1	B. Z. 214	1				
	8·9	54·79	28·9	68·5		2	Par. 5778	2				
	7	54·69	27·9	71·8	3	2	Qu. 1938	2				
	8·3	54·89	30·4	90·7			A. G. Cam.	3				
52	5·7	59 52·83	+ 8 18 10·0				Br. 711		59 52·83	0·88	+ 8 18 10·0	3·2

Bemerkungen: Nr. 4 ist Doppelstern; der angegebene Ort bezieht sich auf die hellere Componente.

Nr. 13: Aus den angeführten Örtern wurde die folgende jährliche Eigenbewegung abgeleitet: +0ˢ011 −0″06.

Nr. 14: Der Unterschied zwischen B. Z. und A. G. Lpz. wurde als Eigenbewegung angesehen und ergab +0ˢ018 −0″130.

Nr. 19: Bossert gibt für diesen Stern die Eigenbewegung $\Delta\alpha = +0^s011$ übereinstimmend mit der aus obigen Örtern abgeleiteten. Die im Katalog von Cincinnati angeführte Eigenbewegung scheint eine Folge falscher Reduction zu sein. Oudemans hält den Unterschied in den Declinationsangaben zwischen Ll. und B. Z. ebenfalls für E. B.; wie die neueren Kataloge zeigen, scheint bei Ll. ein Fehler vorzuliegen.

Nr. 24: Abgeleitete Eigenbewegung $\Delta\alpha = +0^s076$, $\Delta\delta = -0^s06$.

Nr. 35: Bei der Reduction der Beobachtung von März 16 in den Annalen der Wiener Sternwarte gibt Hornstein die Position von B. Z. in Rectascension zu $4^h 37^m 10^s 89$; es liegt unstreitig ein Rechenfehler von 1^s vor.

§. 4.

Die Beobachtungen der Kometen, welche sich in den Astr. Nachr., Berl. Beob. IV, Astr. J. III, Comptes rendus, Bd. 36 und in den Annalen der Wiener Sternwarte veröffentlicht finden, sind im Folgenden, nach den Sternwarten geordnet, zusammengestellt. Die Bedeutung der einzelnen Rubriken ist aus der jeder von ihnen gegebenen Überschrift klar. Zu bemerken wäre nur, dass die Zeit die mittlere Berliner Zeit, vermindert um die Aberrationszeit ist; die Parallaxe ist nach den von Kreutz im Anhange seiner Dissertation über den Kometen 1861 II gegebenen Hilfstafeln berechnet worden, denen die Sonnenparallaxe 8"848 zu Grunde liegt. Die Königsberger Beobachtungen am Heliometer vom März 29, April 1, 10, 11 wurden mit Hilfe der von Bessel im ersten Bande seiner Abhandlungen abgeleiteten Formeln neu reducirt. Für die Krakauer und die römischen Beobachtungen wurde die Differentialrefraction nach den Formeln von Krueger (A. N., Bd. 114) berechnet.

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
Altona: Beobachtungen von A. C. Petersen. A. N., Bd. 36, S. 196 und 260.						
März 13, 357665 St.	+ 2m 42s6					36
30, 360000	4h 32m 17s94	0s23	+ 9°18′ 49"8	4"7		12
März 30: Beob. nur in Rectasc.; die Beob. unsicher wegen nebeliger Luft.						
Berlin: Beobachtungen von C. Bruhns. Astr. Journ., III, S. 71; A. N., Bd. 36, S. 390; Berl. Beobb., IV, S. 155.						
März 11, 33949	4h 43m 19s37	0s33	— 6°11′ 9"7	9·9	10	43
12, 35027	42 0·77	0·34	— 4 42 44·6	9·3	10	32
13, 33462	40 51·80	0·36	— 3 23 29·1	8·8	11	46
19, 36017	35 57·96	0·30	+ 2 46 32·2	6·7		26
27, 34383	32 51·89	0·25	+ 7 53 36·2	5·0	8	33
28, 33397	32 38·98	0·22	+ 8 23 0·8	5·1	10	8
29, 34543	32 28·03	0·24	+ 8 50 11·8	4·9	6	4
30, 33342	32 18·47	0·23	+ 9 18 9·6	4·6	12	24

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
April 2, 35180	4h 31m 57s89	0s23	+10°31′ 58″9	4″3	10	5
8, 34567	31 52·41	0·21	+12 33 31·4	3·9	12	11
9, 34216	31 53·75	0·21	+12 51 14·6	3·6	12	14

März 29: Sehr dunstiges Wetter.

Bilk: Beobachtungen von Luther. A. N., 36, S. 259.

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 27, 37788	4h 32m 51s77	0s27	+ 7°54′ 48″0	5″0	9	10
28, 35523	32 39·29	0·25	+ 8 23 37·8	4·8	10	32

Bonn: Ringmikrometerbeobachtungen von Schoenfeld. A. N., 36, S. 373.

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 13, 36555	4h 40m 50s62	0s36	— 3°21′ 5″0	8″6	8	37
18, 35905	Stern — 1 12·37	0·30	Stern + 0 59·3	6·7	8	29
19, 33686	35 58·27	0·26	+ 2 44 55·7	5·4	9	30
27, 38774	32 51·30	0·28	+ 7 54 55·3	5·0	8	19
28, 35163	32 39·66	0·25	+ 8 23 33·7	4·8	7	8
29, 35118	32 27·59	0·25	+ 8 51 53·7	4·6	9	23
30, 35649	32 18·16	0·25	+ 9 18 48·3	4·5	8	12
31, 35718	32 10·11	0·24	+ 9 44 27·7	4·3	6	12
April 1, 36548	32 3·45	0·24	+10 9 3·0	4·3	8	9
2, 37061	Stern + 2 56·65	0·24	Stern — 0 1·2	4·2	1	5

»Es zeigten sich im Kometennebel mehrere helle Punkte, ohne dass sich sein Aussehen beim Fortrücken änderte. Dieser Umstand mag einen nachtheiligen Einfluss auf die Beobachtungen gehabt haben, obgleich ich mich stets bemühte, nur den hellsten Punkt des Kometen zu beobachten.«

Breslau: Beobachtungen von Galle. A. N., 36, S. 341.

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 30, 38328	4h 32m 18s68	0s26	+ 9°18′ 52″0	4″6	10	12
April 1, 35334	32 3·00	0·25	+10 9 9·1	4·4	8	1

Der Komet war an beiden Tagen bereits ziemlich schwach, und der Mittelpunkt desselben wenig bestimmt.

Cambridge Mass.: Beobachtungen von Tuttle. A. N., 36, S. 303; Astron. J., 3, S. 60 und 72.

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 8, 58382	4ʰ 46ᵐ 50ˢ27	0ˢ45	−10°59′ 48″4	10″3	7 6	48
8, 62258	46 45·54	0·56	−10 55 14·0	9·9	6 4	48
10, 52973	44 29·90	0·26	− 7 27 53·9	9·1	6 3	44
10, 57947	44 25·85	0·28	− 7 22 59·5	8·7	8 6	44
14, 55505	39 36·45	0·38	− 1 54 11·6	7·1	6 3	36
14, 63051	39 31·37	0·48	− 1 49 3·8	8·0	12 3	36
18, 62015	36 24·16	0·41	+ 2 9 36·3	5·7	5 4	28
22, 55901	34 23·23	0·31	+ 5 7 24·3	4·9	6 6	20
29, 59411	32 25·47	0·33	+ 8 57 45·3	4·0	4 2	4

Der Komet erscheint rund, an Helligkeit nach dem Mittelpunkte zunehmend, scheinbarer Durchmesser ungefähr 3 Minuten.

Durham: Beobachtungen mit dem Ringmikrometer am Fraunhofer'schen Equatoreal von Ellis. A. N., Bd. 37, S. 91.

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 29, 39392	4ʰ 32ᵐ 27ˢ55	0ˢ24	+ 8°52′ 47″6	5″4	4	4
29, 41667	32 27·38	0·31	+ 8 53 30·1	5·1	3	6
30, 38828	32 17·60	0·23	+ 9 19 22·1	4·8	6	24
30, 40948	32 16·73	0·24	+ 9 20 21·0	4·9	5	12
April 2, 39878	31 57·47	0·22	+10 33 59·1	4·5	2	5
6, 40913	31 49·70	0·21	+11 57 21·6	4·4	6	18
6, 42666	31 50·05	0·21	+11 57 46·3	4·3	3	27
8, 41197	31 52·34	0·21	+12 34 46·1	4·1	11	11

April 2: Beobachtung durch Wind und Wolken gestört. April 6 und 8: Komet schwer zu sehen.

Hamburg: Beobachtungen von Rümker. A. N., 36, S. 244 und 257.

M. Z. Berlin	α app.	P_α	δ app.	P_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 27, 34257	4ʰ 32ᵐ 52ˢ31	0ˢ24	+ 7°53′ 47″2	5″1	10	10, 13
28, 34343	32 39·95	0·23	+ 8 23 24·5	5·0	7	8
30, 34142	32 18·96	0·22	+ 9 18 45·4	4·7	12	12
31, 35217	32 10·29	0·28	+ 9 44 11·6	4·6	11	9, 16
April 5, 36112	31 50·89	0·21	+11 36 39·2	4·2	16	18

April 5: Komet ziemlich schwach.

Königsberg: Beobachtungen am Heliometer von Peters. A. N., 36, S. 244 und 39, S. 315.

M. Z. Berlin	α app.	p_α	δ app.	p_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 19, 37235	$4^h\ 36^m\ 0^s07$	0^s32	+ 2°46′ 48	6″2	1	34
26, 33339	33 7·07	0·25	+ 7 22 11	5·4	4	13
28, 30825	32 39·13	0·23	+ 8 22 31	5·1	8	21
29, 40997	Stern − 1 31·20	0·25	Stern + 27 47″4	5·2	4	12
April 1, 34976	Stern − 1 30·29	0·22	Stern − 14 36·2	4·6	8	9
10, 35970	Stern − 0 13·32	0·20	Stern + 3 23·8	4·1	4	17
11, 37231	Stern − 0 19·47	0·20	Stern + 12 56·8	3·9	4	17

März 19: Nur eine Einstellung mit der schwächsten Vergrösserung in einer Lage der bewegten Objectivhälften.
März 29: Komet bei den letzten Beobachtungen sehr schwach.
April 10: Komet sehr schwach, besonders im Anfang.
April 11: Komet ausserordentlich schwach, kaum zu sehen.

Krakau: Beobachtungen von Weisse. A. N., 40, S. 351.

M. Z. Berlin	α app.	p_α	δ app.	p_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 30, 33089	$4^h\ 32^m\ 21^s53$	0^s25	+ 9°16′ 24″5	3″5	4	24
April 1, 34052	32 9·30	0·25	+10 10 22·0	3·7	1	3
3, 33110	31 56·39	0·24	+10 51 47·5	3·4	2	31

Der Komet erschien ausserordentlich schwach.

Kremsmünster: Beobachtungen am Äquatoreal von Aug. Reslhuber. A. N., 36, S. 338.

M. Z. Berlin	α app.	p_α	δ app.	p_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
März 26, 33519	$4^h\ 33^m\ 8^s01$	0^s27	+ 7°22′ 11″1	4″9		13, 49
29, 31752	32 28·70	0·24	+ 8 50 49·4	4·4		13, 47
29, 32759	32 28·61	0·25	+ 8 51 2·2	4·4		24
April 1, 32925	32 4·72	0·25	+10 8 24·4	4·1		3
3, 34433	31 53·19	0·25	+10 54 7·0	4·0		7, 31
7, 35555	31 52·36	0·24	+12 15 29·6	3·7		7

Der Komet erschien als schwacher Nebel ohne auffallenden Kern und Schweif; am 7. April war der Komet nur mit äusserster Mühe zu erkennen.

M. Z. Berlin	α app.	p_α	δ app.	p_δ	Zahl der Vgl.	Vgl-:
Leiden: Beobachtungen von Oudemans. A. N., 37, S. 55 und S. 70.						
März 21, 35937	$4^h 34^m 55^s47$	0^s26	$+ 4°17' 43''2$	$6''1$		25
26, 37806	33 5·48	0·26	+ 7 23 21·2	5·2		22
26, 38795	Stern + 0 41·66	0·17	Stern − 6 26·1	5·2		19
28, 36675	32 39·15	0·25	+ 8 24 1·4	4·9		8
28, 39021	32 37·93	0·26	+ 8 24 46·0	5·0		8
29, 37896	32 27·31	0 25	+ 8 52 33·1	4·8		4
30, 35842	32 17·71	0·23	+ 9 18 54·1	4·6		24
30, 38342	32 17·43	0·24	+ 9 19 25·8	4·7		12
April 1, 36902	32 8·67	0·23	+10 12 32·4	4·4		9
9, 38821	31 54·55	0·15	+12 52 6·0	3·9		1
Liverpool: Beobachtungen am Äquatoreal von Hartnup. A. N., 36, S. 347.						
März 29, 38206	$4^h 32^m 27^s40$	0^s24	$+ 8°52' 32''1$	$4''9$		47
29, 39800	32 27·13	0·25	+ 8 52 56·5	4·9		47
April 2, 38724	31 58·15	0·18	+10 31 57·3	4·9		52
London, Regents park: Beobachtungen mit dem Fadenmikrometer von Hind. A. N., 37, S. 259.						
März 22, 34950	$4^h 34^m 28^s82$	0^s23	$+ 4°59' 3''4$	$5''8$		
23, 37306	34 4·29	0·16	+ 5 38 46·6	4·4		
25, 35528	33 53·54	0·24	+ 6 49 44·7	5·2		
Die Beobachtungen wegen hellen Mondscheins ungenau.						
Padua: Beobachtung von Trettenero. A. N., 37, S. 54.						
März 31, 33250	$4^h 32^m 9^s73$	0^s24	$+ 9°43' 54''2$	$4''0$	3	29, 45
Palsgaard: Beobachtungen von v. Reedtz. A. N., 36, S. 304.						
März 30, 36918	$4^h 32^m 16^s21$	0^s31	$+ 9°19' 52''0$	$5''0$	2	12

Der Durchmesser des etwas verwaschenen Kometennebels, in welchem der hellste Punkt nördlich vom Centrum zu stehen schien, wurde auf 3 bis 4 Bogenminuten geschätzt.

M. Z. Berlin	α app.	F_α	δ app.	F_δ	Zahl der Vgl.	Vglst.
Pulkowa: Beobachtungen von Otto Struve. Bull. phys. math., XI, S. 332.						
März 13, 25283	4h 40m 53s87	0s34	− 3°25′ 40″	9″0		
16, 26142	38 55·0	0·29	− 1 3 39	8·7		
19, 25319	36 1·53	0·19	+ 2 41 51	7·3		
20, 25350	35 27·73	0·24	+ 3 29 8	7·0		
Rom: Beobachtungen am Kreismikrometer von Secchi. Astr. journ., III. Astron. not., XIII: A. N., 36, S. 206 und 301; C. rend., Bd. 36, S. 659.						
März 6, 37120	4h 52m 45s85	0s55	−15°50′ 48″1	11″7	3	50
6, 40533	52 40·16	0·65	45 44·7	11·3	3	50
7, 35969	50 24·61	0·61	−13 31 34·2	10·5	5	51
7, 39379	50 40·66	0·45	39 20·5	11·3	5	51
14, 30871	39 50·15	0·29	− 2 4 28·6	7·1		41
17, 31275	37 19·21	0·32	+ 0 58 33·1	6·1		39
17, 32671	37 16·28	0·32	+ 0 59 54·7	9·8		39
29, 31967	32 27·67	0·27	+ 8 51 20·9	3·9	3	23
April 2, 33015	31 57·18	0·27	+10 31 43·0	3·5	4	31
5, 32584	31 50·14	0·28	+11 35 44·4	3·5	4	18
10, 34717	31 59·09	0·25	+13 8 43·2	3·1	4	14
11, 30962	32 1·89	0·23	+13 20 42·4	2·8		15
Washington: Beobachtungen am Äquatoreal mit dem Fadenmikrometer von J. Ferguson. A. N., 36, S. 302.						
März 14, 59580	4h 39m 33s89	0s30	−1°51′ 23″43	6″5	6	20
15, 58469	Stern + 2 5·17	0·41	Stern + 5 50·46	6·3	9	42
19, 61187	4 35 49·46	0·29	+2 58 33·02	5·2	10	20
19, 62026	35 49·26	0·19	+2 59 1·49	5·2	2	21
Wien: Beobachtungen am Refractor von Hornstein. Wiener Annalen, III. Folge 4; A. N., 36, S. 207 und 258.						
März 16, 31433	4h 38m 4s59	0s29	+ 0° 0′ 24″0	7″2	6	35, 40
29, 36750	32 27·93	0·29	+ 8 52 20·1	4·6	4	[illegible]
30, 33232	32 18·18	0·26	+ 9 18 21·5	4·3	4	12, 21
31, 31928	32 10·44	0·25	+ 9 43 33·2	4·2	8	[illegible]
April 1, 31787	32 3·53	0·24	+10 7 36·0	4·1	6	[illegible]
6, 34093	31 50·22	0·25	+11 56 7·0	4·0	12	[illegible]

März 30: Komet sehr schwach.

§. 5.

Das folgende Verzeichniss bringt die Beobachtungen in chronologischer Reihenfolge, ausserdem die Verbesserungen der Vergleichssterne, wie sie sich aus den schliesslich angenommenen Positionen ergeben haben. Unter den Rubriken Beobachtung minus Rechnung finden sich die diesbezüglichen Differenzen; in der ersten aber nur solche, welche für zwei verschiedene Beobachtungen gelten, die an demselben Tage von demselben Beobachter angestellt sind. Sie wurden zu einem Mittel vereinigt und die so erhaltenen Werthe erst in die zweiten Rubriken geschrieben.

	Datum	Verb. der Vglst.		Beob. — Rechn.		Datum	Beob. — Rechn.	
				$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Rom	März 6·37	$-0^{s}10$	$+11''3$	$-1^{s}30$	$-7''5$			
"	6·41	−0·10	+11·3	−1·69	+38·8	März 6·39	$-1^{s}50$	$+15''5$
"	7·30	+0·31	− 3·5	+0·88	− 7·2			
"	7·36	+0·31	− 3·5	+1·80	+ 7·6	7·33	+1·34	+ 0·2
Cambridge	8·58	+0·24	+ 2·5	+0·84	+16·9			
"	8·62	+0·24	+ 2·5	+0·70	+10·7	8·60	+0·77	+13·8
"	10·53	+0·12	− 0·9	+0·15	+ 3·4			
"	10·58	+0·12	− 0·9	+0·62	+ 3·1	10·55	+0·39	+ 3·3
Berlin		+0·16	− 6·7			11·34	−0·05	− 8·5
		−0·39	− 2·6			12·35	−0·11	− 6·6
Pulkowa						13·25	+0·21	−10·1
Berlin		−0·02	− 6·4			13·33	+0·19	+ 4·6

Altona						März 13·36	+0·05	—
Bonn		−0·36	+ 6·8			13·37	+0·67	+17·1
Rom		+0·46	−10·0			14·31	+0·03	+ 5·7
Cambridge	März 14·56	−0·21	− 2·4	+0·27	+ 7·8			
»	14·63	−0·21	− 2·4	+0·37	+ 1·8	14·59	+0·32	+ 4·8
Washington		−0·17	+ 2·5			14·60	−0·18	− 0·4
Pulkowa						15·26	+0·77	−11·5
Washington						15·58	+0·58	+ 2·3
Wien		−0·77	− 5·3			16·31	+0·79	+ 8·3
Rom	17·31	+0·06	− 1·8	+1·82	− 8·1			
»	17·32	−0·03	− 0·5	−0·63	+31·3	17·31	+0·60	+11·6
Bonn						18·36	+0·41	+28·0
Cambridge		−0·08	− 2·0			18·62	−0·38	+28·1
Pulkowa						19·25	+0·77	−10·8
Bonn		+0·01	− 2·3			19·34	−0·26	−11·2
Berlin		+0·13	− 3·4			19·36	+0·40	+18·0
Königsberg		0·0	− 2·1			(19·37	+2·83	− 0·8)
Washington	19·61	+0·04	− 2·3	+0·47	+ 8·1			
»	19·62	+0·03	+ 1·2	+0·45	+14·4	19·62	+0·45	+11·3
Pulkowa						20·25	+0·31	−14·5
Leiden		−0·10	− 3·4			21·36	+0·55	− 3·2
Cambridge		+0·11	+ 0·1			22·56	+0·21	+ 6·1
London						22·34	+0·37	+ 9·3

	Datum	Verb. der Vglst.		Beob.—Rechn.		Datum	Beob.—Rechn.	
				$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
London						•März 23·37	$+0^{s}25$	$-10''2$
»						25·36	−0·24	−11·9
Königsberg		−0·06	+ 0·3			26·33	−0·20	+ 0·5
Kremsmünster	•	+0·17	− 2·8					
Leiden	März 26·38			$+0^{s}72$	$+3''5$	26·34	+1·02	− 5·6
»	26·39			−0·45	−13·8	26·38	+0·13	− 5·6
Hamburg		0·0	− 1·1			27·34	+0·06	+ 2·8
Berlin		0·19	+ 2·4			27·34	−0·14	− 7·1
Bilk		−0·10	− 0·7			27·38	−0·06	− 5·5
Bonn		+0·37	− 4·5			27·39	+0·01	−15·0
Königsberg		+0·26	− 1·0			28·31	−0·43	− 6·5
Berlin		−0·11	+ 0·1			28·33	−0·65	− 7·1
Hamburg		+0·09	− 1·8			28·34	+0·64	− 1·6
Bonn		−0·07	− 1·4			28·35	+0·31	− 6·6
Bilk		−0·07	− 0·9			28·36	−0·02	− 8·3
Leiden	28·37	−0·07	− 1·6	+0·02	− 5·3			
»	28·39	−0·03	− 2·4	−0·91	− 2·0	28·38	−0·45	− 3·7
Rom		+0·62	−11·6			29·32	−0·12	+17·0
Kremsmünster	29·32	+0·16	− 0·1	+0·39	− 4·8			
»	29·33	−0·17	− 7·0	−0·10	−15·9	29·32	+0·15	−10·4
Berlin		+0·07	0·0			29·35	−0·13	−16·3

Bonn		+0·17	− 7·0			März 29·35	−0·34	− 4·9
Wien		+0·05	+ 0·2			29·37	+0·09	− 5·1
Leiden		+0·12	− 4·8			29·38	−0·38	− 6·7
Liverpool	März 29·38	+0·09	− 1·2	−0·34	− 9·0			
»	29·40	+0·09	− 1·2	−0·39	−10·9	29·39	−0·36	−10·0
Königsberg		−0·09	+ 0·6			29·40	+0·28	+ 8·0
Durham	29·39	−0·09	+ 0·6	−0·04	−11·7			
»	29·42	+0·08	− 0·2	+0·05	− 5·1	29·40	+0·01	− 8·4
Cambridge		+0·19	0·0			29·57	−0·13	+ 0·7
Krakau		+0·21	− 2·7			30·33	(3·14	105·3)
Wien		0·0	− 2·2			30·33	−0·39	+10·6
Berlin		+0·11	− 4·3			30·33	−0·01	− 4·9
Hamburg		0·0	− 0·4			30·34	+0·43	+22·7
Bonn		−0·07	− 0·9			30·36	−0·27	+ 0·9
Altona		+0·19	− 1·5			30·36	−0·22	+ 1·4
Palzgaard		+0·05	− 0·1			30·37	(−1·93	+46·2)
Leiden	30·36	+0·04	− 4·7	−0·62	+ 6·2			
»	30·38	−0·13	+ 0·6	−0·84	− 2·1	30·37	−0·73	+ 2·0
Breslau		+0·14	− 2·8			30·38	+0·44	+ 7·9
Durham	30·39	−0·11	− 4·8	−0·61	−18·8			
»	30·41	−0·02	0·0	−1·19	+ 5·0	30·40	−0·90	− 6·9
Wien		+0·08	− 2·8			31·32	−0·06	+ 4·9
Padua		−0·03	− 0·1			31·33	−0·79	− 8·5

	Datum	Verb. der Vglst.		Beob. — Rechn.		Datum	Beob. — Rechn.	
				$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Hamburg		−0·04	− 8·8			März 31·35	−0^{s}04	− 11″7
Bonn		−0·07	− 0·9			31·36	−0·27	+ 4·5
Wien		+0·28	− 4·2			April 1·32	−0·34	− 4·5
Königsberg						1·33	−1·16	− 2·9
Kremsmünster		+0·27	− 1·9			1·33	+0·91	+ 11·1
Krakau		+0·27	− 1·9			1·34	(+5·35	−114·1)
Breslau		+0·03	+ 0·3			1·35	−0·92	+ 23·7
Bonn		−0·58	− 1·7			1·37	−1·02	− 2·0
Leiden		0·0	− 0·8			1·37	(+4·79	−204·2)
Rom		+0·27	+ 3·5			2·33	−1·89	+ 5·8
Berlin		+0·33	− 2·2			2·35	−1·08	− 13·2
Bonn						2·37	−1·50	− 20·8
Liverpool		+0·02	− 0·6			2·39	−1·04	− 1·6
Durham		+0·30	− 2·2			2·40	−1·41	− 11·8
Krakau		+0·14	− 1·5			3·33	(+0·83	−141·2)
Kremsmünster		+0·12	− 1·3			3·34	−2·36	− 18·1
Rom		+0·05	− 0·6			5·33	−0·02	− 15·2
Hamburg		+0·08	+ 0·4			5·36	+0·75	− 1·3
Wien		−0·01	− 4·8			6·34	+0·62	− 1·8
Durham	April 6·41	−0·07	− 3·2	−0^{s}54	− 4″5			

Durham	April 6·43	−0·03	+ 0·9	+0^{s}32	+ 3$'$6	April 6·42	−0^{s}11	− 0$'$4
Kremsmünster		0·04	− 1·1			7·36	+1·70	− 1·6
Berlin		−0·22	− 5·7			8·35	−0·04	−11·4
Durham		−0·37	− 4·8			8·41	−0·41	− 6·8
Berlin		+0·56	− 4·0			9·34	−0·72	− 4·0
Leiden		+0·54	− 4·0			9·39	+0·07	− 6·5
Königsberg		−0·22	+ 2·5			10·30	−0·56	+ 9·5
Rom		+0·54	− 3·9			10·35	+1·42	+14·1
»		+0·47	− 1·5			11·31	+0·21	+ 8·3
Königsberg		−0·22	+ 2·5			11·37	+0·92	(−42·2)

Was die einzelnen Beobachtungen betrifft, so erkennt man, dass in den ersten Tagen nach der Entdeckung des Himmelskörpers, sowie am Schlusse seiner Sichtbarkeit die Differenzen ziemlich beträchtliche Abweichungen unter einander zeigen. Man wird dies aber ganz natürlich finden, wenn man bedenkt, dass in der ersten Zeit der Komet als sehr ausgebreiteter Nebel erschien und deshalb keine besondere Schärfe seiner Messungen erwartet werden kann. Späterhin wurde zwar der Kern in Folge der raschen Entfernung von der Erde immer kleiner, dafür musste aber die Abnahme seiner Helligkeit ungünstig auf die Beobachtung einwirken. Bei einem Kometen von so ungenauer Begrenzung kommt es, worauf schon Hornstein hingewiesen hat, eben hauptsächlich darauf an, welchen Punkt man als den Schwerpunkt, für den allein die Bahnelemente gelten, aufzufassen berechtigt ist.

Weiterhin ist zu bemerken, dass die Beobachtungen zu Cambridge vom März 6 und 8 die Rectascension um eine Zeitminute zu gross und die Declination um zwei Bogenminuten zu klein angegeben haben. Bei den römischen Beobachtungen von März 14 und April 11 ist die Differenz Komet—Stern in Declination mit

verkehrtem Zeichen angebracht worden, um eine Übereinstimmung mit der Ephemeride herzustellen. Die Leidener Beobachtung von April 1 stimmt durchaus nicht mit den übrigen Beobachtungen; dasselbe gilt von den in Krakau gemachten. Herr Prof. Karlinski hat die Freundlichkeit gehabt, die Krakauer Beobachtungen von Neuem auf Grund der Originaldaten zu reduciren; das Resultat wurde dadurch aber nur wenig geändert, und es ist mir nicht gelungen, die Ursache der starken Abweichungen zu entdecken. Weggelassen sind ferner wegen zu starker Abweichung von der Ephemeride die Beobachtungen zu Königsberg März 19 und April 11 in Declination, sowie die zu Palsgaard März 30.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass von den hier angeführten 109 Beobachtungen Hornstein in seiner Abhandlung nur 88 angibt.

§. 6.

Sämmtliche Beobachtungen wurden nun zu Tagesmitteln vereinigt, wobei, wie schon erwähnt wurde, die von einem Beobachter an einem Abend gemachten Beobachtungen zu einer zusammengezogen wurden.

Datum	Tagesmittel		
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Anzahl der Beobb.
März 6·39	−1ˢ50	+15ʺ5	1
7·33	+1·34	+ 0·2	1
8·60	+0·77	+13·8	1
10·55	+0·39	+ 3·3	1
11·34	−0·05	− 8·5	1
12·35	−0·11	− 6·6	1
13·03	+0·50	+ 3·9	4
14·50	+0·06	+ 3·4	3
15·42	+0·67	− 4·6	2
16·31	+0·79	+ 8·3	1
17·31	+0·69	+11·6	1

Datum	Tagesmittel		
	Δα	Δδ	Anzahl der Beobb.
März 18·49	+0·01	+28·0	2
19·39	+0·36	+ 3·7	4
20·25	+0·31	−14·5	1
21·36	+0·55	− 3·2	1
22·45	+0·29	− 7·7	2
23·37	+0·25	−10·2	1
25·36	−0·24	−11·9	1
26·35	+0·32	− 3·6	3
27·36	−0·03	− 6·2	4
28·35	+0·10	− 5·6	6
29·38	−0·09	− 2·6	10
30·36	−0·21	+ 2·9	8
31·34	−0·29	− 2·7	4
April 1·33	−0·51	+ 5·1	5
2·37	−1·38	− 8·3	5
3·33	−2·36	−18·1	1
5·35	+0·37	− 8·3	2
6·38	+0·26	− 1·1	2
7·36	+1·70	− 1·6	1
8·38	−0·23	− 9·1	2
9·37	−0·32	− 5·2	2
10·35	+0·43	+11·8	2
11·34	+0·57	+ 8·3	2, 1

Aus diesen Positionen wurden nun 6 Normalorte gebildet, wobei die zu einem Normalort gehörigen Beobachtungen im Druck kenntlich gemacht sind. Da mit März 9, 24, April 4 durch den gänzlichen Mangel an Beobachtungen Abschnitte gegeben sind und ausserdem auch darauf gesehen wurde, dass die Intervalle zwischen den einzelnen Orten möglichst gleich würden, so ergeben sich die folgenden 6 Normalorte:

			Δα	Δδ	Mittel aus Beobb.
I	März	6·44	+0ˢ17	+9″8	3
II	»	13·97	+0·37	+2·1	14
III	»	20·40	+0·29	+5·3	11
IV	»	28·24	+0·01	−4·9	24
V	»	31·78	+0·64	−1·0	23
VI	April	8·44	+0·31	−1·4	13, 12

Bringt man diese Differenzen an die Ephemeridenorte an und bezieht wegen des geringen Ganges der Correctionen die Zeiten auf den Mittag oder die Mitternacht des betreffenden Tages, so erhält man die folgenden, der weiteren Rechnung zu Grunde liegenden Orte:

			α	δ
I	März	6·5	4ʰ 52ᵐ 27ˢ95	−15° 31′ 31″4
II	»	14·0	40 10·25	− 2 33 39·1
III	»	20·5	35 20·86	+ 3 40 0·3
IV	»	28·0	32 44·17	+ 8 13 22·8
V	April	1·0	32 5·90	+10 0 16·2
VI	»	8·5	31 52·82	+12 36 24·2

§. 7.

Von diesen 6 Normalorten verdienen der erste und der letzte das geringste Zutrauen. Abgesehen davon, dass die Beobachtungen im Anfange und am Ende der Sichtbarkeit des Kometen sehr ungenau ausfallen mussten, beruhen gerade der erste und der letzte Normalort auf Beobachtungen von sehr wenigen Sternwarten, so dass etwaige constante Differenzen am meisten hervortreten. Ich habe es deshalb vorgezogen, anstatt wie Hornstein es gethan hat, durch den ersten und letzten, durch den zweiten und fünften Normalort eine neue Parabel zu legen und damit die übrigen Orte zu vergleichen. Es ergab sich das folgende Elementensystem:

Perihelzeit 1853, Febr. 24·06290 m. B. Z.

$\omega = 275° \; 51' \; 33''7$

$\Omega = 69 \; 33 \; 22·8$

$i = 159 \; 45 \; 5·6$

$\log q = 0·038306.$

Die Darstellung der Normalorte gestaltete sich wie folgt:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I	-0^s80	$+6''4$
II	$0\cdot00$	$+0\cdot6$
III	$+0\cdot03$	$+4\cdot4$
IV	$+0\cdot54$	$-4\cdot1$
V	$+0\cdot01$	$+0\cdot2$
VI	$+0\cdot51$	$+0\cdot9$

Da die grosse Differenz zwischen dem vierten und fünften Normalorte nicht herabgegangen ist, beide Orte aber unmöglich durch eine Parabel sich gut darstellen lassen werden, so schien es mir zweckmässig, den vierten und fünften Ort zu einem einzigen zusammenzuziehen, der somit die folgenden Differenzen in Beob.—Rechn. übrig liess:

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
IV, V	März $30\cdot0$	$+0^s32$	$-3''0$

Es wurde nun eine neue Parabel aus diesem und dem zweiten Normalorte gerechnet. Das Ergebniss sind die folgenden Elemente, die allerdings sehr wenig von den zuletzt angeführten abweichen.

Perihelzeit 1853, Febr. $24\cdot05855$ m. B. Z.

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 275^\circ\ 51'\ \ 4''1 \\ \Omega &= \ \ 69\ \ 33\ \ 14\cdot8 \\ i &= 159\ \ 45\ \ \ 7\cdot2 \end{aligned}\right\}\ \text{m. Aeq. } 2853\cdot0$$

$$\log q = 0\cdot038300$$

Die Darstellung der Normalorte zeigt sich in der folgenden Zusammenstellung:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I	-0^s80	$+7''3$
II	$-0\cdot01$	$+1\cdot6$
III	$-0\cdot03$	$+5\cdot8$
IV	$+0\cdot22$	$+1\cdot7$
V	$-0\cdot25$	$-2\cdot0$
VI	$+0\cdot78$	$+5\cdot7$

Diese Parabel stellt somit die Beobachtungen noch etwas besser dar als die frühere. Zwar lassen der erste und der letzte Normalort noch sehr grosse Differenzen, namentlich in Rectascension übrig; doch dürfte sich dieser Umstand erklären lassen, wenn man die römischen Beobachtungen von März 6 und 7, sowie von April 10 und 11 betrachtet. Mit Hilfe von Differentialformeln und durch Ausgleichung der Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate hätte sich wohl ein parabolisches System finden lassen, welches sämmtliche Orte besser darstellt. Ich habe diese Aufgabe aber nicht durchgeführt, da die Verbesserungen der einzelnen Elemente nur sehr minimal geworden wären und hielt es für rathsamer, die Hypothese, dass die Bahn des Kometen eine elliptische sein könne, näher ins Auge zu fassen.

§. 8.

Wie in §. 1 bemerkt wurde, hatte bereits Lindelöf die Vermuthung ausgesprochen, dass der Komet 1853 I mit dem hellen Kometen des Jahres 1664 identisch sein könne. Die Elemente des letzteren sind:

$$\begin{aligned} T &= 1664,\ \text{Dec. } 4\cdot4898 \\ \omega &= 310^\circ\,33'\,15'' \\ \Omega &= 81\quad 15\quad 52 \\ i &= 158\quad 41\quad 48 \\ \log q &= 0\cdot010948 \end{aligned} \quad \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{m. Aeq. } 1665$$

Bis auf die Neigung ist, wie man sieht, die Analogie zwischen den beiden Parabeln nicht sehr gross. Da aber die Genauigkeit der Beobachtungen der älteren Kometen viel zu wünschen übrig lässt, so wäre von vornherein die Identität beider Himmelskörper nicht ausgeschlossen. Hornstein kommt in seiner schon citirten Abhandlung allerdings zu dem Schlusse, dass durch die Annahme einer Ellipse mit einer Umlaufszeit von 189 Jahren die Beobachtungsfehler die Grenzen der Möglichkeit übersteigen würden, und in Folge dessen jene Identität unwahrscheinlich sei: er folgert vielmehr aus den Beobachtungen eine Umlaufszeit von mindestens 8396 Jahren. Da aber Hornstein von dem ersten und letzten Normalort ausgeht, so

schien es mir zweckmässig, unter Zugrundelegung des zweiten und des aus dem vierten und fünften gebildeten Normalortes eine elliptische Bahn zu rechnen. Im Wesentlichen bin ich dabei der Methode gefolgt, welche Hornstein bei der Bestimmung der Bahn des Kometen 1847 I angewandt hat (siehe diese Sitzungsberichte, XII, S. 303). Ich habe das M der Parabel entnommen und indem ich für ρ_1 eine Voraussetzung gemacht habe, ρ_3 sowie damit $r_1\, r_3$ und die Sehne s berechnet. Die Lambert'sche Gleichung gab dann das Mittel zur Hand, den richtigen Werth für ρ_1 zu finden. Mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$\frac{\cos\frac{v_1}{2}}{\sqrt{q}} = \vartheta_1$$

$$\frac{\sin v_1}{\sqrt{q}} = \frac{\vartheta_1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(u_1 - u_3)\sqrt{r_1}} - \frac{\vartheta_3}{\sin\frac{1}{2}(u_1 - u_3)\sqrt{r_3}},$$

worin

$$\vartheta_1 = \left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{r_1}{q} - 1}{\frac{a}{q} - 1}\right\}$$

ist und ϑ_3 einen entsprechenden Ausdruck hat, wurde $\frac{v_1}{2}$ und q indirect bestimmt und bei dem ersten Versuch q der Parabel entlehnt. Aus q und v erlangte ich mit Benutzung der Brünnow'schen Tafel (Astr. Journ., 23) die Grössen A, D und damit

$$V = v - A(100\,i) + D(100\,i)^2,$$

worin $i = \frac{1-e}{1+e}$ ist; mit Hilfe der Barker'schen Tafel wurde sodann die Perihelzeit gefunden. Ich erhielt das folgende Elementensystem:

$T = 1853$, Febr. 24·01830 m. B. Z.

$\omega = 275°\ 48'\ 21"7$ }
☊ $= 69\ \ 34\ \ 14·2$ } m. Aeq. 1853·0,
$i = 159\ \ 50\ \ 19·8$ }

$\log q = 0·037901$

$\log a = 1·517641$,

womit die Darstellung der Normalorte sich wie folgt ergab:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I	$+0^s61$	$+3''6$
II	$+0\cdot05$	$-1\cdot3$
III	$-0\cdot44$	$+5\cdot7$
IV	$0\cdot0$	$-0\cdot4$
V	$-0\cdot24$	$+4\cdot1$
VI	$+1\cdot02$	$+4\cdot2$

Sehen wir von der Rectascension des letzten Ortes ab, so werden die Normalorte durch die Ellipse besser dargestellt als durch die Parabel; es ist daher meine Ansicht, dass den Beobachtungen durchaus nicht eine Ellipse mit der Umlaufszeit von 189 Jahren widerspricht.

Bei älteren Kometen und namentlich solchen, die nur kurze Zeit hindurch beobachtet worden sind, wird die Unähnlichkeit zwischen den Elementen ihrer Bahn mit denen eines anderen Himmelskörpers nicht als Argument gegen ihre Identität angeführt werden können. Man wird dieselbe erst dann verneinen können, wenn die Beobachtungen des früheren Kometen, dargestellt durch die Elemente des späteren, also vermuthlich des genaueren, die Grenzen der vorkommenden Fehler übersteigen. Denn auch das bekannte Tisserand'sche Kriterium, welches die Gleichheit einer gewissen Beziehung zwischen der halben grossen Axe, dem Parameter und der Neigung für zwei periodische Kometen fordert, ist sozusagen nur ein negatives Prüfungsmittel — indem eine Nichtübereinstimmung nur gegen ihre Identität spricht, aber nicht umgekehrt —, abgesehen davon, dass die Grenzen jener Gleichheit ziemlich unbestimmt sind.

In unserem Falle ist die Wahrscheinlichkeit sehr gering, dass eine Identität zwischen den Kometen 1853 I und 1664 bestehe wegen des sehr grossen Unterschiedes in der Helligkeit beider Gestirne. Während der letztere zur Zeit der Entdeckung von der dritten Grösse war und während seiner grössten Erdnähe log $2(r\Delta)$ den Werth $8\cdot58$ erreichte, blieb der erste Komet des Jahres 1853 während der ganzen Dauer seiner Sichtbarkeit ein teleskopischer, und log $2(r\Delta)$ nahm im

Minimum die Grösse 4·61 an. Überdies hat Lindelöf sein in §. 1 schon erwähntes Resultat von der Unwahrscheinlichkeit der Annahme, dass beide Kometen dieselben seien, selbst mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter und die Erde gefunden. Leider konnte ich mir die Abhandlung: De orbita etc. nicht verschaffen.

§. 9.

Eine ziemlich auffallende Ähnlichkeit mit den Elementen des Kometen 1853 I zeigen auch diejenigen des dritten Kometen vom Jahre 1759. Die Bahn des letzteren, wie sie von Hind berechnet wurde, lautet:

$T = 1759$, Dec. 16·84757 m. B. Z.

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 301^\circ\ 21'\ 29'' \\ \Omega &= \ \ 79\ \ 50\ \ \ 4 \\ i &= 175\ \ \ 7\ \ 29 \end{aligned}\right\}\ \text{m. Aeq. } 1760{\cdot}0$$

$\log q = 9{\cdot}9848692$

Für den Fall, dass die Identität beider Kometen nachgewiesen werden könnte, wäre die für den Kometen 1664 ausgesprochene Annahme von umso grösserer Bedeutung, weil dann 1759, 1664, 1853 vielleicht drei Erscheinungen desselben Himmelskörpers sein würden.

Ich habe nun, ausgehend von einer Umlaufszeit von 93·2 Jahren, nach dem in §. 8 angegebenen Verfahren elliptische Elemente für den Kometen 1853 bestimmt. Dieselben sind:

$T = 1853$, Febr. 24·01625

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 275^\circ\ 47'\ \ 1''{\cdot}0 \\ \Omega &= \ \ 69\ \ 34\ \ 47{\cdot}0 \\ i &= 159\ \ 53\ \ 38{\cdot}3 \end{aligned}\right\}\ \text{m. Aeq. } 1853{\cdot}0$$

$\log q = 0{\cdot}037644$

$\log a = 1{\cdot}3129439.$

Die Normalorte wurden hiemit, wie folgt dargestellt:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I	+1ˢ68	+21"6
II	−0·11	+ 0·7
III	−0·75	+ 5·6
IV	−0·03	− 1·8
V	−0·03	+ 2·1
VI	+1·74	+ 0·9

Wenn auch die Differenzen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ nicht ausserhalb der möglichen Beobachtungsfehler liegen — durch Anwendung von Differentialformeln könnte man die Fehler des dritten und theilweise auch des ersten und letzten Ortes auf die übrigen Orte vertheilen —, so ist es doch unwahrscheinlich, dass beide Kometen identisch seien. Beim Durchgang durch den Knoten betrug die heliocentrische Entfernung des Kometen 1759:1·2703 Erdbahnradien. Der Durchgang erfolgte in den letzten Tagen des October, während die Erde den Knoten erst Mitte December passirte. Eine Störung durch die Erde scheint somit ausgeschlossen.

Eine einfache Rechnung zeigt auch, dass zur Zeit der Annäherung des Kometen an die Jupitersbahn, was ungefähr Mitte Januar 1761 geschah, der Planet Jupiter selbst in einem ganz anderen Theile seiner Bahn sich befunden hat. Demnach können auch die Störungen des Jupiter jene Änderungen in den Elementen der Bahn nicht hervorgerufen haben. Ob nicht die Nähe anderer Planeten die Ursache von gewaltigen Störungen gewesen ist, lässt sich ohne eine eingehende Untersuchung kaum angeben und müsste Gegenstand einer besonderen Abhandlung werden.

Über die Dissociation des Chlorwasserstoffmethyläthers

von

Dr. Rud. Wegscheider.

(Mit 1 Textfigur.)

Angesichts der geringen Anzahl von Gasdissociationen, welche bisher zur Prüfung der Gesetze des chemischen Gleichgewichtes herangezogen worden sind, verdienen die Versuche von Friedel[1] über die Dissociation des Chlorwasserstoffmethyläthers eine eingehendere Würdigung, als ihnen bisher zu Theil geworden ist.[2]

Der Chlorwasserstoffmethyläther wird bekanntlich als eine bei ungefähr —2° siedende Flüssigkeit erhalten, deren Chlorgehalt schwankend und immer kleiner als der der Formel $(CH_3)_2O.HCl$ entsprechende Werth ist. Das flüssige Präparat kann daher als $(CH_3)_2O.HCl$ mit einem darin gelösten Überschuss von Methyläther betrachtet werden.

Friedel hat Versuche nach drei Methoden ausgeführt:

A. Aus einer gemessenen Menge Dampf von bekanntem Chlorgehalt wurde der Chlorwasserstoff durch festes Kali entfernt und das Volumen des rückständigen Gases bestimmt.

B. Es wurde die Dampfdichte nach der Hofmann'schen Methode bestimmt. Die verwendete analysirte Substanz wurde

---

[1] Bull. soc. chim. de Paris, *24*, 160 und 241 [1875]; eine kurze Mittheilung ohne Angabe der Versuchszahlen auch C. R. *81*, 152 [1875].

[2] Vergl. Ostwald, Lehrb. der allg. Chem., 2. Aufl., III, 489; Nernst, Theor. Chem., 2. Aufl., 413 und 603. Am meisten sind gerade jene Versuche Friedel's beachtet worden, welche vermuthlich mit den grössten Fehlern behaftet sind

in flüssigem Zustand gewogen. Die Messröhre wurde viermal mit gewogenen Substanzmengen beschickt und bei drei Füllungen die Dampfdichte wiederholt (unter Abänderung von Druck und Temperatur) bestimmt.

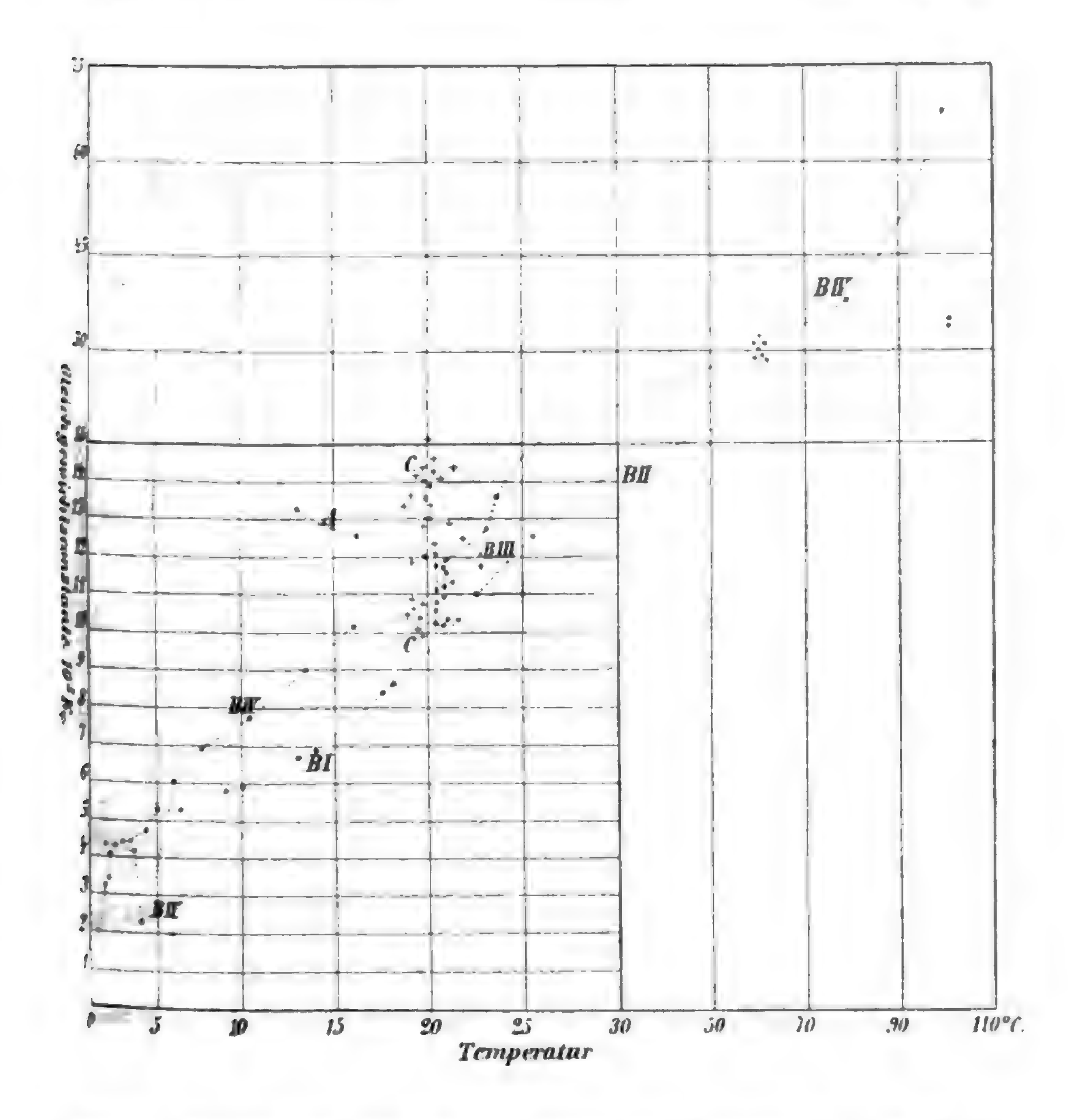
C. Gemessene Volumina von Methyläthergas und Chlorwasserstoffgas wurden gemischt und die dabei eintretende Volumverminderung abgelesen. Diese Methode gab nach Friedel nur gute Resultate, wenn der Chlorwasserstoff in der Mischungsröhre gemessen wurde, nicht aber wenn er umgefüllt wurde. Bei mehreren dieser Versuche wurden nach der ersten Bestimmung noch weitere Mengen von Chlorwasserstoff oder Äther hinzugefügt und die Contraction neuerlich bestimmt; oder es wurde (durch Luftzusatz) der Partialdruck des Chlorwasserstoffmethyläthers oder auch direct der Gesammtdruck geändert.

Die Versuche, beziehungsweise Versuchsreihen sind im Folgenden immer durch die Friedel'sche Numerirung, wenn nöthig unter Vorsetzung der Buchstaben *A*, *B* oder *C* (je nach der Methode) bezeichnet.

Ich habe zunächst für sämmtliche Versuche (mit einer Ausnahme, der später erwähnt werden wird) die Gleichgewichtsconstante ($K_c = \frac{c_1 c_2}{c}$, wo c_1, c_2 und c die räumlichen Concentrationen von Methyläther, Chlorwasserstoff und Chlorwasserstoffmethyläther, ausgedrückt in Gramm-Molekeln im Cubikcentimeter, bedeuten) ausgerechnet. Die Drucke sind in Millimetern Quecksilber ausgedrückt. Die Gasconstante R ist demgemäss gleich $82 \cdot 1 \times 760$ gesetzt. K_c darf nach der Theorie nur von der Temperatur abhängen.

Die Resultate dieser Berechnung sind in der nebenstehenden graphischen Darstellung enthalten. Als Abscissen sind die Temperaturen in Celsiusgraden, als Ordinaten die mit 10^5 multiplicirten Gleichgewichtsconstanten aufgetragen. Für die Temperaturen über 30° und die Werthe von $10^5 K_c$ über 15 ist aus Raumrücksichten ein kleinerer Maassstab gewählt als für die niederen Werthe. Die Punkte, welche Versuchen nach der Methode *A* entsprechen, sind durch die punktirte Linie verbunden, welche durch Beisetzung des Buchstaben *A* gekennzeichnet ist; das gleiche geschah bezüglich der vier Versuchs-

reihen, die nach der Methode B ausgeführt sind. Die Versuchsreihen B I und B II schliessen sich unmittelbar aneinander an; sie sind mit demselben Präparat ausgeführt. Bei B III liegt nur eine Beobachtung vor. Die Punkte der Versuchsreihe B IV liegen, mit Ausnahme der Beobachtungen bei sehr tiefen Tempe-



raturen, durchwegs über den Punkten der Reihen B I und B II; einen auffälligen Unterschied zeigen die Beobachtungen bei 100°. Die Beobachtungen nach der Methode C sind in der Figur durch Kreuze bezeichnet; sie liegen theils in der Nähe der Punkte B IV, theils erheblich darüber.

Die Figur lehrt, dass die einzelnen Beobachtungsreihen durch constante Fehler beeinflusst sind. Für die Berechnung

der Abhängigkeit der Gleichgewichtsconstante von der Temperatur habe ich mich daher darauf beschränkt, diejenigen Werthe der Reihe *B* IV zu benützen, welche bei Temperaturen zwischen 20—21°, sowie zwischen 59 und 62° erhalten wurden. Hiefür sprachen zwei Gründe.

Erstens liegen die Werthe der Reihe *B* IV zwischen den Werthen der Versuchsreihen *B* I und *C*, und haben daher insolange die grösste Wahrscheinlichkeit, als nicht die constanten Fehler der einzelnen Beobachtungsreihen näher untersucht sind.

Zweitens ist die Reihe *B* IV die einzige, welche für zwei annähernd constante und genügend weit auseinanderliegende Temperaturen eine grössere Anzahl Beobachtungen enthält und daher ermöglicht, die zufälligen Fehler für zwei Temperaturen durch Benützung von Mittelwerthen zu vermindern.

Die benützten Werthe sind:

Versuchsnummer	IV, 4	IV, 5	IV, 6	IV, 7	IV, 8	IV, 9	IV, 23
Temperatur	20·3	20·3	20·3	20·3	20·5	20·85	20·3
$10^5 K_c$	11·71	11·03	10·61	10·23	10·20	10·29	12·01

Versuchsnummer	IV, 24	IV, 25	IV, 26	IV, 27	IV, 28	IV, 29.
Temperatur	20·75	20·8	20·8	20·8	20·8	20·3° C.
$10^5 K_c$	11·73	11·89	11·59	11·24	10·92	10·59

Versuchsnummer	IV, 32	IV, 33	IV, 34	IV, 35	IV, 36	IV, 37
Temperatur	61	62	61	60	60·5	59° C.
$10^5 K_c$	29·26	28·97	31·41	32·45	30·19	31·18.

Hieraus wurden die Mittelwerthe $10^5 K_c = 11 \cdot 08$ bei $t = 20 \cdot 55°$ und $10^5 K_c = 30 \cdot 58$ bei $t = 60 \cdot 6°$ gebildet. (Ein weiterer hieher gehöriger Versuch, Nr. IV, 38, $t = 59°$, $10^5 K_c = 29 \cdot 09$, wurde aus Versehen nicht benützt; er würde das Resultat nicht erheblich ändern.)

Aus den erwähnten Mittelwerthen ergab sich die Formel

$$\log 10^5 K_c = -\frac{1078 \cdot 061}{T} + 4 \cdot 71704, \qquad \ldots 1)$$

in welcher *T* die absolute Temperatur bedeutet. Mit Hilfe dieser Formel wurden die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung bei den Friedel'schen Versuchen berechnet.

Die bekannte Bedeutung des Coëfficienten von $\frac{1}{T}$ in obiger Formel führt unter der Voraussetzung, dass die Wärmetönung der Dissociation zwischen 20 und 60° als constant betrachtet werden darf, zu der bei constantem Volum giltigen thermochemischen Gleichung

$$(CH_3)_2O.HCl = (CH_3)_2O + HCl - 5000 \text{ cal.}$$

Nernst[1] gibt —8600 cal. an; aus welchen Zahlen dieser Werth abgeleitet wurde, ist nicht angegeben.

Im Folgenden gebe ich die Resultate der Berechnung der einzelnen Versuche.

Versuche nach der Methode *A*.[2]

Gegeben sind der Procentgehalt des Systems an Chlor (p), sein Volum V in Cubikcentimetern bei der Temperatur t in Celsiusgraden und dem Druck P in Millimetern Quecksilber, endlich das nach der Behandlung mit Kali übrig bleibende Volum v in Cubikcentimetern (bei demselben t und P).

v ist das Volum des in dem System enthaltenen Methyläthers, da das Kali den Chlorwasserstoff vollständig absorbirt.

Es seien in dem System vor der Behandlung mit Kali a Gramm-Molekel unverbundener Äther, b Gramm-Molekel unverbundener Chlorwasserstoff und c Gramm-Molekel der Verbindung enthalten. Dann ist

$$K_c = \frac{ab}{Vc}$$

$$p = \frac{3545(b+c)}{46\cdot05\,a + 36\cdot46\,b + 82\cdot51\,c}$$

$$V = \frac{RT}{P}(a+b+c)$$

$$v = \frac{RT}{P}(a+c).$$

[1] Theor. Chem., 2. Aufl., S. 603.

[2] Bull. soc. chim., 24, 164—165.

Aus diesen vier Gleichungen mit den vier Unbekannten K_c, a, b und c findet man

$$K_c = \frac{P(V-v)[(3545-36\cdot 46\,p)V-46\cdot 05\,pv]}{RTV[(3545+9\cdot 59\,p)v-(3545-36\cdot 46\,p)V]}. \quad \ldots 2)$$

Denkt man sich das System aufgebaut aus μ Gramm-Molekeln Chlorwasserstoffmethyläther und μ_1 Gramm-Molekeln des einen überschüssigen Dissociationsproductes (in diesem Falle Methyläther), so ist

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{a-b}{b+c}.$$

Der Vergleich zwischen Beobachtung und Rechnung wurde in der Weise vorgenommen, dass Gleichung 2) nach v aufgelöst und letzteres aus dem aus Gleichung 1) folgenden Werthe von K_c und den übrigen Versuchsdaten abgeleitet wurde.

Die (ebenso wie die folgenden nach steigenden Temperaturen geordnete) Tabelle enthält die Friedel'sche Versuchsnummer, t, P, p, V, das gefundene v ($v_{gef.}$), den aus den Beobachtungen abgeleiteten Werth von $10^5 K_c$ ($K_{gef.}$), den aus der Gleichung 1) folgenden Werth ($K_{ber.}$), die Differenz $K_{gef}-K_{ber.}$ (Δ_1), den aus $K_{ber.}$ abgeleiteten Werth von v ($v_{ber.}$), endlich die Differenz $v_{gef.}-v_{ber.}$ in Cubikcentimetern (Δ_2).

$$\frac{\mu_1}{\mu} = 0\cdot 2565.$$

Nr.	t	P	p	V	$v_{gef.}$	$K_{gef.}$	K_{ber}	Δ_1	$v_{ber.}$	Δ_2
II.	13°	753·0	37·58	23·15	13 768	13·24	8·86	4·38	14·11	—0·34
I.	16°	746	37·58	19·3	11·5	12·60	9·70	2·90	11·69	—0·19

Trotz der erheblichen Abweichung der gefundenen und berechneten Constanten ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung bei Versuch I befriedigend und auch bei Versuch II nicht ganz ausserhalb des Bereiches der möglichen Fehler. Genaue K-Werthe können wegen des kleinen Gesammtvolums und der Empfindlichkeit dieser Constante gegen Beobachtungsfehler nicht erwartet werden.

Versuche nach der Methode *B*.[1]

Der Rechnung liegen zu Grunde der Procentgehalt der angewendeten Substanz an Chlor *(p)*, die von Friedel ausgerechnete Dampfdichte des Systems *(D)*, Temperatur *(t)* und Druck *(P)*.

Wenn μ_1 (welches sich auch hier auf überschüssigen Methyläther bezieht) und μ dieselbe Bedeutung haben wie früher, und α den Dissociationsgrad des Chlorwasserstoffmethyläthers bedeutet, so hat man die Gleichungen

$$K_c = \frac{\alpha(\mu_1 + \mu\alpha)}{V(1-\alpha)}$$

$$PV = RT[\mu_1 + \mu(1+\alpha)]$$

$$D = \frac{36\cdot 46\,\mu\alpha + 46\cdot 05(\mu_1 + \mu\alpha) + 82\cdot 51\,\mu(1-\alpha)}{28\cdot 88[\mu_1 + \mu(1+\alpha)]} = \frac{46\cdot 05\frac{\mu_1}{\mu} + 82\cdot 51}{28\cdot 88\left(\frac{\mu_1}{\mu} + 1 + \alpha\right)}$$

$$p = \frac{3545\,\mu}{82\cdot 51\,\mu + 46\cdot 05\,\mu_1}.$$

Aus diesen vier Gleichungen, welche die vier Unbekannten K_c, V, $\frac{\mu_1}{\mu}$ und α enthalten, ergibt sich

$$K_c = \frac{P\left(\frac{A}{D} - \frac{\mu_1}{\mu} - 1\right)\left(\frac{A}{D} - 1\right)}{RT\left(2 + \frac{\mu_1}{\mu} - \frac{A}{D}\right)\frac{A}{D}}, \qquad \ldots 3)$$

wo

$$A = \frac{46\cdot 05\frac{\mu_1}{\mu} + 82\cdot 51}{28\cdot 88} \quad \text{und} \quad \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{3545 - 82\cdot 51\,p}{46\cdot 05\,p}.$$

[1] Bull. soc. chim., *24*, 165—169.

Durch Einsetzung der aus Gleichung 1) berechneten Werthe von K_c in die aus Gleichung 3) folgende Formel für D wurden die berechneten Dampfdichtenwerthe erhalten.

Die Tabellen enthalten die Friedel'schen Versuchsnummern, t, P, die von Friedel ermittelten Dampfdichten ($D_{gef.}$), die hieraus abgeleiteten Werthe von $10^5 K_c$ ($K_{gef.}$), die aus Gleichung 1) berechneten Werthe dieser Grösse ($K_{ber.}$), die Differenzen $K_{gef.} - K_{ber.}$ (Δ_1), die aus $K_{ber.}$ folgenden Dampfdichten ($D_{ber.}$), endlich die Differenzen $D_{gef.} - D_{ber.}$ (Δ_2).

Versuche I.

$$p = 37 \cdot 58, \frac{\mu_1}{\mu} = 0 \cdot 25653, A = 3 \cdot 266.$$

Nr.	t	P	$D_{gef.}$	$K_{gef.}$	$K_{ber.}$	Δ^1	$D_{ber.}$	Δ^2
5	2	521	1·637	4·28	6·26	−1·98	1·59	0·05
4	2·3	521·5	1·634	4·38	6·33	−1·95	1·59	0·04
6	3	522	1·632	4·43	6·47	−2·04	1·58	0·05
7	4	525	1·623	4·73	6·685	−1·96	1·58	0·04
3	5	529	1·609	5·29	6·91	−1·62	1·58	0·03
8	6·1	530	1·609	5·27	7·15	−1·88	1·57	0·04
9	9	535	1·597	5·79	7·84	−2·05	1·57	0·03
10	10	536·5	1·596	5·84	8·08	−2·24	1·56	0·04
11	13	543	1·581	6·63	8·86	−2·23	1·55	0·03
12	14	545	1·577	6·89	9·14	−2·25	1·55	0·03
2	17·2	553	1·557	8·46	10·05	−1·59	1·54	0·02
13	18	553·2	1·554	8·74	10·29	−1·55	1·54	0·01
1	21·5	560·5	1·539	10·42	11·39	−0·97	1·53	0·01

Da der Gleichung 1) die durchwegs höhere Werthe für K_c liefernde Versuchsreihe B IV zu Grunde liegt, sind die

Differenzen Δ_1 naturgemäss alle negativ. Die Differenzen zwischen gefundenen und berechneten Dampfdichten sind bei Temperaturen über 15° genügend gering; in tieferen Temperaturen übersteigen sie dagegen erheblich die Versuchsfehler. Zu ihrer Erklärung sind jedoch Fehlerquellen wie die voraussichtlichen Abweichungen von den idealen Gasgesetzen und die Adsorption an den Gefässwänden ausreichend.

Versuche II.

$$p = 37\cdot58, \frac{\mu_1}{\mu} = 0\cdot25653, \ A = 3\cdot266.$$

Nr.	t	P	$D_{gef.}$	$K_{gef.}$	$K_{ber.}$	Δ^1	$D_{ber.}$	Δ^2
1	22·5	553·7	1·533	11·05	11·72	− 0·67	1·528	0·005
2	25·5	757·1	1·547	12·57	12·75	− 0·18	1·546	0·001
3	99·9	757·0	1·479	34·93	66·99	−32·06	1·465	0·014
4	99·9	828·5	1·481	35·85	66·99	−31·14	1·465	0·016

Die Übereinstimmung zwischen gefundenen und berechneten Werthen ist bei Zimmertemperatur sehr befriedigend. Bei 99·9° sind die Abweichungen der Dampfdichten trotz der grossen Differenz bei den K-Werthen nicht allzu erheblich.

Versuch III.

$$p = 39\cdot03, \frac{\mu_1}{\mu} = 0\cdot1802, \ A = 3\cdot145.$$

Nr.	t	P	$D_{gef.}$	$K_{gef.}$	$K_{ber.}$	Δ_1	$D_{ber.}$	Δ_2
1	22·7	754·5	1·547	12·03	11·78	0·25	1·549	−0·002

Übereinstimmung sehr befriedigend.

Versuche IV.

$$p = 38\cdot87, \frac{\mu_1}{\mu} = 0\cdot1882, \ A = 3\cdot157.$$

Der Versuch Nr. 15 ($t = 1°$, $P = 850\cdot5$, $D = 1\cdot852$) wurde nicht berechnet, da Friedel bei ihm die Condensation von etwas Flüssigkeit bemerkte.

Nr.	t	P	$D_{gef.}$	$K_{gef.}$	$K_{ber.}$	Δ_1	$D_{ber.}$	Δ_2
14	0·87	846·1	1·867	2·05	6·04	−3·99	1·631	0·236
16	1·25	750·29	1·690	4·33	6·11	−1·78	1·635	0·055
12	1·25	819·6	1·759	3·27	6·11	−2·84	1·648	0·111
11	1·37	824·7	1·749	3·46	6·14	−2·68	1·648	0·101
10	1·5	750·3	1·698	4·14	6·16	−2·02	1·634	0·064
17	3·12	750·29	1·697	4·13	6·50	−2·37	1·625	0·072
13	3·75	859·9	1·839	2·33	6·63	−4·30	1·642	0·197
18	6	750·09	1·633	6·08	7·13	−1·05	1·611	0·022
19	7·5	750·09	1·615	6·88	7·48	−0·60	1·604	0·011
20	10·2	750·1	1·599	7·71	8·14	−0·43	1·592	0·007
21	13·5	750·09	1·579	9·02	9·00	+0·02	1·579	0·000
22	16	750·09	1·565	10·18	9·70	+0·48	1·570	−0·005
30	19·5	955·6	1·589	10·44	10·75	−0·31	1·584	0·005
23	20·3	749·99	1·548	12·01	11·00	+1·01	1·556	−0·008
4	20·3	790·9	1·555	11·71	11·00	+0·71	1·561	−0·006
5	20·3	844·6	1·5675	11·03	11·00	+0·03	1·568	0·000
6	20·3	927·7	1·582	10·61	11·00	−0·39	1·578	0·004
29	20·3	953·6	1·585	10·59	11·00	−0·41	1·581	0·004
7	20·3	1042·5	1·6005	10·23	11·00	−0·77	1·591	0·009
8	20·5	1114·8	1·6092	10·20	11·07	−0·87	1·599	0·010
24	20·75	751·6	1·550	11·73	11·15	+0·58	1·554	−0·004
25	20·8	664·5	1·538	11·89	11·16	+0·73	1·543	−0·005
26	20·8	792·97	1·556	11·59	11·16	+0·43	1·560	−0·004
27	20·8	874·3	1·569	11·24	11·16	+0·08	1·570	−0·001
28	20·8	956·2	1·582	10·92	11·16	−0·24	1·579	0·003
9	20·85	1115·9	1·608	10·29	11·18	−0·89	1·598	0·010
3	23	748·7	1·541	12·79	11·88	+0·91	1·547	−0·006
1	23·5	670	1.527	13·63	12·05	+1·58	1·537	−0·010
37	59	1069·4	1·4975	31·18	29·50	+1·68	1·500	−0·003
38	59	1147·2	1·505	29·09	29·50	−0·41	1·504	0·001
35	60	926·2	1·489	32·45	30·18	+2·27	1·492	−0·003
36	60·5	927	1·492	30·19	30·52	−0·33	1·491	0·001
32	61	865·2	1·4904	29·26	30·865	−1·60	1·488	0·002
34	61	928·6	1·4905	31·41	30·865	+0·55	1·491	0

Nr.	t	P	$D_{gef.}$	$K_{gef.}$	$K_{ber.}$	Δ^1	$D_{ber.}$	Δ^2
33	62	866	1·4908	28·97	31·55	−2·58	1·487	0·004
31	78·5	908·8	1·480	37·68	44·67	−6·99	1·475	0·005
2	99·7	975·9	1·464	68·11	66·75	+1·36	1·465	−0·001

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist bei Temperaturen über 10° recht befriedigend. Besonders ist die Übereinstimmung bei den Temperaturen 78·5° und 99·7° hervorzuheben; es wird dadurch wahrscheinlich, dass die bei 99·9° ausgeführten Versuche II, 3 und II, 4, welche mit IV, 2 nicht gut stimmen, mit einem Fehler behaftet sind.

Was die Versuche bei niedrigeren Temperaturen betrifft, so zeigen die Versuche Nr. 11, 12, 13 und 14 starke Abweichungen. Sie geben Dampfdichten zwischen 1·75 und 1·87 bei Temperaturen unter 4° und Drucken von 820 *mm* aufwärts. Wahrscheinlich ist bei ihnen geradeso wie bei Versuch 15 ($D = 1·85$) in geringem Maasse Verflüssigung eingetreten, aber von Friedel nicht bemerkt worden.

Die anderen Versuche bei niedrigen Temperaturen geben Dampfdichten unter 1·70; die Abweichungen von den berechneten Werthen überschreiten nicht 0·072 und können wohl auf die Abweichungen von den Gasgesetzen, sowie auf Adsorption an den Gefässwänden zurückgeführt werden.

Wollte man den Abweichungen bei niedrigen Temperaturen Rechnung tragen, so könnte man eine dreiconstantige Formel $\log 10^5 K_c = \frac{A}{T} + B \log T + C$ wählen. Man würde dann für die Dissociation ein Maximum unter 100° bekommen, was zwar nicht unmöglich, aber unwahrscheinlich ist. Für 100° müssten dann die Werthe der Versuche *B* II, 3 und 4 als richtig angenommen werden.

Auffallend ist, dass bei den Temperaturen 20·3 und 20·8° die Differenzen zwischen den gefundenen und berechneten Dampfdichten algebraisch genommen um so grösser sind, je höher der Druck ist. Diese Erscheinung ist vielleicht ebenfalls auf die Abweichungen vom vollkommenen Gaszustand, sowie

auf die Adsorption der Gefässwände zurückzuführen. Daraus wäre dann zu schliessen, dass die wahren K-Werthe bei Zimmertemperatur und darunter etwas höher liegen als die aus Gleichung 1) folgenden. Die Versuche zwischen 59 und 62° zeigen keinen derartigen Gang der K-Werthe mit dem Druck, entsprechend dem Umstand, dass höhere Temperatur die erwähnten Störungen vermindert.

Es wäre daher vielleicht richtiger, nicht den Mittelwerth der bei 20—21° gefundenen Werthe von K_c der Formel für die Abhängigkeit der Gleichgewichtsconstante von der Temperatur zu Grunde zu legen, sondern den höchsten der gefundenen Werthe.

Aus Versuch IV, 23 ($t = 20 \cdot 3$, $10^5 K_c = 12 \cdot 01$) und aus dem Mittel der Versuche IV, 32—38 ($t = 60 \cdot 36$, $10^5 K_c = 30 \cdot 36$) würde man erhalten:

$$\log 10^5 K_c = -\frac{982 \cdot 855}{T} + 4 \cdot 430565. \qquad \ldots 5)$$

Daraus würde sich die Dissociationswärme zu 4500 cal. ergeben. Als Beispiel für den Einfluss der Änderung der Formel auf die K-Werthe diene folgende Zusammenstellung:

t	2	10	20	62	78·5	99·7° C
$10^5 K_c$ nach Gleichung 1)	6·26	8·08	10·91	31·55	44·67	66·75
$10^5 K_c$ nach Gleichung 5)	7·19	9·07	11·92	31·39	43·09	62·15

Der Unterschied zwischen den Versuchsreihen I und IV bei gleicher Temperatur kann nicht auf dieselben Ursachen zurückgeführt werden. Denn da in I durchwegs niedrigere Drucke angewendet wurden als in IV, wäre zu erwarten, dass I die höheren K-Werthe gibt, während das umgekehrte der Fall ist. Kleine Fehler bei der Chlorbestimmung können den Unterschied zwischen den Reihen I und IV ebenfalls nicht erklären. Vermuthlich ist die Reihe I mit einem kleinen Fehler behaftet, der auf einen Verlust bei der Einführung der gewogenen Substanz in die Messröhre zurückzuführen ist; denn diese Operation ist nach Friedel[1] mit sehr bedeutenden Schwierigkeiten verbunden.

[1] L. c. S. 165.

Versuche nach der Methode *C*.[1]

Der Rechnung wurden folgende von Friedel angegebene Zahlen zu Grunde gelegt:

1. Der Überschuss E des einen der beiden Bestandtheile (Chlorwasserstoff oder Methyläther) gegen die nach der Formel $(CH_3)_2O.HCl$ erforderliche Menge, ausgedrückt in Procenten des Gesammtvolums der ungemischten Gase;

2. die Volumverminderung C bei der Mischung, ausgedrückt in Procenten des doppelten Volums des nicht im Überschuss befindlichen Gases;

3. Temperatur t und Druck P der Mischung.

Wenn μ, μ_1 und α wieder die frühere Bedeutung haben, so ist

$$K_c = \frac{P\alpha\left(\frac{\mu_1}{\mu}+\alpha\right)}{RT(1-\alpha)\left(\frac{\mu_1}{\mu}+1+\alpha\right)}$$

$$\frac{E}{100} = \frac{\mu_1}{2\mu+\mu_1}$$

$$\frac{C}{100} = \frac{\mu(1-\alpha)}{2\mu}.$$

Diese drei Gleichungen mit den drei Unbekannten K_c, $\frac{\mu_1}{\mu}$ und α geben

$$K_c = \frac{P(50-C)\left(\frac{E}{1-0\cdot01\,E}+50-C\right)}{RTC\left(\frac{E}{1-0\cdot01\,E}+100-C\right)} \qquad \ldots 6)$$

und

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{2E}{100-E}.$$

Die berechneten Werthe der Volumverminderung C wurden durch Auflösung der Gleichung 6) nach C und Einsetzung der aus Gleichung 1) folgenden Werthe für K_c erhalten.

[1] Bull. soc. chim., 24, 243—247.

Da die Temperatur bei diesen Versuchen wenig wechselte. gebe ich sie in der Friedel'schen Reihenfolge. Zu einer Versuchsnummer gehören häufig mehrere Beobachtungen, indem Friedel zu dem vorhandenen Gemisch neuerdings Chlorwasserstoff, Methyläther oder auch Luft hinzufügte, oder bloss den Druck änderte und nunmehr wieder die Contraction bestimmte.

Die Tabelle enthält die Friedel'schen Versuchsnummern, t, P, die Angabe des überschüssigen Bestandtheils U (Ae oder HCl), E, C, $\frac{\mu_1}{\mu}$, die daraus abgeleiteten Werthe von $10^5 K_c$ ($K_{gef.}$), die aus Gleichung 1) berechneten Werthe derselben Constante ($K_{ber.}$), die Differenz $K_{gef.} - K_{ber.}$ (Δ_1), die aus $K_{ber.}$ folgende Volumverminderung ($C_{ber.}$), schliesslich die Differenz $C_{ber.} - C_{gef.}$ (Δ_2).

Nr.	t	P	U	E	C	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$K_{gef.}$	$K_{ber.}$	Δ_1	C_{ber}	Δ_2
1	18·6	759	Ae	2·1	6·47	0·0429	13·40	10·47	2·93	7·9	1·4
2	21·6	759	HCl	3·5	6·85	0·0726	12·57	11·42	1·15	7·4	0·5
3	22·6	753·65	HCl	9·65	7·5	0·2136	11·94	11·75	0·19	7·6	0·1
4	21	763·5	HCl	6	7·12	0·1276	12·45	11·225	1·22	7·7	0·6
5	21	761·8	HCl	61·4	11·2	3·1814	11·49	11·225	0·26	11·4	0·2
5	20	762	HCl	34·5	10·0	1·0535	10·84	10·91	−0·07	10·0	0
5	18·8	760·9	HCl	14·5	8·85	0·3392	10·45	10·54	−0·09	8·8	0
6	19	760	Ae	54·8	11·6	2·4250	10·51	10·60	−0·09	11·5	−0·1
6	19·3	759·7	Ae	43·2	11·1	1·5214	10·17	10·69	−0·52	10·7	−0·4
6	19	759·8	Ae	26·3	9·50	0·7136	10·74	10·60	0·14	9·6	0·1
7	19·3	751·1	Ae	46·9	11·3	1·7664	10·12	10·69	−0·57	10·8	−0·5
8	20·5	758·1	HCl	0·85	6·08	0·1714	14·14	11·07	3·07	7·4	1·3
8	19·5	762	Ae	29·4	9·7	0·8328	10·77	10·75	0·02	9·7	0
9	20·2	762	HCl	1·2	6·1	0·0242	14·22	10·97	3·25	7·5	1·4
9	20·2	762	Ae	0·1	5·9	0·0020	14·60	10·97	3·63	7·4	1·5
9	20·2	434	Ae	0·1	4·2	0·0020	12·39	10·97	1·42	4·7	0·5
10	21·2	763·3	HCl	1·2	6·0	0·0242	14·49	11·29	3·20	7·4	1·4
10	19	406·1	HCl	1·2	3·7	0·0242	13·59	10·60	2·99	4·6	0·9
11	19·8	754·9	HCl	9·5	7·5	0·2100	12·05	10·84	1·21	9·2	1·7

Nr.	t	P	U	E	C	$\frac{\mu_1}{\mu}$	$K_{gef.}$	$K_{ber.}$	Δ_1	$C_{ber.}$	Δ_2
12	19·6	757	HCl	0·6	5·97	0·0120	14·42	10·78	3·64	7·5	1·5
12	19·6	756·8	Ae	32·80	8·62	0·9762	12·81	10·78	2·03	9·9	1·3
12	19·6	608·5	Ae	32·80	6·6	0·9762	14·22	10·78	3·44	8·3	1·7
13	19·6	552·2	Ae	0·54	4·6	0·0108	14·30	10·78	3·52	5·8	1·2
13	20	628·4	Ae	0·54	4·9	0·0108	15·10	10·91	4·19	6·4	1·5
13	20	755·6	Ae	0·54	6·1	0·0108	14·00	10·91	3·09	7·5	1·4
13 bis	19	755·0	Ae	29·0	8·95	0·8168	11·80	10·60	1·20	9·7	0·7
13 bis	20	651·0	Ae	29·0	7·3	0·8168	13·03	10·91	2·12	8·4	1·1
13 bis	19·8	616·8	Ae	29·0	6·7	0·8168	13·69	10·84	2·85	8·1	1·4
13 bis	20	531·5	Ae	29·0	5·99	0·8168	13·45	10·91	2·54	7·1	1·1

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung nicht besonders befriedigend. Betrachtet man Fehler von 0·3 *cm*³ in der Volumverminderung als die Grenze der zulässigen Versuchsfehler, so entspricht dies 0·5 Einheiten von *C*, da das Volum des nicht im Überschusse befindlichen Gases durchschnittlich etwa 30 *cm*³ war. Dann sind von den 29 Versuchen 11 in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Ich halte es aber für wahrscheinlich, dass bei der Umfüllung der Gase Fehler vorgekommen sind, welche grössere Abweichungen der Volumverminderungen bedingen. Darauf deutet das bei unverdächtigen Versuchen nach der Methode *B* nicht vorkommende Schwanken der *K*-Werthe bei annähernd gleichem Druck und gleicher Temperatur (man vergleiche Nr. 12, erster Versuch, $t = 19·6$, $P = 757$, $10^5 K_c = 14·42$ und Nr. 6, zweiter Versuch, $t = 19·3$, $P = 759·7$, $10^5 K_c = 10·17$, entsprechend 10·26 bei 19·6° C.) und der Umstand, dass gewöhnlich alle oder fast alle Versuche derselben Nummer Fehler von derselben Grössenordnung haben; bei Nr. 5 und 6 stimmen alle Versuche gut, bei 10, 12 und 13 (einschliesslich 13 bis) alle schlecht.

Durch Verwendung der Gleichung 5) würde man durchschnittlich eine etwas bessere Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung erzielen; dagegen würde die Versuchsreihe *B* I schlechter stimmen.

Im Ganzen kann daher die Dissociation des Chlorwasserstoffmethyläthers durch die Gleichung 1) befriedigend dargestellt werden. Bei niederen Temperaturen (unter 10°) treten jedoch Störungen durch die mehrfach erwähnten Fehlerquellen (Abweichungen von den Gasgesetzen, Adsorption) ein. Von den durch Friedel angewendeten Versuchsmethoden gibt die Dampfdichtebestimmung die besten Resultate; bei den Versuchen durch Mischung von Chlorwasserstoffgas mit Methyläther dürften die Versuchsfehler von erheblicher Grösse sein.

Zum Schlusse seien einige mit Hilfe der Gleichung 1) berechnete Dissociationsgrade des reinen Chlorwasserstoffmethyläthers angegeben.

$t =$	2°	20°	99·9°
$p = 400\ mm$	$\alpha = 0·85$	0·91	0·99
$p = 760\ mm$	$\alpha = 0·75$	0·85	0·98
$p = 1000\ mm$	$\alpha = 0·71$	0·82	0·97

Die Zahlen zeigen, dass der Chlorwasserstoffmethyläther unter Bedingungen, wo die Abweichungen von den Gasgesetzen keine erhebliche Rolle mehr spielen, schon grösstentheils dissociirt ist. Es wird daher nicht leicht sein, an dieser Reaction eine sehr genaue Prüfung der Gesetze des chemischen Gleichgewichtes durchzuführen.

Über ein neues Spiegelmetall

von

Dr. **Ludwig Mach** in Jena

und dessen optische Untersuchung

von

Dr. **Victor Schumann** in Leipzig.

(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)

(**Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1899.**)

Die bereits im Alterthum aus Metallguss hergestellten Spiegel finden noch jetzt bei katoptrischen Instrumenten Verwendung. Die Zusammensetzung des Spiegelmetalles und damit auch die demselben anhaftenden Eigenthümlichkeiten haben sich bis heute kaum geändert.

Die nun in neuerer Zeit durch die Astrophotographie wieder steigende Bedeutung der katoptrischen Instrumente, sowie die immer noch sich ergebenden neuen Anwendungen für Metallspiegel, dürfte eine kurze Mittheilung über eine neue Legirung rechtfertigen, welche nicht nur frei von den Fehlern der bisher verwendeten Spiegelmetalle ist, sondern dieselben in ihrer optischen Leistung weit übertrifft.

Historisches.

Die Kunst des Spiegelpolirens ist nahezu so alt wie die des Bronzegiessens. Während in den ältesten Zeiten in China und Ägypten ausschliesslich Metallspiegel von zuweilen ungemein kunstvoller Ausführung hergestellt wurden, begannen die Römer (aber erst nach dem 3. Jahrhundert n. Chr.) auch belegte Glasspiegel, nämlich geschliffene und polirte Glasplättchen, auf die

dünne Silber- und Goldbleche aufgeleimt waren, in Gebrauch zu nehmen.[1]

Das im gewöhnlichen Gebrauch durch die Glasspiegel immer mehr verdrängte Spiegelmetall erlangte mit der Erfindung des katoptrischen Fernrohres für die Optik eine neue ungeahnte Bedeutung. Man begann eingehende Studien über das Giessen, Schleifen, Poliren und das sonstige Verhalten des Metalles anzustellen, und seit dieser Zeit bildete die Anfertigung von Metallspiegeln einen eigenen, von der Industrie gesonderten, von nur Wenigen ausgeübten und grösstentheils geheim gehaltenen Zweig der Technik.

J. Gregory in seiner Optica promota (1663) und Newton in den Philosophical Transactions für 1672 gaben detaillirte Constructionen von Spiegelteleskopen. Newton machte 1670 die Entdeckung von der ungleichen Brechbarkeit der verschiedenen Farben, und da er die Dispersion dem Brechungsexponenten proportional hielt, musste er die chromatische Aberration als unbehebbar ansehen, und verfertigte 1671 das erste brauchbare Spiegelteleskop; die von ihm verwendete Spiegellegirung bestand aus 2 Theilen Cu und 1 Theil Sn.

Da bei den grossen, zum Theile auch heute noch bestehenden Schwierigkeiten der Spiegelanfertigung die praktische Optik nur langsam diese Wege einschlagen konnte, so herrschte

[1] Nach Berthelot (Comptes rendus vom 4. October 1897) bestanden die Spiegel des Alterthums entweder aus Silber oder noch häufiger aus Bronze. Der Hauptproductionsort Brundisium (Brindisi) soll nach Berthelot dieser Legirung zu ihrem Namen verholfen haben. Bei Plinius findet man die Angabe, dass zu Sidon die Erfindung gläserner, insbesondere schwarzer Spiegel (Obsidian?) gelungen sei. Einen neuen Typus repräsentiren zwei vollständig erhaltene Spiegel, die aus den dem 3. und 4. Jahrhundert zugerechneten römisch-gallischen Gräbern der Gegend von Reims (zu Fosse-Pierre, La Longe und La Maladrerie) kommen. Berthelot hat den Metallbeleg der Spiegel als reines Blei erkannt und vermuthet, dass man auf das sehr dünne vorgewärmte Glas eine Schichte von geschmolzenem Blei aufgoss, welches hiebei Sauerstoff aufnahm und sich theilweise oxydirte. Diese Herstellungsart hat sich wahrscheinlich während des Mittelalters erhalten. Sie können deshalb als Belegstücke gelten für eine auch von Roger Bacon und dem falschen Raymond Lullus mitgetheilte Angabe des Vincent de Beauvais in dessen Speculum naturale, II. 78, derzufolge im 13. Jahrhundert die Spiegel durch Aufgiessen von Blei auf Glas verfertigt wurden.

im 17. Jahrhundert das dioptrische Fernrohr, wie es von den Brüdern Huyghens im Haag und Campani in Rom angefertigt wurde.

Short (1731—1768), ein durch seine kleinen Spiegelteleskope berühmter Meister, hielt seine Erfahrungen geheim und liess vor seinem Tode sein gesammtes Werkzeug verbrennen.

Durch William Herschel (1780—1815) wurde die Technik der Spiegelanfertigung weiter vervollkommt. Er war der erste, der grössere zu giessen und schleifen verstand; die von ihm gemachten Fortschritte waren aber nicht principiell, sondern bezogen sich bloss auf die Grösse und Vollendung seiner Instrumente.[1]

Die Arbeiten Herschel's setzte Lord Oxmantown (später unter dem Namen Earl of Rosse bekannt) fort. Er begann seine eingehenden Studien über das Giessen der Spiegel 1827, und gab nach deren Beendigung sofort alle technischen Einzelheiten bekannt.[2]

Die bei der ausserordentlichen Sprödigkeit und dem enormen Gewicht so schwierige Bearbeitung grösserer Scheiben, und dementsprechend auch schwer durchzuführende Lagerung und Montirung derselben, nahm den ganzen Scharfsinn der Künstler in Anspruch.

Die Entdeckung der Glasversilberung durch Liebig 1836 brachte C. A. Steinheil und L. Foucault auf die bedeutend leichteren und lichtstärkeren, aber ungleich vergänglicheren Glassilberspiegel.[3]

[1] J. Herschel, The Telescope Edinburgh, 1861.

[2] An account of Experiments on Reflecting Telescopes by the Lord Oxmantown, Philosophical transactions, 1840, II. Diese Abhandlung ist historisch, wie sachlich ungemein aufklärend. Er stellte sich die Aufgabe: »In grossen Instrumenten dieselbe Güte des Metalles und dieselbe Genauigkeit der Spiegelfläche zu erreichen, welche in kleinen Instrumenten zu erzielen ist; ferner die Ungleichheit der Qualität zu überwinden, welche man an verschiedenen Exemplaren von Spiegeln aus derselben Hand beobachtet«.

[3] Steinheil legte den von ihm hergestellten Glassilberspiegel der Münchener Akademie im Juni, Foucault den seinigen der Pariser Akademie im Februar 1858 vor. In dem Memoire: »Sur la construction des Téléscopes au verre argenté«, ferner in den Annalen der Pariser Sternwarte, Bd. 5, S. 197—273,

Die ungemein grosse Empfindlichkeit der auf Glas abgelagerten Silberschichte der Foucault'schen Spiegel vermied Šafařik dadurch, dass er dieselbe galvanisch auf geschliffene und polirte Metallscheiben von besonderer Zusammensetzung niederschlug und diese dann wie Glassilberspiegel behandelte.[1]

Die Metallspiegel haben vor den Glassilberspiegeln immer noch gewisse Vorzüge bewahrt, obwohl nur bezüglich der Homogenität, Porenfreiheit und Genauigkeit der Flächen wesentliche Fortschritte erzielt wurden, denn die Metallcomposition als solche ist, wie ein Blick auf die modernen Legirungen lehrt, bis heute ziemlich dieselbe geblieben.[2]

Es ist nun gelungen, mit anderen (durch die moderne Industrie gegebenen) Metallen eine neue weissere Legirung von grösserer Widerstandskraft, hohem Reflexionsvermögen und vor Allem von unver-

sowie in den Comptes rendus sind die genialen Prüfungsmethoden des letzteren beschrieben.

[1] Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft, Bd. 14, S. 346, 1879 und Bd. 18, S. 246, ferner Centralzeitung für Optik und Mechanik, 15. Jahrg., Nr. 18—23: »Über die Construction von Teleskopspiegeln nach neuen Grundsätzen«, von Prof. Dr. A. Šafařik.

[2] Das chinesische Spiegelmetall bestand aus 80·8 Theilen Cu, 9·5 Theilen Pb und 8·5 Theilen Sb. Die Zusammensetzung des haltbarsten und am meisten Licht reflectirenden Spiegelmetalles war schon von Newton und von Herschel's unmittelbarem Vorgänger Dr. J. Mudge festgestellt worden. Wegen der enormen Sprödigkeit dieser Legirung musste Herschel bei seinen grossen Spiegeln den Sn-Gehalt erheblich vermindern, jenen von Cu aber vermehren, wodurch das Reflexionsvermögen ab, die Oxydationsfähigkeit an der Luft zunahm (bei 24 Zoll Spiegeldurchmesser 70·59% Cu und 29·41% Sn, bei 48 Zoll 75% Cu und 25% Sn). Earl of Rosse und Lassell finden, dass die im atomistischen Verhältniss gemischten Metalle die beste Legirung geben (Rosse, 4 Atome Cu und 1 Atom Sn). Grubb's Mischung soll aus 32 Theilen Cu und 14·77 Theilen Sn bestehen. Die Untersuchung eines Spiegels von Brashear ergab 126·4 Theile Cu auf etwa 58·9 Theile Sn. In Kästner's Optik, 1755, S. 281, wird eine Mischung von 5 Atomen Cu, 1 Atom Sn und 1 Atom Zn erwähnt. Eine von Dr. H. Schroeder angegebene Composition besteht aus 5 Atomen Cu, 10 Atomen Sn, 1 Atom Ag, eine andere aus 5 Atomen Cu, 1 Atom Sn und 1 Atom Ni. Das specifische Gewicht dieser Legirungen sinkt durchschnittlich nicht unter 8. Vergl. auch den schönen Aufsatz Schroeder's in der Central-Zeitung für Optik und Mechanik, Nr. 17 und 18, 1897, dem einige der vorstehenden Daten entnommen wurden.

gleichlich geringerem specifischen Gewicht darzustellen.

Beim Zusammenschmelzen von Aluminium und Magnesium hatte ich vor einigen Jahren eine spröde, silberglänzende und luftbeständige Legirung von hoher Politurfähigkeit erhalten. Mit dem Guss von Metallspiegeln beschäftigt, erinnerte ich mich an jenes längst vergessene Experiment. Das unvergleichliche Reflexionsvermögen und so geringe specifische Gewicht der damals hergestellten Legirung liessen dieselbe zur Herstellung von Metallspiegeln in hohem Grade geeignet erscheinen.

Die Darstellung und der homogene Guss dieser Legirung stiess bei dem eigenthümlichen Verhalten derselben auf grosse Schwierigkeiten. Die bei dem Studium der Al-Mg-Legirungen gemachten Beobachtungen will ich, obwohl ich vorläufig auf eine eingehende Untersuchung verzichten musste, hier mittheilen.

Das Schmelzen und Giessen der Legirung.

Ein Spiegelmetall muss homogen und frei von Spannung sein und eine besondere Structur besitzen.

Die Metalle haben die Eigenschaft, im feurig-flüssigen Zustande Gase zu absorbiren und diese beim Erstarren wieder auszuscheiden, wodurch die Schmelze mehr oder weniger porös werden kann.[1] Die Gase, welche von dem flüssigen

[1] Vergl. die reichhaltige Literatur über diesen Gegenstand in dem schönen Werke Reyer's: »Beitrag zur Physik der Eruptionen und Eruptivgesteine« Wien 1877.

Schon Lucas (cit. bei Gay Lussac: Ann. chim. phys., 1830, Bd. 45) stellte fest, dass flüssiges Silber im Contact mit der Luft den Sauerstoff aus derselben aufnimmt und diesen während des Erstarrens abscheidet. Gay Lussac fand, dass die Menge des absorbirten Sauerstoffes steigt, wenn man dieses Gas über das Metall leitet.

Diese Erscheinung wurde als Absorption gedeutet. Nicht die absolute Temperatur, sondern nur die Temperatur, soferne sie einen bestimmten Aggregatzustand in einem Körper bedingt, ist für das vorliegende Phänomen entscheidend. Für die Absorption ist Silber von 1000° C. und Wasser von 10° C. dasselbe (Reyer).

Bei Wasser genügt allerdings eine Temperatur von 100°, um den grössten Theil der aufgenommenen Gase auszujagen, und im gefrorenen

Metall in grösseren Mengen absorbirt werden, sucht man natürlich während des Schmelzprocesses auszuschliessen: So schmilzt man Rothguss unter einer Kohlendecke, damit Sauerstoff und Kohlensäure nicht zur Schmelze gelangen können, ohne zu Kohlenoxyd reducirt zu werden. Der Absorptionscoëfficient für Kohlenoxyd ist bedeutend geringer, und der Guss fällt viel dichter aus.

Aluminium und Magnesium dagegen absorbiren im flüssigen Zustande auch grosse Mengen Stickstoff. Franck hat gezeigt, dass Aluminium bei Rothgluth Kohlensäure und sogar Kohlenoxyd zersetzt.

Man muss deshalb diese Metalle abweichend von dem gewöhnlichen Verfahren unter dem hermetischen Abschluss eines indifferenten Flussmittels niederschmelzen, und dabei auf das sorgfältigste jede Überhitzung vermeiden, weil sonst durch das verdampfende Magnesium die Schmelze ganz porös wird.[1]

Thatsächlich liefert unter Chlorkalium (Schmelzpunkt 800° C.) geschmolzenes Aluminium oder Magnesium dichte Güsse.[2]

Schmilzt man aber, wie weiter unten beschrieben, unter diesem Flussmittel Aluminium mit Magnesium, oder giesst unter Ausschluss der Luft die in besonderen Tiegeln geschmolzenen Metalle zusammen, so erhält man zumeist eine poröse Schmelze.

Durch das Zusammenbringen dieser beiden Metalle im feurig-flüssigen Zustande werden also wahrscheinlich chemische, von Gasentwickelung begleitete Reactionen ausgelöst. Geringe, im Magnesium enthaltene fremde Beimengungen, sowie

Zustande umschliesst es dieselben, während erstarrtes Silber dieselben ausspratzt, was leicht erklärlich ist, wenn man die bedeutende Tension der vom Silber ausgeschiedenen Gase berücksichtigt.

[1] Magnesium schmilzt bei etwa 700° C. und verdampft bei heller Rothgluth, wogegen das bei 660° C. flüssige Aluminium im Gebläseofen nicht zu verdampfen vermag.

[2] Käufliches Mg enthält immer geringe Beimengungen fremder Substanzen und im Inneren eingeschlossene Gase, die verändernd auf dasselbe einwirken.

Reactionen zwischen Metallfluss und Tiegelwand (besonders solchen von Thon) spielen, wie die Untersuchung zeigte, dabei eine grosse Rolle.[1]

Diese Legirung zeigt für Gase eine grössere Absorption als ihre Bestandtheile, also Al und Mg.

Ein Porzellantiegel wird in einen Thontiegel gesetzt und in einem Gasofen vorsichtig angewärmt und sodann chemisch reines Chlorkalium in demselben niedergeschmolzen, wobei man Sorge trägt, dass sich die Tiegelwände gut vollsaugen.[2] Die Oberfläche des zunächst geschmolzenen Aluminiums glänzt wie Quecksilber durch das Flussmittel hindurch. Das in Stückchen eingebrachte Magnesium wird bei gemässigtem oder ganz abgestelltem Feuer mit einem Porzellanrührer in dem Aluminiumbad bis zum Schmelzen niedergehalten.

Die Zusammensetzung einer nach diesem Verfahren dargestellten Legirung entspricht genau den Mengen der eingebrachten Bestandtheile, da jeder Verlust durch Oxydation ausgeschlossen ist. Gase können nur auf dem Wege der Diffusion durch die Tiegelwände und das Flussmittel zu dem Metallflusse gelangen.

Dennoch ist eine solche Schmelze nicht gasfrei. Die Oberfläche der nach dem Erstarren der Salzdecke ziemlich »steifkalt« in eine eiserne Schale ausgegossenen Metallmasse ist zunächst blank wie ein Quecksilberspiegel und wird dann vom Rande aus langsam matt. Gleichzeitig beginnt jedoch ein zartes Spritzen, denn aus dem Metall steigen unter leisem Knistern

[1] Von Caron (Comptes rendus, 1866) liegen derartige Beobachtungen vor. Bei den im Sauerstoffstrome geglühten Eisen, also bei Abhaltung der allenfalls absorbirbaren Feuergase, findet Abscheidung von Kohlenoxyd statt so wie im offenen Kohlenfeuer; auch ohne Sauerstoff entwickelt sich das Gas, indem die im Eisen enthaltenen Oxyde ihren Sauerstoff an die Kohle des Eisens abgeben. Nach Caron liefert unter gleichen Verhältnissen der »gemeine Schmelztiegel« blasigen, ein Kalktiegel oder Thilorier's Magnesiatiegel hingegen blasenfreien Guss.

[2] Wenn die Tiegelwand mit dem Flussmittel nicht genügend getränkt ist oder diese einen feinen Sprung erhält, so fällt die Schmelze gleich sehr blasig aus. Die von einer solchen beim Erstarren ausgeschiedenen Gasbläschen entzünden sich an der glühenden Kappe eines Paquelin'schen Apparates und rühren von absorbirten Feuerungsgasen her.

Gasbläschen auf, die Tröpfchen flüssigen und erstarrenden Metalles mit heraufreissen. Aus kleinen Rissen und Öffnungen der erstarrenden Oberfläche quillt manchmal flüssiges Metall, und es hinterbleiben in dem Gussstück Höhlungen, denen auf der Oberfläche die ausgetretenen Metallmassen entsprechen. Zerschlägt man nach dem Erkalten den Guss, so findet man (bei Anwendung kalter Metallformen) die unterste Schichte und die Randpartien auf einige Millimeter frei von Poren, weiter nach innen beginnt aber ein die ganze Metallmasse durchziehendes Netz feiner, innen glänzender Canälchen, die man von der Oberfläche aus mit einem steifen Haar sondiren kann (Fig. 1). Das freiwerdende Gas hat sich durch das halbflüssige Metall einen Weg nach aussen gebahnt.

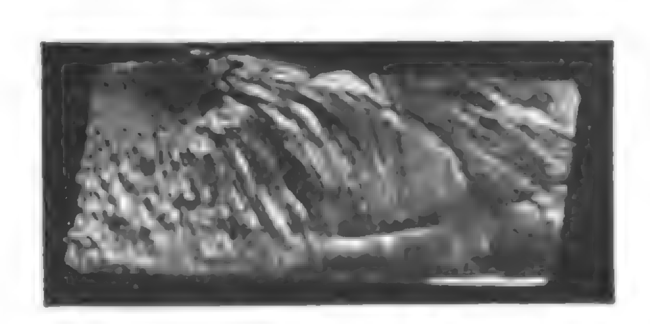


Fig. 1

Die Gasausscheidung beginnt mit dem Erstarren, denn die Oberfläche des flüssigen, ins Vacuum gebrachten Metalles bleibt zunächst spiegelblank; erst wenn es träge zu fliessen, also zu erstarren beginnt, steigt das Manometer an, und die schwammartig sich aufblähende Masse steigt langsam aus dem Tiegel heraus.

Auch bei gewöhnlichem Atmosphärendruck erfolgt mit dem Eintreten der starren (amorphen, beziehungsweise krystallinischen) Lagerung durch die Ausscheidung von Gasen eine Volumsvermehrung. Diese durch die Ausdehnung eines zwischengemengten fremden Körpers bedingte Schwellung wird aber durch die bei der Abkühlung stattfindende Einpressung der Erstarrungsdecke nur theilweise aufgehoben, denn der Luftdruck genügt nicht, das halbstarre Metall in die kleinen Bläschen, welche die ganze Masse durchsetzen, zurückzupressen.[1]

Da eine Absorption der möglicherweise auf dem Wege der Diffusion zu dem Metall gelangenden Gase nicht aus-

[1] Vergl. darüber Reamur, Hist. et mém. acad. Paris, 1726; Lewis, Schauplatz d. Künste, I und Reyer's citirte Arbeit.

geschlossen war, so versuchte ich dieselbe durch die in der Technik verwendeten Phosphor- oder Arsenzusätze zu vermindern.[1] Es gelang nicht, Phosphor, Aluminium oder Magnesium darzustellen oder den Phosphor direct in die Schmelze zu bringen. Dagegen machen schon ganz geringe Zusätze Phosphor oder Arsen enthaltender Metalle die Legirung glanzlos (grau) und so spröde, dass sie unter dem Druck des Fingernagels zersplittert. Zusätze reiner Metalle, wie Cu, Ni, Ag, Co, Mn u. s. w. steigern die Porosität durch Erhöhung des Schmelzpunktes und vermindern gleichzeitig das Reflexionsvermögen.

Ohne genauer den Ursprung der in der Legirung enthaltenen Gase ermitteln zu können, musste ich mich damit begnügen, dieselbe nachträglich zu entgasen und so deren Porosität zu beseitigen.

Ein einfaches Mittel ist durch den bei 350—400° C. liegenden Schmelzpunkt gegeben, bei welcher Temperatur die Legirung keine Gase mehr absorbirt. Durch wiederholtes Umschmelzen und Erstarrenlassen, das man am besten im Vacuum mit Hilfe des elektrischen Stromes vornimmt, gelingt es, die letzten Gasreste zu vertreiben.

Ein im Vacuum gedunsenes Stück einer Legirung, deren Bestandtheile in atomistischem Gewichtsverhältniss zusammengeschmolzen wurden (Legirung V der Tabelle) zeigt Höhlungen, deren Wände mit glitzernden, bis mehrere Millimeter grossen Krystallen bedeckt sind; es sind Rhombendodekaëder (∞O) von derselben Zusammensetzung wie die Legirung. Die beiden

Manchmal kommt es zur Bildung eines grösseren Gasraumes, der jedoch in Folge geringerer Tension des ausgedehnten Gases nicht nach aussen durchbricht. Bei der durch die Abkühlung noch weiter sinkenden Gasspannung presst der äussere Luftdruck das halbstarre Metall in Form einer trichterförmigen Einsenkung in den Hohlraum hinein. Diese als Nachsacken des Gusses bezeichnete Erscheinung wurde von Réamur bei Blei und Gold beobachtet.

[1] Schon Humboldt wusste, dass der Gasgehalt des Süsswassers durch Beimengungen von Salz heruntergesetzt wird. Der Absorptionscoëfficient des flüssigen Eisens wird durch Beimengung fremder Stoffe, wie Kohle und Silicium, sehr vermindert, der des Silbers wird durch Beimengung von Kupfer oder Gold herabgedrückt.

Bestandtheile Al und Mg bilden also eine chemische Verbindung.[1]

Lässt man das Metall unter Druck, z. B. unter einem auf 100—200 oder mehr Atmosphären comprimirten Gas erstarren, so wird es vorzüglich dicht, zeigt einen amorph muscheligen Bruch und nimmt eine wunderbare Politur an.[2]

Die Legirung krystallisirt im Vacuum und erstarrt unter Druck amorph.

Die Zusammensetzung.

Manchmal nimmt auch ein derart behandeltes Metall, obwohl völlig dicht, keine hohe Politur an. Der graue, auf einem solchen Spiegel liegende Flor rührt, wie die mikroskopische Untersuchung der Bruch- und Spiegelflächen zeigt, von versprengten winzigen Partien dunkler gefärbten Metalles her. Auch in sonst tadellosen Spiegelflächen liegen oft grössere, wegen ihrer geringeren Härte minder gut auspolirte Bezirke.[3]

Derartige Ungleichmässigkeiten werden schon durch ganz minimale Mengen fremder, in den Metallfluss gekommener Körper bewirkt. Diese verrathen sich auch an spiegelnd abgedrehten Scheiben von Rein-Aluminium oder Magnesium oder

[1] Stellenweise zeigen die Krystalle unvollkommene Formen, wie stumpfe Ecken und Kanten; wahrscheinlich wurden sie in ihrer Ausbildung durch die Erstarrung der Masse gehemmt.

Legirungen von nahe atomistischer Zusammensetzung, z. B. VI und IV, krystallisiren ebenfalls. Die im Vacuum erstarrte Legirung I zeigt Höhlungen, deren glänzende Wandungen von kleinen spitzen Körnchen krystallinischen Aussehens durchbrochen sind. Der Bruch ist körnig. Das Metall IX von krystallinischem Bruch zeigt mächtige Höhlen mit gleichmässig mattgrauen Flächen.

[2] Den Einfluss, den ein hoher Druck auf die Structur des unter ihm erstarrenden Metalles ausübt, zeigt sich besser bei anderen Metallen, wie VIII oder IX, weil V schon von Natur aus einen ziemlich ausgeprägten muscheligen Bruch hat.

[3] Auch an auspolirten Flächen des so dichten Martinstahles findet man mikroskopisch kleine, meist tiefer (als die Spiegelfläche) liegende Fleckchen geringeren Glanzes, die über den Spiegel einen grauen Schimmer verbreiten. Diese Stellen werden wahrscheinlich in Folge geringerer Härte beim Poliren tiefer gelegt (unterwaschen).

der miteinander legirten Metalle durch matte Stellen, an denen der Stichel (wegen der geringeren Härte des Metalles) nicht geschnitten, sondern gerieben hat.

Moissan hat nachgewiesen, dass nicht nur Eisen und Silicium als Beimengungen des Aluminiums, sondern auch Kohlenstoff, Stickstoff und Natrium vorkommen.[1] Besonders die beiden letzteren sind von Wichtigkeit, da Bruchtheile eines Procentes von denselben genügen, um die Legirung für Reflexionszwecke unbrauchbar zu machen.

Ein nur Spuren von Na enthaltender Spiegel wird in wenigen Wochen blind,[2] während N der Legirung den schönen Glanz nimmt und sie weniger widerstandsfähig macht.[3]

Ein in der Spiegelfläche sitzendes Theilchen Kohlenstoff oder ein anderer Fremdkörper wirkt unter dem Einflusse der Feuchtigkeit der Atmosphäre wie ein Element und zersetzt das Metall.

Ich habe Aluminium aus La Praz (Frankreich), Neuhausen (Schweiz) und Pittsburg (Amerika) verwendet und dabei gefunden, dass der Gehalt an fremden Beimengungen ein sehr schwankender ist.

Deshalb müssen die Metalle vor ihrer Verwendung gereinigt werden. Die Reinigung des Magnesiums, das übrigens seltener Stickstoff oder Natrium enthält, geschieht am besten durch Umdestilliren, während die Behandlung von Aluminium ungleich schwieriger und nicht ohne Weiteres zu bewerkstelligen ist.

Ganz besonders muss auch die durch die Tiegelwand mögliche Einführung fremder Substanzen in den Metallfluss berücksichtigt werden, und deshalb sind auch die eisen- und siliciumhältigen Thontiegel zu verwerfen und nur solche von Porzellan zu verwenden.

---

[1] Henri Moissan. Le four électrique.

[2] An Stellen, wo das Aluminium Natrium enthält, entsteht in der Feuchtigkeit ein wenig Alkali, welches auf das Metall unter Bildung eines Aluminates einwirkt.

[3] J. Mallet (Journ. of the chem. Society, t. XXX, p. 349; 1876) hat über ein Stickstoffaluminium berichtet. Die Gegenwart von Kohlenstoff und Stickstoff verändert die physikalischen Eigenschaften des Metalles; die Elasticitätsgrenze, Bruchfestigkeit und Dehnbarkeit werden herabgesetzt.

Im Allgemeinen ist das Spiegelmetall dann frei von Beimengungen, wenn es sich zu feinen Fäden ausziehen oder zu Kugeln von wenigen Zehntheilen eines Millimeters Wandstärke ausblasen lässt.[1]

Die Wirkungen der Schwermetallzusätze, die nach Moissan's Verfahren (siehe weiter unten) in das Aluminium der Legirung gebracht wurden, habe ich bereits erwähnt.

Auf Zinn- und Phosphorzinnzusatze zerfällt das Metall nach einiger Zeit schuppenförmig.

Einige andere Legirungen wurden versuchsweise dargestellt. So erhielt man beim Zusammenschmelzen von 1 Theil Cu mit $\frac{1}{8}$—$\frac{2}{3}$ Theilen Mg ein Metall von ausserordentlicher Brüchigkeit, röthlichem, in wenigen Minuten an der Luft oxydirendem Bruch.

Die Legirung von 1 Theil Cu mit $1\frac{1}{4}$—$2\frac{1}{2}$ Theilen Mg ergibt dem Spiegelmetall mehr ähnliche dichte Metalle von körnigem Bruch und einer etwas ins Gelb spielenden, rasch anlaufenden Politur. Eines dieser Metalle (1 Theil Cu mit $1\frac{1}{4}$ Theilen Mg) zerfiel nach einigen Monaten in kleine Stücke.

Die sehr dichten Fe-Al-Legirungen zeigen beim Anpoliren eine mehr graue Farbe.

1 Theil Ag mit 2 Theilen Al gibt ein hartes (bearbeitungsfähiges) Metall von hohem Reflexionsvermögen, dessen Spiegelbilder mit dem steigenden Al-Gehalt immer mehr grau verfärben.

Silber-Zinn-Legirungen zu gleichen Theilen sind spröde Metalle von hohem Reflexionsvermögen, die jedoch nach wenigen Tagen rosenroth, bei Steigerung des Zinngehaltes indessen schwarz anlaufen.

Die Structur.

Die Structur hängt ab von der Zusammensetzung, der Temperatur, welcher die Legirung ausgesetzt war, sowie von der Art des Erstarrens ab.

Durch Überhitzung beim Schmelzen kann die von Natur aus amorphe Structur einer Legirung in eine krystallinische verwandelt werden, womit ein Sinken des Reflexionsvermögens

[1] Wenn sich auf dem Boden einer kleinen Form ein Tröpfchen Wasser befindet, so wird die Oberfläche des eingegossenen Metalles durch den Wasserdampf in Form einer papierdünnen Halbkugel aufgehoben. Ist das Metall überhitzt, so entzündet sich der durch Wasserzersetzung entstandene Gasinhalt der Hülle mit blauer Flamme.

verbunden ist.[1] Um jede Überhitzung zu vermeiden, wurde deshalb auch bei abgestelltem Feuer das Magnesium in dem dünnflüssigen Aluminium eingeschmolzen.

Von ganz besonderem Einfluss ist auch, wie erwähnt, der Übergang vom flüssigen zum festen Aggregatzustand. Das in kalten Eisenformen unter Druck rasch zum Erstarren gebrachte Metall zeigt einen dem amorphen viel näher kommenden Bruch, als das langsam bei gewöhnlichem Atmosphärendruck erstarrte Metall gleicher Zusammensetzung.

Da aber solche rasch erstarrte Stücke schon im Laufe der nächsten Stunden in Folge innerer Spannungen zerspringen würden, so müssen sie einem äusserst langsamen Kühlungsprocess in Leinöl unterworfen werden. Solche Spiegel nehmen dann bei ihrem rein muscheligen Bruch eine herrliche, völlig structurlose Politur an.

Die aluminiumreicheren Legirungen entzünden sich im dünnflüssigen Zustand am Sauerstoffe der Luft und verbrennen theilweise zu Al- und Mg-Oxyd.

Über den Spiegel des rasch in eine schwach vorgewärmte Eisenschale gegossenen dünnflüssigen Metalles (z. B. Legirung V) breitet sich blitzartig ein schwarzes Oxydhäutchen aus, aus dem nach einigen Secunden weiterer Oxydation höckerige, schwarze, ganz poröse Efflorescenzen emporwachsen, die in ihrem Inneren noch flüssige Legirung in sehr fein vertheiltem Zustand enthalten. Sie beginnen zuerst dunkelroth zu glühen und verbrennen plötzlich unter Entwickelung eines intensiv weissen Lichtes zu einer weissen, aus Magnesium- und Aluminiumoxyd bestehenden Asche. Durch die mächtige, dabei sich entwickelnde Wärme wird das Metall in der Eisenschale flüssig erhalten und verbrennt durch Weitergreifen des Processes völlig, wobei sogar auch die aus Bessemerstahl gefertigte Gussform geschmolzen wird.

Durch Aufspritzen von Wasser oder, was noch besser ist, durch Einblasen eines Strahles von überhitztem Dampf in das brennende Metall kann man den Verbrennungsprocess befördern (durch Dissociirung des Dampfes).

---

[1] Metalle von stark krystallinischem Gefüge lassen sich nicht als Spiegel verwenden. So kommt bei einem Spiegel aus reinem Antimon die krystallinische Structur in Form kleiner Fleckchen zum Vorschein, so dass die ganze Spiegelfläche marmorirt ist.

Schon Mac Cullagh und Lord Rosse fanden, dass Metalle von mehr krystallinischem Bruch dauerhafter sind. Bei dieser Legirung ist die Luftbeständigkeit unabhängig von der Structur.

Bei entsprechender Versuchsanordnung schmolz ich in kleinen Kohletiegeln von etwa Fingerhutgrösse Nickel und Wolfram. Die durch die Verbrennung des Aluminiums und Magnesiums erzeugte Temperatur ist sehr hoch.[1]

Durch Moissan (und später durch Goldschmiedt in Essen) hat die hohe Verbrennungswärme des Aluminiums technische Verwerthung gefunden. Moissan streute auf ein dünnflüssiges Aluminiumbad Aluminiumfeile mit den zu reducirenden Metalloxyden, wobei durch die Verbrennung des fein vertheilten Al die beständigsten Oxyde reducirt wurden und die Metalle in das Aluminium übergingen.

Die Reduction der Oxyde gelingt, wie ich mich überzeugt habe, bei etwas anderer Versuchsanordnung mit Mg. Die leicht schmelzbaren Al-Mg-Legirungen scheinen mir noch mancher Verwerthung fähig.

Die Efflorescenzen eines in einem Tiegel befindlichen flüssigen Metalles beginnen beim Abheben des Deckels (also bei Luftzutritt) zu glühen und erlöschen sofort nach dem Aufsetzen. Wird Wasser in den Tiegel gespritzt, so verpufft beim Abheben des Deckels unter Detonation ein inzwischen in demselben entstandenes Gas mit gelblicher Flamme. Der sich entwickelnde Wasserdampf wird dissociirt; der Sauerstoff verbindet sich mit dem Mg, der frei werdende, stark erhitzte Wasserstoff verpufft an der Luft. Beim Erhitzen unter Luftabschluss entsteht etwas Stickstoffmagnesium, und das bei Einführung des Wasserdampfes sich entwickelnde Ammoniakgas färbt die Wasserstoffflamme gelb.[2]

Übersicht der Legirungen.

Die nachstehende tabellarische Zusammenstellung der verschieden zusammengesetzten Legirungen nebst den ihnen zukommenden mechanischen und optischen Eigenschaften soll es ermöglichen, das Metall der jeweiligen Verwendungsart des Spiegels gut anzupassen.[3]

[1] Winkler und Andere haben bereits auf die Leichtigkeit der Reduction mancher Sauerstoffverbindungen durch Mg hingewiesen. In besonderen Fällen kann Al verwendet werden.

[2] In dem halbverbrannten Inhalt des Tiegels findet sich stellenweise das poröse, gelb gefärbte Stickstoffmagnesium Mg_3N_2 (Briegleb und Geuther), das, in Wasser gebracht, dieses zum Sieden erhitzt und reichlich Ammoniak entwickelt ($Mg_3N_2 + 3H_2O = 3MgO + 2NH_3$). Schon beim Anhauchen macht sich ein intensiver Ammoniakgeruch bemerkbar. Die in Wasser eingelegten Metallreste scheiden H aus, in der Flamme des Bunsenbrenners verbrennen sie völlig. Das Metall brennt auch eine kurze Zeit unter Wasser fort.

[3] Beim Gittertheilen ist es z. B. von besonderer Wichtigkeit, dass das dabei verwendete Metall eine amorphe und nicht krystallinische Structur besitzt, die beim Reissen der Linien stören würde.

Die Legirung V von atomistischer Zusammensetzung zeigt hervorstechende Eigenschaften, hellen muscheligen Bruch, enorme Sprödigkeit, vorzügliche Politur und hohes Reflexionsvermögen bei ausgezeichneter Haltbarkeit.[1]

Legirungen mit höherem Magnesiumgehalt (siehe Tabelle) sind weniger spröd, zeigen eine geringere Politurfähigkeit, liefern aber noch helle Spiegel.

Beim Überwiegen des Aluminiumgehaltes hingegen werden die Spiegel dunkler, mehr grau gefärbt und lassen sich wegen ihrer geringeren Härte nur schwer auspoliren.

Auch mit den beiden Componenten der Legirung wurden Polirversuche angestellt und die Spiegel optisch untersucht (siehe weiter unten), es gelang aber nicht, auf Rein-Aluminium oder Magnesium eine optisch richtige Fläche zu schleifen und zu poliren.

Reines, hydraulisch gepresstes Magnesium gibt zwar einen silberweissen Spiegel, doch ist bei der Weichheit des Metalles die Politur voller feiner Kritzchen, also sehr unvollkommen.

Gehämmertes oder gepresstes Rein-Aluminium ist ebenfalls zu weich und bereitet deshalb beim Auspoliren grosse Schwierigkeiten. Ein solcher Spiegel bleibt immer grau und gibt röthlichgelb gefärbte Bilder.

Erst durch einen gewissen Magnesiumzusatz wird das Aluminium genügend hart, weiss gefärbt und in hohem Grade politurfähig.

Doch zeigten auch die besten Al-Mg-Legirungen, wie IV und V, beim Poliren ein von dem bis jetzt in der Optik verarbeiteten Material völlig verschiedenes Verhalten. Die Erzielung der höchsten sogenannten »structurlosen« Politur erforderte deshalb noch ein besonderes Studium. Die nach neuen Methoden hergestellten Spiegel können aber bezüglich der Güte der Politur und Genauigkeit der Flächen den früheren Metall- und Glassilberspiegeln an die Seite gestellt werden.

---

[1] Lord Rosse hat beim Studium seiner Kupfer-Zinn-Legirungen die besonderen Vorzüge atomistisch zusammengesetzter Metalle erkannt und dieselben besonders empfohlen.

Nummer der Legirung	Al	Mg	Mechanische Eigenschaften	Optisches Verhalten	Haltbarkeit
I	2	1	Zerspringt auf kräftige Hammerschläge, matter körniger Bruch. Hammer schlägt Dellen. Gute Politur.	Reflectirt.	Ausgezeichnet
II	1·75	1	Zerspringt auf Hammerschläge, heller muscheliger Bruch, ziemlich spröde, Hammer schlägt keine Dellen. Gute Politur.	Reflectirt das ganze Spectrum merklich schwächer als V, besonders das Ultraviolett.	Ausgezeichnet
III	1·5	1	Bedeutend spröder wie die frühere Legirung, hellglänzender muscheliger Bruch. Sehr gute Politur.	—	Ausgezeichnet
IV	1·25	1	Spröde, sehr hell glänzender muscheliger Bruch. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das sichtbare Spectrum wie V, das Ultraviolett etwas besser als V.	Ausgezeichnet

V	27	24·3	Ausserordentlich spröde (in weit höherem Grade als die bisher verwendeten Spiegellegirungen), blendend heller muscheliger Bruch. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das sichtbare Spectrum so energisch wie der Glassilberspiegel und besser als der Rosse'sche und Brashear-sche; das Ultraviolett bedeutend stärker als diese drei und wo nicht Anderes bemerkt, auch etwas besser als die sämmtlichen Al-Mg-Spiegel.	Ausgezeichnet
VI	1	1·25	Ausserordentlich spröde, blendend heller muscheliger Bruch. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das sichtbare Spectrum nahezu wie V, das Ultraviolett bedeutend schwächer als V.	Ausgezeichnet
VII	1	1·5	Etwas weniger spröde, noch ungemein glänzender muscheliger Bruch. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das sichtbare Spectrum wie V, das Ultraviolett etwas besser als V	Ausgezeichnet
VIII	1	1·75	Zerspringt auf Hammerschläge, glänzender muscheliger Bruch. Hammer schlägt keine Dellen. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das ganze Spectrum nahezu wie V.	Sehr gut
IX	1	2	Hält kräftige Hammerschläge aus. Bruch mehr krystallinisch, dem Eisen ähnlich, aber noch glänzend, lässt sich auch drehen. Hammer erzeugt Dellen. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das ganze Spectrum nahezu wie V, jedoch VIII nicht vollständig erreichend.	Sehr gut

Nummer der Legirung	Al	Mg	Mechanische Eigenschaften	Optisches Verhalten	Haltbarkeit
X	1	2·25	Hält sehr kräftige Hammerschläge aus. Spiegelnde Drehflächen mit scharfen Facetten, mehr matt krystallinischer Bruch Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das sichtbare Spectrum kaum von V verschieden, weniger energisch dagegen das Ultraviolett.	Diese Spiegel sind dem Anlaufen in feuchter Atmosphäre mehr ausgesetzt und auch gegen ganz minimale fremde Beimengungen (Na, N u. s. w.) ungleich empfindlicher wie die aus aluminiumreicheren Legirungen gefertigten.
XI	1	2·5	Lässt sich mit dem Hammer nur schwer zerschlagen. Spiegelnde Drehflächen, lockenförmige Späne, matter krystallinischer Bruch. Ausgezeichnete Politur.	—	
XII	1	2·75	Lässt sich mit dem Hammer nur schwer zerschlagen. Spiegelnde Drehflächen, lockenförmige Späne, matter feinkörniger Bruch. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das ganze Spectrum nahezu wie V.	
XIII	1	3	Lässt sich mit dem Hammer ungemein schwer zertrümmern. Spiegelnde Drehflachen, lockenförmige Späne, matter feinkörniger Bruch. Ausgezeichnete Politur.	—	

XIV	1	3·25	Lässt sich mit dem Hammer ungemein schwer zertrümmern. Spiegelnde Drehflächen, lockenförmige Späne, matter feinkörniger Bruch. Ausgezeichnete Politur.	Reflectirt das ganze Spectrum etwas besser als V.	Diese Spiegel sind dem Anlaufen in feuchter Atmosphäre mehr ausgesetzt und auch gegen ganz minimale fremde Beimengungen (Na, N u. s. w.) ungleich empfindlicher wie die aus aluminiumreicheren Legirungen gefertigten
XV	1	4·25	Geschmeidiges Metall. Spiegelnde Drehflächen, lockenförmige Späne, matter feinkörniger Bruch. Gute Politur.	Reflectirt das sichtbare Spectrum nahezu wie V, das Ultraviolett merklich schwächer als V.	
XVI	1	6·5	Geschmeidiges Metall. Spiegelnde Drehflächen, lockenförmige Späne, grobkörniger Bruch. Gute Politur.	Reflectirt wie XV.	
XVII	1	13	Geschmeidiges Metall. Spiegelnde Drehflächen, lockenförmige Späne, sehniger Bruch. Gute Politur.	Reflectirt das sichtbare Spectrum nahezu wie V, das Ultraviolett unwesentlich schwächer als V.	

Mit steigendem Al-Gehalt
wird die Legirung weniger spröd, der Bruch feinkörnig und gleichzeitig das specifische Gewicht erhöht. Der Glanz und die Politurfähigkeit nehmen sehr rasch ab; die polirten Flächen bekommen einen Stich ins Graue.

Es ist nicht gelungen, gegossenes, gepresstes oder geschmiedetes Rein-Aluminium völlig auszupoliren. Das Metall zeigt immer eine graue Farbe, das von einem solchen Spiegel reflectirte Bild einen röthlichen Schein.

Mit steigendem Mg-Gehalt
wird die Legirung weniger spröd, der Bruch krystallinisch feinkörnig, und gleichzeitig sinkt das specifische Gewicht. Der Glanz des Metalles nimmt nicht ab, dagegen wegen der sinkenden Härte die Politurfähigkeit.

Gepresstes Rein-Magnesium lässt sich besser auspoliren als Aluminium. Eine tadellose (kritzchenfreie) Politur erzielt man nicht, doch zeigt das Metall eine fast silberweisse Farbe, und das von einem solchen Spiegel reflectirte Bild ist ziemlich hell und völlig farblos.

Wie schon erwähnt, werden die unter Druck rasch erstarrten, aber ausserordentlich langsam gekühlten Spiegel aus den reinsten Materialien hergestellt und widerstehen der Feuchtigkeit, dem Schwefelwasserstoff und der schwefeligen Säure der Atmosphäre sehr gut.

Im Allgemeinen schienen mir polirte Flächen etwas weniger widerstandsfähig wie die Bruchflächen. Die genauere Untersuchung lehrt, dass es sich in diesen Fällen um die chemische Nachwirkung mancher Polirmittel handelt.

Auch bei einem in Wasser eingelegten Bruchstück eines Spiegels lief die polirte Fläche im Laufe von 48—60 Stunden an, wogegen die Bruchfläche durch lange Zeit blank blieb. Das im Wasser entstehende ungemein dünne Oxydhäutchen schützt die Fläche aber vor tiefergehender Zerstörung und lässt sich mit dem Finger leicht wegreiben.

Das specifische Gewicht dieses Spiegelmetalles kann im Durchschnitt gleich 2 gesetzt werden; der Schmelzpunkt liegt ungefähr bei 400° C.

Die Untersuchung auf das optische Verhalten ergab, wie schon die Tabelle zeigt, einige bemerkenswerthe Resultate.

Von dem hohen Reflexionsvermögen des Metalles für weisses Licht, das nahezu das des Silbers erreicht, konnte ich mich durch einen einfachen Laboratoriumsversuch überzeugen.

Das Verhalten des Metalles gegen das brechbarere Ende des Spectrums konnte ich mangels der nöthigen Hilfsmittel und Erfahrungen nicht untersuchen, aber Herr Dr. V. Schumann in Leipzig hatte die besondere Freundlichkeit, diesen Theil der Arbeit durchzuführen, wofür ich ihm zu ganz ausserordentlichem Danke verpflichtet bin.

L. Mach.

Über das spectrophotographische Verhalten des neuen Spiegelmetalles.

Ich nahm das Spectrum der von den Spiegeln der Mach-schen Legirungsreihe reflectirten Strahlen eines elektrischen Funkens auf und ermittelte für die einzelnen Spiegel die zur

Bildung eines eben entwickelbar gewordenen Lichteindruckes erforderliche Belichtungsdauer. Zum Vergleich dienten auf gleiche Weise erlangte Spectra von Spiegeln nach Foucault (versilbertes Glas) und aus Spiegelmetall nach Rosse und Brashear. Aus den Belichtungszeiten dieser Aufnahmen ergab sich dann ohne Weiteres das relative Reflexionsvermögen: das Reflexionsvermögen der verglichenen Spiegel verhielt sich umgekehrt wie die den Anfangswirkungen entsprechenden Belichtungszeiten.

Die Aufnahme geschah mit einem Spectrographen von 15 *cm* Brennweite des gelben Natriumlichtes. Sein Prisma bestand aus Flussspath, seine Linsen aus Quarz. Zur Untersuchung des Reflexionsvermögens der Spiegel für ultraviolette Strahlen wählte ich ultraviolettempfindliche Platten, weil dieselben frei von den Absorptionswirkungen der Gelatine sind und demnach für alle Strahlen des angewandten Lichtquells, wie auch aus den Spectren 7, 8, 9, 10 der Tafel hervorgeht, gleichmässigere Empfindlichkeit zeigen. Diese Platten waren nach meinem Verfahren mit AgBr, das eine Spur Gelatine enthielt, überzogen. Solche Platten sind, wie von meinen Aufnahmen des Gebietes der kleinsten Wellenlängen bekannt ist, vom Cyanblau an bis zur Wellenlänge 1000 AE empfindlich. Im vorliegenden Falle enden jedoch die Aufnahmen schon mit der Wellenlänge 1852 AE, da alles stärker abgelenkte Licht von der zwischen Lichtquell und Platte befindlichen, circa 40 *cm* dicken Luftschicht absorbirt wurde.

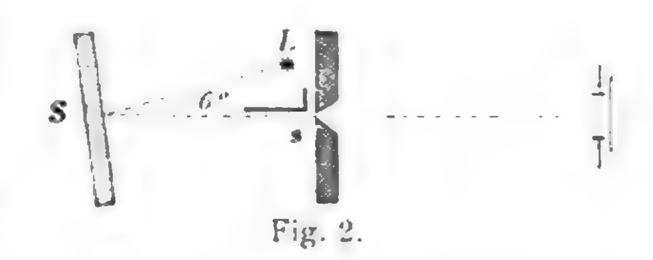


Fig. 2.

Lichtquell *L* und Spiegel *S* waren, um den durch Luftabsorption und Reflexion bedingten Energieverlust der Strahlen so viel als möglich zu mindern, dem Spalte *s* so nahe gerückt, als es die übrigen Versuchsbedingungen erlaubten (Fig. 2). Die Strahlen bildeten mit dem Einfallslothe des Spiegels einen Winkel von nur 3 Grad.

In allen Fällen, auch dort, wo der Spalt direct (ohne Anwendung eines Spiegels) beleuchtet wurde, war die Dicke der Luftschicht im Allgemeinen dieselbe.

Über die Beständigkeit des Lichtquells, die vom Verbrauche der Elektroden, respective von den unvermeidlichen, wenn auch nur sehr kleinen Schwankungen des Inductionsstromes abhing, gab eine besondere Spectralreihe Aufschluss.

Zum Lichtquell diente ein Aluminiumfunken, wie ihn ein durch drei Grovebecher gespeistes, für 8 *cm* lange Funken eingerichtetes Inductorium in Verbindung mit einer Leydner Flasche von 40 *cm* Capacität liefert.

Die Spectren messen vom Cyanblau an bis zur Wellenlänge 1852 AE etwas mehr als 5 *cm*. Infolge ihrer Kleinheit und der gleichmassigen Empfindlichkeit der angewandten Platten sind sie sehr übersichtlich und bei der mässigen Krümmung der Bildfläche des angewandten Spectrographen auch durchweg so klar gezeichnet, dass man sich, besonders im Ultravioletten, leicht ein Urtheil über die Wirkungsverhältnisse der verschiedenen Strahlen bilden kann. Obgleich nun jederzeit das gesammte Spectrum aufgenommen wurde, so wurde doch dessen brechbarster Theil besonders berücksichtigt. Anregung hiezu gab das im Laufe der Untersuchung zu Tage tretende Verhalten der Mach'schen Spiegel selbst.

Das spectrale Ergebniss (vergl. die Spectraltafel) meiner Versuchsplatten gestaltete sich hienach folgendermassen:

1. Der angewandte Lichtquell, der elektrische Funken, erwies sich auf Grund zahlreicher Aufnahmen als constant. Auch war der Verbrauch der Elektroden so klein, dass die diesem entsprechende Zunahme der Funkenlänge keinen wahrnehmbaren Einfluss auf die Aufnahmen der einzelnen Platte ausübte. Es genügte, wenn die Elektroden, anstatt nach jedesmaliger Aufnahme eines Spectrums, nur beim Plattenwechseln auf ihren ursprünglichen gegenseitigen Abstand zurückgeführt wurden.[1]

[1] Funkenlängen von 10 bis 30 partes eines Zeiss'schen Ocularmikrometers liessen bei je 10 Secunden Belichtungsdauer keine Verschiedenheit der Energie erkennen. Ebensowenig solche von 20 bis 25 partes bei Belichtungen bis zu 180 Secunden. Da nun bei einer ungewöhnlich langen Aufnahmereihe, deren Gesammtdauer sich auf 343 Secunden belief, wie solche keine meiner Versuchsplatten erreichte, der Elektrodenabstand, der annähernd gleich der Funkenlänge, nur von 26 auf 27·5 partes wuchs, so konnte ich meinen Licht-

2. Sämmtliche Legirungen Mach's, 17 an der Zahl, unterscheiden sich in ihrem spectralen Verhalten unwesentlich von einander. Nur eine von ihnen, nämlich Legirung VI, macht eine Ausnahme: sie verschluckt wesentlich mehr Licht als die anderen. Um mit ihr im brechbarsten Ultraviolett denselben Effect wie mit den übrigen Legirungen zu erlangen, war die $1\frac{1}{2}$- bis 2fache Belichtungszeit dieser erforderlich.

3. Es ergab sich, dass sämmtliche Al-Mg-Legirungen ohne wesentlichen Unterschied das Ultraviolett besser reflectiren als die Spiegel von Brashear, Rosse und Foucault. Zu den besten der Legirungen gehören Nr. IV und V. Beiden sehr nahe steht der Brashear'sche Spiegel, mehr absorbirt der Rosse'sche, am meisten der Foucault'sche. Bei der gleichen Belichtungsdauer geben IV und V das gesammte Spectrum (vergl. d. Spectraltafel) vollständiger als die anderen Spiegel.[1] Im Ultravioletten übertreffen IV und V aber alle übrigen, selbst den ihnen sehr nahestehenden Brashear'schen Spiegel nicht ausgenommen, und im sichtbaren Spectrum, soweit es hier in Betracht kommt, selbst den in diesem Theile bisher unerreichten Foucault'schen Spiegel fast vollständig. Der Foucault'sche Spiegel ist sogar, wie seine Spectra 8 der Tafel zeigen, für den ultravioletten Bezirk seines bei Wellenlänge 3200 liegenden Absorptionsbandes halber gänzlich unbrauchbar.

quell für die gesammte Belichtungsdauer der Spectren einer einzelnen Platte als beständig ansehen. Ich brauchte sonach die Elektroden nur nach jedesmaligem Plattenwechsel auf das ursprüngliche Maass ihrer gegenseitigen Entfernung einzustellen. Ich beobachtete bei diesen Aufnahmen die Vorsicht, den mittleren Theil der Linien, und auch von diesem nur eine kurze Strecke, zu benutzen. Bei Verwendung des übrigen Theiles der Linie ist nämlich Vorsicht geboten, weil dieser, besonders bei langen, nahe dem Spalt wirkenden Funken, entsprechend den Lichtcentren der beiden Elektroden, gern doppelt erscheint, was, wie leicht einzusehen, eine Verminderung ihrer Wirksamkeit auf die Flächeneinheit zur Folge hat.

[1] Da die Luftwege der Strahlen vor dem Collimatorspalt in Folge Schwierigkeiten, die mir die Aufstellung des Spiegels bot, etwas verschieden, und zwar beim Foucault'schen Spiegel am kleinsten (84 *mm*) und beim Spiegel V am grössten (108 *mm*) ausgefallen sind, so dürfte hienach diese Legirung noch etwas besser reflectiren, als die betreffenden Spectrogramme besagen.

Ihrem Reflexionsvermögen nach reihen sich die Spiegel in steigender Güte wie folgt aneinander: Foucault, Rosse, Brashear, Mach.

4. Bei allen Spiegeln nimmt die Absorption mit der Brechbarkeit der Strahlen beträchtlich zu. Beispielsweise brauchten die Legirungen IV und V zur Aufnahme des Anfangsgebietes vom Ultravioletten $1^1/_2$ mal so viel, zu der Linie 1852 AE 3- bis 4mal so viel Zeit wie bei directer Belichtung des Collimatorspaltes. Bei den anderen Spiegeln war der Lichtverlust noch beträchtlicher. Der Rosse'sche verlangte unter gleichen Umständen für dieselbe Linie $1^1/_2$ bis 2fache und der Foucault'sche mindestens die doppelte Belichtungsdauer der Legirungen IV und V.

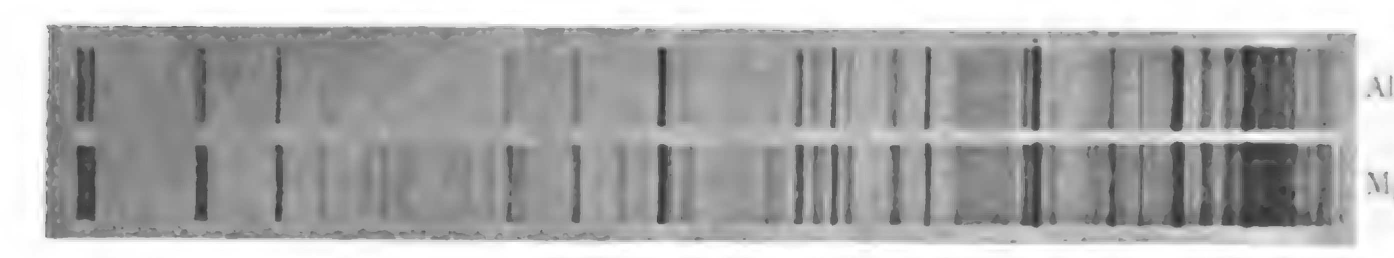


Fig. 3.

In gleicher Weise wie die Legirungen wurden auch deren Bestandtheile Al und Mg auf ihr Reflexionsvermögen untersucht. Das Al reflectirte wesentlich schwächer als das Mg (vergl. die Spectren von Fig. 3) und dieses wieder schwächer als die Legirung V. Leider lässt sich nicht feststellen, wie weit hieran die unvollkommene Politur, womit man sich aus den genannten Gründen bei diesen Metallen begnügen muss, betheiligt ist.

V. Schumann.

Über die Verwendung des Spiegelmetalles.

Das Metall dürfte beim Instrumentenbau mancherlei Verwendung finden, so bei Diffractionsgittern, an Stelle der vergänglichen Glassilberspiegel und der so schweren Metallspiegel und Reversionsprismen.

Der Astrophotograph (für den das photographirbare Spectrum bis zur Wellenlänge 2930 AE von Wichtigkeit ist) wird vielleicht dem neuen Metall bei seinem Verhalten gegen die

Strahlen kürzerer Wellenlänge umsomehr den Vorzug vor den Glassilberspiegeln geben, als es sein geringes Gewicht und die Luftbeständigkeit für den Bau grösserer Spiegelteleskope besonders geeignet erscheinen lassen.[1]

Das ungemein reine, weil von den Reflexen der Achromaten freie Bild, auch die bei der Anwendung stärkerer aplanatischer Oculare vollkommene Achromasie welche Farbennuancen leichter erkennen lässt, sowie die viel bequemere Handhabung des bedeutend kürzeren Reflectors sind nicht zu unterschätzende Vortheile.[2]

Allerdings ist die Centrirung eines grossen Reflectors bei dem gegen Verbiegungen ungemein empfindlichen und nicht fest in der Fassung liegenden schweren Spiegel viel unbeständiger, und auch die Collimationslinie (Neigung der optischen Axe gegen die geometrische des Rohres) ist grösseren Schwankungen unterworfen wie beim Refractor, aber diese den älteren Instrumenten anhaftenden Mängel dürften mit der Anwendung des neuen Metalles behoben werden.[3]

---

[1] Platin ist das einzige bis jetzt bekannte Metall, welches die ultravioletten Strahlen reichlicher reflectiren soll als Silber; doch ist sein Reflexionsvermögen namhaft geringer als das des Silbers (nach Haughton Silber 0·926, Platin 0·726, Palladium 0·706).

[2] Über die Vorzüge des Bildes im Reflector haben viele sehr subtile Beobachter betont. Šafařik in der oben citirten Arbeit. — T. Ayers, Engl. Mechanic, Bd. 19, p. 119. — John Browning, Engl. Mechanic, No. 446. — C. A. Steinheil, Schuhmacher's Jahrbuch für 1844. — George E. Hale, Astroph. Journ., Bd. 5, p. 119, 1897. — F. L. O. Wadsworth ebendaselbst. Auch Urtheile von Airy, Bessel, H. Kreutz und Anderen liegen vor.

Die Brennweite des Reflectors ist meist bedeutend kürzer als die des Achromaten von gleicher Öffnung. Fraunhofer gab den mittleren Objectiven die 15fache Öffnung zur Brennweite, den grösseren die 18fache (Pulkovo 1:18, Lick 1:19). Lassell nahm die Brennweite seiner Spiegel gleich dem 10fachen Durchmesser, Rosse dem 9fachen, Foucault sogar dem 6fachen. Die Montirung eines grossen Refractors wird ebenso schwer wie die eines Reflectors, wie z. B. beim 20 *m* langen Rohr des Yerkes-Téleskopes, das allein 120 Centner wiegt (Šafařik).

Übrigens hat man schon längst begonnen, bei der Montirung von Spiegelteleskopen für den Beobachter ähnliche Vortheile zu schaffen wie beim Loewy'schen Äquatoreal (coudé).

[3] Obwohl das Spiegelmetall an Steifheit dem Stahle nahekommt, so biegen sich die Scheiben doch durch ihr eigenes Gewicht in den verschiedenen

Lord Rosse's grosser Spiegel wiegt bei einem Durchmesser von 183 *cm* und einer Dicke von 16 *cm* (sp. Gew. = 8·8) etwa 80 Centner oder 4064 *kg*, ein Glassilberspiegel bei demselben Durchmesser und der geringsten zulässigen Dicke von 18·3 *cm* (sp. Gew. = 3) würde 1443 *kg* und ein solcher aus Šafařik's Metall hergestellter Spiegel von derselben Öffnung und der reichlich bemessenen Dicke von 9 *cm* etwa 2130 *kg* wiegen.

Eine Scheibe von 10—13 *cm* Durchmesser des neuen Metalles ist bei 1 *cm* Dicke gegen Verbiegung völlig gesichert. Die Dicke grösserer Scheiben von derselben Steifheit nimmt zu wie die Quadratwurzel des Durchmessers.

Demnach würde ein solcher Spiegel von 183 *cm* Durchmesser nur 4 *cm* Dicke erfordern und 260 *kg* wiegen bei gleichzeitiger Steigerung seiner optischen Leistung.

Bei der Montirung der Spiegel sind aber aus den früher erörterten Gründen Fassungen von Messing, Kupfer und Eisen zu verwerfen und nur solche aus Aluminium zu verwenden.

Lagen verschieden durch, was der Güte des Bildes unvergleichlich schädlich ist.

Sir John Herschel hat diesen Punkt (Results, 1847, §. 17—18) behandelt.

Lassell theilt mit, dass bei Wendungen seines Reflectors in etwas grösserem Stundenwinkel vom Osten des Meridians nach dem Westen der grosse Spiegel, wiewohl auf das sorgfältigste äquilibrirt, etwa zwei Minuten brauchte, um die neue Gleichgewichtslage anzunehmen und wieder scharf zu zeigen.

Ein 18 zölliger Metallspiegel von 2 Zoll Dicke gibt, auf drei Punkten der Peripherie aufliegend, dreieckige verzerrte Sternbilder mit langen Lichtschweifen. Liegt zwischen dem Spiegel und der Auflagescheibe ein Bindfaden, der über das Centrum derselben geht, so ist der Spiegel in zwei Hälften getheilt, und die unvollkommenen Bilder derselben sind durch eine Lichtbrücke verbunden (Šafařik).

Lord Rosse überzeugte sich, dass ein Druck mit der Hand auf die Rückseite eines 6 Zoll starken Spiegels das Sternbild deformirte. Es gibt eben keine in der Praxis mögliche Dicke des Spiegels, welche diesen Effect gänzlich beseitigt. Deshalb müssen auch ganz grosse Spiegel auf dem Hebellager, welches bestimmt ist, sie im Rohre zu tragen, von Anfang an geschliffen und polirt werden, und dürfen dasselbe nie mehr verlassen. Jeder Versuch, sie von demselben zu erheben, kann zum permanenten Verlust der genauen Gestalt führen und den Neuschliff des Spiegels nöthig machen.

Ich möchte noch erwähnen, dass die Darstellung einer Aluminiumlegirung von vorzüglicher Bearbeitungsfähigkeit gelungen ist, die mir vermöge ihrer hohen mechanischen Festigkeit für den Bau astronomischer Instrumente besonders geeignet erscheint. Da man überdies die Härte beliebig variiren kann, so stösst auch die Ausführung genauer Axenbewegungen aus dieser Legirung auf keine Schwierigkeiten.

Ein solcher kleinerer, gegenwärtig aber noch im Bau begriffener Reflector, bei dem auch eine Reihe neuer Constructionen zur Anwendung kommt, wird an anderer Stelle beschrieben werden.

Diese in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena durchgeführte Arbeit hat Herr Dr. O. Schott durch Überlassung seiner Einrichtung für Versuchsschmelzen besonders gefördert. Herr Grieshammer hat die nöthigen analytischen Bestimmungen ausgeführt, während Herr Dr. Pauly und die Herren Werkmeister R. Töpfer und K. Schäfer in der zuvorkommendsten Weise das Schleifen und Poliren der Proben besorgt haben. Die nöthigen Hilfsapparate und Maschinen liess Herr Maschinenmeister B. Klemm in seiner Werkstattsabtheilung bauen. Die Anfertigung der Vergrösserungen, sowie der Lichtdrucktafel endlich hat Herr R. Schüttauf übernommen.

Allen genannten Herren erlaube ich mir an dieser Stelle für ihre liebenswürdige Unterstützung meinen Dank auszusprechen.

L. Mach.

Tafelerklärung.

1. Aufnahme des ganzen Spectralbezirkes, für den die moderne Trockenplatte empfindlich ist (ohne Spiegel). Die plötzliche Abnahme der Empfindlichkeit auf der brechbareren Spectrumhälfte hat die Gelatine des Plattenüberzuges durch ihre Absorption der Strahlen bewirkt. Al-Funken, Luftweg der Strahlen zwischen Funken und Collimatorspalt 100 *mm*, 10 Minuten Exposition, Soda-Pyro-Entwickler mit KBr-Zusatz.

2. Aufnahme der Al- und Cd-Linien (ohne Spiegel), die zur Orientirung dienen soll. Luftweg der Strahlen zwischen Funken und Collimatorspalt 100 *mm*, Al-Funken 60 und 120 Secunden Exposition, Cd-Funken 10 Secunden Exposition, Soda-Pyro-Entwickler ohne KBr-Zusatz.

3. Aufnahme mit einem Foucault'schen Spiegel. Al-Funken, Luftweg der Strahlen zwischen Funken und Collimatorspalt 84 *mm*, 60 Secunden Exposition, Soda-Pyro-Entwickler ohne KBr-Zusatz.

4. Aufnahme mit einem Brashear'schen Metallspiegel. Al-Funken, Luftweg der Strahlen zwischen Funken und Collimatorspalt 100 *mm*, 60 Secunden Exposition, Soda-Pyro-Entwickler ohne KBr-Zusatz.

5. Aufnahme mit einem Rosse'schen Metallspiegel. Al-Funken, Luftweg der Strahlen zwischen Funken und Collimatorspalt 100 *mm*, 60 Secunden Exposition, Soda-Pyro-Entwickler ohne KBr-Zusatz.

6. Aufnahme mit Legirung V des neuen Spiegelmetalles. Al-Funken, Luftweg der Strahlen zwischen Spiegel und Collimatorspalt 108 *mm*, 60 Secunden Exposition, Soda-Pyro-Entwickler ohne KBr-Zusatz.

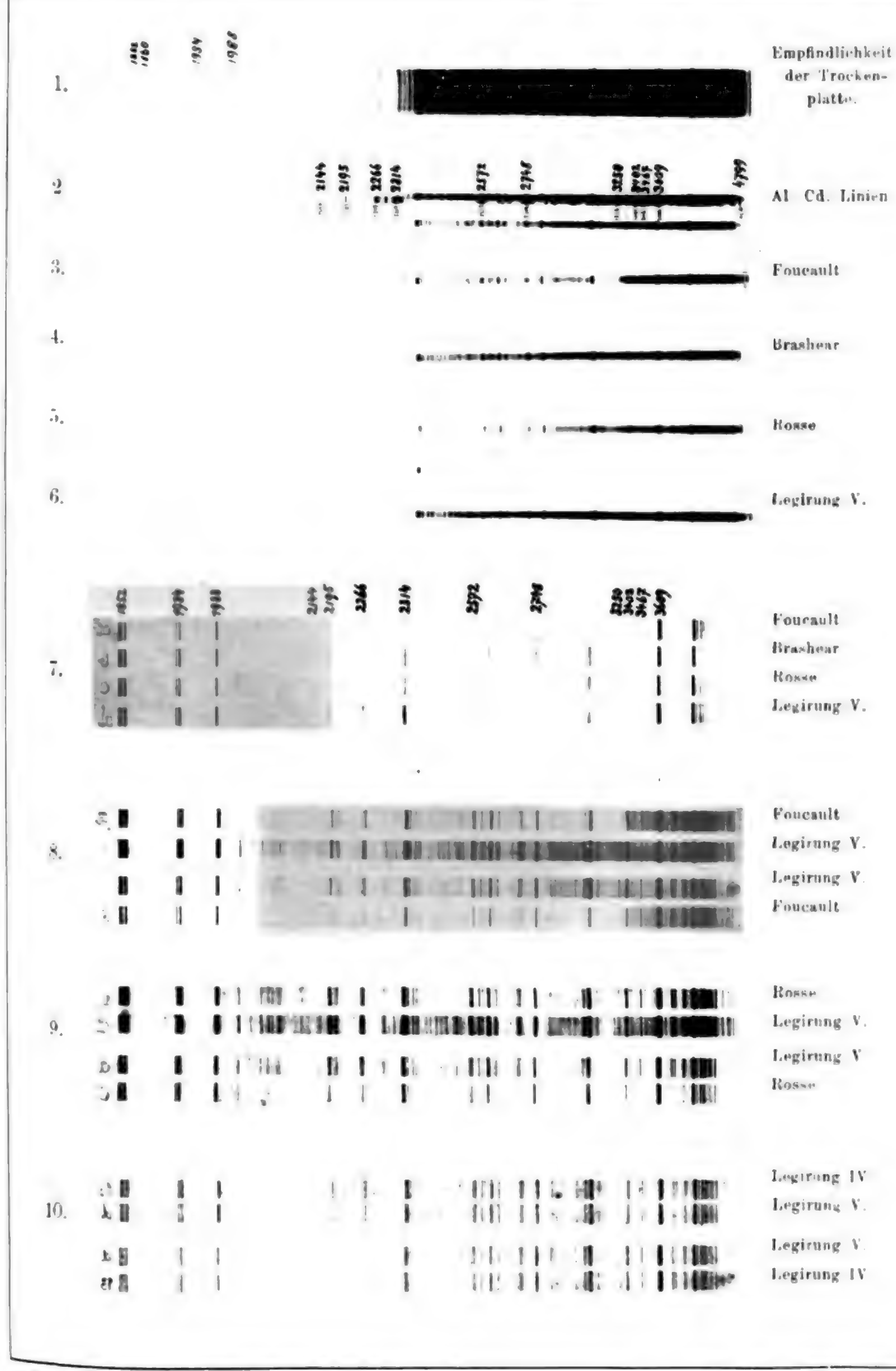
7. Vergleich eines Foucault'schen, Brashear'schen, Rosse'schen Spiegels mit einem aus der Legirung V hergestellten. Legirung V ist dem Silber im sichtbaren Spectrum annähernd gleich, im brechbareren Theil den anderen überlegen. Exposition je 60 Secunden. Ultraviolettempfindliche Platte.

8. Vergleich des Silberspiegels mit der Legirung V. Im sichtbaren Spectrum scheint der Silberspiegel etwas besser zu wirken, im Ultravioletten bleibt er weit hinter der neuen Legirung zurück. Je 5 und 3 Minuten Exposition. Ultraviolettempfindliche Platte.

9. Vergleich des Rosse'schen Spiegels mit der Legirung V. Die Überlegenheit der Legirung im Ultraviolett zeigt sich auch hier, wenn auch etwas weniger wie bei dem Glassilberspiegel. Auch im sichtbaren Spectrum übertrifft V das Rosse'sche Metall. Je 3 Minuten Exposition. Ultraviolettempfindliche Platte.

10. Vergleich der Legirung IV mit V. Die erstere Legirung gibt das brechbarste Ultraviolett etwas schneller als die letztere. Je 3 Minuten Exposition. Ultraviolettempfindliche Platte.

Bei allen Aufnahmen betrug die Spaltbreite 0·031 *mm*.



Nach den Originalnegativen vergrossert von R. Schüttauf. Lichtdruck v. Max Jaffe, Wien.

V. SITZUNG VOM 9. FEBRUAR 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. II. a, Heft VI und VII (Juni und Juli 1898). — Monatshefte für Chemie, Bd. XIX, Heft X (December 1898).

Das w. M. Herr Prof. F. Becke übernimmt auf Einladung des Vorsitzenden die Stellvertretung des prov. Secretärs während der heutigen Sitzung.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften für das Gebiet von Triest, Herr Eduard Mazelle, übersendet einen Bericht.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. v. Waltenhofen übersendet eine Arbeit aus dem elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien, von Friedrich Eichberg und Ludwig Kallir, betitelt: »Über Lichterscheinungen in elektrolytischen Zellen mit Aluminium- und Magnesiumelektroden«.

Herr k. k. Sections-Chef i. R. Dr. Josef Ritter Lorenz v. Liburnau in Wien übersendet einen vorläufigen Bericht über seine durch eine Subvention von Seite der kaiserlichen Akademie unterstützten wissenschaftlichen Untersuchungen über Flysch-Algen.

Herr cand. med. Alfred Oberwimmer in Wien übermittelt einen vorläufigen Bericht über seine mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie unternommene wissenschaftliche Reise in das Velebit-Gebirge und die Exploration desselben in Hinsicht auf die Malakozoologie.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt vor: »Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. I. Messungen des Potentialgefälles in Oberägypten«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. G. v. Niessl in Brünn: »Bahnbestimmung des grossen Meteors vom 20. November 1898«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben legt eine Abhandlung von Dr. Adolf Jolles in Wien vor, welche den Titel führt: »Über die Einwirkung von Jodlösungen auf Bilirubin und über eine quantitative Methode zur Bestimmung desselben im Harn«.

VI. SITZUNG VOM 16. FEBRUAR 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. III, Heft VIII—X (October bis December 1898).

Der Verein österreichischer Chemiker in Wien übersendet eine Einladung zu seiner am 18. d. M. sattfindenden Plenarversammlung.

Herr stud. ing. Paul Stiassny in Wien übermittelt einen von ihm erfundenen Winkeltheiler zur Theilung eines gegebenen Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Theile.

Herr Privatdocent Dr. Anton Elschnig in Wien dankt für die ihm gewährte Subvention zur Anfertigung von Abbildungen zu seiner Arbeit: »Normale und topographische Anatomie des Sehnerveneintrittes des menschlichen Auges«.

Der prov. Secretär legt eine Abhandlung von Prof. Dr. O. Tumlirz in Czernowitz vor, betitelt: »Mechanische Erklärung der Verdünnungswärme von Lösungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Hann in Graz übersendete eine Abhandlung von Herrn Eduard Mazelle, Adjuncten am meteorologischen Observatorium in Triest, welche den Titel führt: »Zur täglichen Periode und Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit«.

Das w. M. Herr Prof. F. Exner überreicht eine Arbeit aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. Egon Ritt. v. Schweidler, mit dem Titel: »Über die lichtelektrischen Erscheinungen« (II. Mittheilung).

Das w. M. Herr Hofrath F. Steindachner legt einen Bericht der Herren Dr. H. Rebel und Fr. Kohl über den entomologischen Theil der Anfangs Februar l. J. hier angelangten Sendung des Mitgliedes der Expedition nach Südarabien, Herrn Prof. Oscar Simony, aus Aden vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Atlas photographique de la Lune, publié par l'observatoire de Paris, executé par M. M. Loewy et M. P. Puiseux. Planches du IIIème fascicule. Paris, 1898.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

VII. SITZUNG VOM 2. MÄRZ 1899.

Erschienen: Denkschriften, Bd. 65 (1898). — Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. II. a, Heft VIII (October 1898); Abth. II. b, Heft VIII—X (October bis December 1898). — Berichte der Commission für oceanographische Forschungen, VI. Reihe.

Der prov. Secretär theilt ein von dem Leiter der Expedition nach Süd-Arabien, Prof. Dr. D. H. Müller, eingelaufenes Telegramm ddo. Aden, 27. Februar d. J. mit, dessen Inhalt zufolge die Expedition der kais. Akademie nach ausserordentlich erfolgreicher Durchforschung von Sokotra wohlbehalten diese Insel verlassen und sich nach Kischin begeben hat.

Im Anschlusse daran verliest der prov. Secretär das folgende von Sr. Majestät dem Könige Oskar von Schweden und Norwegen eingelangte Telegramm:

»Kaiserliche Akademie der Wissenschaften
Wien.

Herzlich dankend für Telegramm, spreche ich meine wärmsten Wünsche für ferneren Erfolg aus.

Oskar.«

Der prov. Secretär legt eine Abhandlung von Herrn Adolf Ducke in Odrau vor, welche den Titel führt: »Die Bienengattung *Osmia* Panz als Ergänzung zu Schmiedeknecht's ‚*Aphidae europaeae*‘, Vol. II, in ihren paläarktischen Arten«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Hann in Graz übersendet eine Abhandlung von Herrn Dr. Fritz v. Kerner in Wien mit dem Titel: »Die theoretische Temperaturvertheilung auf Prof. Frech's Weltkarten der altpaläozoischen Zeit«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. Stefan Meyer, betitelt: »Über die magnetischen Eigenschaften der Elemente«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

K. K. Finanz-Ministerium: Tabellen zur Währungsstatistik. Zweite Ausgabe. Erster Theil. Wien, 1896—1899; 4°.

Lueger, Karl, Dr.: Die Gemeindeverwaltung der k. k. Reichshaupt- und Residenzstadt Wien in den Jahren 1894—1896. Wien, 1898; 8°.

Goering, A.; Über die verschiedenen Formen und Zwecke des Eisenbahnwesens. Rede zum Geburtstage Sr. Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm II. in der Aula der Königl. technischen Hochschule zu Berlin am 26. Jänner 1899, gehalten von dem derzeitigen Rector. Berlin, 1899; Gross 8°.

Peschka, Gustav Ad. V., Dr.: Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Erster Band. Zweite Auflage. Mit einem Atlas von 43 lithographischen Tafeln. Leipzig und Wien, 1899; 8°.

Über die magnetischen Eigenschaften der Elemente

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

Die Magnetisirungszahlen der Elemente können sowohl aus Messungen an ihren Verbindungen, als auch durch directe Beobachtungen an den möglichst gereinigten Grundstoffen gewonnen werden. Zur Ermittelung genauer Werthe setzt der erstere Weg bei Anwendung von Lösungen die Kenntniss des Einflusses des Lösungsmittels und der chemischen Bindungen, bei directer Verwendung der reinen Substanzen auch noch denjenigen der Structur und des eventuell vorhandenen Krystallwassers, der zweite Weg diejenige nach der Structur im Allgemeinen voraus.

Bisher sind nun die Susceptibilitätscoëfficienten einer grossen Zahl von Elementen nicht einmal qualitativ bestimmt worden, bei anderen sind die Ergebnisse durch die beigemengten Verunreinigungen einander direct widersprechend. Zuletzt hat Herr J. Königsberger[1] eine ziemlich vollständige Zusammenstellung über die Magnetisirungszahlen der untersuchten Elemente gegeben und die Resultate in einer Tabelle nach der Atomgewichtsanordnung vereinigt.

Da mir nun durch die Freundlichkeit des Herrn Prof. F. Exner der grösste Theil der überhaupt erhältlichen Elemente in möglichst reinem Zustande zur Verfügung stand, habe ich

[1] J. Königsberger, Wied. Ann., 66, S. 732.

zunächst die Grundstoffe selbst der Beobachtung unterzogen, während die Vervollständigung der Kenntniss der eingangs erwähnten Einflüsse den Gegenstand späterer Untersuchungen bilden soll.

Die mir überlassenen Substanzen waren vielfach dieselben, welche auch von den Herren F. Exner und E. Haschek[1] bezüglich ihrer Funkenspectra untersucht worden sind, wodurch mir die Möglichkeit gegeben ist, fast überall auf die meist nur spurenweise vorhandenen Beimengungen anderer Stoffe hinzuweisen.

Die Elemente lagen mir theils in Pulverform, theils in grösseren Stücken vor, was eine verschiedene Behandlung bedingt, die ihre Richtschnur hauptsächlich dadurch erhielt, dass das Materiale, da es noch zu weiteren Untersuchungen verwendet werden soll, in keiner Weise durch fremde Stoffe verunreinigt werden durfte.

A. Messungen an Pulvern.

Die angewandte Methode, die Magnetisirungszahl dieser Körper zu bestimmen, bestand darin, dass das betreffende Pulver in ein kleines cylindrisches Gläschen vom Querschnitte von nahezu 0·5 cm^2 bis zu einer gewissen Höhe eingefüllt wurde. Das Gläschen befand sich auf der einen Seite des Wagebalkens der eisenfreien Wage, deren Herr G. Jäger und ich uns schon zur Bestimmung des Susceptibilitätscoëfficienten des Wassers[2] bedient haben, und hieng in einer Entfernung von fast 50 *cm* vom Wagebalken an einem gestreckten dünnen Aluminiumdraht derart in das früher schon einmal beschriebene magnetische Feld,[3] dass es an die Stelle starken Potentialgefälles knapp über dem homogenen cylindrischen Theil des Gebietes zwischen den Polschuhen kam. Der Zug, beziehungsweise Auftrieb im Felde wurde durch entsprechende Gewichtsauflage auf der Wagschale der anderen Seite gemessen und mit dem Auftriebe verglichen, den frisch destillirtes Quecksilber,

[1] F. Exner und E. Haschek, »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente«, seit 11. Juli 1895 fortgesetzt.

[2] G. Jäger und St. Meyer, diese Berichte, 3. Febr. 1899.

[3] G. Jäger und St. Meyer, diese Berichte, 106 (II. a), S. 595.

das bis zu der gleichen Höhe in das Gläschen eingefüllt war, erfuhr. Der absolute Werth des $\varkappa$ für Quecksilber wurde genau so gefunden, wie dies für die Bestimmung der Magnetisirungszahl des Wassers mittelst der Wage von Herrn G. Jäger und mir kürzlich beschrieben worden ist.[1]

Es ergab sich nach dieser Anordnung bei Anwendung eines Glasrohres vom Querschnitte $0 \cdot 95\,cm^2$, das 14 *cm* hoch mit Quecksilber gefüllt war, nach Abzug der Wirkung auf Glas und Aufhängung aus mehreren Messungen der magnetische Zug $p = -0 \cdot 289\,g$. Das Feldstärkequadrat betrug dabei $291 . 10^6$ [C. G. S.], die Temperatur 15° C. Vergleichende Messungen mit bis zu gleicher Höhe eingefülltem Wasser ergaben, dass die Einwirkung des Feldes auf das ausserhalb befindliche Ende des Quecksilbercylinders jedenfalls unter 1% derjenigen auf das Ende zwischen den Polschuhen bleibt und daher vernachlässigt werden kann.

Die Magnetisirungszahl des Quecksilbers ist hieraus bei 15° C.

$$\varkappa = -2 \cdot 05 . 10^{-6}.$$

Um aus den auf dem oben beschriebenen Wege gewonnenen Susceptibilitätscoëfficienten der Pulver vergleichbare Daten für die Elemente zu erhalten, ist es zweckmässig, dieselben auf das Atom der betreffenden Substanz zu beziehen. Hiezu bedarf es allerdings der Annahme, dass das Materiale in dem ganzen im Gläschen eingenommenen Volumen gleichmässig vertheilt sei, was natürlich nur in erster Annäherung zutrifft. Man bestimmt also das scheinbare specifische Gewicht aus Gewicht der Substanz und dem vom Pulver erfüllten Raum und berechnet den Werth des $\varkappa$, der einer Raumerfüllung entspräche, wenn ein Grammatom im Liter vorhanden wäre.

Im Folgenden bezeichne ich mit $\varkappa$ den direct gefundenen Werth der Magnetisirungszahl, mit k denjenigen für den Atommagnetismus, wozu zu bemerken ist, dass ich denselben — wie dies bei Lösungen allgemein üblich ist — auf ein Grammatom im Liter beziehe, während z. B. Herr J. Königsberger

[1] L. c. 4. Seite.

unter Atommagnetismus denselben rücksichtlich derselben Menge im Cubikcentimeter versteht.

So ergibt sich für das Quecksilber aus obigem Werthe von $\varkappa$ das $k = -0 \cdot 0302 . 10^{-6}$ [C. G. S.].

Zum Vergleiche sind nach dem Gesagten die Zahlen des Herrn Königsberger noch mit 10^{-3} zu multipliciren.

Die verwendete Gewichtsmenge heisst g, der direct an der Wage abgelesene Zug p.

Wo Beimengungen angegeben werden konnten, sind dieselben nach absteigender Menge geordnet angeschrieben.

Die Feldstärke war bei allen Messungen nahezu die gleiche und betrug an dieser Stelle des Raumes rund 10.000 [C. G. S.].

Es ergaben sich die folgenden Resultate:

Beryllium.

Graues metallisches Pulver, bezogen von Merck-Darmstadt.

$g = 0 \cdot 439\, g$, entsprechend $423\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $46 \cdot 9$ Grammatomen.

$p = +1 \cdot 0205\, g$.

$\varkappa = +33 \cdot 8 . 10^{-6}$, $k = +0 \cdot 72 . 10^{-6}$ bei 15° C.

Bor.

Braunes Pulver von H. Moissan-Paris.

$g = 0 \cdot 529\, g$, entsprechend $509 \cdot 7\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $46 \cdot 8$ Grammatomen.

$p = +0 \cdot 067\, g$.

$\varkappa = +2 \cdot 2 . 10^{-6}$, $k = +0 \cdot 047 . 10^{-6}$ bei 15° C.

Silicium.

a) Schwarzes krystallinisches Pulver von Merck.

$g = 0 \cdot 441\, g$, entsprechend $420\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $14 \cdot 9$ Grammatomen.

$p = +0 \cdot 011\, g$.

$\varkappa = +0 \cdot 36 . 10^{-6}$, $k = +0 \cdot 024 . 10^{-6}$ bei 16° C.

Spurenweise Beimengungen von Fe, C und Ca im Spectrum nachweisbar.

b) Hellbraunes amorphes Pulver von Merck.

$g = 1\cdot501\,g$, entsprechend $1384\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $48\cdot9$ Grammatomen.

$p = +0\cdot009\,g$.

$\varkappa = +0\cdot30\,.\,10^{-6}$, $k = +0\cdot006\,.\,10^{-6}$ bei 17° C.

Titan.

Schwarzes Pulver, bezogen von Schuchardt.

$g = 0\cdot585\,g$, entsprechend $909\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $19\cdot0$ Grammatomen.

$p = +0\cdot413\,g$.

$\varkappa = +18\cdot45\,.\,10^{-6}$, $k = +0\cdot97\,.\,10^{-6}$ bei 17° C.

Vanadin.

Braunschwarzes Pulver von Schuchardt.

$g = 0\cdot481\,g$, entsprechend $464\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $9\cdot08$ Grammatomen.

$p = +0\cdot047\,g$.

$\varkappa = +1\cdot56\,.\,10^{-6}$, $k = +0\cdot17\,.\,10^{-6}$ bei 17° C.

Selen.

Metallisch, von Trommsdorff; in Achatschale gepulvert.

$g = 2\cdot618\,g$, entsprechend $3680\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $46\cdot7$ Grammatomen.

$p = -0\cdot0015\,g$.

$\varkappa = -0\cdot06\,.\,10^{-6}$, $k = -0\cdot0013\,.\,10^{-6}$ bei 15° C.

Yttrium.

Metallisches Pulver von Merck.

$g = 0\cdot526\,g$, entsprechend $740\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $8\cdot34$ Grammatomen.

$p = +0\cdot652\,g$.

$\varkappa = +26\cdot7\,.\,10^{-6}$, $k = +3\cdot2\,.\,10^{-6}$ bei 17° C.

Zirkonium.

Krystallinische Blättchen von Schuchardt.

$g = 1\cdot235\,g$, entsprechend $1190\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $12\cdot8$ Grammatomen.

$p = -0\cdot005\,g$.

$\varkappa = -0\cdot175\,.\,10^{-6}$, $k = -0\cdot014\,.\,10^{-6}$ bei 17° C.

Niob.

Metallisches Pulver von Merck.

$g = 0\cdot499\,g$, entsprechend $1124\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $12\cdot0$ Grammatomen.

$p = +0\cdot107\,g$.

$\varkappa = +5\cdot9\,.\,10^{-6}$, $k = +0\cdot49\,.\,10^{-6}$ bei 18° C.

Spurenweise Beimengungen von Fe, Ni, Ba, Ca, Mg, Si, C, Sr, S im Spectrum nachweisbar. Ausserdem sind sehr viele Tantallinien in diesem Spectrum vorhanden.

Antimon.

Regulus von Merck, gepulvert.

$g = 4\cdot131\,g$, entsprechend $3980\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $33\cdot3$ Grammatomen.

$p = -0\cdot0688\,g$.

$\varkappa = -2\cdot28\,.\,10^{-6}$, $k = -0\cdot069\,.\,10^{-6}$ bei 17° C.

Lanthan.

Metallisches Pulver von Merck.

$g = 0\cdot525\,g$, entsprechend $1184\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $8\cdot59$ Grammatomen.

$p = +2\cdot02\,g$.

$\varkappa = +111\cdot9\,.\,10^{-6}$, $k = +13\cdot0\,.\,10^{-6}$ bei 18° C.

Cer.

Metallisches Pulver von Merck.

$g = 0 \cdot 250\, g$, entsprechend $750\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $5 \cdot 36$ Grammatomen.

$p = +2 \cdot 39\, g.$

$\varkappa = +182 \cdot 2 \,.\, 10^{-6}$, $k = +34 \cdot 0 \,.\, 10^{-6}$ bei 16° C.

Spurenweise Verunreinigungen von Eisen, Ca und Ba.

Didym.

Metallisches Pulver von Merck.

$g = 0 \cdot 527\, g$, entsprechend $1187\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $8 \cdot 35$ Grammatomen.

$p = +2 \cdot 37\, g.$

$\varkappa = +121 \cdot 4 \,.\, 10^{-6}$, $k = +14 \cdot 5 \,.\, 10^{-6}$ bei 18° C.

Erbium.

Metallisches Pulver von Merck.

$g = 0 \cdot 509\, g$, entsprechend $913\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $5 \cdot 5$ Grammatomen.

$p = +5 \cdot 63\, g.$

$\varkappa = +230 \cdot 8 \,.\, 10^{-6}$, $k = +41 \cdot 8 \,.\, 10^{-6}$ bei 17° C.

Osmium.

Schwarzes Pulver von Heräus.

$g = 1 \cdot 647\, g$, entsprechend $1590\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $8 \cdot 36$ Grammatomen.

$p = +0 \cdot 020\, g.$

$\varkappa = +0 \cdot 62 \,.\, 10^{-6}$, $k = +0 \cdot 074 \,.\, 10^{-6}$ bei 16° C.

Im Spectrum zeigen sich deutlich Beimengungen von Eisen und Blei und Spuren von Ba, Ca, Cu, Pt, Rh und Pd.[1]

[1] L. c. 105 (II.a), S. 727.

Wismuth.

Metallisch von Schuchardt; in Achatschale gepulvert.

$g = 3 \cdot 823\, g$, entsprechend $5375\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $25 \cdot 8$ Grammatomen.

$p = -0 \cdot 128\, g$.

$\varkappa = -5 \cdot 25 \,.\, 10^{-6}$, $k = -0 \cdot 203 \,.\, 10^{-6}$ bei 15° C.

Enthält Spuren von Ca, Cu und Fe.[1]

Thorium.

Metallisches Pulver von Merck.

$g = 0 \cdot 524\, g$, entsprechend $1182\, g$ auf $1000\, cm^3$ oder $5 \cdot 1$ Grammatomen.

$p = +1 \cdot 46\, g$.

$\varkappa = +81 \,.\, 10^{-6}$, $k = +16 \,.\, 10^{-6}$ bei 18° C.

B. Messungen an festen Stückchen.

Haben die Substanzen die Form fester Stückchen, so ist es am einfachsten, ein Verfahren analog der specifischen Gewichtsbestimmung anzuwenden. Hiezu brachte ich das Materiale in eine etwa 30 *cm* lange Eprouvette vom Querschnitte $0 \cdot 95\, cm^2$, beziehungsweise $1 \cdot 50\, cm^2$, deren Ende wieder, wie früher das Gläschen, in den unhomogenen Theil knapp über dem cylindrischen Gebiete des Feldes gebracht wurde, und bestimmte den magnetischen Zug, respective Druck mittelst der Wage. Sodann wurde das Glasrohr, ohne die Lage der am Boden derselben befindlichen Stückchen zu verrücken, mit Alkohol oder Wasser aufgefüllt und abermals der durch das Feld hervorgerufene Zug gemessen und schliesslich die Wirkung auf die Eprouvette, sowohl leer, als nur mit der Flüssigkeit gefüllt, an derselben Stelle des Feldes (M nahe gleich 10.000 [C. G. S.]) beobachtet. Nennt man die Wirkung auf die Substanz, vermindert um diejenige auf das Glasrohr, a, diejenige auf

[1] L. c. 106 (II. a), S. 345.

Substanz und Flüssigkeit, vermindert um das Volumen des verdrängten Alkohols (beziehungsweise Wassers), b, diejenige auf die Flüssigkeit allein c, so ist der Zug auf das verdrängte Flüssigkeitsvolumen $c+a-b$ und indem wir den Zug auf das Element p_e, denjenigen auf den verdrängten Alkohol (Wasser) p_a nennen und den Magnetisirungszahlen dieselben Indices ertheilen,

$$\varkappa_e = \varkappa_a \frac{p_e}{p_a} = \varkappa_a \frac{a}{c+a-b}.$$

Die Magnetisirungszahl des Wassers wurde zu $-0·67.10^{-6}$ bei 15° C. angenommen, diejenige des verwendeten Alkohols, geradeso wie die des Wassers,[1] aus dem Zuge in zwei Glasröhren vom Querschnitte 0·95 cm^2 und 1·50 cm^2 mittelst der Wage bestimmt, ergab im Mittel $-0·55.10^{-6}$ bei 15° C.

Die Messungen lieferten die folgenden Resultate:

Kohle.

Carbone sublimé von H. Moissan-Paris.

Specifisches Gewicht $\gamma = 1·77$.

$\varkappa = -2·49.10^{-6}$, $k = -0·017.10^{-6}$ bei 18° C.

Enthält Spuren von Ca, Bo, Ti, eben noch im Spectrum nachweisbar Ba, Mg, Cu, Mn, Zr, Fe.[2]

Ceylon-Graphit:

$\gamma = 2·25$.

$\varkappa = -8·97.10^{-6}$, $k = -0·048.10^{-6}$ bei 18° C.

Sibirischer Graphit:

$\gamma = 2·14$.

$\varkappa = -7·3.10^{-6}$, $k = -0·041.10^{-6}$ bei 18° C.

Enthält Ca, Fe, Si, ferner Sr, Al, Mn, Cu, Mg.[3]

---

[1] Diese Berichte, 3. Febr. 1899.

[2] L. c. 106 (II.a), S. 354.

[3] L. c. S. 350.

Anthracit erwies sich paramagnetisch:

$$\varkappa = +0 \cdot 39 . 10^{-6},$$

in noch viel stärkerem Masse war dies bei Retortenkohle der Fall.

Titan von Moissan-Paris.

$$\gamma = 4 \cdot 87.$$

$$\varkappa = +9 \cdot 52 . 10^{-6}, \quad k = +0 \cdot 094 . 10^{-6} \text{ bei } 17° \text{ C.}$$

Enthält Spuren von Ca, Sr, C, Al und Fe.[1]

Kupfer.

Es waren dies Stücke desselben Materiales, das Herr Murmann[2] zur Atomgewichtsbestimmung des Cu verwendet hatte.

Ich fand

$$\varkappa = +2 \cdot 06 . 10^{-6}.$$

Es enthält dieses Cu im Spectrum nachweisbar von stark magnetischen Substanzen bloss Spuren von Nickel, die dennoch genügt haben müssen, das von anderen Forschern als diamagnetisch beobachtete Element so weit zu modificiren. Eine andere Probe ergab

$$\varkappa = -0 \cdot 66 . 10^{-6}, \quad k = -0 \cdot 0044 . 10^{-6} \text{ bei } 15° \text{ C.}$$

Selen von Schuchardt

erwies sich paramagnetisch und dürfte stark verunreinigt sein (siehe das Ergebniss bei diesem Elemente in Pulverform).

Molybdän von Schuchardt.

$$\gamma = 8 \cdot 6.$$

$$\varkappa = +2 \cdot 15 . 10^{-6}, \quad k = +0 \cdot 024 . 10^{-6} \text{ bei } 17° \text{ C.}$$

Enthält Spuren von Wo und Ca.[3]

---

[1] L. c. 107 (II.a), S. 797.

[2] Diese Berichte, 105 (II.b), S. 703.

[3] L. c. 105 (II.a), S. 504.

Silber.

Dasselbe lag in feinkörnigen Stückchen vor, die jedenfalls bei der angewendeten Verdrängungsmethode ein grösseres Volumen einnahmen, als ihrem specifischen Gewicht entspricht. Der Werth

$$\varkappa = -1 \cdot 3 \,.\, 10^{-6}$$

dürfte daher etwas zu klein sein.

Cadmium von Merck.

$\gamma = 8 \cdot 6.$

$\varkappa = -1 \cdot 16 \,.\, 10^{-6}$, $k = -0 \cdot 015 \,.\, 10^{-6}$ bei 17° C.

Spuren von Fe, Ca und Pb enthaltend.[1]

Zinn von Merck.

$\gamma = 7 \cdot 2.$

$\varkappa = +0 \cdot 256 \,.\, 10^{-6}$, $k = +0 \cdot 0042 \,.\, 10^{-6}$ bei 17° C.

Erwies sich mit Fe und Ca verunreinigt.[2]

Antimon regulus von Merck.

$\gamma = 6 \cdot 7.$

$\varkappa = -33 \cdot 1 \,.\, 10^{-6}$, $k = -0 \cdot 59 \,.\, 10^{-6}$ bei 17° C.

Tellur von Schuchardt.

$\gamma = 6 \cdot 4.$

$\varkappa = -0 \cdot 6 \,.\, 10^{-6}$, $k = -0 \cdot 012 \,.\, 10^{-6}$ bei 18° C.

Vollkommen eisenfrei.[3]

Tantal von Schuchardt.

$\gamma = 10 \cdot 4.$

$\varkappa = +58 \cdot 0 \,.\, 10^{-6}$, $k = +1 \cdot 02 \,.\, 10^{-6}$ bei 18° C.

---

[1] L. c. 106 (II. a), S. 61.
[2] L. c. 106 (II. a), S. 59.
[3] L. c. 106 (II. a), S. 340.

Als Verunreinigungen waren im Spectrum nachweisbar Fe, Ca, Sr, Na, K, Al, Pb und Ti.[1]

Wolfram von H. Moissan-Paris.

$\gamma = 19 \cdot 1.$

$\varkappa = +10 \cdot 5 \, . \, 10^{-6}, \quad k = +0 \cdot 10 \, . \, 10^{-6}$ bei 16° C.

Uran von H. Moissan-Paris.

$\gamma = 18 \cdot 7.$

$\varkappa = +16 \cdot 3 \, . \, 10^{-6}, \quad k = +0 \cdot 21 \, . \, 10^{-6}$ bei 17° C.

Enthält Spuren von Fe und Ca.

C. Messungen bloss qualitativer Art.

An den folgenden Substanzen konnten wegen zu geringer vorliegender Mengen bloss qualitative Beobachtungen angestellt werden.

Es erwiesen sich:

Gallium von H. Winkler-Freiberg.. .....diamagnetisch,
Germanium von H. Winkler-Freiberg ....diamagnetisch,
Ruthenium von Heräus ....paramagnetisch,
Rhodium von Heräus..................paramagnetisch,
Indium von H. Winkler ....nicht nachweisbar,
Iridium von Heräus ....paramagnetisch.

Gold von Schuchardt erwies sich gleichfalls paramagnetisch, doch zeigte dasselbe im Funkenspectrum Spuren von Ca, Cu, Ag und Eisen.

Ferners seien hier noch die Resultate an Pulvern von Scandiumoxyd, Samariumoxyd und Cäsiumchlorid angeführt, aus denen sich qualitative Schlüsse ziehen lassen.

[1] L. c. 107 (II.a), S. 813.

Scandiumoxyd Sc_2O_3 von H. Nilson.

(Vom selben Materiale, das zur Atomgewichtsbestimmung diente.)

$g = 0 \cdot 081\,g$, entsprechend $185\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $1 \cdot 36$ Gramm-Molekülen Sc_2O_3.

$p = -0 \cdot 0001\,g$.

$\varkappa = -0 \cdot 006 \,.\, 10^{-6}$, $k = -0 \cdot 004 \,.\, 10^{-6}$ bei 17° C.,

woraus folgt, dass Scandium selbst diamagnetisch ist.

Samariumoxyd Sa_2O_3 von H. Cleve.

(Vom selben Materiale, das zur Atomgewichtsbestimmung diente.)

$g = 1 \cdot 202\,g$, entsprechend $1160\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder $3 \cdot 33$ Gramm-Molekülen Sa_2O_3.

$p = +2 \cdot 023\,g$.

$\varkappa = +66 \cdot 8 \,.\, 10^{-6}$, $k = +20 \cdot 1 \,.\, 10^{-6}$ bei 17° C.

Hieraus ist zu entnehmen, dass Samarium selbst ein paramagnetisches Element ist.

Cäsiumchlorid von Merck.

$g = 1 \cdot 744\,g$, entsprechend $1680\,g$ auf $1000\,cm^3$ oder gerade 10 Gramm-Molekülen $CsCl$.

$p = -0 \cdot 014\,g$.

$\varkappa = -0 \cdot 47 \,.\, 10^{-6}$, $k = -0 \cdot 047 \,.\, 10^{-6}$ bei 17° C.

Cäsium dürfte hienach als diamagnetisch anzusehen sein.

Im Folgenden habe ich die Resultate in einer Tabelle zusammengestellt, die sich der Anordnung anschliesst, deren sich Herr Königsberger bedient hat. Die mit einem Stern versehenen Angaben sind aus seiner Tabelle direct herübergenommen. Insbesondere habe ich angenommen, dass meine Messungen an Silber, Gold und Tellur stärker durch fremde Einflüsse beeinträchtigt seien, als die dort angeführten Werthe.

Auffallend ist der starke Diamagnetismus von Kohle und Zirkon gegenüber den bisher erhaltenen Resultaten, die allerdings bei letzterem nicht an dem Elemente direct gewonnen waren. Bezüglich des Cadmiums ist die Entscheidung dahin erbracht, dass dasselbe als diamagnetisch anzusehen ist. Was die absoluten Zahlen anbelangt, so werden dieselben späterhin sicherlich noch erhebliche Correctionen erfahren, da einerseits das Materiale nie absolut rein ist, anderseits auch die angewandten Methoden nicht sehr genaue Daten liefern. Immerhin lässt sich aus der Zusammenstellung doch im Grossen und Ganzen der Schluss ziehen, dass eine Abhängigkeit der Magnetisirungszahl vom Atomgewicht vorhanden sei.

…ag.* …5.10⁻⁶	Ga diamag.	Ge diamag.	As ?	Se diamag. $-0{\cdot}001.10^{-6}$	Br diamag.* $-0{\cdot}0326.10^{-6}$
…ag. ….10⁻⁶	In diamag. (?)	Sn paramag. $+0{\cdot}004.10^{-6}$	Sb diamag. $-0{\cdot}069.10^{-6}$	Te diamag.* $-0{\cdot}039.10^{-6}$	J diamag.* $-0{\cdot}040.10^{-6}$
…g …ag. …).10⁻⁶	Tl diamag.* $-0{\cdot}093.10^{-6}$	Pb diamag.* $-0{\cdot}248.10^{-6}$	Bi diamag. $-0{\cdot}203.10^{-6}$		

Bahnbestimmung des grossen Meteors vom 20. November 1898

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn.

(**Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1899.**)

Eine aus Mährisch-Trübau an die k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien gelangte Nachricht gab Veranlassung, weitere Beobachtungen dieses um $11^h 13^m$ mittlerer Wiener Zeit unter bedeutender Lichtentwicklung über Niederösterreich, nördlich der Donau hingezogenen Meteors zu sammeln.

Die von dem w. M. der kaiserl. Akademie und Director der k. k. Universitäts-Sternwarte, Herrn Prof. Dr. Edmund Weiss in mehreren Tagesblättern veröffentlichte Aufforderung war, ungeachtet der vorgerückten Nachtstunde, wieder von so günstigem Erfolge begleitet, dass das bei der Sternwarte eingelangte und von dem Herrn Director mir gütigst zur Verfügung gestellte Material, in Verbindung mit den von mir, mit wiederholter freundlicher Unterstützung der hiesigen Tagespresse, selbst gesammelten Beobachtungen, sich als ausreichend erwies, um die Bahnverhältnisse desselben zu ermitteln.

Obwohl der Weg der Feuerkugel durch die Atmosphäre wegen der grösseren Neigung gegen den Horizont nicht sehr lang war, erstreckte sich der Beobachtungsraum einerseits in etwa 580 *km* Ausdehnung von Schmiedeberg im Riesengebirge bis Görz, anderseits wieder von der Gegend bei Schärding bis Füss im Barcser Comitate Ungarns, über 350 *km*.

Wie schon erwähnt, war der Erfolg der Nachforschungen ein günstiger, doch befindet sich unter den eingelaufenen Beobachtungen leider keine einzige, welche durch Beziehung auf

Gestirne grössere Sicherheit gewähren könnte. Es war ferner weder in Wien noch in Brünn ein Beobachter zu finden, dessen Angaben zur genaueren Einmessung je zweier Bahnpunkte hätten dienen können, obwohl sich in Wien der erste Assistent der Sternwarte, Herr Dr. Friedrich Bidschof, nach dieser Richtung mehrfach in dankenswerther Weise bemüht hat. Directe Angaben über Azimut und Höhe, welche die scheinbare Bahnlage bestimmen konnten, liegen auch sonst nur aus zwei Orten vor. Herrn Prof. Dr. Bernhard Schwarz in Mährisch-Trübau und Herrn Ingenieur Pajer di Monriva in Görz bin ich für dieselben verpflichtet.

Wo es sonst überhaupt möglich war, je zwei Punkte aufzufassen und zu bestimmen, musste zur Bezeichnung der Azimute durch umliegende Ortschaften und durch Einzeichnung in die Specialkarte Zuflucht genommen werden, wobei zur Messung der scheinbaren Höhen in der Regel ein kleiner Gradbogen mit Loth sehr erfolgreich verwendet wurde. Es gereicht den Resultaten zum grossen Vortheil, dass in den folgenden Berichten fast gar keine roh abgeschätzten Höhenangaben mehr vorkommen. In den wenigen Ausnahmen ist dies besonders hervorgehoben. Die Ergebnisse der Höhenbestimmungen sind hiedurch ungemein günstig ausgefallen, so zwar, dass z. B. die auf den Endpunkt bezüglichen Höhen durchschnittlich drei- bis viermal genauer erscheinen, als die Richtungen. Für die Sicherheit der Azimute war in Niederösterreich und im südlichen Mähren der Umstand nachtheilig, dass die ganze scheinbare Bahn in grosser Höhe verlief, was die Beziehung auf irdische Objecte sehr erschwerte.

Ungefähr für die Hälfte der zur Bahnbestimmung benützten Beobachtungen war ich darauf angewiesen, mich mit graphischen Skizzen der Bahn hinsichtlich ihrer scheinbaren Neigung gegen den Horizont oder Vertical des Endpunktes zu begnügen, und ich muss gestehen, dass ich auch diesmal mit diesem Rechnungselemente recht befriedigende Erfahrungen gemacht habe, denn es erwiesen sich durchschnittlich derartige Angaben, soweit es sich um die Ermittlung der wahren Bahnlage handelte, genauer als die sogenannten vollständigen Beobachtungen. Allerdings lag hier der günstige Umstand vor, dass aus zwei in

Bezug auf den Endpunkt ungefähr diametral liegenden Beobachtungsorten von der Verticalen nur wenig abweichende scheinbare Bahnen angegeben wurden, wodurch schon sehr viel gewonnen war.

Ich bin überzeugt, dass viel häufiger für die Bahnbestimmung ausreichende Materialien zu erhalten wären, wenn man sich auch mit derartigen Angaben mehr befreunden würde. Es lässt sich in der That nicht leugnen, dass dem ganz unerfahrenen und durch das Ereigniss überdies in allen Fällen überraschten Beobachter, namentlich bei kürzeren Bahnstücken, die grössere oder geringere Steilheit des Abfalles gewöhnlich in der Erinnerung lebhafter erhalten bleibt und annähernd brauchbarer angegeben werden kann als die Positionen je zweier Punkte. Freilich müssen unter allen Umständen für die Bestimmung des Endpunktes hinreichend viele geeignete Beobachtungen vorliegen, da sonst die scheinbaren Neigungen auch nicht recht verwendbar sind.

Als hauptsächlichste Ergebnisse der folgenden Untersuchung können die Bestimmung eines neuen, nämlich für diese Epoche noch unbekannten Radiationspunktes und die mit grosser Sicherheit erfolgte Nachweisung der hyperbolischen Bahn des Meteors bezeichnet werden.

Es sei mir auch hier gestattet, den vorhin erwähnten freundlichen Förderern dieser Arbeit, sowie den in der folgenden Aufzählung angeführten Beobachtern, insbesondere aber dem Herrn Sternwarte-Director Prof. Dr. Weiss für die vielfachen unermüdlichen Bemühungen zur Herbeischaffung des Materials den verbindlichsten Dank auszudrücken.

Beobachtungen.

1. Schmiedeberg (33° 30′; 50° 48′). Das in gelblichweissem Glanze sehr hell strahlende Meteor von etwa halber Mondgrösse mit ungeheurem Schweif ist von S gegen SSE hin ziemlich steil gefallen und hinter den Bergen verschwunden. Dauer etwa 5—6^s (Herr C. Kiersch).

2. Kleppel[1] (34° 49′; 50° 1′). Der Beobachter, Herr H. Kristen in Ullersdorf, befand sich im offenen Wagen auf

[1] Die unter Nr. 2 bis 4 und 6 bis 9 angeführten Orte liegen in Mähren.

der Fahrt dahin von Römerstadt, als er am südwestlichen Himmel eine grosse Lichterscheinung nach S hinziehen sah. Diese bestand aus einem dunkelgelbrothen Stern, der in der Richtung über dem »Rabenstein« ($A = 0$) erlosch und einen ausgedehnten langen Schweif nachzog. Ehe die Kugel den Endpunkt erreicht hatte, »explodirte« die zweite Hälfte (nach der Skizze die vordere) des Schweifes in viele Sternchen, welche »etwa 2 *m*« hinabzufallen schienen, während der bis zum Endpunkt noch weiterziehende Stern eine blassrothe Spur zurückliess. »Den Schweif sah man länger leuchten als den feurigen Klumpen.« Der Zeichnung nach wäre die scheinbare Neigung der Bahn gegen den Horizont etwa mit 40° zu nehmen.

3. Treublitz bei Mährisch-Neustadt (34° 45'5; 49° 49'). In einem Berichte an die k. k. Sternwarte in Wien schreibt Herr J. Schön, er hatte eben seine Aufmerksamkeit dem gestirnten Himmel zugewendet, als er gegen $11^1/_4{}^h$ in der Nähe eines helleren Sternes das Meteor bemerkte. Es fiel in gerader Linie, mehr wagrecht als senkrecht, und »explodirte nach kaum zwei Augenblicken« wie ein Feuerwerkskörper, worauf es erlosch. Auf mein Ersuchen wurden, allerdings erst ziemlich lange nachher, von dem genannten Beobachter mit Unterstützung des Herrn Oberlehrers J. Ošťádal die Richtungen gegen Anfang und Ende der gesehenen Bahn in die Specialkarte eingezeichnet und die Höhenwinkel gemessen. Es ergab sich:

$$\text{I.} \;\ldots\ldots\; A = 35°, \quad h = 21°$$
$$\text{II.} \;\ldots\ldots\; A = 347°5, \quad h = 16°.$$

Es fanden sich auch noch einige ergänzende Bemerkungen beigefügt. »Der in hellblauem Lichte erschienene Strahl hatte die Form einer Stange und war gegen das Ende zu etwa dreimal so breit als im Anfange.« Die Feuerkugel bildete einen länglichen, unregelmässigkantigen, vorne aber abgerundeten Körper, dessen Länge dem Durchmesser des Vollmondes etwa gleichkam, während die Breite etwa ein Drittel davon betrug. Dieser Körper blieb bis zum Erlöschen anscheinend ein Ganzes, doch lösten sich linksseitig einige kleine Schuppen und rechts zwei längere schwache Strahlen ab. Vor dem Erlöschen erschien die Farbe dunkelbraunviolett.

Aus dem nahe gelegenen Deutsch-Liebau (34° 44′; 49° 53′) berichtete Herr Med. Dr. E. Klubal, dass etwa um $11^{1}/_{4}{}^{h}$ die ziemlich genau gegen SE gerichtete Front eines Hauses einen Moment lang blitzartig erleuchtet war, so, als ob die Beleuchtung von S käme.

4. Ranigsdorf bei Mährisch-Trübau (34° 21′; 49° 45ʹ7). Aus Mährisch-Trübau wurde der k. k. Wiener Universitäts-Sternwarte am 21. November, also unmittelbar nach der Beobachtung, gemeldet, dass »um 11^{h} 12^{m} am Firmamente ein helles Aufleuchten in der Stärke einer intensiven Bogenlampe bemerkt wurde und dass dieser Stern nach einer heftigen Detonation in Hunderte von Stücken zersprungen ist, wovon das grösste, von 4 *m* Länge, blutroth am Himmel verschwand. Durch 4^{s} war die Nacht taghell beleuchtet«.

Wie Herr Gymnasialprofessor Dr. B. Schwarz mittheilte, bestätigen auch andere Beobachter aus Trübau, sowie ein zur Zeit im Schönhengster Walde befindlicher, dass die Gegend »für einen Augenblick taghell erleuchtet war« und dass darnach helle Streifen noch einige Secunden sichtbar blieben, aber eine Detonation will sonst Niemand gehört haben.

Herr Prof. Dr. Schwarz war so freundlich, nach den Angaben des Herrn Postbeamten Leo Markl zwei Bahnpunkte einzumessen. Es ergab sich:

I. . . . . $A =$ 4°5, $h = 20°3$;
II. (Endpunkt) . . $A = 357·5$, $h = 10·8$,

somit nur ein sehr kurzes Stück der Bahn.

5. Hosterschlag bei Neuhaus in Böhmen (32° 47ʹ7; 49° 6ʹ6). Herr Oberlehrer C. Röschl bemerkte nur die zurückgebliebene Spur, welche ungefähr nach SE gerichtet und am unteren Ende heller war. Die beiden Enden des geraden Streifens wurden später 20° und 15° hoch durch Messung gefunden. Nach einer Skizze wäre ihre Verlängerung gegen NW etwa 12° südwestlich vom Zenith entfernt geblieben.

6. Mährisch-Kromau (33° 58ʹ5; 49° 3′). Eine an die Wiener Sternwarte gerichtete Mittheilung des Beobachters, Herrn Aichmeisters K. Jedliczka, besagt: »Um $11^{1}/_{4}{}^{h}$ ist hoch am Himmel blitzschnell eine Kugel sichtbar geworden, welche

zweimal so gross als die Sonne war und das Licht einer starken elektrischen Bogenlampe übertraf. Das Schloss, in dessen Nähe der Beobachter mit mehreren anderen Personen sich befand, war grell grünlichweiss beleuchtet. Nach etwa 3ˢ entwickelte sich aus der Kugel ein raketenartiger Körper, der durch etwa 2ˢ, einen röthlichen Schweif nachziehend, an Lichtstärke und Grösse abnahm und zuletzt noch etwa 1ˢ wie eine Sternschnuppe sichtbar war.« Es heisst dann weiter: »Ich erlaube mir noch zu bemerken, dass die Sternschnuppen meines Erachtens immer gerade oder auch im Bogen ziehen, jene Erscheinung aber, als sie zum Schlusse wie eine Sternschnuppe aussah, hatte einen geschlängelten Lauf«.

Herr Jedliczka hat die Bahn des Meteors, welche beiläufig von NW gegen SE gerichtet schien, auch in einer nach dem Compass orientirten Skizze ungefähr dargestellt. Darnach habe ich das Azimut für den ersten Punkt zu 66° und die scheinbare Höhe mit 52° angenommen. Den Endpunkt, welcher mir zu unsicher schien, habe ich unberücksichtigt gelassen. Andere Messungsresultate und Einzeichnung in die Karte erhielt ich erst fast zwei Monate nach der Beobachtung, als diese Untersuchung bereits fast gänzlich abgeschlossen war. Ich erwähne dies deshalb, weil diese viel späteren Angaben gegen die ersten in einem Punkte stark differiren. Hiernach war nämlich der Punkt der ersten Wahrnehmung zwar zufällig fast übereinstimmend 51°5 hoch gemessen worden, die Richtung jedoch genau S ($A = 0$) eingetragen (gegenüber $A = 66°$ oder WSW der ersten Skizze). Der Endpunkt wurde in $A = 342°5$, $h = 37°5$ bezeichnet. Es muss eben berücksichtigt werden, dass hier die ganze scheinbare Bahn in grosser Höhe verlief, weshalb die Fixirung der Azimute nach irdischen Gegenständen schon an und für sich, umsomehr also nach Ablauf eines längeren Zeitraumes, unsicher war.

7. Gaya (34° 47'5; 49° 0'6). Die Feuerkugel erschien in der Richtung gegen Sobulek ($A = 108°$) und 55° hoch (gemessen). Sie erlosch gegen Karlin ($A = 70°$), 30° hoch. *D*: 5ˢ (Herr Steueramtscontrolor Johann Páleník).

8. Grosshof bei Pohrlitz (34° 12'; 48° 58'). Der Beobachter, Herr Schwepesch, lieferte mir nachstehenden Bericht:

»Ich sah in der Richtung gegen Kromau ($A = 118°5$) einen feurigen Ball von etwa drei Viertel Mondgrösse. Einige Secunden später flog aus dem Feuerball ein in Grösse nur ein Drittel davon betragender Stern von NW nach SE heraus und hinterliess einen starken Schein. Für die Höhe des ersten Punktes wurde $h = 42°$ gemessen, der Endpunkt in $A = 335°8$, $h = 29°$ bestimmt«.

9. Göding (34° 48′; 48° 51′). Das Meteor, durch welches der Stadtplatz grünlichweiss, fast taghell beleuchtet wurde, war 4—5^s lang in Form eines breiten Streifens sichtbar. Genaueres konnte nicht ermittelt werden (Herr K. Fürst).

Zu Holicz in Ungarn, unweit Göding, wurde um diese Zeit aus einem westlich gelegenen Fenster ein »secundenlanger Feuerschein, welcher nordwestlich herkam«, bemerkt.

10. Kattau[1] bei Eggenburg (33° 28′5; 48° 40′). Herr A. Genner in Brunn a. d. Wild schrieb hierüber an die Wiener Sternwarte: Etwa um $^1/_2 12^h$ wurde die Strasse, auf der wir gingen, plötzlich sehr hell beleuchtet. Ich blickte zum Himmel auf und da sah ich eine in meinem Leben noch nie gesehene Erscheinung. Eine grosse, blendend helle, wie elektrisches Licht und an den Rändern bläulich leuchtende Kugel durchzog das Firmament. Zuerst bewegte sie sich langsam, so dass ich sie genau betrachten konnte, dann immer schneller, einen Feuerstreifen hinter sich lassend, bis sie endlich, einer Rakete ähnlich, einzelne Funken sprühend, verschwand. *D.* 4—5^s.

Da dem Beobachter die Umgebung fremd und daher die Orientirung nicht ganz leicht war, konnte er bestimmte Angaben nicht machen. Er lieferte jedoch eine beiläufige Skizze, nach welcher der Endpunkt etwa in $A = 290°$ erschien und welche annehmen lässt, dass auch hier noch die Bahn südlich vom Zenith verlief.

Ein anderer Beobachter in Kattau, der eben das Haus verlassen hatte, sah sich momentan derart »in Feuer gehüllt«, dass er zu verbrennen fürchtete.

11. Münzkirchen bei Schärding (31° 14′; 48° 29′). Das Meteor wurde um $11^h 4^m$ in ESE, beinahe E, beobachtet,

---

[1] Nr. 10 bis 17 liegen in Nieder- und Oberösterreich.

raketenartig abstürzend, wie ein glänzender Stab und Helle verbreitend wie Magnesiumlicht. Spätere ergänzende Angaben besagen, dass der Abfall von links nach rechts aber fast vertical erfolgte. Die scheinbare Abweichung von der Verticalen betrug (gezeichnet) nämlich nur 6° gegen N hin. Der Endpunkt lag ungefähr gegen die Ortschaft Ratzing ($A = 266°$) und 12° hoch, der Anfangspunkt in 22° Höhe. D: $1^1/_2{}^s$ (Herr Oberlehrer Vogl).

12. Bruderndorf bei Nieder-Fellabrunn (33° 57′; 48° 28′). Nach dem Berichte eines Ungenannten wurde das Meteor um $11^1/_4{}^h$ gegen N gesehen.

13. Herzogenburg (33° 22′; 48° 17′). Hier wurde um 11^h 10^m ein Meteor beobachtet, welches, von SW nach NE sich bewegend, durch einige Secunden die Strasse, auf welcher der Beobachter stand, taghell beleuchtete (N. Fr. Presse 12303. Nähere Angaben waren nicht zu erlangen).

14. Würmla (33° 32′; 48° 15′). Um 11^h 10^m wurde der Lauf eines Meteors oberhalb der »Windleiten«, ungefähr zwischen den Gesichtslinien nach Zwentendorf ($A = 196°$) und Tulln ($A = 240°$) sehr steil abfallend beobachtet (beiläufig skizzirt 70° gegen den Horizont geneigt). »Die Kugel war der Sonnenscheibe an Grösse gleich, vollkommen rund und für das Auge blendend. Das Erlöschen glich der Explosion einer Rakete und die Stücke waren einen Augenblick darnach wie Funken anzusehen« (Herr F. Rohrschacher).

15. Weidlingau-Hadersdorf (33° 52′; 48° 12′). Nach den Erhebungen, welche Herr Sternwarte-Assistent Dr. F. Bidschof vorzunehmen so freundlich war, sahen Frau Th. Severin und eine zweite Beobachterin um $11^1/_4{}^h$, dass sich der Himmel durch 2^s plötzlich erhellte. Die Erscheinung wurde nur an einem schmalen Fenster beobachtet, 42° westlich vom magnetischen N und $12^1/_2{}°$ hoch.

16. Wien, Neubaugasse (34° 1′; 48° 12′). Herr Kaufmann H. Zentner nahm die »blitzartige Erscheinung« in der ziemlich engen, zum Theile von hohen Häusern eingefassten Gasse im Gehen wahr. Nach dessen nicht sehr sicheren Angaben bestimmte Herr Dr. Bidschof eine Stelle, welche der scheinbaren Bahn vielleicht angehören mochte, in $A = 180°$ und

beiläufig $h = 40°$. Das Licht war bläulich mit etwas rother Färbung, die Dauer kurz.

17. Sct. Pantaleon bei Sct. Valentin (32° 12′; 48° 11′). Um $11^h 5^m$ bemerkte der Beobachter, welcher eben »den schönen Sternenhimmel besah, etwas südlich von NE ein helles, $2-3^s$ dauerndes Licht«. Dann sah er noch durch $5-6^s$ einen ziegelrothen Streifen. Er meinte, die Richtung könnte nur das südöstliche Mähren berühren. Einer beigefügten Skizze kann bloss der Ort des Aufleuchtens schätzungsweise in $A = 235°$, $h = 50°$ entnommen werden. Der weitere Verlauf ist nicht angezeigt (Herr J. Apanger).

Aus Scheibbs in Niederösterreich lief die Nachricht ein, dass durch etwa 2^s die gegen E gerichtete Wand eines Zimmers blitzähnlich grell beleuchtet wurde. Auch noch aus Windischgarsten in Oberösterreich wurde berichtet, dass um $11^1/_4{}^h$ die Strasse plötzlich grell beleuchtet erschien.

18. Füss bei Nagymánya in Ungarn, Barcser Comitat (36° 0′; 48° 8′3). Herr Ludwig Graf Sternberg, welcher die Güte hatte, mir seine Beobachtungen mitzutheilen, befand sich zur betreffenden Zeit auf der Fahrt von Nagymánya nach Füss (gegen E). Zwischen 11^h und $^1/_2 12^h$, knapp vor Füss, bemerkte er plötzlich von rückwärts her ein grelles, blitzartiges Aufflackern, wie von einer erst zur Wirkung gelangenden Bogenlampe, mehrere Secunden andauernd. »Ich blickte mich um«, schreibt der Herr Beobachter, »und sah nur mehr einen Lichtstreifen und einen Sprühregen von Funken, der in der Richtung nach Nagymánya, eher etwas nördlicher, niederging. Dieser Streifen schien, soviel mir erinnerlich, fast lothrecht.« Die Bahn wurde durch einen Strich angedeutet, der, 8° von der Verticalen abweichend, gegen N geneigt erscheint. Das Azimut der Richtung nach Nagymánya von der genau beschriebenen Wegstelle beträgt 112°.

In Szomolány bei Tyrnau, Pressburger Comitat (35° 6′; 48° 31′), bemerkte Herr Oberförster Jánek bei sehr dichtem Nebel nach 11^h ein zweimaliges rasches Aufblitzen, so dass der Nebel dadurch »grell und taghell« erleuchtet war.

19. Wöllersdorf, Niederösterreich, k. und k. Feuerwerksanstalt (33° 52′; 47° 51′). Herr C. Herbert, k. und k. Militär-

beamter, welcher in nordöstlicher Richtung ging, wurde durch eine »seitlich rückwärts kommende Helle überrascht.« Das Meteor zog dann durch etwa 2^s über N gegen E, wo es, etwa 92° östlich von magnetisch N, 14° hoch, zerbarst. Nach einer Skizze wäre die Neigung der Bahn gegen den Horizont ungefähr zu 54° anzunehmen.

Herr Assistent Dr. Bidschof, dessen freundlichen Bemühungen diese Mittheilungen zu danken sind, bemerkte dazu, dass während der Vornahme der Messungen starker Nebel herrschte, wodurch die Orientirung des Beobachters erschwert war.

20. Hollenthon bei Wiesmath in Niederösterreich (33° 55'5; 47° 35'4). Ein grosser Lichtstreifen ging in der Richtung von S—N über den Schneeberg. Genauere Angaben verdanke ich Herrn Kaufmann Fr. Lärnsack. Die Bewegungsrichtung war ungefähr SW—NE. Das Meteor wurde zuerst über dem Sticklberg, nach Einzeichnung in die Karte, in $A = 133°$ und in gemessener Höhe von 37° gesehen. In etwa 190—195° Azimut, links der St. Anna-Kapelle verschwand die Feuerkugel hinter einer nahen Höhe, weshalb der Endpunkt nicht beobachtet werden konnte.

21. Kindberg in Steiermark (33° 7'; 47° 30'5). Herr P. Pirchegger berichtete (nebst fünf mitunterfertigten Zeugen) der Wiener Sternwarte, dass das gegen NNE ziehende Meteor durch einige Secunden so grosse Helligkeit verbreitete, »wie sie selbst beim hellsten Sonnenschein nicht ist«. Die scheinbare Neigung der Bahn wurde mir zu 30° gezeichnet und der Lauf mehr gegen NE hin angegeben.

22. Görz (31° 17'5; 45° 57'). Diese äusserst wichtige Beobachtung ist in zwei sich ergänzenden Mittheilungen enthalten, deren erste durch die Herren Ingenieur Pajer di Monriva und Dr. M. Pajer di Monriva an die k. k. Wiener Sternwarte gelangt ist. Sie gibt $11^h 10^m$ (wohl mitteleuropäische Zeit?) für die Fallzeit an und enthält folgende Schilderung: »Wir sahen auf der Nordseite einen in der Richtung W—E sich bewegenden hellen Lichtpunkt, dessen Bahn sich zunächst nur durch einen dünnfädigen aufleuchtenden Streifen kundgab. Nach 1^s etwa schwoll dieser anfangs röthlichhelle Punkt plötzlich

zu einer scheinbar 10 *cm* im Durchmesser messenden hellleuchtenden Kugel an, die eine ebenso breite, bandförmige, dem weissglühenden Eisen an Farbe vergleichbare, weiterhin mit nach rückwärts gekehrten, länglich spitzauslaufenden Stacheln versehene Lichtspur aufwies. Diese zweite bemerkenswerthe Phase des Phänomens belief sich wieder auf ungefähr 1ˢ. Gegen das Ende der Erscheinung, welche plötzlich verschwand, nahm die Lichtintensität und die ins Blauviolette neigende Färbung zu, und ungemein auffallend stellte sich ein nach hinten und seitlich unregelmässiges Aussprühen ein.« Für das erste Aufleuchten, den Beginn der zweiten Phase und das Ende wurden die astronomischen Azimute 205°, 215° und 227° und die Höhe 20° angegeben. Da mir nicht bekannt war, ob diese Angaben auf Messungen oder nur auf Schätzung beruhten, richtete ich an Herrn Ingenieur v. Pajer das Ersuchen, eine Messung der Höhen vorzunehmen, falls dies nicht schon geschehen wäre. Diesem Anliegen wurde in freundlichster Weise entsprochen. Aus den mir mitgetheilten Belegen ersah ich, dass die scheinbare Höhe des ersten Punktes schon nach der Beobachtung graphisch dargestellt worden war, so, dass man dafür 13° zu nehmen hätte. Herr Ingenieur v. Pajer bemerkte dazu, dass die erste Angabe, 20°, nicht sowohl von einer Überschätzung, als davon herrührte, dass sich die beiden Beobachter über den Zielpunkt nicht recht einigen konnten, was ganz in der Natur der Sache liegt.

Die später in Folge meiner Anregung vorgenommenen Messungen ergaben für die drei erwähnten Punkte die östlichen Abweichungen von magnetisch Nord: 39°8, 45° und 53°, woraus für 9°7 magn. Declination die astronomischen Azimute 210°1, 215°3 und 223°3 hervorgehen würden. Die zugehörigen Höhen wurden diesmal der Reihe nach zu 9°, 9° und 7° gemessen.

Gegenüber der ersten Mittheilung ist, bei fast identischem Azimute des mittleren Punktes, die ganze Bahn um 8—9° kürzer. Ich habe mich bei Verwerthung der Beobachtungen hinsichtlich der Azimute an die Resultate dieser zweiten Mittheilung gehalten, um den Einfluss einer etwaigen fictiven Bahnverlängerung zu vermeiden, jedoch auch die andere Alternative in

Betracht gezogen. Von der Verwendung der Höhen wird später noch die Rede sein.

Aus den bestimmteren Zeitangaben kann für die Epoche des Falles: 1898, November 20, $11^h\,13^m$ mittlerer Wiener Zeit gefolgert werden.

Hemmungspunkt.

Zur Bestimmung der geographischen Lage des Punktes, über welchem der planetarische Lauf des Meteors in der Atmosphäre schliesslich sein Ende erreicht hat, erscheinen mir die Azimute aus Kleppel: 0°0, Treublitz: 347°5, Ranigsdorf: 357°5, Grosshof: 335°8, Münzkirchen: 266°0, Kattau: 290°0, Füss: 112°0 und Görz: 223°2 völlig geeignet.

Nicht benützt wurden die Angaben von Gaya: 70°, Würmla: 240° und Wöllersdorf: 263°, welche bei vorläufiger graphischen Bestimmung allzugrosse Abweichungen in verschiedenem Sinne zeigten. Die Kromauer Bestimmung $A = 342°5$ traf verspätet ein, wäre aber auch sonst aus demselben Grunde zunächst nicht einzubeziehen gewesen. Vermuthlich erschwerte hier überall die ziemlich grosse scheinbare Höhe eine bessere Orientirung.

Bezüglich der Gewichtsbestimmung habe ich die acht benützten Richtungen in drei Gruppen getheilt. Erstlich in solche, welche unmittelbar nach der Beobachtung durch Messung oder bestimmte Bezeichnung irdischer Marken festgestellt wurden (Kleppel und Görz). Ich betrachte sie zum mindesten für doppelt so genau als jene, welche erst nach längerer Zeit, sei es durch Beziehung auf benachbarte Ortschaften oder durch andere ungefähre Angaben ermittelt worden sind (Münzkirchen, Kattau, Würmla, Füss). Das Gewichtsverhältniss wäre dann vergleichsweise 4 : 1. Zwischen beide stellte ich die zwar durch Einmessung oder Eintragung in die Specialkarte, aber auch erst nach längerer Zeit erhaltenen Bestimmungen (Treublitz, Ranigsdorf, Grosshof), welchen ich das Gewicht 2 beilegte.

Die Ermittelung wurde genau nach dem Grundsatze vorgenommen, dass die Summe der Producte aus den Gewichten mit den Quadraten von $\Delta A . \cos h$ ein Minimum wird. Denn

nicht die azimutalen Verbesserungen, sondern die Bogenabweichungen am Himmelsgewölbe kommen dabei in Betracht.

Als Resultat ergab sich die Lage des Endpunktes der leuchtenden Bahn über der Gegend in:

Östliche Länge.... 34° 45'2 ± 6'2 (7·7 *km*) mittl. F.
Nördliche Breite... 48 20·4 ± 4·8 (8·8 *km*) mittl. F.,

nämlich über Apfelsbach in Ungarn, etwa 20 *km* nördl. von Pressburg.

Die mittlere Unsicherheit ist in dieser Hinsicht also etwas grösser als in manchen anderen Fällen. Der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung der Gewichtseinheit beträgt aber auch fast ± 10°, da die bestimmteren Angaben in der Minderzahl waren.

Zur Bestimmung der linearen Höhe dieses Endpunktes über der Erdoberfläche bleiben, wenn man sich nur auf die Resultate wirklicher Messungen mit dem Gradbogen beschränkt, noch sieben sehr gut brauchbare Beobachtungen. Die folgende Übersicht zeigt die einzelnen Werthe der Höhe, welche sich aus den beigefügten Entfernungen und scheinbaren Höhen (Höhenwinkeln) ergeben:

	Horizontale Entfernung	Scheinbare Höhe	Lineare Höhe
Treublitz	159 *km*	16°	47·4 *km*
Ranigsdorf	160	10·8	32·6
Grosshof	80	29	45·0
Gaya	74	30	43·3
Hosterschlag	164	15	46·2
Münzkirchen	259	12	60·4
Görz	373	7	56·7

Der rohe Durchschnitt dieser sieben einzelnen Zahlen würde ungefähr 47 *km* für die Höhe geben. Da jedoch die Entfernungen sehr verschieden sind, ist es räthlich, die Bestimmung genauer vorzunehmen, so dass die Summe der Fehlerquadrate der einzelnen scheinbaren Höhen die kleinste wird.

Nach diesem Vorgange erhält man schliesslich für die Höhe des Hemmungspunktes: 44·0 *km* ± 2·1 *km* m. F. oder rund 6 geographische Meilen.

Nachstehende Zusammenstellung lässt die nöthigen Verbesserungen im Azimut (ΔA) und in der scheinbaren Höhe (h) erkennen:

	ΔA	Δh
Kleppel	+ 1°3	—
Treublitz	+12·6	—1°1
Ranigsdorf	— 8·1	+3·9
Grosshof	— 5·9	—0·6
Gaya	—	+0·4
Hosterschlag	—	—0·7
Kattau	+ 1·9	—
Münzkirchen	+ 6·3	—3·5
Füss	— 7·1	—
Görz	+ 0·1	—1·9.

Wie man sieht, sind die Höhen mit ±2°3 mittl. Fehler viel genauer, während sonst häufig das Umgekehrte eintritt. Es bestätigt dies meine Erfahrung, dass selbst der primitivste Gradbogen ein geeigneteres Mittel zur Höhenbestimmung darbietet, als jede Schätzung.

Aus Schmiedeberg würde dieser Punkt in 341° Azimut erschienen sein, was mit der beiläufigen Richtungsangabe SSE gut genug übereinstimmt.

Radiationspunkt und Bahnlage gegen die Erde.

Aus der oben ermittelten Lage des Hemmungspunktes wurde nun zunächst dessen scheinbarer Ort am Himmel für die einzelnen Beobachtungsorte berechnet und in der weiter unten folgenden Übersicht unter II angesetzt. Den Beobachtungen ist ferner der erste Punkt des Bahnbogens oder die scheinbare Neigung zu entnehmen.

Durch eine vorläufige Auflösung, welche zur Annahme eines Näherungswerthes führt, überzeugt man sich zugleich, dass einige Angaben wegen allzugrosser Abweichung auszuscheiden sind, so jene aus Schmiedeberg, welche den

Radianten in viel zu grosse Höhe und jene aus Wien und Weidlingau, welche ihn im Gegensatz in die Nähe des Horizontes versetzen würden. Es bleiben dann aber noch 15 scheinbare Bahnen, welche mit Erfolg verwendet werden können. Dort, wo ausser dem Endpunkt noch ein Bahnpunkt bezeichnet wurde, ist dieser unter I angeführt, wo jedoch die scheinbare Neigung angegeben wurde, ist der Bahnbogen ausser durch den unter II angeführten Ort noch durch den einen Knoten am Äquator dargestellt. Die Namen der betreffenden Beobachtungspunkte sind mit einem * bezeichnet.

Ausserdem wäre noch Einiges aufzuklären. Die in Ranigsdorf bezeichnete Bahn ist nur 8° lang. Ebensoviel beträgt aber auch die aus der Ermittlung des Endpunktes hervorgehende Verbesserung des Azimutes am zweiten Bahnpunkte. Es ist hier nöthig, eine Parallelverschiebung des beobachteten Bahnbogens vorzunehmen, weil, wenn der erste Punkt unverändert der Beobachtung entnommen würde, dies eine völlige Entstellung ihres Charakters zur Folge hätte. Die Annahme, dass der Beobachter sich in der gesammten Orientirung um diesen Betrag geirrt habe, ist auch viel wahrscheinlicher als der grosse Neigungsfehler, welcher für die andere Alternative zugegeben werden müsste.

Für Mährisch-Kromau ist das Azimut des Punktes I (66°) der Skizze entnommen. Für die Höhe desselben wurde die Darstellung nach einem Verhältnisse reducirt, welches sich aus dem Vergleiche der berechneten mit der skizzirten im Punkte II ergab.

Hieraus würde 52° Anfangshöhe folgen. Überdies würde der Zeichnung nach die scheinbare Bahn mit dem Vertical des Endpunktes einen Winkel von 35° gebildet haben, woraus man die Höhe für $A = 66°$ mit 55° berechnen kann. Ich habe demnach den Mittelwerth $h = 53°5$ in diesem Azimut angenommen.

Die für das Azimut des Anfangspunktes in Grosshof (118°5) und Gaya (108°) angeführten Werthe sind ohne Zweifel erheblich zu gross, vermuthlich wegen unbewusster Bahnverlängerung. Soweit aber die damit verbundenen Höhen nur die Bahnlage bezeichnen, kann die Angabe aus Grosshof beibehalten werden. Die in Gaya gemessene Höhe von 55° kann sich jedoch

unmöglich auf das angegebene Azimut beziehen, welches sicher einer grossen Reduction bedarf. Sowie das Azimut des in Gaya bezeichneten Endpunktes (70°) fast auf rein S zu vermindern ist, um auf den ausgemittelten Endpunkt zu kommen, muss auch jenes des Anfangspunktes — wahrscheinlich in Folge eines allgemeinen Orientirungsfehlers — sehr verkleinert werden. Es scheint, dass die dortige Beobachtung am besten dargestellt wird, wenn die angeführte Höhe von 55° als die maximale betrachtet wird, welche sich dann auf das Azimut 68° beziehen müsste. Diese Annahme wird auch durch eine Bemerkung des Beobachters unterstützt, nach welcher erst gegen das Ende hin die Bahn stark abfiel.

Aus Görz liegen für die Höhe des ersten Punktes eigentlich drei Angaben vor: 20°, 13°, 9°. Ich glaube mich für die zweite entscheiden zu sollen, weil sie noch unter frischem Eindrucke wenigstens durch eine graphische Bestimmung erhalten wurde und auch dem Mittel der äussersten Werthe naheliegt.

Für die Bewerthung der Gewichte ergaben sich im vorliegenden Falle kaum verlässliche Gesichtspunkte, weshalb alle Bahnen gleichgewichtig verwerthet wurden, obwohl einzelne Angaben mehr Vertrauen verdienen als andere, aber in einer Weise, deren Verhältniss sich nicht abschätzen lässt.

Hiernach wurden folgende scheinbare Bahnen zur Ableitung des Radiationspunktes benützt:

	I		II	
	α	δ	α	δ
1. *Kleppel (2)	199°3	0	47°5	—27°5
2. Treublitz (3)	15·7	—12°8	48·9	—25·4
3. Ranigsdorf (4)....	52·3	—19·8	59·9	—24·6
4. *Hosterschlag (5).	95·0	0	103·9	— 8·5
5. M.-Kromau (6) ...	25·2	+32·0	81·4	— 6·4
6. Gaya (7)	11·9	+28·0	47·1	—10·5
7. Grosshof (8)	333·3	+47·5	75·0	— 8·0
8. *Münzkirchen (11)	131·7	0	128·2	+ 4·9
9. *Würmla (14)	135·6	0	125·2	+22·8
10. St. Pantaleon (17).	112·0	+55·0	132·2	+13·3
11. *Füss (18)	126·4	0	326·6	+27·5

	I		II	
	α	δ	α	δ
12. *Wöllersdorf (19)	157·5°	0	148·8°	+46°0
13. Hollenthon (20)	318·8	+54·3	166·3	+52·0
14. *Kindberg (21)	325·0	0	155·8	+36·8
15. Görz (22)	178·4	+48·4	169·4	+34·6

Für die Lage des scheinbaren Radianten erhielt ich hieraus:

Rectascension .... 334°0 ± 3°0 mittl. Fehler.
Nördliche Declination.. 35·7 ± 2·7 mittl. Fehler.

Der mittlere Fehler einer Beobachtung am Punkt I beträgt ±8°2.

Die einzelnen Verbesserungen am angegebenen Ort des ersten Aufleuchtens würden in Bezug auf die Lage (nicht Länge) der Bahn sein, für:

Treublitz	+13°4
Ranigsdorf	+ 0·1
M.-Kromau	+ 3·5
Gaya	— 8·4
Grosshof	—11·6
St. Pantaleon	— 4·2
Hollenthon	+ 6·2
Görz	+ 2·7.

Der grössere Theil der Verbesserungen, welche durchschnittlich 6°3 betragen, entfällt hier zumeist auf die Höhen. Bei Grosshof wäre jedoch, wie schon erwähnt, das Azimut bedeutend zu vermindern.

Die Verbesserungen an den benützten scheinbaren Neigungen des Bahnbogens (+ im Sinne einer Vergrösserung der Neigung in Bezug auf den Horizont) sind für

Kleppel	— 5°0
Hosterschlag	— 3·7
Münzkirchen	— 6·6
Würmla	+ 0·3
Füss	+ 2·7
Wöllersdorf	— 7·6
Kindberg	+15·6.

Die durchschnittliche Verbesserung beträgt 5°9, und die scheinbaren Neigungen sind daher im Durchschnitte diesmal noch etwas besser als die Angaben der Positionen im Punkte I. Dies ist nicht besonders auffallend, da keine Beziehungen auf Gestirne vorliegen und die meisten Feststellungen nach der Erinnerung ziemlich spät erfolgten. Der Charakter der Bahn scheint sich eben, wenigstens hinsichtlich der scheinbaren Neigung, dem Gedächtnisse durchschnittlich besser einzuprägen als Azimut und Höhe eines Bahnpunktes, zumal wenn letztere gross ist.

Hinsichtlich der Lage gegen die Erde ergibt sich nun:

Azimut der Bahn..... 106°5,
Neigung der Bahn.... 35·1.

Die Bahn war also in Wirklichkeit nicht ganz aus WNW her gerichtet.

Diese Lage entspricht recht gut der Angabe, dass der Lichtstreifen in Füss fast vertical (auf der Westseite) und auch in Münzkirchen nicht viel von der Verticalen abweichend (auf der Ostseite) erschien. Obwohl die Mittheilungen aus Kattau und Brudersdorf sich nur darauf beschränkten, dass die Feuerkugel am ersteren Orte südlich, am letzteren nördlich vorbeigezogen, was bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden konnte, ist das Resultat auch in dieser Beziehung derart, dass beide Angaben befriedigt werden.

Über den Punkt des ersten Aufleuchtens, also auch über die wahrgenommene Bahnlänge, führen die verschiedenen Berichte, wie gewöhnlich, auch in diesem Falle zu sehr abweichenden Resultaten, denn es gesellen sich zu den wirklichen Unterschieden in der ersten Wahrnehmung, welche durch die Umstände der Beobachtung bedingt sind, noch die unvermeidlichen Fehler in der Feststellung des betreffenden scheinbaren Ortes.

Die längste Bahn würde aus den Beobachtungen in Gaya und Grosshof hervorgehen. Beide reichen noch über den Radianten hinaus, worin ein Widerspruch liegt. Selbst wenn man dort den Anfangspunkt von WNW bis W verschiebt, erhält

man immer noch eine im Vergleiche mit den übrigen Beobachtungen unwahrscheinlich lange Bahn. Für Gaya wurde aus den früher angeführten Gründen das Azimut bis auf 68° reducirt. Bezüglich Grosshof dürfte eine ähnliche Verbesserung nöthig sein, doch liegen dafür keine ausreichenden Anhaltspunkte vor und man muss darauf verzichten, diese Angabe zu interpretiren.

Da die Höhe des ersten Aufleuchtens mit der wahrgenommenen Bahnlänge zusammenhängt und letztere auch für die Abschätzung der Geschwindigkeit in Betracht kommt, führe ich, um Wiederholungen zu vermeiden, gleich hier diejenigen Bahnlängen an, welche man aus den Angaben der einzelnen Beobachtungsorte, von welchen solche vorliegen, folgern müsste, wenn sie als ganz richtig angenommen werden könnten. Beigefügt sind die Azimute, auf welche die Bestimmung gestützt ist. In Münzkirchen diente hiezu die Höhe, weil die Richtung zu sehr mit der Bahnrichtung zusammenfällt, daher kein brauchbares Resultat erwarten lässt. Für Kromau und Görz sind beide Alternativen (erste und zweite Angabe) besonders ersichtlich gemacht.

	Gesehene Bahnlänge
Hollenthon ($A = 133°$)	257 *km*
M.-Kromau (1. Angabe: $A = 66°$)	183
Weidlingau ($A = 129°$)	162
Görz (1. Angabe: $A = 205°$)	149
St. Pantaleon ($A = 235°$)	147
Gaya ($A = 68°$)	137
Treublitz ($A = 35°$)	123
Schmiedeberg (Süd)	118
Görz (2. Angabe: $A = 210°$)	108
Würmla ($A = 196$)	103
M.-Kromau (2. Angabe: Süd)	75
Münzkirchen ($h = 22°$)	71

Die Beobachtung aus Hollenthon würde das Aufleuchten in 197 *km* oder etwa 26·5 geographische Meilen Höhe über die Gegend südlich nahe an Krumau in Böhmen versetzen.

Obwohl diese Höhe nicht ungewöhnlich gross ist und auch die Angabe, dass das Meteor über dem Schneeberge hergezogen kam, dann die Bezeichnung des näheren Berges, über dem es erschien und die Eintragung in die Specialkarte mit dieser langen Bahn recht gut stimmen, möchte ich das Resultat (namentlich zur Abschätzung der Geschwindigkeit) doch nicht als verbürgt betrachten. Eine Vermehrung des in Hollenthon angegebenen Azimutes um 10° würde die Bahnlänge auf den für M.-Kromau angegebenen Betrag von 183 *km* verkürzen und dann das Aufleuchten in 151 *km* oder rund 20 geogr. Meilen Höhe über die Gegend östlich von Weitra in Niederösterreich zwischen Kirchberg und Schweigers versetzen. Eine derartige Höhe ist für das Sichtbarwerden grosser Meteore sehr gewöhnlich und dieses Ergebniss wäre sonst annehmbar, wenn nicht ein späterer Bericht des Beobachters in Kromau seine erste Angabe in Frage stellte.

Die nächste Angabe, jene aus Weidlingau, ist nach den Umständen der Beobachtung minder sicher. Die weiter folgende aus Görz entspricht der ersten Bestimmung, welche bald nach der Beobachtung erfolgte und verdient vielleicht aus diesem Grunde hier etwas mehr Vertrauen als die zweite, in welcher das Azimut um 5° grösser angesetzt ist und welche eine ungefähr um 40 *km* kürzere Bahn gibt. Dagegen spricht die Dauerangabe mehr für die kürzere Bahn. Die Görzer Beobachtungen gehören aber ohne Zweifel vergleichsweise zu den verlässlichsten, und demnach wäre der Mittelwerth dieser beiden Bestimmungen, d. i. eine Bahnlänge von 129 *km* und eine Höhe des ersten Punktes von 120 *km* oder etwa 16 geogr. Meilen, als Resultat zu betrachten, unter welches man kaum mehr herabgehen müsste.

Würden die verschiedenen oben angeführten beobachteten Bahnlängen als überwiegend durch Beobachtungsfehler beeinflusst angesehen werden, so dass man allenfalls die Bildung eines Durchschnittswerthes für zulässig erachten könnte, so wäre das Resultat sehr wenig von dem oben angeführten verschieden, da man dann für die Bahnlänge 136 *km* und für die Höhe 123 *km* oder 16·6 geogr. Meilen anzunehmen hätte, über dem Kampthale, etwas nördlich von Gars. Die weitere Bahn

ging über die Gegend zwischen Frauendorf und Hollenstein, östlich von Maissau, ungefähr über Gross-Russbach, nördlich an Matzen im Marchfeld vorbei, dann über Mannersdorf und Laab zum Endpunkte.

Als Ergebniss dieser Betrachtung lässt sich daher annehmen, dass das Aufleuchten durchschnittlich in 123 *km*, an einzelnen Orten vermuthlich auch schon in viel grösserer Höhe, bis zu 197 *km*, beobachtet wurde.

Geschwindigkeit. — Kosmische Verhältnisse.

Unter den mitgetheilten Beobachtungen finden sich nachstehende Abschätzungen der Dauer:

Schmiedeberg	5—6ˢ
Ranigsdorf	4
Mährisch-Kromau	6
Gaya	5
Göding	4—5
Kattau	4—5
Münzkirchen	1·5
St. Pantaleon	2—3
Weidlingau	2
Wöllersdorf	2
Görz	2

Von diesen Angaben können mit einiger Sicherheit nur drei auf ein durch die Beobachtungen bezeichnetes bestimmtes Bahnstück bezogen werden, nämlich jene aus Münzkirchen (71 *km* Länge), St. Pantaleon (147 *km*) und Görz (wenigstens 108 *km*). Für die Geschwindigkeit in Bezug auf die Erde würde man daraus der Reihe nach 47 *km*, 59 *km*, 54 *km*, durchschnittlich 53 *km* erhalten. Die Übereinstimmung ist eine viel bessere als in den meisten ähnlichen Fällen. Da indessen bei der angegebenen kurzen Dauer eine geringe Veränderung derselben sehr erheblichen Einfluss auf das Resultat übt, und um jedem Einwande nach dieser Richtung zu begegnen, mag der Mittelwerth sämmtlicher Angaben für die Dauer, d. i. 3ˢ6, mit der durchschnittlichen Bahnlänge von 136 *km* verglichen werden,

wodurch man dann für die relative oder geocentrische Geschwindigkeit 38 *km* findet. Dieser Werth soll für die folgenden Betrachtungen beibehalten werden.

Zunächst ist nun davon der kleine Betrag von 1·8 *km* als der durch die Erdschwere bewirkte Zuwachs abzuziehen, so dass die hievon befreite relative Geschwindigkeit noch 36·2 *km* beträgt. Ebenfalls in Folge der Erdschwere ist ferner der Radiationspunkt um 1°4 höher gerückt worden. Er war daher. von dieser Störung befreit, in $\alpha = 332°6$, $\delta = +34°9$ oder in 351°0 Länge und 42°5 nördlicher Breite. Die scheinbare Elongation vom Apex der Erdbewegung beträgt 133°, die wahre dagegen, wenn die erwähnte Geschwindigkeit zu Grunde gelegt wird, 154°. Die Meteoriten kamen daher in ihrem Laufe hinter der Erde her und kreuzten ihre Bahn unter einem Winkel von nur 26°. Der Zusammenstoss mit der Erde erfolgte im absteigenden Knoten der Meteorbahn, deren aufsteigender in 238°4 Länge liegt. Alle folgenden Resultate sind so völlig von der Annahme über die geocentrische Geschwindigkeit abhängig, dass sie selbstverständlich nur bedingt gelten können.

Die Neigung der Meteorbahn gegen die Ekliptik betrug $i = 24°1$, die Bewegung war direct und die heliocentrische Geschwindigkeit an dieser Stelle des Sonnensystems betrug 61 *km*. Daraus ergibt sich als Bahn wieder eine sehr ausgeprägte Hyperbel von der Halbaxe $a = 0·47$. In Bezug auf die Sonne (nämlich ohne Rücksicht auf die nur sehr ungenau bekannte Eigenbewegung derselben im Weltraume) ist die Stelle des Weltraumes, von welcher diese Körper in das Sonnensystem eingedrungen sind — immer unter Voraussetzung der bezeichneten Geschwindigkeit — bestimmt durch die Coordinaten 306°5 Länge und 20°5 nördl. Breite.

Wenn die Geschwindigkeit durch derartige Schätzungen auch nicht genau ermittelt werden kann, so lässt sich doch behaupten, dass in unserem Falle die Annahme eines solchen Werthes für dieselbe, welcher einer Parabel oder Ellipse entsprechen würde, nur äusserst geringe Wahrscheinlichkeit besitzt. Für eine parabelähnliche Bahn hätte die Geschwindigkeit nicht mehr als die Hälfte des oben angenommenen Werthes, nämlich kaum 19 *km* betragen dürfen. Der von Görz aus mit einiger

Sicherheit nachgewiesene geringste Weg von 108 *km* — wenn man nämlich die kürzere scheinbare Bahnlänge zu Grunde legt — wäre dann nicht in beiläufig 2^s zurückgelegt worden, sondern es wären dazu nicht viel weniger als 6^s nothwendig gewesen. Für die durchschnittliche Bahnlänge von 136 *km* wären nicht 3^s6, sondern mehr als 7^s erforderlich gewesen. Obgleich, wie allgemein zugegeben wird, kleine Zeitintervalle schätzungsweise gewöhnlich grösser angegeben werden, als sie wirklich sind, befindet sich im ganzen Complex der Beobachtungen auch nicht eine einzige Meldung, welche die Dauer so gross angeben würde. Behält man die durchschnittliche Dauer von 3^s6 bei, so müsste, wenn die Geschwindigkeit 19 *km* betragen hätte, die zugehörige mittlere Bahnstrecke auf die Hälfte oder 68 *km* reducirt werden, was, mit Rücksicht auf die weit überwiegende Mehrzahl der Beobachtungen, eine doch gar zu absurde Annahme wäre.

Der scheinbare Radiant in $\alpha = 334°0$, $\delta = +35°7$, welcher hier nachgewiesen wurde, war mir für diese Epoche bisher unbekannt. Weder unter den berechneten Bahnen von Feuerkugeln, noch in den Listen der Sternschnuppen-Radianten finden sich naheliegende Punkte. Dagegen würden sich für frühere Epochen des Jahres (Juli—October) einige Beziehungen zu Sternschnuppen-Radianten ergeben, wenn man die mit der Änderung des Knotens zusammenhängende Verschiebung berücksichtigen wollte.

Man kann dies aus nachstehender Vergleichung entnehmen, welcher für die Rechnung die ermittelte heliocentrische Geschwindigkeit zu Grunde liegt.

Es ergibt sich nämlich:

	Durch Rechnung		Aus Beobachtungen		
	α	δ	α	δ	
Für Mitte October ..	347°	+29°	345°	+30°	Schmidt (A. N. 1756)
» » September	351	+21	355	+18	Denning: 15. Sept.
» » August ...	345	+15	343	+12	» 7. Aug.
» » Juli	335	+ 8	338	+10	» 12. Juli.
			333	+12	» 18. Juli.

Form, Grösse und Lichtentwicklung der Feuerkugel.

Über die Gestalt liegen je nach dem individuellen Eindrucke sehr verschiedene Angaben vor. Einige Beobachter, z. B. jene in Mährisch-Kromau, Grosshof und Würmla, sprechen von einer grossen, feurigen »Kugel«, einem Feuerball. Interessant ist die übereinstimmende Angabe der beiden ersteren, dass später aus diesem Ball ein kleinerer Körper (Stern) anscheinend heraustrat und die Bahn mit Hinterlassung einer röthlichen Spur weiter verfolgte. Der Bericht aus Treublitz betont die, übrigens auch sonst typische, längliche, nach vorn abgerundete, nach rückwärts verjüngte Form und vergleicht, wohl mit Rücksicht auf den Schweif, das Meteor mit einer feurigen Stange. In Münzkirchen wurde es ganz ähnlich mit einem glänzenden Stabe, in Göding und anderwärts mit einem feurigen Streifen verglichen, ohne dass der Wahrnehmung eines anscheinend abgesonderten Meteorkörpers Erwähnung geschähe. Letzteres findet sich jedoch in den Berichten aus Schmiedeberg und namentlich aus Kleppel. Hier wird die Erscheinung ganz kometenartig gezeichnet mit deutlichem Kopf und langem Schweif, welch letzterer nach der scheinbaren Bahn gekrümmt schien, also sehr lang sein musste. In diesem Berichte ist auch angeführt und dargestellt, dass viele »Sternchen herabfielen«, jedoch nicht in Folge scheinbarer Explosion des Kopfes, sondern aus dem Schweife, während der Stern an der Spitze seinen Weg fortsetzte. Hierin scheint eine Bestätigung der ähnlichen Angaben aus Grosshof und Kromau zu liegen. In dem Berichte aus Görz wird das Meteor in der zweiten Phase als hell leuchtende Kugel, eine ebenso breite, bandförmige Lichtspur hinter sich lassend, beschrieben.

Zu einem Bilde vereinigt, lassen diese, sich gegenseitig ergänzenden Schilderungen vermuthen, dass die scheinbare Feuerkugel aus einem Schwarme sehr zahlreicher kleiner Körper gebildet war und nur einzelne grössere enthielt. Die kleinsten verloren durch den Luftwiderstand am frühesten ihre grosse planetarische Geschwindigkeit. Manche unter ihnen wurden vielleicht gänzlich aufgelöst, andere folgten dann dem Zuge der Schwere. Auf diese Weise wären die schon am

Schweife bemerkten funkenartigen Absonderungen und fallenden Sternchen zu erklären. In einer gewissen Höhe angelangt, traf die Hauptmasse der Körperchen dasselbe Schicksal, so dass dann das Bild einer scheinbaren Explosion unter »Funkensprühen« entstehen konnte. Wenn die ausdrückliche Bemerkung des Herrn Beobachters in Kromau über den »geschlängelten« Lauf des zuletzt noch übrig gebliebenen Sternes auf genauer Beobachtung beruht, so konnte sich diese nur mehr auf einen, vermuthlich den grössten Körper beziehen. Wenn dieser auch einen hohen Grad von Wärme und Leuchtkraft an der Oberfläche besass, so konnte letztere doch nicht in Vergleich kommen mit der Intensität, welche die zahllosen in der Feuerkugel vertheilten einzelnen kleinen Lichtquellen mit ihrer relativ grossen Oberfläche zusammen entwickelten. Hierin stimmen die Beschreibungen aus den nicht allzufernen Orten auch überein.

Die am weitesten vorgedrungene, vermuthlich auch nicht sehr grosse Masse dürfte vielleicht, aber nicht mehr leuchtend, bis zur Erde gelangt sein. Den Fall selbst hätte nur ein in unmittelbarer Nähe befindlicher Beobachter bemerken können, und bei der vorgerückten Nachtstunde ist es nicht auffallend, dass kein solcher zur Stelle war. Das Gegentheil wäre vielmehr als ein zufällig günstiges Ereigniss anzusehen gewesen.

Über die scheinbare Grösse der als Feuerball bezeichneten leuchtenden Sphäre liegen fünf Vergleiche mit der Grösse der Mond- und Sonnenscheibe vor. Diese würden, auf die zugehörigen (kürzesten) Entfernungen bezogen, für die wirklichen Maasse in runden Zahlen geben:

Grosshof, den Durchmesser des grossen Balles 800 *m*, des kleineren Sternes etwa 270 *m*;
Würmla 1000 *m*;
Schmiedeberg 1350 *m*;
Kromau 1800 *m*;
Treublitz 560 *m* Querdurchmesser, 1680 *m* Längenaxe.

Diese Resultate sind, wie in anderen ähnlichen Fällen, aus verschiedenen Gründen etwas übertrieben. Wenn man sie aber selbst auf die Hälfte reducirt, bleibt die Ausdehnung noch

immer sehr gross und die sicher berechtigte Vorstellung, dass es sich dabei um glühende Theilchen feinster Art und Gase handelt, gewinnt, wie mir scheint, grössere Realität, wenn sie sich auf einen Schwarm, ein Meteorwölkchen, als auf einzelne grössere Körper bezieht.

Die Lichtstärke war wieder sehr bedeutend. Aus Orten, wie Ranigsdorf, Kindberg, Windischgarsten und Münzkirchen, für welche die Entfernung von den nächstliegenden Bahntheilen 160 *km* bis über 200 *km* betrug, wird noch über grelle Beleuchtung berichtet.

Das Licht der Feuerkugel erschien den meisten Beobachtern weiss mit bläulichem oder grünlichem Tone, das des Schweifes mehr gelb. Die letzte Spur wurde von mehreren Beobachtern als blassroth, ziegelroth, selbst blutroth bezeichnet. Die Hauptunterschiede und Abstufungen der Farben entsprechen offenbar grossen Wärmedifferenzen.

Aus der Umgebung des Fallortes sind Berichte über Detonationen nicht eingelangt, was freilich noch nicht beweist, dass dort auch keine vernommen wurden. Die Hemmungshöhe von etwa 6 geogr. Meilen gehört schon zu den grösseren. Wären jedoch die bis gegen das Ende gelangten Massen erheblich gewesen, so würde man, wie die Erfahrungen bei nachgewiesenen Meteoritenfällen lehren, in den mittleren Theilen des Marchfeldes, über welche der Lauf gerichtet war, sicher auffallende Schallwahrnehmungen gemacht haben, über welche wohl auch berichtet worden wäre.

Als Beispiel eigenthümlicher Ideenverbindungen will ich schliesslich noch erwähnen, dass von mehreren Beobachtern, welche sich alle in sehr grosser Entfernung befanden (bis über 200 *km*), angegeben wurde, sie hätten zugleich mit der Erscheinung ein eigenthümliches Rauschen oder Knistern vernommen. Unbeeinflusst von der Erfahrung über die grosse Entfernung des Gesehenen und unter dem Drucke einer naheliegenden Analogie wird irgend ein zufälliges Geräusch als nothwendige Begleiterscheinung aufgegriffen, häufiger jedoch wird, wie es mir scheint, der eine Sinn durch den anderen gewissermassen von innen her angeregt, doch auch seine Pflicht zu thun.

In die eine oder andere Gruppe solcher häufig vorkommenden Vorstellungen gehört wohl auch die unter Nr. 4 erwähnte Nachricht aus Mährisch-Trübau über eine heftige Detonation, welche der Theilung des Meteors vorangegangen sein soll. Nach der Lage des Ortes gegen die Bahn könnte sich diese Wahrnehmung auf das hier besprochene Meteor selbstverständlich nicht beziehen, und, nach dem Wortlaute, auch nicht auf das vom Beobachter gesehene, selbst wenn man so weit gehen wollte, die beiden als nicht identisch anzusehen, wozu sonst keine Veranlassung vorliegt.

Über Lichterscheinungen in elektrolytischen Zellen mit Aluminium- und Magnesiumelektroden

von

Friedrich Eichberg und **Ludwig Kallir.**

Aus dem elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1899.)

1. Bei Versuchen, welche angestellt wurden, um das Verhalten von elektrolytischen Zellen mit einer Aluminium- und einer Kohleelektrode im Wechselstromkreise zu verfolgen, wurde an der Aluminiumelektrode eine Lichterscheinung beobachtet. Dieselbe ist bei Tageslicht nur als unauffällige Veränderung im Aussehen der Platte, bei matter Beleuchtung (gelblichem Gaslicht) als bläuliche Färbung der Platte und im abgedunkelten Raume als deutliches Leuchten zu beobachten. Die Erscheinung, über welche, so weit es die bisher angestellten Versuche zulassen, im Folgenden kurz berichtet werden soll, ähnelt, sowohl der Farbe als dem Glanze des Lichtes nach, dem Leuchten des Phosphors. Die Aluminiumelektrode leuchtet auf der ganzen eingetauchten Oberfläche, die bei den verschiedenen Versuchen von einigen Quadratcentimetern bis 4 dm^2 variirte. Sind Kohle- und Aluminiumplatte parallel, so leuchtet die der Kohle zugewendete Fläche um weniges heller. Die Elektrodendistanz war bei allen Versuchen 1—1·5 *cm*. Die längs der Platte aufsteigenden Gasblasen bewirken, dass die Flüssigkeit sich stellenweise an der Platte hinaufzieht. An dem so entstehenden Flüssigkeitssaume tritt die Lichterscheinung besonders hell auf. Bei der ersten Beobachtung der Erscheinung

war die Zelle mit verdünnter Schwefelsäure von einem Concentrationsgrade, wie er gewöhnlich für Accumulatoren angewendet wird (15%), gefüllt. Gleich die ersten Versuche zeigten jedoch, dass der Concentrationsgrad die Erscheinung nur unwesentlich beeinflusst. Der verwendete Wechselstrom wurde dem Strassennetze der Internationalen Elektricitätsgesellschaft in Wien entnommen; die Periodenzahl desselben ist 41·7 pro Secunde. Die Zelle lag mit einem variablen Vorschaltwiderstande an 105 Volt. Wurde derselbe verkleinert, so stieg der Strom, und die Erscheinung wurde heller. Die ersten Beobachtungen erfolgten bei einer Stromdichte von ungefähr 0·15 Ampère pro Quadratcentimeter eingetauchter Aluminiumoberfläche. Hiebei hatte das Licht eine bläuliche Färbung. Die Spannung an der Zelle betrug 22 Volt. Bei weiter gesteigerter Stromdichte traten im Gegensatze zu diesem gleichmässigen Leuchten der ganzen Plattenoberfläche locale Lichterscheinungen in Form von kleinen, rasch verschwindenden Funken insbesondere an den Rändern der Platte und am Saume der Flüssigkeit auf. Bei fortgesetzter Erhöhung der Spannung an der Zelle durch Abschalten von Widerstand zeigten sich knatternde Lichtbogen, die an der Elektrode hin- und herwanderten. Drahtförmige Aluminiumelektroden waren an ihrer ganzen Oberfläche mit glänzenden, auch bei Tageslicht sichtbaren Lichtbogen bedeckt. Diese letztere Erscheinung tritt auch an anderen Metallen auf und wurde im Wechselstromkreise speciell von Lagrange und Hoho[1] beobachtet. Das zu Anfang beschriebene Verhalten des Aluminiums jedoch ist von dem anderer Metalle völlig abweichend. Während bei letzteren die Lichterscheinung mit Funkenbildung einsetzt, geht bei Aluminiumelektroden im Wechselstromkreise den Funken das eingangs beschriebene, gleichmässige und andauernde Leuchten der ganzen Elektrodenfläche voran. Auch beim Einschalten in einen Gleichstromkreis zeigen Aluminiumelektroden Lichterscheinungen, wie sie unter gleichen Verhältnissen bei anderen Metallen nicht auftreten.

---

[1] Lagrange und Hoho, Bulletin de l'Académie royale de Belgiques, 3 sér., XXII, 1891, p. 205.

Wird an Stelle der Kohleelektrode eine zweite Aluminiumelektrode verwendet, so treten an beiden Elektroden gleiche Erscheinungen auf.

2. An Stelle der verdünnten Schwefelsäure wurden auch andere Flüssigkeiten verwendet. In verdünnter Salzsäure (1:20) leuchteten Aluminiumelektroden hell und andauernd. Das Licht hatte einen röthlichen Stich.

Die Lichterscheinung zeigte sich auch in Lösungen von Kaliumhydroxyd, Natriumchlorid, Alaun oder Kupfersulfat. Wurde die bei diesen Versuchen benützte Zelle, bei welcher die eingetauchte Fläche jeder Elektrode 30 cm^2 war, mit einer Lösung von doppeltchromsaurem Kali gefüllt, so stellte sich bei der benützten Spannung von 100 Volt ein Strom von circa 0·1 Ampère ein. Trotz der geringen Stromdichte von circa 0·003 Ampère pro Quadratcentimeter zeigte sich eine deutliche Lichterscheinung, die von kleinen Funken am Flüssigkeitssaume begleitet war. Die Erscheinung verringerte sich, wenn die Zelle an 50 Volt gelegt wurde, so dass sie nur durch die Contrastwirkung zwischen an- und abgeschaltetem Strome beobachtbar war. Bei 200 Volt Spannung an der Zelle flossen 2 Ampère; die Lichterscheinung war hiebei so hell, dass in der Nähe der Elektroden eine Uhr abgelesen werden konnte.

Selbst in reinem Wiener Hochquellenwasser (Leitfähigkeit circa 200.10^{-10}) konnten Lichterscheinungen beobachtet werden. Die ersten Spuren traten bei einer Stromdichte von 0·0023 Ampère pro Quadratcentimeter auf; bei einer Stromdichte von 0·006 Ampère pro Quadratcentimeter eingetauchter Elektrodenfläche zeigte sich bereits eine deutliche Lichterscheinung an der inneren Plattenfläche und an den Rändern der äusseren, was vermuthen lässt, dass die Stromvertheilung an der Platte ungleichförmig war.

In gewöhnlichem destillirten Wasser treten die Lichterscheinungen schwächer, aber noch constatirbar auf.

3. Analoge Erscheinungen wie Elektroden aus Aluminium[1] zeigten solche aus Magnesium. Da sich dieses Metall in ver-

[1] Alle verwendeten Aluminiumbleche und -Drähte sind käufliches Material der Aluminium-Industrie-Actiengesellschaft in Neuhausen.

dünnter Schwefelsäure rasch löst, wurde die Beobachtung in verdünnter Salzsäure und Hochquellenwasser gemacht. Mit Metallen, die dem Aluminium oder Magnesium chemisch verwandt sind, konnten Beobachtungen noch nicht gemacht werden. Dagegen zeigten Eisen, Kupfer, Zink, Zinn, Platin, Kohle in keiner der besprochenen Flüssigkeiten unter gleichen Strom- und Spannungsverhältnissen jenes ruhige, gleichmässige Leuchten der ganzen Plattenoberfläche, wie es bei Aluminium und Magnesium beobachtet worden war.

4. Von Einfluss auf die Erscheinung ist auch die Temperatur der Zelle. Wenn dieselbe bei längerem Stromdurchgange steigt, so nimmt die Helligkeit des Leuchtens ab; bei der Siedetemperatur der Flüssigkeit ist keine Lichterscheinung zu beobachten. Auch bei so geringen Stromdichten, die nicht genügen, die Flüssigkeit wesentlich zu erwärmen, nimmt die Lichterscheinung ab, wenn von aussen erhitzt wird. Bei Abkühlung der Flüssigkeit tritt sie wieder auf.

5. Elektrolytische Zellen mit Aluminiumelektroden wurden auch in den Kreis einer Accumulatorenbatterie von circa 64 Volt Spannung eingeschaltet und zeigten, wenn man von nebensächlichen Umständen absieht, folgendes allgemeines Verhalten:

Eine reine Aluminiumplatte, als Anode in den Gleichstromkreis eingeschaltet, leuchtet auf und mit rasch abnehmender Intensität nach. Die Lichterscheinung gleicht sowohl ihrer Farbe, als ihrer Helligkeit nach der im Wechselstromkreise beobachteten und beschriebenen, nur ist sie von kurzer Dauer.

Eine reine Aluminiumplatte als Kathode in den Gleichstromkreis eingeschaltet, leuchtet n i c h t auf.

Eine Aluminiumplatte, die bereits Anode gewesen ist, zeigt als Kathode angeschaltet in verschiedenen Flüssigkeiten verschiedenes Verhalten. Sie leuchtet im Wasser und verdünnten Säuren auf und nach. Dagegen wurde in concentrirter Schwefelsäure, Salzsäure (Concentration über 1:80), dann in Lösungen von Kaliumhydroxyd, doppeltchromsaurem Kali, Alaun und Kupfersulfat ein Aufleuchten nicht beobachtet.

Das Verhältniss der Helligkeit des Aufleuchtens der Platte als Anode und Kathode ist unter Anderem durch den Concentrationsgrad bedingt. In reinem Wasser leuchtet die Anode

heller auf, in verdünnten Säuren die Kathode. Mit dem Unterbrechen des Stromes verschwindet augenblicklich jede Lichterscheinung.

Dieses, das Anschalten begleitende und dann rasch verschwindende Aufleuchten hat einen wesentlich anderen Charakter als diejenige Lichterscheinung, welche von Sloguinoff,[1] Colley,[2] Lagrange und Hoho[3] und Anderen beobachtet und von Koch und Wüllner[4] speciell an drahtförmigen Platinelektroden näher untersucht worden ist. Diese letztere Erscheinung, die sich übrigens auch an Aluminiumelektroden zeigt, hat folgenden Verlauf: Wird der der Zelle mit einer drahtförmigen Aluminiumelektrode vorgeschaltete Widerstand vermindert oder die elektromotorische Kraft des Stromkreises durch Vermehrung der Zellenzahl vergrössert, so treten an der Elektrode bei reichlicher Gasentwicklung und steigender Stromstärke Funken auf. Bei weiterer Verminderung des vorgeschalteten Widerstandes vereinigen sich die Funken zu einer die ganze Elektrode umgebenden Lichthülle; der Strom fällt, die Gasentwicklung hört auf. Dieser Zustand, der von einem pfeifenden Geräusch begleitet ist, dauert an.

6. Die Thatsache, dass beim Einschalten einer Zelle in den Gleichstromkreis ein Aufleuchten erfolgt, das trotz andauernden Stromdurchganges verschwindet, lässt vermuthen, dass die Lichterscheinung auch im Wechselstromkreise nicht während einer ganzen Periode gleichförmig andauernd sei. Um den periodischen Verlauf der Erscheinung verfolgen zu können, wurde ein stroboskopisches Verfahren angewendet. Auf die Axe eines Synchronmotors, der ebenfalls vom Strassennetze aus Strom erhielt und zwei Polpaare besass, wurde eine Scheibe S (siehe Fig. 1) aufgesetzt; hinter derselben stand die Zelle mit einer ringförmigen Elektrode e_1 und einer kreisförmigen Elektrode e_2. Die Stromzuführung erfolgte durch z_1 und z_2. Rotirt die Scheibe S, so sieht man durch die Schlitze l_1

---

[1] Sloguinoff, Journal de physique, 1e série, IX, 1880, p. 155.

[2] Colley, Journal de physique, 1e série, X, 1881, p. 419.

[3] Lagrange und Hoho, Bulletin de l'Academie royale de Belgique, 3e série, XXII, 1891, p. 205.

[4] K. R. Koch und A. Wüllner, Wied. Ann., 45, 1892, S. 475 und 759.

und l_2 die Theile der Elektrode e_1 in verschiedenen Zeitmomenten. Den zwei Polpaaren des Motors entsprechend rotirt die Scheibe mit der halben Synchrongeschwindigkeit, und der ganze sichtbar werdende Kreisring entspricht zwei vollen Perioden, so dass auf einem Halbkreisringe alle während einer Periode zeitlich einander folgenden Vorgänge nebeneinander sichtbar werden.

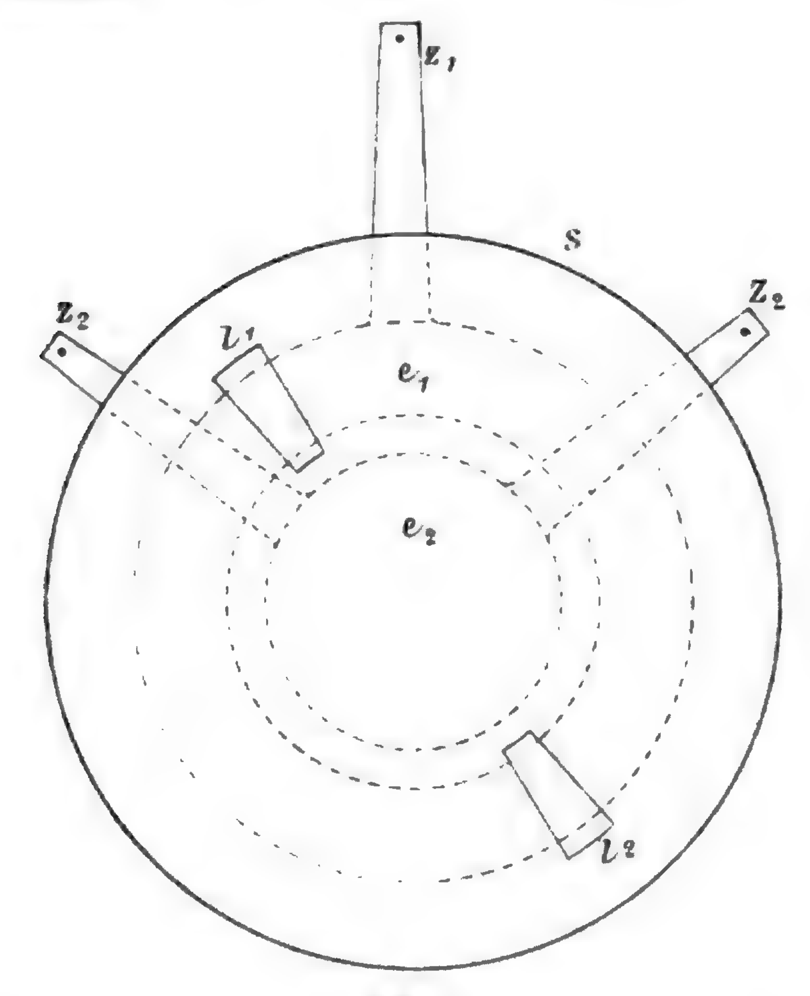


Fig. 1.

War die Zelle mit Hochquellenwasser gefüllt, so traten in jedem Halbkreis zwei helle Flecken (in Fig. 2: *a*, *b* und *a'*, *b'*) auf, welche durch dunkle Theile (*c*, *d* und *c'*, *d'*) getrennt erschienen. Die hellen Flecken waren von verschiedener Breite und Helligkeit, und zwar waren zwei diametral gegenüberliegende (*a*, *a'*) heller und schmäler als die beiden anderen. Alle hellen Theile gehen in die dunkeln allmälig über, was in der schematischen Fig. 2 nicht angedeutet ist. Aus der Zahl und Lage der Flecken ist zu entnehmen, dass die Platte in jeder Halbperiode einmal aufleuchtet. Im Zusammenhang mit dem bei Gleichstrom beobachteten stärkeren Aufleuchten der

Anode im Hochquellenwasser ist zu schliessen, dass auch das hellere Aufleuchten im Wechselstromkreise immer dann eintritt, wenn die Platte Anode wird.

Wird dem Hochquellenwasser auch nur eine geringe Menge Schwefelsäure (z. B. im Verhältniss 1 : 5000) zugesetzt, so wird *b* und *b'* heller als *a* und *a'*. Auch das entspricht der mit Gleichstrom in Zellen mit verdünnter Schwefelsäure gemachten Beobachtung, dass die Kathode werdende Platte heller aufleuchtet als die Anode werdende. Die Helligkeitsdifferenz ist bei verschiedenen Concentrationsgraden verschieden aus-

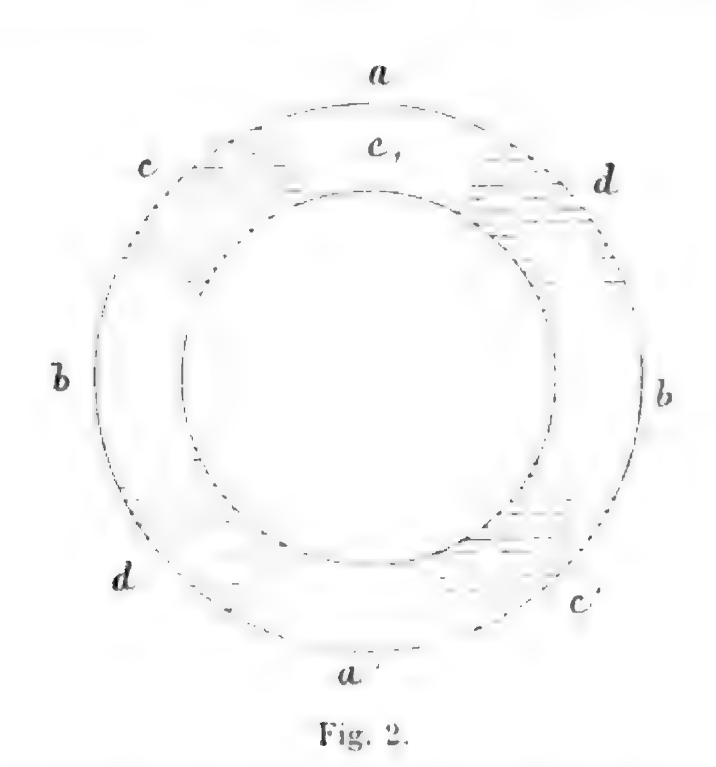


Fig. 2.

geprägt. In weiterer Übereinstimmung mit der bei Gleichstrom in Zellen mit doppeltchromsaurer Kali- oder Ätzkalilösung sich zeigenden Erscheinung, dass nämlich bloss die Anode werdende Elektrode aufleuchtet, wurde auch bei den stroboskopischen Versuchen im Wechselstromkreis in Zellen mit letztgenannten Flüssigkeiten nur ein einmaliges Aufleuchten in jeder ganzen Periode beobachtet.

Wurde in den Stromkreis der Zelle ein inductiver Widerstand eingeschaltet, so dass eine Verschiebung der Phase des Stromes gegen die der Scheibe eintrat, so wanderten die hellen Flecken um einen mit der Grösse der Phasenverschiebung wachsenden Winkel.

Das besondere Verhalten von Aluminium- und Magnesiumelektroden, welches darin besteht, in einen Gleichstromkreis eingeschaltet aufzuleuchten, im Wechselstromkreis dauernd zu leuchten, und zwar verschieden je nach der chemischen Beschaffenheit des Elektrolyten, macht es wahrscheinlich, dass der an diesen Elektroden stattfindende chemische Process die Veranlassung der Leuchterscheinung ist. Ob der Sitz derselben die sich bildenden Metalloxyde oder eine bei dem Vorgange entstehende Gasschichte ist, kann aus den bisherigen Versuchen nicht gefolgert werden.[1]

Für die Förderung, die uns unser hochverehrter Vorstand, Herr Hofrath Prof. Dr. A. v. Waltenhofen, zu Theil werden liess, sei ihm auch an dieser Stelle der wärmste Dank ausgesprochen.

[1] Während der Drucklegung dieser Arbeit werden wir darauf aufmerksam gemacht, dass diese Lichterscheinung auch schon von Herrn F. Braun in Strassburg beobachtet und in Wied. Ann. 1898, Bd. 65, S. 361 kurz beschrieben wurde.

Die theoretische Temperaturvertheilung auf Prof. Frech's Weltkarten der altpaläozoischen Zeit

von

Dr. **Fritz v. Kerner.**

Die folgenden Zeilen enthalten das Ergebniss einer Anwendung der Forbes'schen Temperaturformel auf die von Fritz Frech entworfenen Weltkarten der altpaläozoischen Zeit[1] und schliessen sich an die vor Jahren von mir gebrachte Mittheilung[2] an, welche die Anwendung der genannten Formel auf die Neumayr'sche Weltkarte der Jurazeit[3] betraf. Die Rechnung war auch diesmal nur als paläoklimatologisches Rechenexempel gedacht; auf die Vorstellung, dass die sich ergebenden Werthe zu Schlüssen über die zur altpaläozoischen Zeit thatsächlich vorhanden gewesenen Temperaturverhältnisse berechtigen könnten, wurde von vorneherein verzichtet.

Die Abmessung der Werthe für n geschah auch diesmal entlang den jetzigen Parallelkreisen, da, obwohl für die vorcarbonische Zeit das Vorhandensein einer der jetzigen analogen Pollage noch nicht dargethan wurde, kein Anhaltspunkt dafür vorliegt, nach welcher Richtung hin eine Drehung der Erdachse gegen ihre heutige Lage anzunehmen wäre. Dieser Umstand gestaltete die Rechnung zu der vom theoretischen Standpunkte aus ohnedies zunächst erwünschten reinen Ermittlung jenes Einflusses, den bestimmte Änderungen der

[1] Lethaea geognostica. 1. Theil: Lethaea palaeozoica. 2. Bd., 1. Liefg. Stuttgart, 1897.

[2] Eine paläoklimatologische Studie. Diese Sitzungsber., Aprilheft 1895.

[3] Die geogr. Verbreitung der Juraformation. Denkschriften der Wiener Akad. der Wissensch., L. Bd.

Festlandsvertheilung auf die Temperatur der Erdoberfläche ausüben würden, und lässt sie so als ein Gegenstück zu den nunmehr auch in Angriff genommenen Untersuchungen[1] erscheinen, welche die Feststellung jener klimatischen Consequenzen bezwecken, die eine bestimmte Verschiebung der Pole bei Bestand der jetzigen Land- und Wasservertheilung hätte.

Von einer Ausgleichung der durch die Abmessung erhaltenen Werthe von *n* wurde abgesehen. Die Rechnungen geschahen nach denselben Formeln und mit Einsetzung derselben Constanten wie das vorige Mal. Für die höheren Breiten der südlichen Halbkugel wurden die Temperaturen von Wasserparallelkreisen eingesetzt und die Temperaturen der vom 70. Breitengrade umschlossenen Calotten vernachlässigt.

Frech entwarf — abgesehen von einer in kleinerem Massstabe gehaltenen Skizze für das Untercambrium — je eine Karte für das Silur und Devon, von denen jede die muthmassliche ungefähre Festlandsvertheilung zu Beginn der Epoche und zur Zeit des Maximums der darauf gefolgten Transgression darstellt. Hiernach konnten die Werthe von *n* für folgende vier altpaläozoische Zeitabschnitte bestimmt werden:

I. Tieferes Unter-Silur.

II. Unteres Ober-Silur (II = I minus den Landmassen, welche von der am Ende des Unter-Silur begonnen habenden Transgression betroffen wurden).

III. Unter-Devon.

IV. Unteres Ober-Devon. (IV = III minus den Landmassen, welche von der mitteldevonischen Transgression betroffen wurden).

Die Ausmessung ergab folgende Werthe:

	φ	I	II	III	IV
N.	70	0·52	0·26	0·88	0·73
	60	0·30	0·22	0·87	0·51
	50	0·21	0·13	0·45	0·22
	40	0·18	0·15	0·46	0·12

[1] Wm. M. Davis, Topographical records of changing climates. American Met. Journal, April 1896, Vol. XII.

φ	I	II	III	IV
30	0·33	0·30	0·51	0·37
20	0·41	0·36	0·57	0·52
10	0·58	0·50	0·49	0·48
0	0·59	0·54	0·53	0·53
S. 10	0·59	0·59	0·51	0·51
20	0·51	0·51	0·47	0·43
30	0·26	0·26	0·19	0·18
40	0·19	0·16	0·08	0·08
50	0·00	0·00	0·03	0·03

Als mittlere Parallelkreistemperaturen ergaben sich folgende Werthe:

φ	I	II	III	IV
N. 70	— 9·5	— 5·6	—14·8	—12·6
60	— 0·1	0·7	— 5·6	— 2·1
50	7·0	7·3	6·2	7·0
40	12·9	12·8	13·9	12·7
30	19·5	19·2	21·2	19·9
20	25·6	24·8	27·9	27·2
10	32·1	30·6	30·4	30·2
0	33·6	32·6	32·4	32·4
S. 10	32·2	32·2	30·8	30·8
20	27·0	27·0	26·5	25·9
30	18·8	18·8	18·1	18·0
40	12·9	12·8	12·6	12·6
50	7·7	7·7	7·6	7·6

Als mittlere Hemisphärentemperaturen erhielt ich:

	I	II	III	IV
N.	17·7	17·4	17·6	17·2
S.	18·4	18·3	17·8	17·7

Für die Neumayr'sche Karte der Jurazeit hatte ich erhalten für die Nordhemisphäre 17·0, für die Südhemisphäre 18·4. Für die Jetztzeit ergibt sich im Mittel aus den in Hann's Klimatologie (S. 202) angeführten Berechnungen für beide Hemisphären 15·3.

Entsprechend der Analogie, welche die Frech'schen Karten mit der Neumayr'schen Karte in Bezug auf die Landentwicklung in der Tropenzone aufweisen (Bestand eines indo-afrikanischen Continents), ergeben sich auch für diese Karten Hemisphärentemperaturen, welche die jetzigen um zwei bis drei Grade übersteigen. Dagegen fallen die Temperaturdifferenzen zwischen der Nord- und Südhemisphäre durchwegs geringer aus als die Differenz, welche sich für die Neumayr'sche Karte ergab. Frech's Weltkarte des Unter-Devon erweist sich als ein Fall von Festlandsvertheilung, aus welchem — analog der Jetztzeit — für beide Halbkugeln nahezu gleiche Temperaturen resultiren. Die ziemliche Übereinstimmung der Temperaturen der Nordhemisphäre für das Unter- und Ober-Devon ist ein instructives Beispiel für die Unabhängigkeit der mittleren Hemisphärentemperatur vom Betrage der Landbedeckung in den mittleren Breiten; die nahe Übereinstimmung zwischen den Temperaturen der nördlichen Halbkugel für das Ober-Silur und Unter-Devon ist ein ebenso deutliches Beispiel für die Compensation, welche der erkaltende Einfluss bedeutender Landentwicklung in höheren Breiten durch die relativ geringe Flächenausdehnung der subarctischen Zone erfährt.

VIII. SITZUNG VOM 9. MÄRZ 1899.

Der Vorstand des österreichischen Ingenieur- und Architecten-Vereines übersendet zwei Eintrittskarten zu der am 18. März l. J. stattfindenden Festsitzung zur Feier des 50jährigen Bestandes dieses Vereines.

Der Ausschuss des Deutsch-akademischen Lesevereines in Brünn dankt für die bewilligte Betheilung mit dem akademischen Anzeiger.

Herr Dr. Theodor Pintner in Wien dankt für die ihm bewilligte Reisesubvention zum Zwecke von zoologischen Studien in Neapel und Messina.

Herr Dr. Carl Camillo Schneider in Wien spricht seinen Dank aus für die Bewilligung einer Reisesubvention zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über die Hydropolypenfauna der Adria.

Das c. M. Herr Professor Dr. L. Gegenbauer in Wien übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Über transcendente Functionen, deren sämmtliche Wurzeln transcendente Zahlen sind«.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der deutschen Universität Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Hans Meyer: »Über die Constitution des Phenolphtaleïns«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Prof. J. Klemenčič in Innsbruck: »Über die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten des permanenten Magnetismus von den Dimensionsverhältnissen des Magneten«.

Das w. M. Herr Prof. F. Exner überreicht folgende Abhandlungen:

»Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität II. Messungen des Potentialgefälles in Sibirien«, von Dr. Hans Benndorf in Wien.

»Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität III. Luftelektricitäts-Messungen im Luftballon«, von Dr. Josef Tuma.

»Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität IV. Über eine während der totalen Sonnenfinsterniss vom 22. Jänner 1898 ausgeführte Messung der atmosphärischen Elektricität«, von Dr. Rud. Ludwig.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Herr Eduard Mazelle, übersendet einen Bericht über die am Horizontalpendel zu Triest beobachteten Erdbebenstörungen für den Monat Februar 1899.

Herr Dr. André Daniel-Bek in St. Petersburg übersendet eine Mittheilung bezüglich einer von ihm demnächst zur Veröffentlichung kommenden Milch- und Abmagerungscur.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Reinhold A. E.: Nature vs. Drugs. A challenge to the drugging fraternity. London. 8°.

Dufet H.: Recueil de données numériques publié par la société française de physique. Optique. Deuxième fascicule. Paris, 1899; 8°.

Socolow L.: Corrélations régulières du système planétaire avec l'indication des orbites des planètes inconnues jusqu'ici.

Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität III.

Luftelektricitätsmessungen im Luftballon

von

Dr. **Josef Tuma**,

Privatdocent an der k. k. Universität und Technik in Wien

(Mit 9 Textfiguren.)

Schon die ersten Beobachtungen Franklin's in der Mitte des vorigen Jahrhunderts zeigten, dass nicht nur während eines Gewitters, sondern auch bei heiterem Wetter elektrische Ladungen aus der Atmosphäre abgeleitet werden können. Weiters erkannte man, dass sich die beobachteten Erscheinungen nur durch die Annahme erklären lassen, dass die Erdoberfläche Sitz einer im Allgemeinen negativen elektrischen Ladung (Erman-Peltier) ist und dass sich weitere Ladungen in der Atmosphäre vorfinden.

Die herrschenden Theorien zerfallen in zwei Gruppen.

Nach den Theorien der einen Gruppe ist die Erde mit einem Überschuss an freier negativer Elektricität behaftet und hat somit ein Potential, das von dem des Weltraumes verschieden ist. Die Änderungen des Potentialgefälles über der Erde müssen dem Übergehen der negativen Erdladung in die Atmosphäre zugeschrieben werden.

Entsprechend der zweiten Gruppe wird keine dauernde Gesammtladung der Erde und ihrer Atmosphäre vorausgesetzt, sondern angenommen, dass an der Erdoberfläche in Folge eines mechanischen oder chemischen Vorganges eine Elektricitätstrennung stattfindet, so dass die eine Elektricitätsart auf der Erde verbleibt, während die andere in die Atmosphäre

gelangt. Da hierbei nur gleiche Mengen beider Elektricitätsarten frei werden, braucht man nach diesen Theorien das Gesammtpotential der Erde mit ihrer Atmosphäre auf einen Punkt im Weltraume nicht als von Null verschieden anzunehmen.

Zur ersten Gruppe gehört die Erman-Peltier-Exner'sche Theorie, nach welcher die Erde eine negative Ladung besitzt, die theilweise vom aufsteigenden Wasserdampfe mitgenommen wird. Daher gehört auch die Theorie von Elster und Geitel, der zu Folge die ultravioletten Sonnenstrahlen eine Convection der negativen Erdladung in die Atmosphäre herbeiführen.

Zur zweiten Gruppe gehört z. B. die alte Volta'sche Theorie, nach welcher der Verdampfungsprocess mit einer Elektricitätstrennung verbunden ist, so dass positive Elektricität mit dem Wasserdampf aufsteigt, negative dagegen zurückbleibt.

Hierher gehört auch jede andere Theorie, bei welcher die Elektricitätserzeugung durch Reibung, sei es der Luft an der Erde, sei es von Eiskrystallen an Luft (Sohncke und Luvini) u. s. w., erklärt wird. Auch die von le Cadet[1] in neuester Zeit aufgestellte Theorie, dass die Bildung der Kohlensäure mit einer Elektricitätstrennung verbunden ist, so dass die Kohlensäure positiv wird und, in die Atmosphäre gelangt, das Potentialgefälle über der Erde beeinflusst, gehört in die zweite Gruppe.

Man sieht übrigens aus den wenigen hier hervorgehobenen Theorien, dass bei allen ein Übergang der Elektricität von der Erde in die Atmosphäre angenommen werden muss. Dies ist auch bei der Theorie von Lord Kelvin[2] der Fall, welcher in jener Grenzschichte der Atmosphäre, in der die Luft ihrer starken Verdünnung wegen bereits leitend ist, eine ausgleichende Ladung annimmt, so dass nach dieser Theorie die Ladung an der Erdoberfläche mit jener an der Grenze der Atmosphäre zusammen ein Potential Null für äussere Punkte liefert. Wenn nämlich auch eine solche Ladung an der Grenze

---

[1] G. le Cadet, Étude du champ électrique de l'atmosphère. Ann. de l'université de Lyon, XXXV.

[2] W. Thomson, Reprints of papers, §. 281, p. 218.

der Atmosphäre vorhanden wäre, so könnten wir uns doch niemals von ihrer Existenz überzeugen, da sie uns nur über den wahren Werth des Potentiales des Weltraumes um eine übrigens constante Grösse täuschen würde, die sich auf keine Weise ermitteln lässt, so lange man nicht ausserhalb dieser Schichte gelangen kann.

Die von uns beobachteten Variationen des Gefälles nahe der Erdoberfläche würden also auch in diesem Falle von Elektricitätsmengen herrühren, welche von der Erdoberfläche aufsteigen und sich in Höhenschichten befinden, die gegenüber jener Grenzschichte wohl nur sehr niedrig sein würden.

Nachdem durch Messungen, welche bereits von vielen Beobachtern angestellt wurden, nachgewiesen ist, dass an freien Stellen der Erdoberfläche bei normalem Wetter eine negative Ladung vorhanden ist, und dass das Potentialgefälle über der Erde mancherlei zum Theile periodischen Änderungen unterliegt, geht die Frage dahin, was die Ursache dieser Änderungen sein mag.

F. Exner,[1] der Begründer der heutigen systematischen Forschung auf luftelektrischem Gebiete, welchem wir auch, wie bekannt, die Construction der für Ausführung luftelektrischer Messungen so zweckdienlichen Apparate verdanken, hat bisher vorwiegend für die Theorie, welche auf Convection durch den aufsteigenden Wasserdampf beruht, Stellung genommen. Er hat versucht, durch Messungen an verschiedenen Orten, in unseren Breiten, in Ägypten, Indien und zuletzt auch in Sibirien, also an Orten mit sehr verschiedenem Feuchtigkeitsgehalte der Luft, nachzuweisen, dass wirklich der Wasserdampf in der Atmosphäre die Variation des Potentialgefälles herbeiführt.

F. Exner gebührt auch das Verdienst, zuerst darauf hingewiesen zu haben, dass man durch Untersuchung der Änderung des Potentialgefälles mit der Höhe über der Erde die Raumdichte der in der Atmosphäre vertheilten elektrischen Massen bestimmen kann, sowie die Methode angegeben zu haben, nach der Potentialgefälle in beliebiger Höhe über der

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 93 (1886), Bd. 96 (1887), Bd. 97 (1888).

Erde unter Benützung eines freifliegenden Ballons gemessen werden können.

Wie sich aus dem Folgenden ersehen lassen wird, unterliegen zwar die einzelnen Messungen im Ballon vielfach localen Störungen. Nichtsdestoweniger wird man durch Anstellung sehr vieler Beobachtungen endlich ein klares Bild von der Vertheilung der elektrischen Ladungen erhalten. Erst wenn diese vollkommen ermittelt ist, wird man nach meiner Meinung zu erkennen in der Lage sein, an welche Körper in der Atmosphäre die Ladungen gebunden sind.

Die erste Ballonfahrt, welche überhaupt zum Zwecke luftelektrischer Messungen stattfand, wurde von Dr. Lecher in Wien im Jahre 1885 auf Veranlassung Prof. Exner's unternommen. Die zweite Fahrt machte ich im Jahre 1892. Hierauf folgte eine grössere Reihe von Ballonfahrten zu vorliegendem Zwecke. Ausser auf die unten beschriebenen acht von mir ausgeführten Fahrten verweise ich noch besonders auf die Fahrten von Börnstein,[1] sowie von André und le Cadet[2] hin.

Gemessen wurde in allen Fällen nach der von F. Exner vorgeschlagenen Methode, die bekanntermassen darin besteht, dass das Gehäuse und die Blättchen eines Elektroskopes mit je einem Collector verbunden werden, wobei die Collectoren unterhalb der Gondel in passender Höhendifferenz aufgehängt sind. Die am Elektroskop erhaltene Ablesung dividirt durch die Höhendifferenz (Meter) der Collectoren ist das Potentialgefälle (pro 1 Meter).

Die Ausführung meiner Fahrten wurde mir durch ein Übereinkommen der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften mit dem hohen k. u. k. Reichskriegsministerium ermöglicht, wornach mir zuerst die Theilnahme an den Captiv- und Freifahrten des k. u. k. militäraëronautischen Curses gestattet wurde. Später, im Jahre 1898, vollführte ich vier Fahrten, ebenfalls mit Benützung der Ballons des genannten Institutes, deren Kosten von der kaiserl. Akademie bestritten wurden.

[1] Verhandlungen der physikal. Gesellsch. Berlin, Jahrg. 13, Nr. 2.

[2] L. c.

Die mir so ausgiebig zu Theil gewordene Unterstützung bei meinen Forschungen auf dem Gebiete der Luftelektricität veranlasst mich, der kaiserlichen Akademie, sowie dem hohen k. u. k. Reichskriegsministerium meinen tiefgefühlten Dank auszusprechen.

Es sei mir nun zunächst gestattet, mit wenigen Worten auf meine erste Ballonfahrt, die am 15. September 1892 stattfand und deren Ergebnisse damals in diesen Sitzungsberichten[1] veröffentlicht wurden, zurückzukommen.

Ich verwendete damals zwei Wassercollectoren, welche aus an Schnüren hängenden Blechgefässen bestanden. Behufs Füllung der Collectoren liess ich das Wasser an den Schnüren herabrinnen und benützte die feuchten Schnüre als Zuleitungen zu einem Exner'schen Elektroskope. Die erhaltenen Ablesungen waren so klein, dass sie noch in den ungünstigen Messbereich des Elektroskopes fielen und die Werthe vielfach durch Schätzung von Bruchtheilen von Millimetern gewonnen wurden. So erhielt ich für das grösste gemessene Gefälle von circa 140 Volt pro 2 *m* Höhendifferenz der Collectoren nur circa 6 *mm* Ausschlag am Elektroskope, dessen günstiger Messbereich bedeutend höher war. Ich wählte aber ein solches Instrument für diese Fahrt, weil ich in Folge der früheren Messung Lecher's, welcher in circa 500 *m* Höhe 193 Volt constatirte und nach den Berechnungen Exner's auf sehr hohe Potentialdifferenzen gefasst war. Damals schrieb ich die Kleinheit der erhaltenen Ablesungen Verlusten durch Ausstrahlung der Ladung aus den feinen Fasern der Schnüre zu, an denen die Collectoren hingen. Heute ist mir nach meinen späteren Messungen sehr wohl bekannt, dass Spannungsdifferenzen von 40—60 Volt pro Meter in ungefähr 1000 *m* Höhe allem Anscheine nach normal sind.

Weiters zog ich aus dem Anwachsen der abgelesenen Potentialdifferenzen in einem Höhenbereiche von 410—1900 *m* den Schluss, dass wirklich der Exner'schen Formel entsprechend das Gefälle mit wachsender Höhe grösser wird. Nach dieser Formel hätten die Potentialdiffenzen pro Meter im erwähnten

---

[1] Diese Sitzungsber., 1892, S. 1556.

Höhenbezirke von 300 Volt auf 750 Volt steigen sollen. Die von mir ermittelten Werthe betrugen 40 Volt bis 70 Volt. Da ich, wie bemerkt, diese Kleinheit auf Rechnung der Spitzenausstrahlung schob und da ich vermuthete, dass die Ablesungen um einen constanten Factor zu klein seien, multiplicirte ich jeden Werth mit 9·24. Die corrigirten Werthe steigen dann von 370 Volt auf 647 Volt. Nun sieht man, dass auch ihrem relativen Grössenverhältnisse nach die von mir gefundenen Potentialdifferenzen langsamer ansteigen, als es der Exner'schen Formel entsprechend ist. Diese Thatsache schien mir durch die constatirte Gleichförmigkeit des Dunstdruckes erklärt.

Heute glaube ich nicht, dass die Spitzenausstrahlung oder ein Fehler an meinen Apparaten an dem Erfolg meiner Messungen schuldtragend war, sondern dass wirklich in den von mir bei dieser ersten Fahrt erreichten Höhen die gemessenen Gefälle vorhanden waren. Inwieweit der scheinbare Anstieg der Gefälle mit der Höhe thatsächlich vorhanden war oder nur durch locale Verhältnisse oder die zeitliche Änderung zustandekam, lässt sich nicht angeben.

Le Cadet[1] hat, wie eingangs erwähnt, die Theorie aufgestellt, es entweiche bei jedem Verbrennungsprocesse die Kohlensäure mit positiver Ladung. Er betrachtet sie als den hauptsächlichen Träger von Elektricität in der Atmosphäre und leitet daraus, dass dieses schwere Gas ein vorwiegender Bestandtheil der unteren Luftschichten sei, die Ursache des, wie heute erwiesen, mit wachsender Höhe kleiner werdenden Gefälles ab. Le Cadet bringt diese Theorie mit meinen Messungen vom Jahre 1892 durch die Annahme in Einklang, es sei die positiv geladene Kohlensäureschichte am Tage meiner Fahrt vorwiegend in grösseren Höhen ausgebreitet gewesen, so dass ich mich immer unter derselben befunden habe.

Es ist wohl klar, dass, wenn die in der Atmosphäre angehäuften elektrischen Massen vorwiegend positives Vorzeichen haben, die von mir erhaltenen Resultate nur in der von Le Cadet erwähnten Weise zu erklären sind. Ob aber gerade die Kohlensäure der Elektricitätsträger ist, kann natürlich daraus nicht

[1] L. c.

gefolgert werden, sondern werden eben, wie Le Cadet betont, meine Messungen nur durch einen Ausnahmszustand in der Atmosphäre erklärt.

Übrigens sind nahe übereinanderliegende Schichten der Atmosphäre verschiedener Ladung wiederholt constatirt worden. So z. B. berichtet Lemström[1] von einer positiv geladenen Luftschichte, welche er im Jahre 1886 zu Kultala einige Meter über dem Erdboden constatirt zu haben behauptet. Allerdings wendete er die sehr ungenaue Art der Beobachtung der Spitzenausstrahlung an, und dürfte diesen Bestimmungen daher kein allzugrosser wissenschaftlicher Werth beizumessen sein.

Mehr Beachtung finden wohl die von F. Exner mit Flammencollectoren gelegentlich seiner Messungen im Alpengebiete, in St. Gilgen, gemachten Wahrnehmungen, dass sich mitunter an den reinsten und wolkenlosesten Tagen merkwürdiger Weise fast regelmässig kurz vor Sonnenuntergang momentane, ungefähr 5 Minuten lang andauernde Maxima des Gefälles zeigen, die oft ein zweiter, wenige hundert Meter entfernter Beobachter nicht constatiren kann. Diese Maxima können wohl nur durch ganz kleine, vorüberziehende Massen positiv elektrisch geladener Luft erklärt werden.

Einmal hat F. Exner, wie er mir mittheilte, bei Luxor in Ägypten eine ungefähr eine halbe Stunde dauernde merkwürdige Erscheinung constatirt. Er erhielt, als er seinen Flammencollector auf den ungefähr 1·5 *m* hohen, isolirenden Stock befestigt hatte, ein verkehrtes Gefälle, d. h. es war im Gegensatze zu dem normalen Zustand ein höherer Punkt negativ gegen die Erde. Dagegen wurde das Gefälle normal, wenn er den Stock in die Höhe hielt, so dass die Flamme ungefähr 2·5 *m* über der Erde war.

Es musste also unmittelbar über der Erde eine dünne, sehr stark geladene Luftschichte gewesen sein.

Programm.

Die Aufgabe, welche ich mir bei meinen weiteren luftelektrischen Untersuchungen stellte, umfasste folgende Punkte:

---

[1] Le Cadet, l. c. p. 71.

1. Einrichtung einer allen Bedürfnissen entsprechenden Versuchsanordnung.

2. Bestimmung der Änderung des Potentialgefälles mit der Höhe.

3. Untersuchungen über die eventuelle Ladung des Ballons.

Es wurde nämlich die Frage aufgeworfen, ob nicht der Ballon selbst die Messungen störende Ladungen mit sich führe. Dies ist nicht nur von vornherein sehr wahrscheinlich, sondern scheint auch in Folge der wiederholt vorgekommenen Brände von Ballons, welche angeblich durch überspringende elektrische Funken hervorgerufen wurden, durch die Beobachtung bestätigt. Börnstein[1] machte den Vorschlag, es sollen drei Collectoren angewandt werden, so dass die Höhendifferenz zwischen dem zweiten und ersten gleich jener zwischen dem dritten und zweiten ist. Weiters sei zwischen dem ersten und zweiten Collector, sowie zwischen diesen und dem dritten je ein Elektroskop einzuschalten. Bei dem geringen Höhenunterschiede der drei Collectoren gegenüber der Höhe über der Erde müssen die Angaben der Elektroskope gleich sein, wenn sich auf dem Ballon keine störende Ladung befindet. Ist aber eine solche vorhanden, so lässt sich ihre Grösse aus dem dann eintretenden Unterschiede zwischen den beiden Ablesungen schätzen.

Dieses Mittel der Beobachtung einer eventuellen Ballonladung schien mir noch nicht sicher genug, denn es ist möglich, dass der Ballon ein störendes Potentialgefälle hervorbringt, welches sich innerhalb der engen Grenzen von zwei Elektrodendistanzen zu wenig ändert, um bemerkt zu werden. Daher zog ich es vor, zwei Ablesungen bei grösserer Verschiedenheit der Tiefe unter dem Ballon zu machen, und erreichte dies dadurch, dass ich bei meiner fünften Fahrt die Collectoren in zwei verschiedenen Tiefen verwenden konnte, während ich bei den späteren drei Fahrten zwei Paare von Collectoren verwendete.

Vorversuche.

Indem ich schon nach meiner ersten Fahrt die Absicht hatte, zum Zwecke luftelektrischer Messungen noch mehrere

[1] Wied. Ann. 1897, Bd. 62, S. 680.

Aufstiege zu unternehmen, widmete ich mich zunächst einer grösseren Reihe von Vorversuchen. Dieselben wurden theils im physikalischen Institute der Universität, theils am Platze des militär-aëronautischen Curses beim Arsenal in Wien vorgenommen. An letzterem Orte machte ich behufs Erprobung meiner Apparate eine grosse Zahl von Captivaufstiegen.

Die Vorversuche betrafen:

1. Die Untersuchung der Ausstrahlungserscheinungen aus verschiedenen als Zuleitungen von den Collectoren zum Elektroskope dienenden Leitungsmaterialien.

2. Die Vergleichung verschiedener Systeme von Collectoren.

3. Die günstigste Versuchsanordnung.

1. Ausstrahlungsversuche.

Es sei ein verticaler Leiter von der Länge l in einem elektrostatischen Felde gespannt, so dass das obere Ende sich in einer Niveaufläche vom Potentiale 0 befindet. Das Potentialgefälle sei linear, so dass x Meter unter dem oberen Leiterende das Potential $V-x.\delta V$ herrsche. Am unteren Ende ist also eine Niveaufläche vom Potentiale $V_1 = -l.\delta V$. $-\varkappa_1(V_1-v)$ sei die in der Zeiteinheit durch den Collector zugeführte Elektricitätsmenge.

$$-\int_0^l \varkappa_2(V-v).dx$$

sei die durch Ausstrahlung zugeführte Elektricität. Es ergibt sich die Gleichung für den stationären Zustand

$$\varkappa_1(V_1-v)+\varkappa_2\int_0^l (V-v)dx = 0;$$

v ist das Potential des Leiters.

Man erhält

$$v = -\frac{2\alpha+l}{\alpha+l}\cdot\frac{l}{2}.\delta V,$$

wenn α das Verhältniss $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$ bedeutet.

Der durch Ausstrahlung zustandekommende Fehler ist also:

$$-l\delta V + \frac{2\alpha+l}{\alpha+l}\,\frac{l}{2}\,\delta V = -\frac{l}{2(\alpha+l)}\,.\,l\delta V = \frac{l}{2\alpha+l}\,v.$$

Sind zwei Collectoren vorhanden, deren um ε Meter längerer auf das Potential v' geladen wird, so ist die gemessene Differenz

$$v - v' = \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\alpha+l)^2}\right) \cdot \frac{\varepsilon\,.\,\delta V}{2}.$$

Zur Berechnung der Zeitdauer bis zur Erreichung eines bestimmten Bruchtheiles der vollen Ladung führt die Gleichung

$$-C\frac{dv}{dt} = -\varkappa_1(V_1 - v) + \varkappa_2 \int_0^l (V - v)\,.\,dx,$$

wobei C die Capacität des verticalen Leiters und der mit ihm verbundenen Apparate bedeutet.

Ist zu Beginn der Beobachtung das Potential des Leiters Null, so folgt für jenes zur Zeit t der Werth aus der Gleichung

$$-\frac{1}{C}\,t = \frac{1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 l} \log \text{nat} \frac{\left(\varkappa_1 + \varkappa_2 \frac{l}{2}\right) l\,.\,\delta V + (\varkappa_1 + \varkappa_2 l)\,v}{\left(\varkappa_1 + \varkappa_2 \frac{l}{2}\right) l\,.\,\delta V}.$$

Der m^{te} Theil der vollen Ladung, d. i.

$$-\frac{1}{m}\,\frac{2\alpha+l}{\alpha+l}\,\frac{l}{2}\,\delta V,$$

wird somit erreicht nach der Zeit

$$T_{\frac{1}{m}} = -C\frac{\log \text{nat}\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{\varkappa_1 + \varkappa_2 l}.$$

Von den beiden Coëfficienten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ist derjenige der Ladungsgeschwindigkeit $\varkappa_1$ constant, wenn man z. B. Wassercollectoren anwendet, so lange nicht etwa durch in die Ausflussspitze eindringenden Sand oder sonstige Unreinheiten eine theilweise Verstopfung herbeigeführt wird. Es kann also $\varkappa_1$ von vornherein experimentell bestimmt werden.

Der je nach den momentanen Einflüssen veränderliche Coëfficient $\varkappa_2$ kann aus dem Verhältnisse der zwischen zwei Collectoren mit der Längendifferenz ε nach Ablauf einer Zeit T und der nach Eintritt des stationären Zustandes abgelesenen Potentialdifferenz ermittelt werden. Dabei ist vorausgesetzt, dass beide Collectoren zu Anfang der Beobachtung auf einem gleichen Potentiale waren, z. B. auf jenem, das in der Umgebung des oberen Endes der Leiter zu den Collectoren herrscht und das in der bisherigen Rechnung mit 0 bezeichnet wurde. Man kann dies durch Anwendung eines dritten Collectors erreichen, der in unmittelbarer Nähe der oberen Enden angebracht wird und vor Beginn der Beobachtung mit den beiden anderen Collectoren verbunden ist. Sobald die Ladung der letzteren auf das oben mit Null bezeichnete Potential erreicht ist, wird die Verbindung gelöst und der wachsende Ausschlag a des Elektroskopes nach der Zeit t und A nach Eintritt der stationären Einstellung notirt.

Die letzte Gleichung gibt

$$\frac{1}{m} = 1 - e^{-\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 l}{C} t},$$

folglich, da

$$v = -\frac{2\alpha + l}{\alpha + l} \frac{l}{2} \delta V$$

die stationäre Ladung darstellt,

$$v_t = -\frac{2\alpha + l}{\alpha + l} \frac{l}{2} \delta V \left(1 - e^{-\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 l}{C} t}\right).$$

Für den Collector von der Länge $l + \varepsilon$ erhalten wir

$$v'_t = v_t + \frac{\partial v_t}{\partial l} \varepsilon.$$

Somit

$$a = v_t - v'_t = -\frac{\partial v_t}{\partial l} \varepsilon$$

oder

$$a = \left[1 + \frac{\alpha^3}{(\alpha + l)^2} - \frac{\alpha^2 + (\alpha + l)^2 \quad (\alpha + l)(2\alpha l + l^2) \frac{\varkappa_2 t}{C}}{(\alpha + l)^2} e^{-\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 l}{C} t}\right] \varepsilon \cdot \frac{\delta V}{2}.$$

Setzen wir voraus, dass $\varkappa_2$, wenn auch nicht ganz zu vernachlässigen, doch gegen $\varkappa$ sehr klein, die Capacität C genügend gross sei, so kann der Ausdruck durch Vernachlässigung reducirt werden auf

$$a = \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\alpha + l)^2}\right)\left(1 - e^{-\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 l}{C} t}\right) \frac{\varepsilon . \delta V}{2}.$$

Im stationären Zustand erhält man nach Obigem

$$A = \left(1 + \frac{\alpha^2}{(\alpha + l)^2}\right) \frac{\varepsilon . \delta V}{2}.$$

Folglich

$$\frac{a}{A} = 1 - e^{-\frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 l}{C} t},$$

woraus $\varkappa_2$ gefunden werden kann, ohne dass δV bekannt zu sein braucht. Dieses wird erst nach Ermittelung von $\varkappa_2$ aus A berechnet.

Ich habe schon vor vier Jahren im Captivballone nach dieser Methode Messungen ausgeführt, glaube aber, dass es genügt, hier anzuführen, dass ich immer einen verschwindenden Werth von $\varkappa_2$ gegen $\varkappa_1$ constatirte, wenn nicht Störungen eintraten. Solche Störungen treten bei Messungen im Fesselballon zunächst ein, wenn die Collectoren zu nahe an das Seil kommen, welches den Ballon hält. Steigt man aber mit einem Ballon von mässiger Tragfähigkeit bei einigermassen stärkerem Winde auf, so dass das Fesselseil eine sehr schiefe Stellung einnimmt, so gelingt es wohl, in genügend grosse Entfernung vom Seile zu kommen, so dass namentlich bei diesem Versuche die Störung vermieden wird.

Eine andere Störung, die bei weitem fühlbarer ist, brachte der Rauch aus Fabrikschornsteinen, die sich in der Nähe des Ballonplatzes befinden, mit sich. Es hat da den Anschein, als ob dieser Rauch elektrische Ladung an die Collectoren direct abgeben würde. Da nämlich durch obenerwähnte Versuche, sowie noch durch die weiter unten zu beschreibenden mit ziemlicher Sicherheit nachgewiesen erscheint, dass die Ausstrahlung

keine grosse Rolle spielt, ist es verwunderlich, dass an manchen Tagen sich bei nicht functionirenden Collectoren dauernde Ladungen einstellten, während durch vorüberziehenden geladenen Rauch in Folge von Influenzwirkungen entstehende Elektroskopausschläge viel veränderlicher sein mussten.

Eine andere Art der Beobachtung der Ausstrahlung bestand darin, dass die Leiter auf Isolatoren horizontal ausgespannt wurden. Sie wurden dann mit einer Säule auf circa bis 300 Volt geladen und die Dauer der Abnahme der Ladung bestimmt. Diese Beobachtungsmethode, wiewohl einfacher als die oben beschriebene, hat den Nachtheil, dass man nicht an Ort und Stelle, etwa während der Fahrt, den Werth von $\varkappa_2$ bestimmen kann und dass man ihn auch nicht in seiner Beziehung zu jenem von $\varkappa_1$ erhält. Doch habe ich solche Versuche sehr vielfach angestellt und kam zu dem Resultat, dass bei allen Leitern im Schatten bei einer Länge von circa 30 *m* keine Ausstrahlung zu beobachten war. Ebenso war keine solche im Sonnenschein zu bemerken bei lackirten oder mit Wachsumhüllung oder mit Guttapercha isolirten Drähten. Blanke, namentlich gut abgeschmirgelte Drähte zeigten im Sonnenscheine, namentlich bei negativer Ladung, eine deutliche Ausstrahlung. Feuchte Leiter zeigten auch eine Entladung, jedoch in geringerem Maasse als blanke Drähte.

Noch einen Versuch, den ich bei hellem Sonnenschein an einem kalten Wintertag anstellte, will ich erwähnen. Ich machte in Wien Versuche mit drahtloser Telegraphie und hatte einen Empfangsdraht für die elektrodynamischen Wellen an einem Thurme der Votivkirche angebracht. Das obere Ende dieses circa 30 *m* langen Drahtes (unübersponnener Kupferdraht) war an einem etwa 4 *m* weit von der Mauer des Thurmes hinausragendem, an dem höchsten erreichbaren Punkte befestigten Bambusrohre sehr gut isolirt befestigt. Ich bestimmte das in der Umgebung des oberen Drahtendes herrschende Potential gegen Erde mittelst eines Flammencollectors und las auf einem Braun'schen Elektroskope circa $+1200$ Volt ab. Ich verband dann den Draht mit einem Elektroskop und untersuchte, ob der unten vorher mit der Erde verbunden gewesene, also negativ geladene Draht seine Ladung ändere. Es zeigte sich

während 3 Minuten kein Ausschlag der Blättchen. Also war keine merkbare Ausstrahlung vorhanden.

2. Verschiedene Systeme von Collectoren.

Unter den als Collectoren dienenden Anordnungen, welche seit meiner oben erwähnten ersten Ballonfahrt im Jahre 1892 von verschiedenen Beobachtern vorgeschlagen und zum Theil angewandt wurden, habe ich mich dauernd für jene Gattung entschieden, welche durch die Anwendung abtropfenden Wassers charakterisirt ist, da bei dieser die Theorie des elektrischen Vorganges vollkommen klar ist und im Falle des Eintrittes von Störungen am Collector nur sichtbare Ursachen vorhanden sein können.

Die Anwendung von Flammencollectoren war wegen Feuersgefahr ausgeschlossen.

Die Wassercollectoren konnten in drei Ausführungen verwendet werden.

a) Zwei Gefässe, deren Boden mit Tropfspitzen versehen ist, werden an Drähten vom Korbe des Ballons herabgelassen, so dass sie eine für die Messung geeignete Höhendifferenz einnehmen und werden, wenn sie leer sind, behufs Füllung aufgezogen.

b) Die beiden Gefässe werden an Schnüren befestigt, die oben in Trichter endigen, so dass das Aufziehen unnöthig ist, indem das Wasser in die Trichter gegossen wird und dann an den Schnüren in die unten befindlichen Gefässe abrinnt. Es wird bei dieser Anordnung, welche ich bei meiner oben citirten ersten Fahrt anwandte, mit der Ablesung gewartet, bis alles Wasser in die Collectorgefässe abgeronnen ist. Die feuchte Schnur dient als Zuleitung zum Elektroskope.

Eine Abänderung meiner Methode hat Börnstein[1] im Jahre 1894 angewandt. Er liess die Tropfgefässe weg, so dass das Wasser einfach von den Schnurenden abtropfte. Dies erschien allerdings insofern als eine Verbesserung, als ein Verstopfen der Tropfspitzen, die bei dieser Anordnung wegfallen, durch den als Ballast ausgeworfenen Sand ausgeschlossen ist.

---

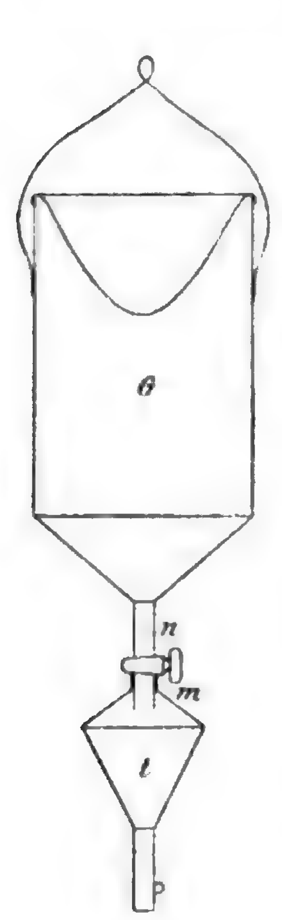
[1] L. c.

Dagegen liegt die Gefahr vor, dass Wasser von der Schnur an einem höheren Punkt abspritzt. Das Hauptbedenken, welches ich früher gegen die Anwendung feuchter Schnüre hatte, nämlich die Begünstigung der Ausstrahlung durch die feinen abstehenden Fasern, fällt nach meiner obigen Auseinandersetzung weg und wurde dadurch vollständig beseitigt, dass mir Prof. Börnstein gelegentlich einer Besprechung Schnüre zeigte, die, namentlich in nassem Zustande, so gut wie gar keine abstehenden Fasern hatten. Jedoch veranlassen mich Beobachtungen über das Abspritzen von Wasser von der Anwendung dieser Methode abzurathen. Ich habe an einer 15 *m* langen, im Stiegenhause des physikalischen Institutes aufgehängten Schnur beobachtet, dass bei ruhigem Hängen ganz bedeutende Wassermengen an der Schnur mit grosser Geschwindigkeit abrinnen können. Zur Ausführung der Luftelektricitätsmessungen braucht man aber nur ganz kleine Mengen Wasser an der Schnur ablaufen zu lassen und es erfolgt dann das Abfliessen selbst bei sehr starken horizontalen Schwingungen der Schnur ordnungsgemäss. Leider zeigte sich aber, dass verticale Stösse desto gefährlicher sind. Solche verticale Stösse erfolgen aber im Korbe jeden Moment, namentlich beim Aufheben und Niederlassen der Ballastsäcke.

c) Man verwendet als Collectoren Schläuche, durch die man das Wasser fliessen lässt. Es wurde schon von Börnstein auf die Gefahr aufmerksam gemacht, die darin besteht, dass sich die Schläuche dehnen können, wodurch sich der Abstand der unteren Enden verändert. Dem lässt sich leicht durch Einziehen von Drähten begegnen.

Solche Collectoren stellte ich in folgender Weise her. An ein Blechgefäss *G* (Fig. 1) von circa 1 *l* Inhalt, welches am Boden ein durch einen Hahn abzusperrendes Auslaufrohr *r* besass, war mittelst eines an *r* befestigten Bügels *m* ein Trichter *t* angebracht, so dass man an dieser Stelle das ordnungsmässige Abfliessen des Wassers beobachten konnte. Der Trichter *t* endigte in ein circa 5 *mm* weites Rohr, an das mittelst eines Bajonnettverschlusses ein zweites Rohr *p* angesetzt werden konnte. *p* trug den Schlauch, der aus mehreren Stücken von circa 6 *m* Länge zusammengesetzt war. Die einzelnen

Stücke waren durch kurze Messingröhrchen verbunden. Unten endigte der Schlauch in eine sehr weite (2 *mm*) Spitze, aus der noch ein etwa 5 *mm* langes Stückchen Bindfaden heraushing, um das Abtropfen zu erleichtern. Um Dehnungen des Schlauches vorzubeugen, sowie um einen sicheren Contact der unteren Spitze mit dem Wassergefässe herzustellen, war in den Schlauch ein 1 *mm* dicker, weicher Kupferdraht eingezogen, der an die Innenwand des Rohres *p*, sowie auch an jedes Zwischenstück und die Spitze angelöthet war. Dabei ist sehr darauf zu achten, dass die Löthungen ohne Säure ausgeführt werden.



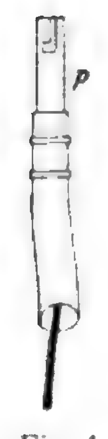


Fig. 1.

Um nach Bedarf den Collector verlängern zu können, wurden abgemessene Schlauchstücke bereitgehalten, die an den Enden mit je einem männlichen und weiblichen Theile des Bajonnettverschlusses versehen waren, ebenfalls eingezogene Drahtstücke enthielten und oben am Trichter zwischengeschaltet werden konnten.

Um endlich das in Folge der Bewegungen des Korbes eintretende unangenehme Schleudern der unteren Schlauchenden, wodurch leicht Verwickelungen entstehen können, zu vermeiden, waren die Tropfspitzen mit passenden Bleigewichten beschwert, so dass selbst bei grossen Wellenbewegungen des übrigen Schlauchtheiles die Enden nur kleine Excursionen vollführten.

Bei meinen noch zu beschreibenden sieben Freifahrten wurden Collectoren nach System *a)* und *c)* angewendet. Die vier ersten Fahrten wurden mit einer Anordnung nach System *a)* ausgeführt. Die Blechgefässe waren an 1 *mm* dicken, mit Guttapercha stark isolirten Drähten aufgehängt, welche oben über aus leichtem Holze hergestellte Räder gewunden werden konnten. Die gemeinsame Axe der Räder konnte mittelst einer

Schraube festgeklemmt werden. Um das Verwickeln der Drähte hintanzuhalten, wurden diese nahe über dem höher hängenden Collector durch eine leichte hölzerne Spreitze auseinandergehalten, von der sie durch Hartgummi-Isolatoren wohl isolirt waren. Die oberen Drahtenden wurden durch in Paraffin getränkte Seidenschnüre isolirt.

Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass ich alle Ebonittheile, welche besonders gut isoliren müssen, in der Weise präparire, dass zuerst die glänzende Oberfläche mit einem Eisen abgeschabt wird. Dann wird das Stück am Elektroskop auf Isolation geprüft. Dies geschieht in der Weise, dass an möglichst vielen Punkten des Stückes ein mit den Blättchen des geladenen Elektroskopes verbundener, im Übrigen isolirter Draht angehalten wird, während mit einem zweiten zur Erde abgeleiteten Draht ein Kreis von circa 0·5 *cm* Radius rings um den mit dem Elektroskope verbundenen Draht abgetastet wird. Die Blättchen müssen in Ruhe bleiben. Dabei wird sorgfältig darauf geachtet, dass das Stück bei diesen Manipulationen nicht mit den Fingern berührt wird. Nach der Prüfung am Elektroskope wird das Ebonitstück in heisses Paraffin getaucht. Es bietet sich dann die Annehmlichkeit, dass bei einer allenfalls eintretenden mangelhaften Isolirung, dieselbe durch Auffrischen der Oberfläche des Paraffinüberzuges rasch wieder hergestellt werden kann.

3. Versuchsanordnung.

Bei allen Fahrten brachte ich an der Wand des Korbes ein aus Fig. 2 ersichtliches Gerüst an. Dieses trug die Collectoren und ein Querbrettchen, an das eine Schaltvorrichtung befestigt war. Wurden Collectoren angewandt, die von Holzrädern abgelassen werden mussten, so waren die Lager für die Axe der Räder am Gerüste befestigt. Im Übrigen war dieses so eingerichtet, dass es während der Fahrt montirt werden konnte.

Ich habe schon sub Punkt 3 des obenstehenden Programmes erwähnt, dass ich bei meiner fünften Freifahrt das erste Mal Versuche nach Börnstein's Methode über die Grösse der Ballonladung ausführte. Ich benützte dabei Blechgefässe, welche in der beschriebenen Weise nach der Füllung hinab-

gelassen werden mussten. Um diese Collectoren in zwei verschiedenen Tiefen gebrauchen zu können, waren die mit Guttapercha überzogenen Drähte 5 *m* über der oben erwähnten Querspreize, welche bestimmt war, die Collectoren vor Verwickelung der Drähte zu schützen, durch Ebonitisolationen unterbrochen. An letzteren waren Riegel aus Messing angebracht, welche die Isolationen zu überbrücken gestatteten. Wurde der Draht bis zu den Isolationen abgewickelt, die Riegel

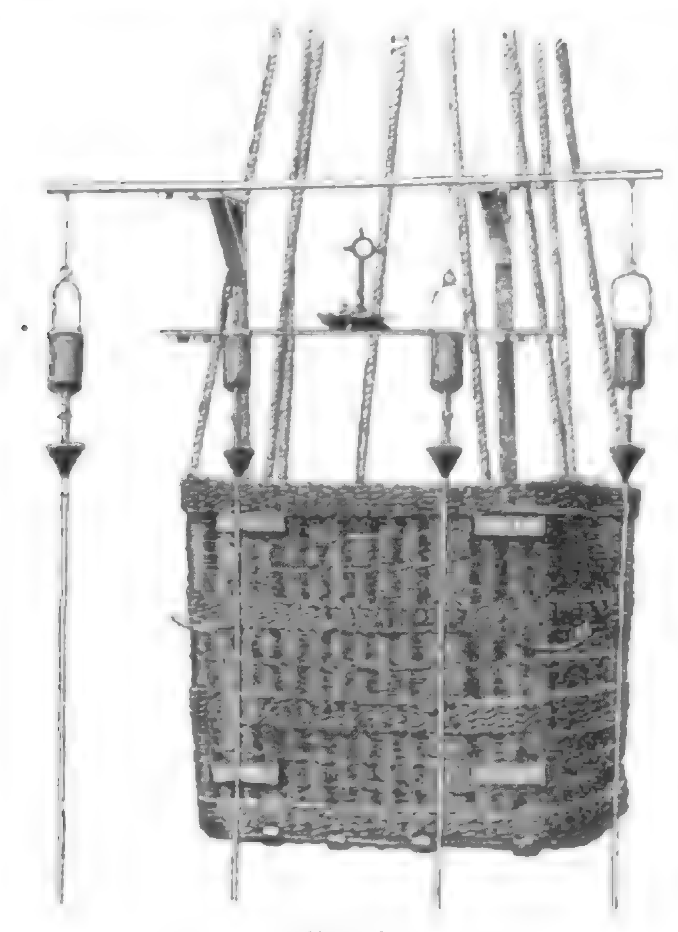


Fig. 2.

geöffnet und die Drähte unterhalb der Isolationen an die Schaltvorrichtung angeschlossen, so konnte die Messung in einer Tiefe der oberen Tropfspitze von 5·5 *m* unter dem Gondelrand ausgeführt werden. Dann wurden die Riegel eingeschoben und nach Loslösung der Zuleitung zur Schaltvorrichtung die Elektroden tiefer heruntergelassen, wodurch nach Abwickelung des ganzen Drahtes die obere Tropfspitze in eine Tiefe von 15·5 *m* unter den Gondelrand gelangte.

Da diese Manipulation sich als sehr mühsam erwies, verwandte ich bei meinen drei letzten Fahrten zwei Paare von

Collectoren nach dem oben beschriebenen System *c)*, da ich bei diesen Fahrten ebenfalls Messungen nach der Methode Börnstein's ausführte.

Das lange Elektrodenpaar hatte 11·15 *m* und 14·47 *m*, das kurze 4·72 *m* und 8·05 *m* Länge. Die Distanz der unteren Schlauchenden konnte übrigens noch in der oben angegebenen Weise durch Zwischenstücke variirt werden, um die Ablesungen im günstigen Messbereiche des Elektroskopes zu erhalten.

Die Construction des Umschalters ist aus Fig. 3 ersichtlich. Derselbe diente dazu, durch eine Stellung des Hebels *H* die Blättchen des Elektroskopes mit dem Mantel zu verbinden, damit nicht unvermuthet eintretende Ladungen in Pausen zwischen den Ablesungen das Elektroskop ruiniren. Bei einer

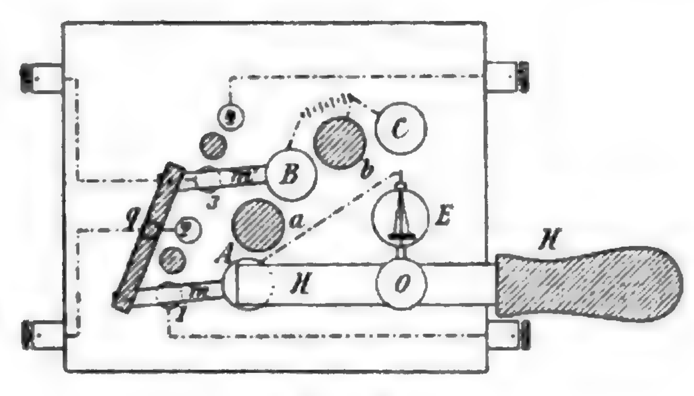


Fig. 3.

zweiten Stellung des Hebels wurde der Mantel des Elektroskopes mit dem tiefer hängenden Collector verbunden, während die Blättchen schon früher mit dem höheren Collector dauernd verbunden waren. Endlich durch eine dritte Stellung von *H* wurde behufs Ermittelung des Vorzeichens der Ladung eine kleine Zamboni'sche Säule zwischen den Mantel und den tieferen Collector geschaltet.

Die Figur 3 zeigt den Umschalter, wie er bei Anwendung von zwei Elektrodenpaaren verwendet wurde. Bei Verwendung nur eines Collectorpaares fielen einige der gezeichneten Bestandtheile weg.

Der Umschalter war auf eine Hartgummiplatte von 2 *cm* Dicke montirt. *O* stellt die feste Axe des Schalthebels *H* vor, welche nach oben einen Fortsatz hatte, an den sich mittelst eines stellbaren Kugelgelenkes ein cylindrischer Stift ausschloss,

auf welchen das Elektroskop *E* aufgesteckt wurde. Mittelst des Kugelgelenkes konnte das Elektroskop vertical gestellt werden, wenn der Korb und damit das ganze Gerüst, auf welches auch der Umschalter montirt war, schief standen. Es war also der Mantel des Elektroskopes *E* dauernd mit dem Hebel *H* verbunden. Letzterer hatte eine gut isolirende Handhabe.

A, *B*, *C* sind Contactknöpfe, zwischen denen sich die Ruhepunkte *a* und *b* aus Hartgummi für den Schalthebel befanden, damit das Umlegen des Hebels von einem Contactknopfe zum anderen ohne Kurzschluss erfolgen konnte. Mit dem Contactknopf *A* waren der kürzere Collector und die Blättchen des Elektroskopes *E* dauernd verbunden. Stand also *H* auf *A*, so war das Elektroskop kurz geschlossen. Der Contactknopf *B* war mit dem längeren Collector und dem Au-Pol einer Zamboni'schen Säule *Z* verbunden. An *C* war der Ag-Pol der Säule angeschlossen. Stand also der Hebel *H* auf *B*, so erhielt man den Ausschlag, welcher der Potentialdifferenz zwischen beiden Collectoren entsprach, indem die Blättchen des Elektroskopes wie früher an *A* und damit an den kürzeren Collector angeschlossen, der Mantel durch den Hebel *H* mit dem längeren Collector verbunden war.

Stand dagegen *H* auf *C*, dann war dem Mantel noch die Zamboni'sche Säule vorgeschaltet und man sieht leicht, dass bei der angedeuteten Schaltungsweise eine Vergrösserung des Ausschlages bedeutet, dass der höhere Punkt des Raumes ein positives Potential gegenüber dem tieferen hat.

Bei Verwendung von zwei Collectorpaaren kam zu den bisher aufgezählten Bestandtheilen des Umschalters noch folgende weitere hinzu. Es waren dies die Contactknöpfe 1, 2, 3, 4, über welche das Schalthebelpaar *m*, *m'* spielte. Letzteres war durch den Streifen *q* aus Hartgummi verbunden und drehte sich um die Contactknöpfe *A* und *B* als Axen. Der Streifen *q* trug auch eine Handhabe, um die Umschaltung isolirt vornehmen zu können. Mit 1 und 2 waren die kürzeren, mit 3 und 4 die längeren Collectoren eines jeden Paares verbunden, so dass je nach der Stellung des Schalthebelpaares *m*, *m'* das eine oder das andere Paar von Collectoren mit *A* und *B* verbunden wurde.

Beschreibung der einzelnen Fahrten.

Zweite Freifahrt am 22. September 1894.

Um 1h Nachmittags erfolgte der Aufstieg unter der Führung des Herrn Oberlieutenant Dr. Kośmiński vom Arsenal in Wien aus. Der Tag war anscheinend ganz normal und waren demselben schon mehrere vollkommen wolkenfreie Tage vorangegangen. Der Ballon nahm zuerst seinen Weg in nordwestlicher Richtung über das Arsenalgebäude und einen Theil der Stadt bis über den Wienerwald, machte dann eine Wendung nach Osten und überschritt noch vor Klosterneuburg die Donau. Seine Hauptrichtung war bis Gr.-Schweinhart eine östliche, von hier an südöstlich bis Konyka an den kleinen Karpathen, wo in 2800 *m* Höhe Ventil gezogen wurde. Es zeigte sich, dass der Ballon trotz seiner bedeutenden Höhe über dem höchstens 800 *m* hohen Gebirge letzteres nicht überschreiten konnte, da sich daselbst der Wind fortwährend drehte und den Ballon immer wieder auf seinen früheren Ort zurücktrug. Hinderte schon über dem Wienerwald eine dichte weisse Nebelwand auf der Sonnenseite den Ausblick, so zeigten auch die fortwährend veränderlichen Windströmungen, dass die Witterung nicht so normal war, als es vor der Auffahrt den Anschein hatte. In der That vollzog sich in der darauffolgenden Nacht ein völliger Umschlag des Wetters. Es traten dauernde Herbstnebel ein.

Die Messungsresultate waren:

Nr.	Zeit	Höhe	Volt pro 1 *m*	Bemerkungen
1	2h 8m	500 *m*	+69	Über dem Wienerwalde.
2	2 30	1500	+58	Auf der Sonnseite durch Nebel verhinderter Ausblick.
3	2 36	1450	+58	
4	2 55	1400	+38	Über der Donau.
5	3 15	1300	+55	
6	3 19	1250	+54	Über dem Bisamberge.
7	3 30	1350	+66	Marchfeld.
8	3 40	2300	+58	Himmel grösstentheils heiter, Horizont verschleiert.
9	3 57	3000	+45	

Aus der beistehenden graphischen Darstellung Fig. 4 sieht man auf den ersten Blick, dass nur die Ablesungen 1, 7, 8 und 9 einer continuirlichen Änderung des Potentialgefälles entsprechen. Diese deuten auf ein abnehmendes Gefälle bei wachsender Höhe hin. Die Unregelmässigkeiten der

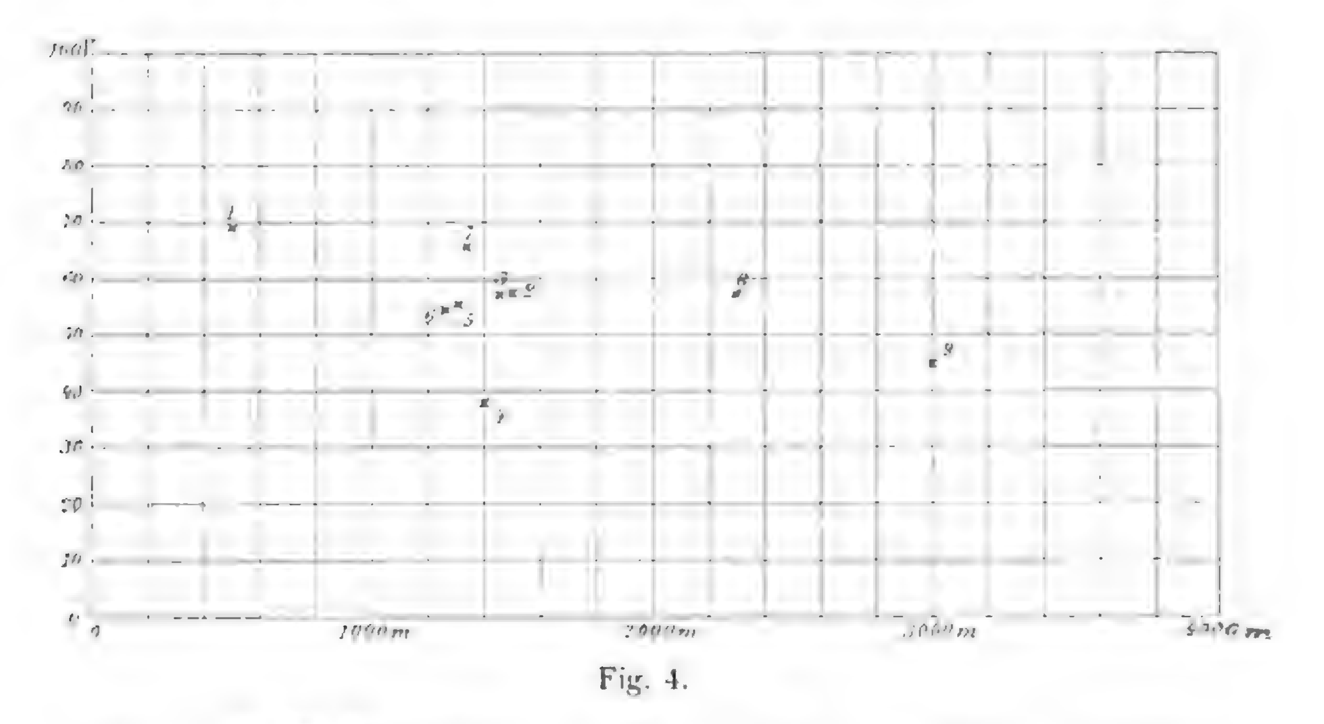


Fig. 4.

Werthe Nr. 2—6 dürften der Anwesenheit des Wienerwaldes, der Donau und des Bisamberges unter dem Ballone zuzuschreiben sein.

Dritte Freifahrt am 5. August 1895.

Um 10^h Früh erfolgte unter Führung des Herrn Lieutenant Kocesnik der Aufstieg vom Arsenal in Wien aus.

Der Tag schien für die Fahrt ganz besonders geeignet. Nicht ein Wölkchen trübte die Reinheit des Himmels und es war auch während des ganzen Tages in Wien nicht das Geringste an Bewölkung zu sehen. Der Ballon nahm seinen Weg nach Gross-Schützen. Hier verlangsamte sich seine Geschwindigkeit und es tauchten unter dem Ballon allenthalben Cumuli auf. Als um 12^h die Landung erfolgte, durchsetzte der Ballon eine solche Wolke, wobei sich eine herrliche optische Erscheinung zeigte. Zunächst fiel der Schatten des Ballons auf die Wolke und erschien daselbst umgeben von färbigen Ringen. Bald aber war die Nebelschichte so dünn, dass sie dort, wo der Ballonschatten war, durchsichtig wurde und, während der

übrige Theil noch immer als eine weisse Fläche erschien, wurde im Schatten, wie in einem Rahmen, die Landschaft sichtbar. Leider konnte ich in der Wolke keine Messung mehr machen, weil zur Landung vorbereitet werden musste.

Nr.	Zeit	Höhe	Volt pro 1 *m*	Feuchtigkeit		Temperatur	Bemerkungen
				absolut	relativ		
1	10ʰ 10ᵐ	930 *m*	+77	8·1 *mm*	41%	22°5 C.	
2		1000	+79				
3		1090	+77				
4		1100	+75				
5		1140	+55	9·8	66	17·5	
6		1170	+30				
7		1260	0	8·8	57	14·0	
8	11ʰ	1450	0				
9		1530	0				
10		1850	−44				
11		2000	−41				
12		2100	−52				
13	11ʰ 38ᵐ	2160	−39	4·5	43	12·0	Annäherung von Cumulis

Nicht nur der rasche Abfall des Gefälles (Fig. 5), auch der Zeichenwechsel ist höchst überraschend. Ich muss hervor-

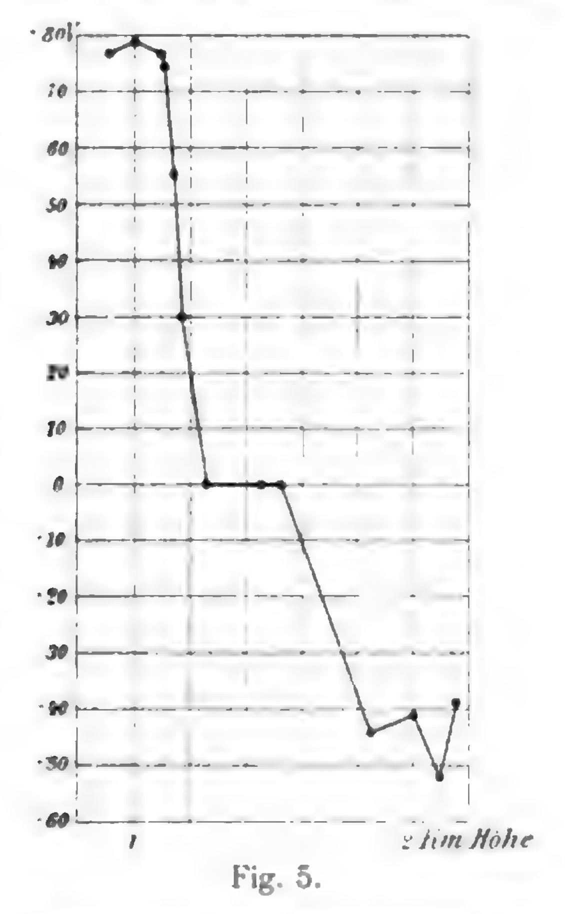


Fig. 5.

heben, dass diese Erscheinung durch keine erkennbare Ursache begründet war. Es müssten denn die schliesslich eintretenden

leichten Haufenwolken starke elektrische Ladungen gehabt haben, was sonst gewöhnlich nicht der Fall zu sein scheint Auch Elster und Geitel nehmen Tage mit leichter Bewölkung als normal an.

Vierte Freifahrt am 12. September 1895.

Um 9^h Vormittag stieg ich unter der Führung des Herrn Oberlieutenant Hassmann vom Arsenal in Wien aus auf. Der Himmel erschien ganz wolkenlos, doch herrschte heftiger Wind. Es sollte dieser Wind benützt werden, um rasch aus dem Dunstkreise der Stadt zu gelangen und, damit auch möglichst grosse Höhen erreicht werden, ging der Ballon mit grossem Überschuss an Auftrieb ab. Leider zeigte sich, dass in circa 1500 *m* Höhe fast gar kein Wind war. Der Ballon benöthigte über eine Stunde, um Wien zu passiren, übersetzte bei Nussdorf die Donau und wurde dann längs des Flusses bis Aspern zurückgetrieben, wo eine stürmische Landung erfolgte. Die Messungen in der angegebenen Höhe direct über der Stadt, sowie auch jene, welche jenseits der Donau ausgeführt wurden, ergaben rapid variirende Werthe. Sogar positive mit negativen Gefällen wechselten in rascher Folge ab.

Diese Erscheinung war bei der sonstigen Klarheit des Himmels wohl lediglich auf die Nähe der Stadt oder die durch den in der Tiefe herrschenden heftigen Wind mitgeführten Staubwolken zurückzuführen.

Fünfte Freifahrt am 16. März 1898.

Die Abfahrt erfolgte um 7^h Früh unter Führung des Herrn Oberlieutenant Hinterstoisser vom Arsenal aus. Die Fahrt war fast gerade ostwärts gerichtet und endigte nach Zurücklegung von 108 *km* bei Nagyhalom in Ungarn. Die Atmosphäre war bis auf wenige leichte Haufenwolken, die im Allgemeinen in grösserer Entfernung und tiefer als der Ballon schwebten, klar. Die Temperatur auf der Erde betrug +12° C., die Minimaltemperatur +1° C.

Bei dieser Fahrt berücksichtigte ich das erste Mal den Vorschlag Börnstein's, aus der Änderung des Gefälles mit der Tiefe der Elektroden unter dem Ballon einen Schluss auf

die Ballonladung zu ziehen. Es wurden in jeder Höhe zwei Ablesungen gemacht, und zwar wurden nach jeder Füllung der Collectorgefässe zuerst der Aufhängedraht bis zu den oben erwähnten Isolatoren abgewickelt, so dass die höhere Tropfspitze 5·5 *m* unter dem Gondelrande war, und eine Ablesung gemacht. Dann wurde der ganze Draht abgelassen und, wie erwähnt, eine Tiefe von 15·5 *m* der höheren Spitze erreicht. Nun folgte die zweite Ablesung. Da bei dem Ausschalten der Zuleitungsdrähte zum Umschalter die Collectoren berührt werden mussten und diese circa 2 Minuten zur neuerlichen Herstellung ihrer Ladung benöthigten, war die Manipulation höchst zeitraubend und es fanden zwischen zwei zusammengehörigen Ablesungen ziemlich grosse Höhenänderungen des Ballons statt.

Nr.	Zeit	Höhe	Volt pro 1 *m*	
			kurze Elektrode	lange Elektrode
1	7h 40m	1250 *m*	60	—
1'	7 55	1300	—	65
2	8 10	1500	56	—
2'	8 20	1500	—	53
3	8 40	1900	58	—
3'	8 52	2000	—	35
4	9 15	2050	20	—
4'	9 30	2050	—	30
5	9 40	2140	50	—
5'	9 53	2200	—	45
6	10 10	2400	40	—
6'	10 20	2460	—	40
7	10 35	2500	26	—
7'	10 47	2600	—	27
8	11	2800	35	—
8'	11 20	2880	—	30

Auch hier zeigte sich eine deutliche Verringerung (Fig. 6) des Potentialgefälles bei wachsender Höhe. Dabei erkennt man.

dass mit Ausnahme zweier Werthe die correspondirenden Ablesungen trotz des verhältnissmässig grossen Zeitintervalles, das zwischen ihnen liegt, einander ziemlich nahe sind. Dass dies selbst bei den grossen Sprüngen, welche die abgelesenen

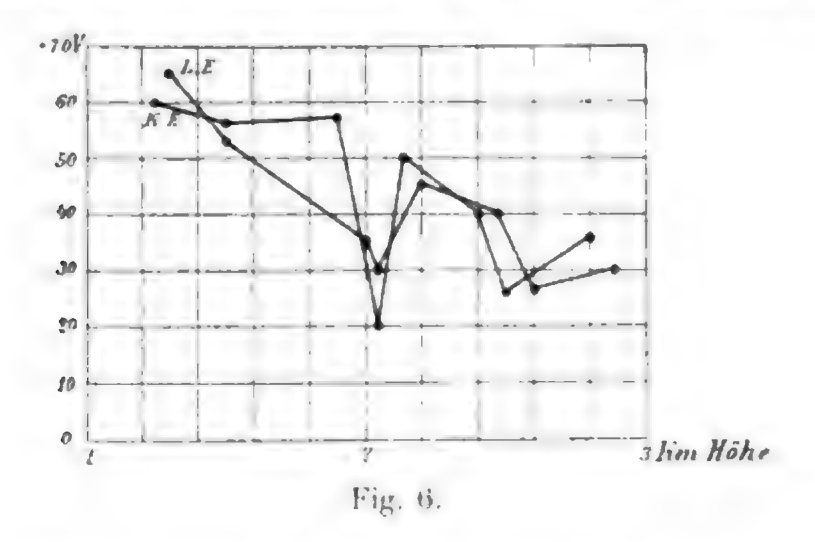


Fig. 6.

Werthe zeigen, der Fall ist, scheint mir mit grosser Sicherheit darauf hinzudeuten, dass die Messungen störende Ladungen des Ballons bei dieser Fahrt nicht vorhanden waren.

Sechste Freifahrt (Simultanfahrt) am 8. Juni 1898.

Die Abfahrt erfolgte um $9^h\ 15^m$ Vormittags vom Platze der Jubiläumsausstellung mit dem Ballon der Firma Ridinger in Augsburg unter Führung des Herrn Oberlieutenant Hinterstoisser. Es wurden vier Collectoren mit Schläuchen verwendet. Das lange Elektrodenpaar hatte 11·15 *m* und 14·47 *m*, das kurze 4·72 *m* und 8·05 *m* Länge. Nach den Annahmen, welche ich sonst bei der Auswahl der Tage für Ballonfahrten machte, war derjenige, an dem diese Fahrt stattfand, gar nicht geeignet. Es waren vor und nach der Fahrt regnerische Tage. Bei der Auffahrt selbst herrschte starker Nebel und auch als der Ballon seine grösste Höhe von 4280 *m* erreicht hatte, war er noch rings vom Nebel umgeben, so dass nur vertical über ihm in einem Kreis von etwa 45° Durchmesser blauer Himmel sichtbar war. Ich machte die Fahrt an diesem Tage nur deshalb, weil sich wegen der Simultanfahren die Gelegenheit fand. Der Ballon vollführte fast eine vollständige Kreisbewegung, so dass während mehr als einer Stunde wegen der Nähe der Stadt eine Messung nicht möglich war.

Nr.	Zeit		Höhe	Volt pro 1 *m*		Ab-solute	Re-lative	Tem-peratur
				lange	kurze			
				Elektrode		Feuchtigkeit		
1	10^h	40^m	1220 *m*	+48	+34	6·8 *mm*	74%	10°0 C.
2	11		2220	+40	+34	5·6	72	7·5
3	11	15	2330	+53	+50	4·8	65	7·0
4	11	25	2570	+53	+50	5·5	84	5·0
5	11	40	2650	0	0	3·5	56	4·3
6	12	20	3000	0	0	3·4	80	−1·0
7	12	35	3600	−43	−42	3·3	89	−3·0
8	12	52	3800	−43	−34	1·4	49	−6·0
9	12	56	3820	−64	−65	—	—	—
10	1	3	3950	−64	−71	1·6	58	−6·6
11	1	10	4050	−73	−71	2·5	100	−8·0
12	1	12	4000	−73	−65	—	—	—
13	1	20	2000	+43	+42	(1·6)?	(25)?	(−5·0)?
14	1	25	2000	+64	+65	—	—	—

Da bei der nunmehr verwendeten Anordnung die Ablesungen mit beiden Collectorpaaren unmittelbar hintereinander

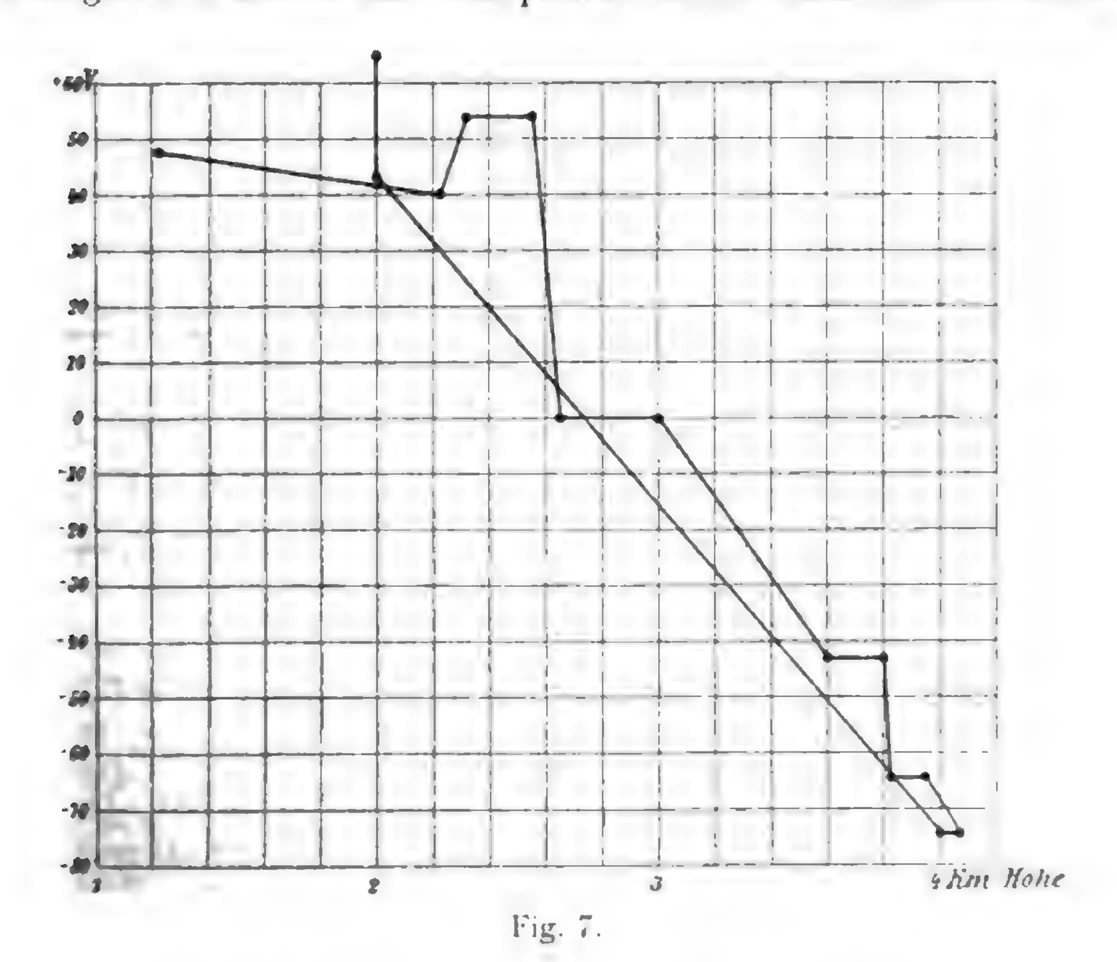


Fig. 7.

gemacht werden konnten, zeigen sich auch nur kleine Unterschiede zwischen denselben, was wieder darauf hindeutet, dass

keine merkliche Ballonladung vorhanden war. In Fig. 7 sind die mit dem langen Elektrodenpaar gefundenen Werthe eingetragen und es ist besonders die ziemlich gute Übereinstimmung der beim Abstieg in 2000 *m* Höhe gefundenen Ablesungen mit den beim Aufstieg erhaltenen zu beachten.

Siebente Freifahrt am 22. Juli 1898.

Abfahrt um 8^h Früh vom Arsenal unter Führung des Herrn Lieutenant v. Schrott. Bei der Abfahrt war der Himmel wolkenlos. Erst gegen Ende der Fahrt erhob sich in den unteren Luftschichten ein heftiger Wind. Dies konnte durch abgelassene Papierschleifen und daran erkannt werden, dass das am Ringe befestigte, ungefähr 50 *kg* schwere Schleifseil, welches bei meinen Fahrten, um keine Störungen der Messung herbeizuführen, selbstverständlich erst kurz vor der Landung ausgelegt wurde, sich nicht wie gewöhnlich an den Gondelrand anlehnte, sondern, von der unteren Windströmung erfasst, circa 20 *cm* weit vom Gondelrande weggetragen wurde. Übrigens endete in Folge Versagens der Reissvorrichtung die Fahrt mit einer circa 17 *km* langen Schleiffahrt durch den Wald bei Bisenz und damit, dass schliesslich der Ring des Ballons vom Netze riss und der Ballon davonflog. Während meiner Fahrt machte Dr. Benndorf Messungen des Gefälles im flachen Terrain jenseits der Donau.

Nr.	Zeit	Höhe	Volt pro 1 *m*		Gleichzeitiges Gefälle am Erdboden
			lange Elektrode	kurze Elektrode	
1	8^h 24^m	850 *m*	+58·6	+55·0	
2	8 45	860	+57·0	+55·0	
3	9 00	870	+55·0	+56·0	+209
4	9 20	1050	+46·0	+58·6	+256
5	9 45	1110	+49·0	+50·0	+317
6	9 55	1220	+33·1	+33·1	+293
7	10 07	1400	+61·5	+55·0	+274
8	10 15	1620	+31·0	+28·0	+267
9	10 30	1600	+31·1	+31·1	+221
10	10 37	1920	0	0	+206
11	11 00	2520	0	0	

In beistehender Figur 8 sind die mit dem langen Collectorpaare gewonnenen Werthe eingetragen. Die in der Tabelle als gleichzeitiges Gefälle verzeichneten Potentialdifferenzen wurden durch Interpolation aus den von Dr. Benndorf in Intervallen

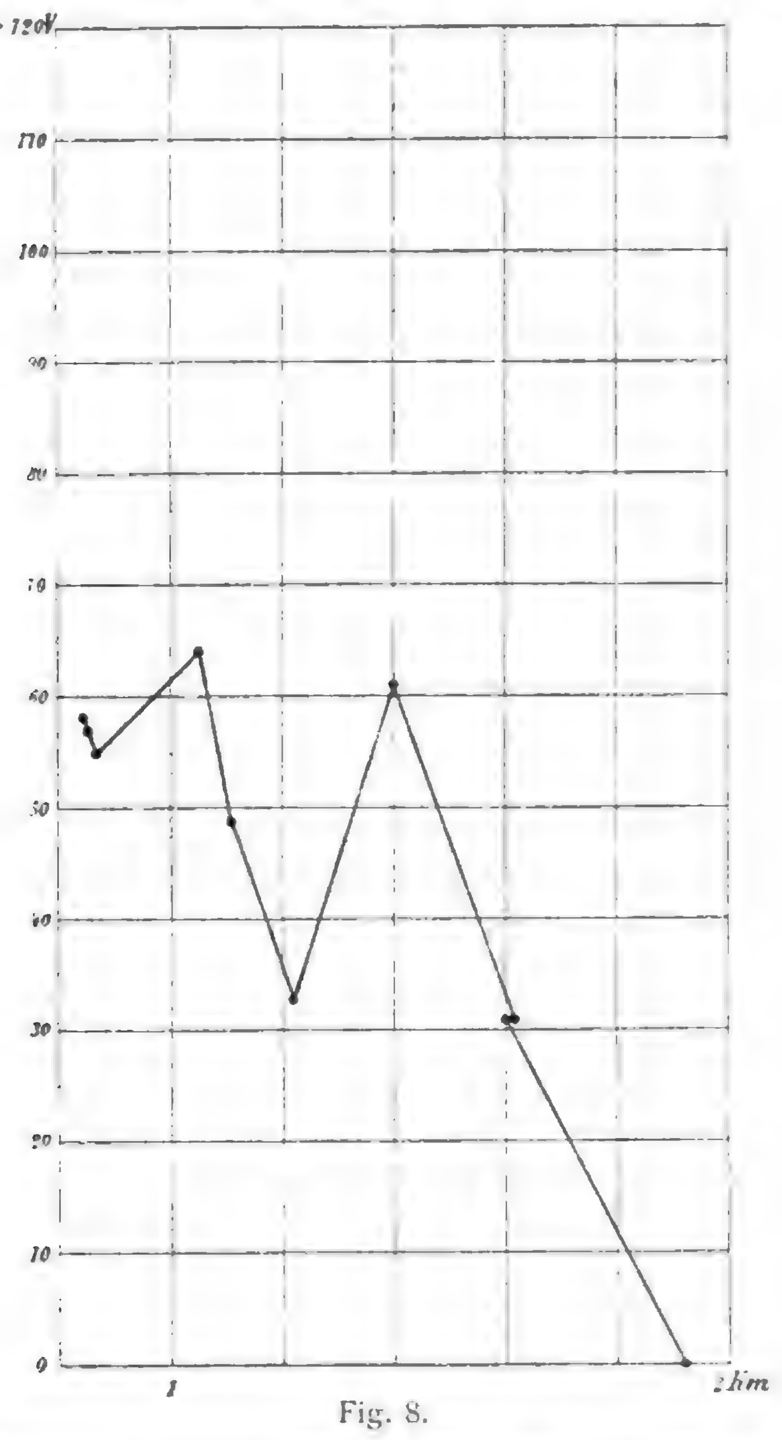


Fig. 8.

von je 15 Minuten gemachten Ablesungen gerechnet. Sie sind ungewöhnlich hoch und dürften localen Einflüssen unterlegen sein. Da dies wohl fast immer der Fall sein dürfte, haben solche simultane Messungen nur sehr geringen Werth. Gleichwohl sieht man aber, dass die Werthe, welche man auf der Erde erhält, von viel höherer Grössenordnung sind.

Achte Freifahrt am 4. August 1898.

Der Aufstieg erfolgte um 10^h Vormittags mit dem Ballon der Firma Ridinger vom Ausstellungsplatze aus. Führer war Herr Lieutenant v. Schrimpf. Der Tag war der Fahrt zuerst sehr günstig. Erst gegen Ende derselben zeigte sich eine grosse Wolkenbank, aus welcher mitunter auch ein leises Donnerrollen zu hören war. Es gelang bei dieser Fahrt, eine Messung gerade vor, über und nach einem mächtigen entgegenziehenden Cumulus auszuführen. Leider ging mir mehr als eine Stunde durch Reparaturen verloren, da die Drähte, welche in die Schläuche eingezogen waren, an den Löthstellen mehrfach rissen, weil man die Löthungen mit Säure vorgenommen hatte.

Die Landung erfolgte um 3^h Nachmittags bei Hohenau.

In der darauffolgenden Nacht ergoss sich heftiger Regen, begleitet von mässig starken Blitzen.

Nr.	Zeit	Höhe	Volt pro 1 *m* lange Elektroden	Volt pro 1 *m* kurze Elektroden	Bemerkungen
1	11^h 20^m	1090	+34·5	+34·5	
2	11 50	650— 750	+78·0	+60·0	
3	12 00	1250—1350	+21·5 bis +32	+21·5 bis +32	
4	12 15	1800—1850	+36·5 bis +41·5	+36·5 bis +41·5	
5	12 35	2200	+26·5	+26·5	
6	12 40	2360	+26·5	+26·5	
7	12 45	2450	0	0	In der Nähe des Cumulus
8	12 50	2500	0	0	
9	1 00	3100	0	0	
10	1 15	3290	—57	—57	
11	1 22	3300	+21·5	+21·5	
12	1 40	3590	+21·5	+21·5	

Die mehrfachen Angaben bei Nr. 2, 3 und 4 dieser Tabelle bedeuten, dass die Ablesungen rasch hintereinander ausgeführt wurden, ohne dass für sie besonders die Zeit notirt wurde. Ich vermuthete während der Fahrt, dass der negative Werth Nr. 10 in Folge einer durch das Auswerfen von Ballast eingetretenen Störung veranlasst worden sei und liess daher nach Erhalt der

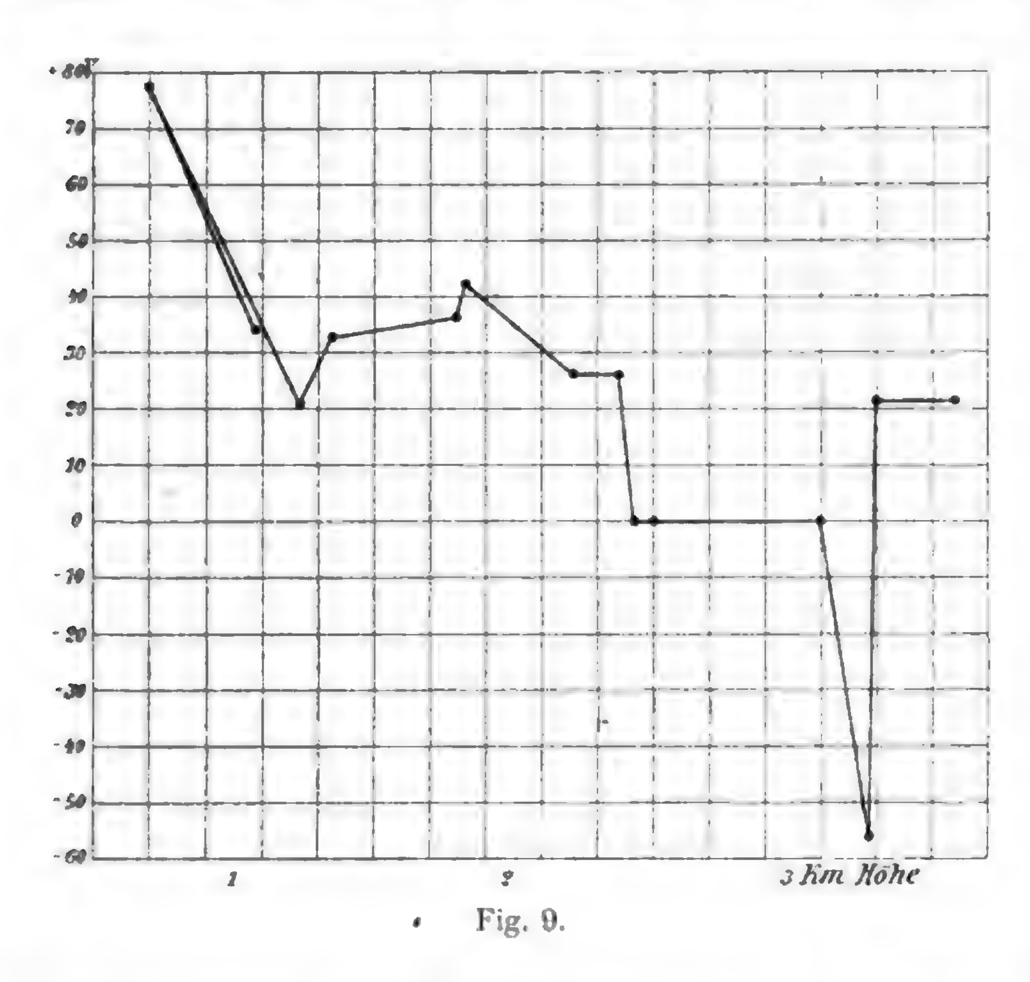


Fig. 9.

positiven Ablesung Nr. 11 Ballast auswerfen, um dessen Wirkung zu constatiren. Doch es zeigte sich keine. Ich habe übrigens diesen Versuch schon früher oft, aber immer mit negativem Resultate wiederholt.

Es gebührt mir, nun noch mit vielem Danke der Herren Officiere zu gedenken, welche sich bei meinen Versuchen stets hilfsbereit zeigten.

Resultate der Messungen.

Eine Vergleichung meiner Messungen mit denen anderer Beobachter zeigt in zwei Richtungen wesentliche Unterschiede. Zunächst zeigten sich bei der dritten, sechsten und achten

Fahrt negative Gefälle, nachdem sie beziehungsweise in Höhen von 1260—1530 *m*, von 2650—3000 *m* und von 2450—3100 *m* den Werth Null angenommen hatten. Auch bei der siebenten Fahrt zeigte sich ein unmessbar kleines Gefälle in einer Höhe von 1920—2520 *m*. Besonders bemerkenswerth scheint mir übrigens der eine negative Werth, welchen ich bei der achten Fahrt mitten zwischen zwei im Verlaufe von 22 Minuten gemachten Ablesungen, von denen der eine Null, der andere positiv war, erhielt. Dies scheint mir darauf hinzudeuten, dass solche negative Werthe fast momentan durch irgendwelche an ungekannte, in der Atmosphäre schwebende Körper gebundene elektrische Massen hervorgerufen werden können.

Es befremdet mich, dass andere Beobachter solche negative und Null-Werthe des Gefälles, wenigstens in dem Maasse wie ich, nicht gefunden haben.

Börnstein constatirte zwar bei seiner ersten Fahrt negative Gefälle, scheint aber geneigt zu sein, diese Resultate für einen Irrthum zu halten.

Le Cadet hat überhaupt keine negativen Ablesungen erhalten.

Bei meinen Messungen war wohl jeder Irrthum bei der Vorzeichenbestimmung ausgeschlossen. Es hätte allenfalls ein Fehler dadurch unterlaufen können, dass ein Collector functionirte, der andere aber nicht. Doch auch dieser Fehler konnte nicht eintreten, da namentlich bei meiner letzten Anordnung der Collectoren das regelmässige Abfliessen des Wassers oben im Trichter beobachtet werden konnte. Und ich habe auch wirklich beim Eintritt der negativen Werthe mit verdoppelter Aufmerksamkeit das regelrechte Functioniren der Collectoren controlirt.

Es findet sich keinerlei Anhaltspunkt, meine merkwürdigen Messungsresultate mit irgendwelchen Änderungen im Wasserdampfgehalt in Zusammenhang zu bringen. Ja auch da stellt sich ein Widerspruch mit anderen Messungen heraus. So hat man beobachtet, dass Nebel mitunter grosse positive Gefälle mit sich bringt. Auch Le Cadet[1] erwähnt diese Thatsache.

[1] L. c. p. 162.

Wie aus dem Obigen hervorgeht, bewegte sich der Ballon bei meiner sechsten Fahrt fast ausschliesslich in dichten Nebelmassen. Selbst in der grössten Höhe von 4280 *m*, die ich erreichte, war nur gerade über dem Ballon in einem Kreise von etwa 45° Durchmesser blauer Himmel sichtbar. Nichtsdestoweniger erhielt ich ganz ähnliche kleine Ablesungen wie sonst und eine ganze Reihe negativer Werthe, die umso bemerkenswerther erscheinen, als ich beim Abstieg in geringeren Höhen wieder normale positive Potentialgefälle fand.

In zweiter Linie unterscheiden sich die von mir gewonnenen Messungsresultate sehr wesentlich von jenen von Le Cadet dadurch, dass ich sehr sprunghafte Ablesungen erhielt, während Le Cadet sehr schöne, sich einem continuirlichen Lauf anschmiegende Werthe fand. Auch die grosse Zahl von Ablesungen, die Le Cadet vorzunehmen im Stande war, deuten darauf hin, dass er verhältnissmässig viel ruhigere Elektroskopausschläge als ich hatte. Ich brauchte oft mehrere Minuten, um mit Sicherheit die mittlere Einstellung der fast niemals ganz ruhigen Blättchen abzuschätzen. Es mag dies seinen Grund in dem raschen Nachladen der Wassercollectoren haben, in Folge dessen sich die Ladung des Elektroskopes sehr schnell den eintretenden Änderungen des Gefälles entsprechend veränderte. Le Cadet verwendete Bleinitratlunten, welche viel langsamer laden, so dass das Elekroskop auf einen für eine grössere Zeitdauer geltenden Durchschnittswerth geladen wurde.

Es kann aber auch der Fall sein, dass die Atmosphäre der Gegenden, welche von den Ballons gewöhnlich passirt werden (von Wien aus gewöhnlich das Marchfeld oder der nordwestliche Theil der ungarischen Tiefebene), von, wie früher erwähnt, an unsichtbare Massen gebundenen Ladungen erfüllt ist. Zeigen doch, wie Exner vielfach constatirt hat, auch verschiedene Punkte auf der Erde, z. B. in Bezug auf die tägliche Periode der Gefälle, sehr mannigfaltiges Verhalten, was doch auch nur auf in der Luft vorhandene Ladungen zurückzuführen ist, die demnach in verschiedenen Gegenden verschieden sein müssen.

Jedenfalls geht aber aus den Messungen hervor, dass das positive Potentialgefälle mit wachsender Höhe

abnimmt und dass somit positive Ladungen in der Atmosphäre angehäuft sind.

Was den dritten Punkt meines Programmes anlangt, so zeigen wohl die meisten der nach der Börnstein'schen Methode ausgeführten Ablesungen, dass eine die luftelektrischen Messungen störende Ladung des Ballons bei den von mir ausgeführten Fahrten nicht vorhanden war. Allerdings dürfte diese Erscheinung auch sehr von dem Material und der momentanen Oberflächenbeschaffenheit des Ballons abhängen. Meines Wissens sind bisher angeblich durch Überspringen elektrischer Funken entstandene Ballonbrände nur bei Captivballons vorgekommen. Mir scheinen dafür zwei mögliche Ursachen vorhanden zu sein. Entweder war die Hülle des Ballons deshalb wirklich geladen, weil, solange der Ballon hoch war, durch das Captivseil und die nicht vollständig isolirenden Stricke eine Ladung auf den Ballon überging, die nicht Zeit fand, während des Einholens wieder abzuströmen. Oder aber es finden thatsächlich Elektrisirungen des Ballons statt, die aber nicht stark genug sind, um auf die Collectoren merkbar einzuwirken. Es mag sein, dass sich solche Ladungen vorwiegend in den Metallbestandtheilen des Ventils anhäufen und daselbst bei der ersten Berührung den gefährlichen Funken erzeugen. Durch einen am Ventil befestigten und über den Ballon herabhängenden Draht, welchen man noch vor Berührung des Ventils mit der Erde leitend verbindet, könnte man der Gefahr leicht begegnen.

Die magnetische Susceptibilität des Wassers

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger** und Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Februar 1899.)

In den bis jetzt veröffentlichten Beobachtungen, welche verschiedene Forscher zur Bestimmung der Magnetisirungszahl des Wassers machten, gehen die erhaltenen Resultate weit auseinander.

Es fanden:[1]

	$-\varkappa . 10^6 =$
H. E. J. G. du Bois...	0·861
G. Quincke........	0·837
J. Königsberger[2] ..	0·803
Curie............	0·79
Townsend	0·77
Henrichsen.......	0·75
Wähner..........	0·541
Schuhmeister.....	0·436

Wir glaubten deshalb nicht, durch unsere Messungen[3] den Werth völlig sichergestellt zu haben und entschlossen uns deshalb zu den im Folgenden wiedergegebenen Untersuchungen.

Zunächst bestimmten wir unser magnetisches Feld von Neuem, und zwar durch Vergleichung einer bifilar aufgehängten, stromdurchflossenen Drahtrolle in einem Solenoid,

---

[1] Siehe G. Jäger und St. Meyer, diese Sitzungsber., 106, II.a, S. 611.

[2] Wied. Ann., 66, S. 703.

[3] L. c. S. 604.

dessen Feldstärke durch seine Dimensionen gegeben war, mit jenem zwischen den Polen unseres Magneten. Dadurch, dass wir die Rolle jedesmal auf gleichen Ausschlag brachten, verhielten sich die Intensitäten der durchgeleiteten Ströme wie umgekehrt die Feldstärken. Ausserdem wurden auch noch die Angaben einer Wismuthspirale mit den Resultaten der obigen und der früher benutzten Methode[1] verglichen. Die verschiedenen so erhaltenen Curven für die Beziehung der Stromstärke zu den Quadraten der Feldintensitäten weichen nur in geringem Grade von einander ab. Es ist hieraus ersichtlich, dass nicht in der Feldstärkebestimmung die Ursache der Verschiedenheit unserer Zahl von der des Herrn du Bois[2] gesucht werden kann.

Wir sahen uns ferner veranlasst, einer möglichen Fehlerquelle näher nachzugehen, der wir in unserer I. Mittheilung nur flüchtig erwähnten,[3] nämlich der Möglichkeit, dass unser Process des Zusammendrückens, respective Ausdehnens des grossen Luftvolumens V vielleicht nicht ganz isotherm vor sich gehen könnte.

Wir haben daher den Glascylinder, der das Volumen V enthielt, durch einen Kupfercylinder ersetzt, denselben wieder mit schmelzendem Eis umgeben und im Übrigen die Messungen in der Art und Weise durchgeführt, wie dies in der citirten Mittheilung beschrieben ist. Bei der grossen Temperaturleitfähigkeit und Wärmecapacität des Kupfers gegenüber den bezüglichen Werthen der Luft ist es erlaubt, die Temperatur des Kupfers constant gleich Null anzunehmen, und es ergibt bei unseren Cylinderdimensionen schon die Rechnung, dass der eingeschlossene Luftcylinder sich in einer halben Minute genügend abkühlt, um die entsprechenden Druckbeobachtungen damit vornehmen zu können.

Wir dehnten nunmehr unsere Messungen genau auf eine bestimmte Zeitdauer aus und erhielten, wenn wir bei jeder einzelnen Druckcompensation je eine Minute warteten, im

[1] L. c. S. 601.
[2] H. du Bois, Wied. Ann., 65, S. 38.
[3] L. c. S. 600.

Mittel aus 12 Messungen einen Ausschlag $s = 7\cdot 83$ *cm*; im Mittel aus 13 Messungen, die auf je $^1/_2$ Minute lang ausgedehnt wurden, $7\cdot 85$ *cm*. Auch während des Intervalles von $^1/_2$ bis 1 Minute und darüber hinaus konnten wesentliche Änderungen des Ausschlages nicht constatirt werden, was uns zur Annahme eines isothermen Vorganges berechtigt.

Das Volumen V des Kupfercylinders betrug $801\cdot 3$ cm^3. Das verwendete Scalenrohr hatte einen Querschnitt von gerade 1 mm^2, der herrschende Luftdruck P war $74\cdot 75$ *cm* Quecksilbersäule, die Temperatur 13° C., das mittlere Feldstärkenquadrat $M^2 = 289\,.\,10^6$ [C. G. S.].

Aus diesen Daten bestimmt sich bei Anwendung der Formeln[1]

$$p = -\frac{v}{V}P$$

$$\varkappa = \frac{2gp}{M^2},$$

der Susceptibilitätscoëfficient des Wassers bei 13° C. zu $\varkappa = -0\cdot 673\,.\,10^{-6}$.

Reducirt man diesen Werth unter Zugrundelegung unseres Temperaturcoëfficienten auf 0°, so ergibt sich

$$\varkappa = -0\cdot 687(1-0\cdot 0016\,t)\,.\,10^{-6}.$$

Zur Erregung des Magnetismus wurde der Strassenstrom verwendet, der im Mittel eine Spannung von 112 Volt hat. Bei obigen Messungen wurden die Spulen des Elektromagneten ohne Vorschaltwiderstand eingeschaltet und die jeweilige Stromstärke, welche Schwankungen von $22\cdot 8$ bis $21\cdot 9$ Ampère zeigte, an einem Milli-Volt und Ampèremeter von Siemens und Halske direct abgelesen. Die zugehörigen Grenzwerthe der Feldstärkenquadrate schwanken dabei zwischen 291.10^6 und $288\,.\,10^6$ [C. G. S.].

Bei den Messungen, die wir mit der Bezeichnung »Stellung IV« in unserer I. Mittheilung gegeben haben und die wir für den Werth $\varkappa$ des Wassers als ausschlaggebend

---

[1] L. c. S. 597 und 601.

betrachteten, benützten wir den Magneten gleichfalls in der eben angeführten Weise, können daher das Mittel der oben angeführten Feldstärken diesen Messungen zu Grunde legen. Dies ergibt für die Temperatur 14·3° C. $\varkappa = -0·662 . 10^{-6}$, während wir jetzt bei 13° $\varkappa = -0·673 . 10^{-6}$ gefunden haben.

Die Übereinstimmung ist also trotz des anderen Materiales und der anderen Dimensionen des neuen Apparates eine sehr gute.

Gerade so nun, wie man nach verschiedenen Beobachtungsmethoden verschiedene Werthe für die Oberflächenspannung erhielt, könnten ja auch nach den Methoden, die einerseits die Herren G. Quincke, H. du Bois und J. Königsberger, anderseits wir anwandten, für den Susceptibilitätscoëfficienten constante Unterschiede auftreten.

Um dies sicherzustellen, bestimmten wir deshalb die Magnetisirungszahl des Wassers noch nach zwei anderen Methoden.

A. Messungen mittelst der Wage.

Das k. k. physikalische Institut der Universität in Wien besitzt eine vollständig eisenfreie Wage, die sich, wie wir fanden, ausgezeichnet zur Messung selbst sehr kleiner Magnetisirungszahlen eignet.

An Stelle der einen Wagschale wurde für unsere Beobachtungen ein sehr dünnwandiges, beiläufig 30 *cm* langes, unten zugeschmolzenes Glasrohr angebracht, dessen unteres Ende gerade in die Mitte des Magnetfeldes zu stehen kam.

Der magnetische Zug auf das Glasrohr und Aufhängesystem wurde zuerst allein bestimmt, dann die Glasröhre ganz mit Wasser gefüllt, die Wage äquilibrirt, der Magnet erregt und der Auftrieb durch entsprechende Gewichtsentnahme auf der anderen Wagschale gemessen.

Um uns davon zu überzeugen, dass das Feldstärkenquadrat, mit dem der Magnet auf das ausserhalb des Feldes befindliche Ende des Wassercylinders wirkt, neben demjenigen zwischen den Polen zu vernachlässigen sei, gossen wir Wasser in der Höhe von 8 *cm* ab, ohne dass dabei eine Änderung des Auftriebes constatirt werden konnte. Ja, wir überzeugten uns

mittelst einer Wismuthspirale, dass erst in der Entfernung von 12 *cm* von der Mitte der Magnetpole das Quadrat der magnetischen Intensität 1% von dem des Feldes zwischen den Polen betrug. Auch erwies sich das letztere vollkommen homogen, indem wir dadurch, dass wir das Rohrende je um 1 *cm* über und unter die Mitte des Feldes brachten, keine Unterschiede des magnetischen Druckes erhielten.

Bei dieser Art der Messung erhält man den Druck auf die Endfläche. Um denselben auf die Einheit zu reduciren, muss man also den Querschnitt des inneren Röhrencylinders genau bestimmen, was wir durch Auswägen mit Quecksilber thaten. So ergab sich zum Beispiel für eine Röhre und eine Entfernung a vom zugeschmolzenen Ende der Querschnitt q:

a	q
25·2 *cm*	1·560 cm^2
19·2	1·546
13·6	1·530
8·7	1·525
3·5	1·508

Es ändert sich also das Caliber des Rohres so wenig, dass wir es innerhalb des homogenen Feldes als einen Cylinder vom Endquerschnitt 1·50 cm^2 annehmen können. Ähnlich war es bei den zwei anderen benützten Rohren.

Wir fanden bei der Röhre I mit dem Endquerschnitt 0·95 cm^2 bei 15° C.:

Gewicht des leeren Glasrohres für	$M^2 = 0$ [1]	11·700 *g*
	$M^2 = 289.10^6$[C. G. S.]	11·703 *g*
Magnetischer Zug auf das Glasrohr	....	+ 0·003 *g*
Gewicht des mit destillirtem Wasser gefüllten Rohres	$M^2 = 0$ ...	40·1655 *g*
	$M^2 = 287·5.10^6$[C. G. S.] ...	40·0745 *g*

[1] Wir bezeichnen das Quadrat der Feldstärke bei unerregtem Magnetismus mit 0 neben demjenigen, wenn das Feld erregt ist, indem wir den remanenten Magnetismus vernachlässigen.

Magnetischer Zug. . . . . — 0·091 g

Magnetischer Zug auf den Wassercylinder bei $M^2 = 287\cdot5 \,.\, 10^6$[C. G. S.]:

$$p = -0\cdot091 - 0\cdot003 = -0\cdot094\, g.$$

Dies ergibt aus

$$\varkappa = \frac{2gp}{M^2 . q} \quad (g = 981\, cm,\ q = \text{Querschnitt des Rohres in } cm^2)$$

$$\varkappa = \mathbf{-0\cdot675 \,.\, 10^{-6}}.$$

Für das Glasrohr II mit dem Endquerschnitt $q = 1\cdot50\, cm^2$ ergab sich bei 16° C.:

Gewicht des leeren Rohres $M^2 = 0$ .... 14·771 g
$M^2 = 289 \,.\, 10^6$[C. G. S.] .... 14·749 g

Magnetischer Zug auf das Glasrohr .... — 0·022 g

Gewicht des mit destillirtem Wasser gefüllten Glasrohres $M^2 = 0$ ... 58·410 g
$M^2 = 288 \,.\, 10^6$[C. G. S.]... 58·242 g

Magnetischer Zug.......................... — 0·168 g

Magnetischer Zug auf den Wassercylinder bei $M^2 = 288 \,.\, 10^6$[C. G. S.]:

$$p = -0\cdot168 + 0\cdot022 = -0\cdot146\, g,$$

woraus sich $\varkappa = \mathbf{-0\cdot665 \,.\, 10^{-6}}$ bestimmt.

Für das Glasrohr III mit dem Endquerschnitt $q = 1\cdot51\, cm^2$ fanden wir bei 15° C.:

Gewicht des leeren Rohres $M^2 = 0$ .... 14·275 g
$M^2 = 291 \,.\, 10^6$[C. G. S.]........ 14·254 g

Magnetischer Zug.......................... — 0·021 g

Gewicht des mit destillirtem Wasser gefüllten Rohres $M^2 = 0$ ... 57·074 g
$M^2 = 290 \,.\, 10^6$[C. G. S.]... 56·907 g

Magnetischer Zug .... — 0·617 g

Magnetischer Zug auf den Wassercylinder bei $M^2 = 290 . 10^6$[C. G. S.]:

$$p = -0·167+0·021 = -0·146\, g,$$

woraus folgt $\varkappa = \mathbf{-0·656 . 10^{-6}}$.

Alle hier angegebenen, mit der Wage unmittelbar bestimmten Gewichte sind nicht Mittel, sondern direct gemessene Werthe, da sich bei viermaliger Wägung immer dieselben Zahlen ergaben.

Ein messbarer Unterschied zwischen destillirtem Wasser und solchem aus der Wiener Hochquellen-Wasserleitung war nicht zu finden,[1] das $\varkappa$ des letzteren bestimmte sich zu $-0·661 . 10^{-6}$ bei 16° C.

Um auch Vergleichsdaten zu paramagnetischen Lösungen zu erhalten, haben wir eine Lösung von Manganchlorid ($MnCl_2$) und eine von Eisenchlorid ($FeCl_3$) untersucht.

Es ergab sich bei 15° C.:

Magnetischer Zug auf die Glasröhre II allein bei $M^2 = 289 . 10^6$[C. G. S.] .... — 0·021 g

Gewicht der Glasröhre gefüllt mit einer Lösung von $MnCl_2$ vom specifischen Gewicht $\gamma_{15°} =$ $= 1·160$, Procentgehalt 16·8%, Zahl der im Liter gelösten Gramm-Moleküle g. m. = 1·55

bei $M^2 = 0$ ... 65·75 g

$M^2 = 289 . 10^6$[C. G. S.]... 70·33 g

Magnetischer Zug.......................... +4·58 g

Magnetischer Zug auf den $MnCl_2$-Cylinder.... $p = +4·60\, g$

woraus folgt: $\varkappa = \mathbf{+20·8 . 10^{-6}}$.

Gewicht der Glasröhre II, gefüllt mit einer Lösung von $FeCl_3$ vom specifischen Gewicht $\gamma_{17·5} =$ $= 1·443$, Procentgehalt 42·2%, Zahl der im Liter gelösten Gramm-Moleküle g. m. = 3·76

bei $M^2 = 0$ ... 77·61 g

$M^2 = 287·5 . 10^6$[C. G. S.]... 88·08 g

---

[1] Auch Herr J. Königsberger konnte keine Verschiedenheit des $\varkappa$ für destillirtes Wasser und Freiburger Leitungswasser finden. Wied. Ann., 66, S. 704.

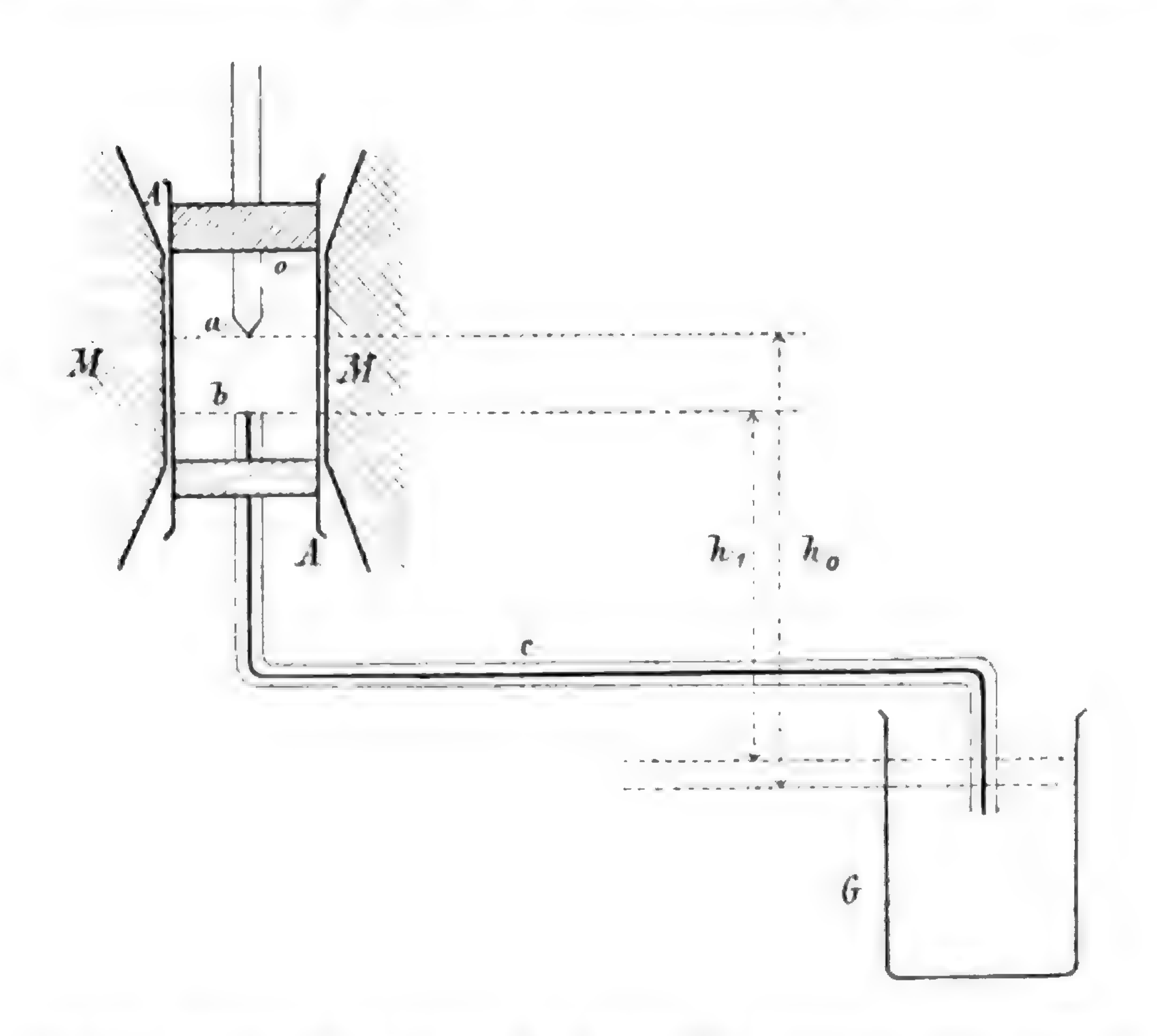
Magnetischer Zug .... 10·47 *g*
Magnetischer Zug auf den $FeCl_3$-Cylinder .... $p = +10\cdot49\,g$.

Daraus berechnet sich $\varkappa = \mathbf{47\cdot47.10^{-6}}$.

Beide Werthe stimmen sehr gut in die diesbezüglichen Curven unserer früheren Mittheilungen.[1]

B. Messungen aus Durchflusszeiten.

Da die relativen Werthe des $\varkappa$ zwischen Wasser und Eisenchloridlösung aus den früheren Messungen sichergestellt



waren, handelte es sich uns bei dieser Methode bloss darum, für eine concentrirte Lösung von $FeCl_3$ den absoluten Werth zu bestimmen.

[1] G. Jäger und St. Meyer, diese Sitzungsber., 106 (II. a), S. 630 und 639.

Zu diesem Behufe wurde ein cylindrisches Glasrohr *A*, das eben noch im Felde Platz hatte, zwischen die Pole des Magneten gebracht. Dasselbe ist an beiden Enden mit Korken verschlossen. Durch den unteren reicht eine Capillare *c*, die zweimal rechtwinkelig umgebogen in einer Entfernung von beiläufig 20 *cm* zum cylindrischen Glase *G* führt, welches die Lösung enthält. Der obere Kork trägt ein in eine Spitze *a* ausgezogenes, abgeschmolzenes Glasrohr mit einer seitlichen Öffnung *o*.

Zum Versuche wird die Lösung bis über das Ende *a* aufgesaugt und nun die Durchflusszeit beobachtet, welche vom Abreissen der Flüssigkeit bei *a* bis zum Verschwinden bei *b* gemessen wird. Die derartig beobachteten Zeiten weichen noch nicht um 1°/₀ ihres Werthes von einander ab.

Die Triebkraft für die durchfliessende Lösung ist bei ausgeschaltetem Magneten lediglich der hydrostatische Druck, bei vorhandenem Magnetfelde vermindert sich dieser Druck um den magnetischen Zug p. Die Höhe dh, um welche die Flüssigkeit im Rohre A fällt, ist also proportional der Zeit dt und dem hydrostatischen Drucke ρh [ρ = Dichte], so dass wir ohne Magnetfeld die Gleichung erhalten:

$$dh = -c\rho h dt \qquad [c = \text{Const.}]$$

Ist hingegen das Feld vorhanden, so wird die Gleichung

$$dh = -c(\rho h - p)dt.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man für den in Grammgewichten gemessenen Druck, wenn wir die Durchflusszeit ohne Magnetfeld t, mit Magnetfeld t' nennen und $\frac{t'}{t} = \tau$ setzen:

$$p = \rho \frac{h_1 h_0^\tau - h_0 h_1^\tau}{h_0^\tau - h_1^\tau}.$$

Der Anfangs- und Endwerth der Druckhöhe h (h_0 und h_1) wurde mit dem Kathetometer gemessen, die Durchflusszeiten wurden mit einer $^1/_5$ Secunde angebenden Stop-Uhr bestimmt.

Die Beobachtungen wurden derart durchgeführt, dass abwechselnd die Durchflusszeit der Lösung bei unerregtem und erregtem Feld gemessen wurde, wobei die Anfangs- und Schlussmessung ohne Magnetfeld stattfand.

Auf diese Weise erhielten wir:

	t	t'	M^2
	185·6 sec.		
		346·8 sec.	$286 \,.\, 10^6$ [C. G. S.]
	185·6		
		349·1	$286 \,.\, 10^6$
	184·2		
		343·0	$285 \,.\, 10^6$
	184·5		
		340·3	$285 \,.\, 10^6$
	181·8		
		336·8	$283 \,.\, 10^6$
	181·2		
Mittel	183·8 sec.	343·2 sec.	$285 \,.\, 10^6$ [C. G. S.]

Die allmälige Abnahme der Durchflusszeiten rührt von einer geringen Erwärmung der Lösung her, welche eine Folgeerscheinung der Erwärmung des Magneten durch den elektrischen Strom war.

Die Höhe h_0 war 10·73 *cm*.

» » h_1 » 9·75 *cm*.

Das specifische Gewicht der Lösung (derselben, deren Susceptibilitätscoëfficient mit der Wage gemessen worden war) war 1·44.

Daraus berechnet sich $\varkappa = 47 \cdot 1 . 10^{-6}$, während wir mit der Wage $\varkappa = 47 \cdot 5 . 10^{-6}$ gefunden haben. Die Übereinstimmung ist eine vorzügliche, betragen doch die Abweichungen nicht einmal $1^0/_0$.

Benützen wir nun die Verhältnisszahl zwischen dieser Lösung und Wasser, wie sie die Wage ergibt, so resultirt für das Wasser, reducirt auf 0°,

$$\varkappa = -\mathbf{0 \cdot 686 . 10^{-6}}.$$

Im Folgenden geben wir noch eine Zusammenstellung aller von uns für das Wasser gefundenen Werthe, und zwar mittelst

des Temperaturcoëfficienten von 0·0016, den wir in der citirten Abhandlung gefunden haben,[1] auf 0° reducirt.

Nach der Compensationsmethode unserer ersten Mittheilung[2]	$\varkappa = -0·69.10^{-6}$
Nach derselben Methode mit variirtem Apparate	$-0·687.10^{-6}$
Mittelst der Wage gemessen (Glasrohr I) ..	$-0·699.10^{-6}$
(Glasrohr II) .	$-0·691.10^{-6}$
(Glasrohr III).	$-0·680.10^{-6}$
Mittelst der Ausflusszeit unter Zugrundelegung des Verhältnisses von Eisenchlorid zu Wasser (beide mittelst der Wage im Glasrohr II bestimmt)......	$-0·686.10^{-6}$
Für das Wasser der Hochquellenwasserleitung	$-0·687.10^{-6}$

Im Mittel aus allen diesen Messungen:

$$\varkappa = -0·689(1-0·0016\, t).10^{-6}.$$

Es hat sich also die von uns in unserer ersten Mittheilung beschriebene und benützte Methode zur Bestimmung der Magnetisirungszahlen in jeder Hinsicht bewährt, wofür wir in jüngster Zeit noch einen Beleg durch eine Angabe in der Arbeit des Herrn E. Seckelson[3] erhielten. Dieser hat Feldstärkenbestimmungen nach der Stenger'schen Methode und mittelst der Magnetisirungszahl des Manganchlorids ($MnCl_2$),[4] die den Angaben des Herrn G. Quincke entnommen ist, gemessen.

---

[1] Diese Sitzungsber., 106, II.a, S. 613.

[2] G. Jäger und St. Meyer, Diese Sitzungsber., 106 (II.a), S. 595. Über die Correctur siehe diese Abhandlung, 263. Seite.

[3] E. Seckelson, Wied. Ann., 67, S. 43.

[4] Die dort befindliche Angabe des specifischen Gewichtes auf 4 Decimalen ohne Temperaturangabe erscheint unverständlich. Wir haben angenommen, dass sich dieselbe auf 15° C. beziehe.

Betrachtet man die grösste Feldstärke, so ergibt dieselbe nach der Stenger'schen Methode 5450 [C. G. S.], nach der Steighöhenmethode 5260 [C. G. S.]. Es ist auffallend, dass man, wenn man statt des dort angegebenen Susceptibilitätscoëfficienten des $MnCl_2$ denjenigen setzt, der sich aus unseren Messungen bei gleicher Concentration ergibt, man statt 5260 [C. G. S.] 5460 [C. G. S.] erhält, welcher Werth völlig mit dem nach der Stenger'schen Methode von Herrn Seckelson gefundenen Werthe übereinstimmt.

Über die lichtelektrischen Erscheinungen

(II. Mittheilung)

von

Dr. Egon R. v. Schweidler.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Februar 1899.)

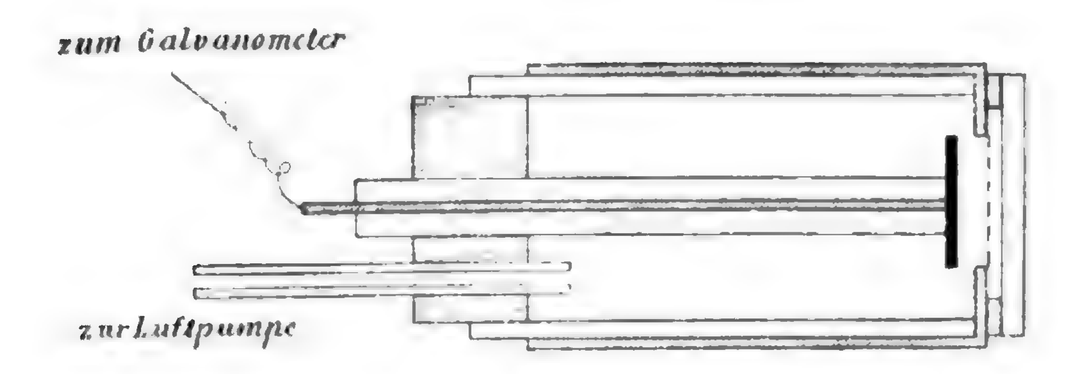
In meiner ersten Mittheilung[1] habe ich über Versuche berichtet, welche die Abhängigkeit des photoelektrischen Stromes von der Potentialdifferenz der Elektroden betreffen. Während nämlich nach Stoletow und Branly die Stromstärke mit wachsender Potentialdifferenz langsamer ansteigt als diese und sich einem oberen Grenzwerthe zu nähern scheint, fanden Elster und Geitel bei einer Kaliumzelle das entgegengesetzte Verhalten: die Stromstärke nimmt viel rascher zu als die Potentialdifferenz der Elektroden. Ich hatte erwartet, auch bei photoelektrischen Strömen in Luft normaler Dichte ein ähnliches Resultat zu erhalten, wenn die Spannung bis nahe an das Entladungspotential gesteigert würde, doch hatten meine Versuche zu keinem Ergebniss geführt. Die Schwierigkeit dabei lag darin, dass schon weit unterhalb des eigentlichen Entladungspotentiales (d. i. des Potentiales, bei welchem Funkenentladung eintrat) auch ohne Belichtung Ströme auf-

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CVII, Abth. II. a, Juli 1898.

traten, die unregelmässig und ruckweise sich änderten und wohl auf Büschelentladungen an den Ecken und Kanten der Elektroden beruhten.

Inzwischen erlangte ich Kenntniss von der Abhandlung des Herrn Kreusler,[1] in der gezeigt wird, dass in der That bei Annäherung an das Entladungspotential der photoelektrische Strom enorm rasch anwächst. Da aber die Versuchsanordnung des Herrn Kreusler — der calottenförmigen lichtempfindlichen Kathode steht als Anode ein Platindraht in einer Entfernung von wenigen Millimetern gegenüber — von vornherein vermuthen lässt, dass die oben erwähnten störenden Umstände sich besonders stark geltend machen, und da auch nicht ausdrücklich erwähnt wird, dass ohne Belichtung keine Ströme auftraten, hielt ich eine Weiterführung meiner Versuche nicht für überflüssig.

Der Apparat, dessen ich mich bediente, war folgendermassen construirt:



Ein Messingcylinder von 85 *mm* Länge und 50 *mm* Durchmesser war an einem Ende durch eine angelöthete Messingplatte verschlossen; in der Mitte derselben befand sich ein kreisrundes Loch von 25 *mm* Durchmesser, das von einem gleichfalls angelötheten Messingdrahtnetz (Maschenweite circa 1 mm^2, Drahtdicke circa 0·2 *mm*) bedeckt war; unter Zwischenlegung eines Kautschukringes konnte aussen noch eine Quarzplatte von 30 *mm* Durchmesser und 5 *mm* Dicke als luftdicht

[1] H. Kreusler, Über den photoelektrischen Effect in der Nähe des Entladungspotentiales. Verh. der phys. Ges. Berlin, Jahrg. 17 (1898), Nr. 8.

schliessendes Fenster angebracht werden. In den Messingcylinder war ein eben hineinpassender Glascylinder eingekittet, der an seinem hinteren Ende von einem zweifach durchbohrten Kautschukstopfen verschlossen war. Durch die eine Bohrung führte ein Glasrohr, welches das Innere des Cylinders mit einer Luftpumpe in Verbindung setzte, durch die andere (centrale) Bohrung führte die von einem Glasrohr umhüllte Zuleitung zur lichtempfindlichen Kathode. Diese bestand aus einem Zinkblechscheibchen von 25 *mm* Durchmesser, das dem Netze in einer Entfernung von 3—5 *mm* parallel gegenüberstand. Da so die Zuleitung zur Kathode und die innere Mantelfläche des Cylinders von Glas bedeckt waren, ausserdem die Rückseite und der Rand des Scheibchens mit Siegellack, der ringförmige Theil der Bodenfläche des Cylinders mit einer dünnen Paraffinschicht überzogen war, konnte eine Entladung nur zwischen der Vorderfläche des Zinkscheibchens und dem Netze stattfinden.

Die Kathode war durch ein D'Arsonvalgalvanometer (Stromempfindlichkeit $= 3000 \frac{mm}{10^{-6}\,\text{Amp.}}$) dauernd zur Erde abgeleitet, während der Messingcylinder auf ein gemessenes positives Potential geladen wurde. Analog wie bei den in der ersten Mittheilung beschriebenen Versuchen wurden Potentiale bis zu +300 Volt durch Abzweigen von einem Gleichstromkreise: Positives Kabel der Lichtleitung—Gasleitung hergestellt und an einem Westonvoltmeter direct abgelesen. Höhere Potentiale wurden dem auf einer Paraffinplatte ruhenden Cylinder mittelst einer Elektrisirmaschine ertheilt, wobei zur Erhöhung der Capacität eine grosse Leydenerflasche zugeschaltet war. Zur Messung dieser Potentiale dienten zwei Braun'sche Elektrometer mit einem Messbereiche von 1500, respective 10.000 Volt; für die Angaben derselben waren Correctionstabellen vorhanden. Als wirksame Lichtquelle verwendete ich eine Bogenlampe.

Vor jeder Versuchsreihe wurde die Kathode frisch amalgamirt; ferner wurde vor oder während jeder Versuchsreihe controlirt, ob bei den höchsten angewandten Potentialen auch ohne Belichtung ein messbarer Strom auftrat. Im Folgenden führe ich nur einige Messungen als typische an.

1. Druck = circa 750 *mm*.

E in Volt	i in Scalentheilen	Anmerkung
6840	Funkenentladung	(unbelichtet)
6620	0	
6750	60	
5220	45	
5450	40	
3030	27	
1170	13	
480	9	
255	7·5	
5620	38	
5900	46	

2. Druck = circa 750 *mm* (Graphische Darstellung, siehe Tafel, Fig. 1).

E	i	Anmerkung
5730	Funkenentladung	(unbelichtet)
5500	1	
5340	0	
5340	62—40	(Stromstärke rasch abnehmend)
5000	32	
4420	22	
5420	110—52	(Stromstärke rasch abnehmend)
5420	120	(nach neuerlicher Ladung auf 5420)
5000	60	
4900	40	
1030	8·5	
260	4	

3. Druck = circa 1 *mm* (Graphische Darstellung siehe Tafel, Fig. 2).

E	i	Anmerkung
260	0	(unbelichtet)
260	> 300	(Belichtung zur Zeit $t = 0^m$)
31	18	
52	30	
90	66	
124	125	($t = 3^m$)
210	> 300	
156	230—182	
156	192	
52	22—14	($t = 9^m$)
210	> 300	($t = 9^1/_2{}^m$)
210	278—245	($t = 10-13^m$)
52	15	($t = 14^m$)
260	0	(unbelichtet)
480	Entladung	(unbelichtet)

4. Druck = circa 17 *mm* (Graphische Darstellung siehe Tafel, Fig. 3).

E	i
260	31
31	6
78	9
124	12
240	24
310	65
62	10

5. Druck = circa 130 *mm* (Graphische Darstellung siehe Tafel, Fig. 4).

E	i	Anmerkung
61	3·5	
154	5	
260	6·5	
310	7	
1170	11	
1390	30	
1390	0	
1600	Funkenentladung	unbelichtet
1440	0	
1440	45	
1330	28	
1050	15	
260	5·2	

Trotz vieler Unregelmässigkeiten ist aus diesen Resultaten sofort ersichtlich, dass in der That von einem gewissen Punkte an die Stromstärke rascher steigt als die Potentialdifferenz der Elektroden, ferner dass bei kleinen Drucken dies schon bei relativ (im Verhältniss zum Entladungspotential) geringen Spannungen allmälig eintritt, hingegen bei Atmosphärendruck das Ansteigen des Stromes erst in der Nähe des Entladungspotentiales und dann sehr rasch geschieht, was mit den Resultaten Kreusler's in voller Übereinstimmung steht.

Abgesehen von den unregelmässigen Schwankungen der Stromstärke in Folge der Inconstanz der Lichtquelle glaubte ich häufig auch ein allmäliges Herabsinken der Stromstärke zu beobachten (vergl. Versuchsreihe Nr. 3). Auch Kreusler hat diese Erscheinung beobachtet und fasst sie als »Ermüdung« (Abnahme der Lichtempfindlichkeit) der Kathode auf; da jedoch in vielen Fällen nur die Stromintensitäten bei hohen Potentialen eine solche Abnahme zeigten, während die niedrigeren

Potentialen entsprechenden percentuell wenig geändert wurden, ferner da bisweilen der ursprüngliche hohe Werth der Stromstärke wieder erreicht wurde, wenn von Neuem das gesunkene Potential auf seinen früheren Werth gebracht wurde (vergl. Versuchsreihe Nr. 2 bei 5420 Volt), so erscheint es mir wahrscheinlicher, dass nicht die Kathode verändert wird, sondern der Entladungsvorgang an sich nicht stationären Charakters ist.

E. v. Schwei

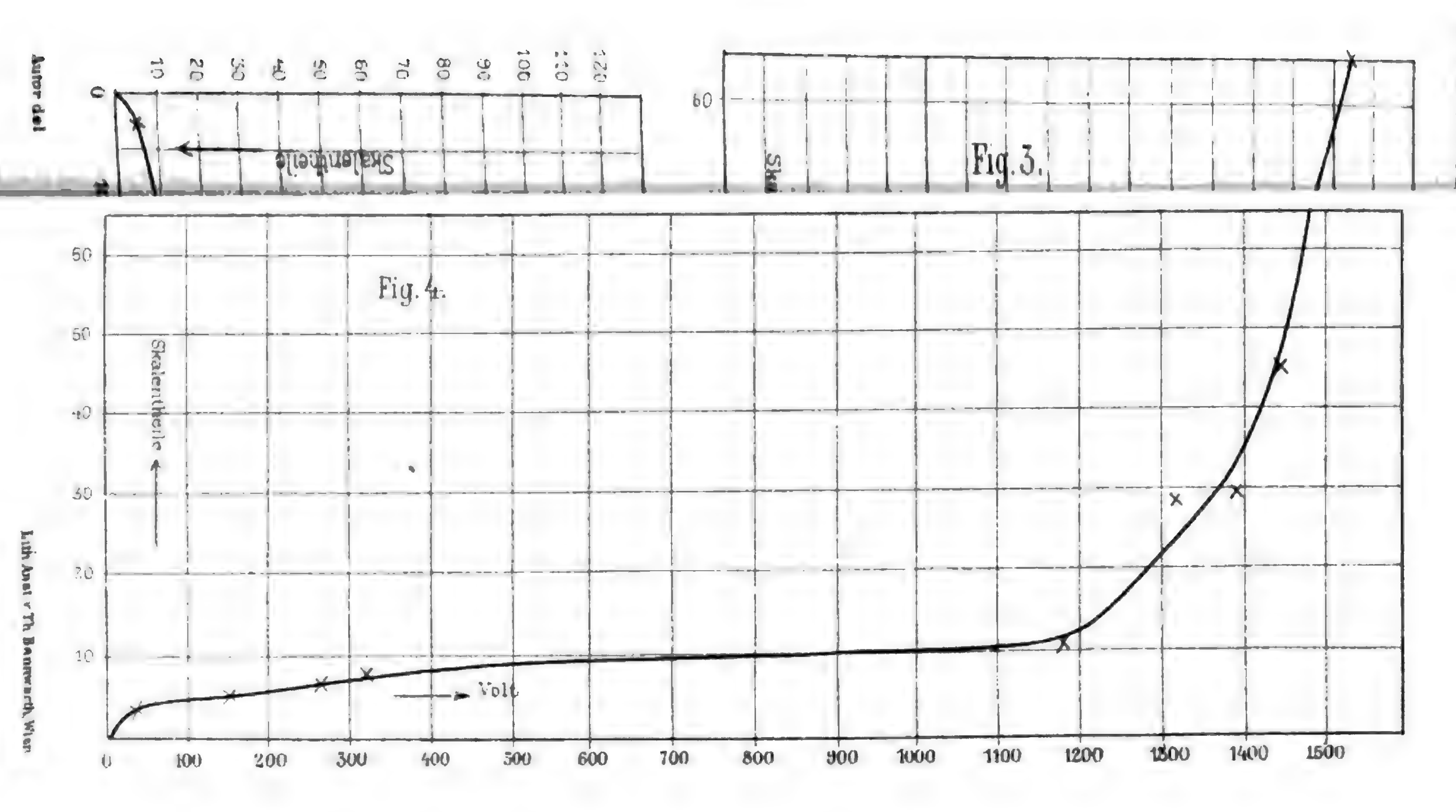


Fig. 3.
Fig. 4.
Skalentheile
Volt
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
10
20
30
40
50
60
Autor del
Lith Anst v Th Bannwarth, Wien

Zur täglichen Periode und Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit

von

Eduard Mazelle.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Februar 1899.)

Zum Studium des täglichen Ganges der relativen Feuchtigkeit an der Ostküste im Adriatischen Meere mussten die stündlichen Beobachtungen des hydrographischen Amtes der k. u. k. Kriegsmarine zu Pola herangezogen werden, da dieselben bisher die einzigen sind, welche an der Adria die relative Feuchtigkeit für alle Stunden des Tages bringen, da das k. k. Observatorium in Triest erst demnächst, und zwar nach vollständiger Installirung im neuen Observatorium, in der Lage sein wird, continuirliche Beobachtungen auch für dieses meteorologische Element einzuführen.

Das zu Pola in Verwendung stehende Instrument, ein Thermo-Hygrograph von Hasler und Escher, sowie die Art seiner Aufstellung und die Reducirung der Beobachtungen sind als bekannt vorauszusetzen. Details lassen sich übrigens aus den ausführlichen Publicationen des hydrographischen Amtes zu Pola leicht entnehmen (speciell aus dem I. Bande des Jahrbuches der Abtheilung für Geophysik, Jahr 1896, S. 10 und 24).

Sämmtliche der hier benützten Beobachtungen beziehen sich auf ein und dieselbe Hüttenaufstellung, da erst Ende 1896 die neue, luftigere Thermometerhütte in Pola activirt wurde. Die Beobachtungen besitzen daher den Vortheil, sich alle auf dasselbe Instrument und dieselbe Lage zu beziehen, leiden aber allerdings darunter, noch nicht die Vortheile der neuen Hüttenaufstellung aufweisen zu können. Wenn trotzdem diese Beobachtungen zur Bearbeitung herangezogen wurden, so geschah

es erstens darum, weil, wie Eingangs erwähnt, dieselben die einzigen unserer Küste sind, und zweitens noch weitere 8—10 Jahre gewartet werden müsste, bis die neue Serie der Beobachtungen zu einer ähnlichen Studie verwendet werden könnte.

Umso interessanter wird ein nachheriger Vergleich erscheinen, umsomehr als bis dorthin auch Triest mit seinen Beobachtungen wird mithelfen können, eventuelle Verbesserungen anzubringen.

In der hier folgenden kurzen Abhandlung soll zuerst die tägliche Periode der relativen Feuchtigkeit bestimmt und sodann dieselbe für heitere und trübe Tage getrennt behandelt werden. Als zweiter Theil folgt die Veränderlichkeit der Feuchtigkeit für einzelne Tagesstunden.

Tägliche Periode der relativen Feuchtigkeit.

Aus den stündlichen Beobachtungen des zehnjährigen Zeitraumes 1886—1895 wurden die Mittelwerthe für die einzelnen Monate berechnet und bevor dieselben zu den einzelnen Jahreszeiten- und Jahresmitteln vereinigt wurden, noch in Bezug auf die unperiodischen Änderungen corrigirt. Die erhaltenen Correctionsgrössen sind geringfügige, wie aus nachfolgender Reihe ersichtlich wird, welche dieselben, auf eine Decimale abgerundet, wiedergibt. Die Rechnungen wurden natürlich auf zwei Decimalen durchgeführt.

Jän.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Oct.	Nov	Dec.
0·1	—0·3	0·1	0·2	—0·1	—0·1	0·0	0·0	0·2	—0·1	—0·1	0·0

In der Tabelle I finden sich die stündlichen Mittelwerthe, nach Ausscheidung der unperiodischen Änderungen, zusammengestellt.

Um eine Bestimmung der Eintrittszeiten der Extreme zu erleichtern, wurden diese Werthe einer kleinen Ausgleichsrechnung nach $\frac{1}{4}(a+2b+c)$ unterzogen; der resultirende tägliche Gang wird in Tabelle II ersichtlich gemacht.

Die tägliche Periode ergibt natürlich einen dem Temperaturgange entgegengesetzten Verlauf, mit einem Maximum um circa 5^h Morgens, einem Minimum um circa 1^h Nachmittags.

Die nach dieser Tabelle entworfene graphische Darstellung lässt nachfolgende Eintrittszeiten der Extreme und Media entnehmen:

Eintrittszeiten des

	Maximums	I. Mediums	Minimums	II. Mediums
Jänner	$4\cdot3^h$ a.	$9\cdot6^h$ a.	$1\cdot7^h$ p.	$6\cdot6^h$ p.
Februar	6·0	9·6	1·7	6·9
März	5·9	8·9	1·3	6·3
April	5·4	8·1	1·3	6·2
Mai	4·9	8·1	1·7	6·7
Juni	4·6	7·8	0·9	7·0
Juli..........	4·7	7·8	1·4	6·8
August	4·4	8·1	0·6	6·6
September....	4·4	8·3	0·4	5·9
October	5·9	8·8	0·8	5·8
November	6·8	9·7	1·3	5·7
December	5·2	9·8	1·4	5·8
Winter	4·4	9·7	1·7	6·7
Frühling	5·3	8·4	1·4	6·4
Sommer......	4·6	7·9	0·6	6·8
Herbst	5·4	8·6	0·7	5·8
Jahr	4·8	8·4	1·2	6·6

Vergleichen wir die Schwankungen der Wendestunden beider Extreme, so finden wir, dass das Maximum zwischen $4\cdot3^h$ a. und $6\cdot8^h$ a., während das Minimum zwischen $0\cdot4^h$ p. und $1\cdot7^h$ p. oscillirt; daher für die Eintrittszeit des Maximums ein Spielraum von 2·5 Stunden, für die des Minimums hingegen nur einer von 1·3 Stunden resultirt. Die Schwankung der Eintrittszeiten des Maximums sind fast um das doppelte grösser als die des Minimums.

In Bezug auf den Sonnenaufgang zeigt das Maximum der Feuchtigkeit eine starke Verfrühung, namentlich in den Wintermonaten, wo es bis gegen $3^1/_2$ Stunden vor Sonnenaufgang zu bemerken ist. Vom März bis August sind die Unterschiede hingegen gering, das Maximum fällt im Mai, Juni und Juli kurz nach Sonnenaufgang.

Tabelle

Täglicher Gang der relativen Feuchtigkeit nach

	1ʰ a.	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ m.
Jänner . .	80·4	80·4	80·3	80·3	**80·6**	80·1	79·2	79·5	79·0	77·9	78·2	75·5
Februar .	77·7	77·9	77·9	78·1	78·1	**78·2**	78·1	77·9	76·3	73·7	71·1	68·8
März . . .	80·6	80·8	81·4	81·4	81·8	**82·2**	81·9	79·8	75·7	72·0	68·9	67·2
April . . .	80·9	80·9	80·8	80·9	**81·4**	**81·4**	80·5	76·0	72·2	69·6	67·2	66·8
Mai	82·5	82·9	83·3	83·7	**84·0**	**84·0**	82·2	76·3	72·1	68·9	67·3	66·2
Juni	83·1	83·4	83·9	83·8	**84·2**	83·7	80·3	72·0	67·3	64·4	62·8	62·2
Juli	78·9	79·1	79·4	79·5	**80·1**	79·2	76·0	68·5	63·1	60·1	58·1	57·4
August . .	78·6	78·7	79·1	**79·7**	79·5	79·4	77·5	70·0	63·9	61·1	58·0	57·7
Septemb.	79·6	79·6	80·2	**80·6**	80·1	80·3	80·0	75·2	68·7	63·8	61·9	61·3
October .	82·8	82·9	83·3	83·2	83·4	83·6	**83·8**	82·5	79·8	76·3	74·1	73·5
Novemb.	83·2	83·2	83·3	83·6	**83·7**	83·6	83·8	**84·0**	82·9	81·1	78·8	77·2
Decemb.	80·3	80·2	80·0	80·3	**80·4**	80·3	80·2	80·2	80·1	78·6	76·8	75·6
Winter . .	79·5	79·5	79·4	79·6	**79·7**	79·5	79·2	79·2	78·5	76·7	74·7	73·1
Frühling .	81·3	81·5	81·8	82·0	**82·4**	**82·5**	81·5	77·4	73·3	70·2	67·8	66·7
Sommer .	80·2	80·4	80·8	81·0	**81·3**	80·8	77·9	70·8	64·8	61·9	59·6	59·1
Herbst . .	81·9	81·9	82·3	82·5	82·4	**82·5**	**82·5**	80·6	77·1	73·7	71·6	70·7
Jahr . . .	80·7	80·8	81·1	[illegible]	**81·4**	[illegible]	[illegible]	77·0	73·4	70·0	68·4	67·4

I.

Ausscheidung der unperiodischen Änderungen.

1h p.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h n.	Mittel
73·5	73·3*	74·6	75·5	77·2	77·9	78·7	78·9	79·0	79·7	80·3	80·3	78·2
68·6	68·4*	69·0	70·4	72·1	73·5	75·0	75·8	76·3	77·1	77·5	77·6	74·8
66·9	66·8*	68·2	70·0	71·9	75·9	78·2	79·5	80·0	80·1	80·3	80·7	76·3
66·0*	66·1	67·2	68·5	70·7	74·6	78·5	80·7	80·9	80·5	80·4	80·2	75·5
65·2*	65·4	65·5	66·6	69·0	72·7	77·8	80·7	81·5	82·1	82·1	81·8	76·0
62·6	62·3*	63·1	63·9	65·8	69·1	74·2	78·9	80·9	81·7	82·7	82·9	74·2
56·9*	57·1	57·8	59·0	61·7	65·6	70·6	75·3	77·4	78·0	78·1	78·6	69·8
57·4*	58·3	59·8	61·1	63·7	67·5	72·3	76·0	77·4	77·3	77·8	78·0	70·4
61·0*	62·3	64·4	67·4	70·4	73·8	77·1	78·6	79·0	79·0	79·5	79·6	73·5
73·1*	73·4	74·7	76·6	78·4	80·4	81·7	82·1	82·5	82·8	82·8	83·1	80·0
76·7*	76·9	77·6	79·0	80·8	82·1	82·4	82·6	82·5	83·2	83·0	83·0	81·6
75·2*	75·3	75·4	77·1	78·4	78·8	79·7	79·9	79·5	79·9	79·9	80·3	78·8
72·4	72·3*	73·0	74·3	75·9	76·7	77·8	78·2	78·3	78·9	79·2	79·4	77·3
66·0*	66·1	67·0	68·4	70·5	74·4	78·2	80·3	80·8	80·9	80·9	80·9	76·0
59·0*	59·2	60·2	61·3	63·7	67·4	72·4	76·8	78·6	79·0	79·5	79·8	71·5
70·3*	70·9	72·2	74·3	76·5	78·8	80·4	81·1	81·3	81·7	81·8	81·9	78·4
66·9*	67·1	68·1	69·6	71·7	74·3	77·2	79·[illegible]	79·7	80·1	80·4	80·[illegible]	76·5

Tabelle

Ausgeglichener täglicher Gang

	1h a.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h m.
Jänner	2·2	2·2	2·1	**2·2**	**2·2**	1·8	1·4	1·1	0·7	-0·4	- 1·9	- 3·3
Februar	2·9	3·0	3·1	3·2	3·3	**3·4**	3·3	2·8	1·3	-1·1	- 3·6	- 5·5
März	4·4	4·6	5·0	5·2	5·5	**5·7**	5·2	3·0	-0·5	-4·1	- 7·0	- 8·8
April	5·2	5·4	5·4	5·5	**5·8**	5·7	4·1	0·7	-3·0	-5·8	- 7·8	- 8·8
Mai	6·4	6·9	7·3	7·7	**7·9**	7·5	5·2	0·7	-3·6	-6·7	- 8·6	- 9·8
Juni	8·9	9·2	9·6	9·7	**9·8**	8·8	5·1	-0·8	-6·2	-9·5	-11·1	-11·7
Juli	9·1	9·3	9·6	9·8	**9·9**	8·8	5·1	-0·8	-6·1	-9·4	-11·4	-12·3
August	8·1	8·4	8·8	**9·1**	**9·1**	8·6	5·9	0·4	-5·4	-9·4	-11·7	-12·7*
September ...	6·1	6·2	6·6	**6·9**	6·8	6·7	5·4	1·3	-4·4	-9·0	-11·3	-12·1*
October	2·9	3·0	3·2	3·3	3·4	**3·6**	3·4	2·1	-0·4	-3·4	- 5·5	- 6·5
November ...	1·5	1·6	1·8	1·9	2·0	2·1	**2·2**	2·1	1·1	-0·6	- 2·6	- 4·1
December ...	1·5	1·4	1·3	1·5	**1·6**	1·5	1·4	1·4	0·9	-0·3	- 1·9	- 3·0
Winter	2·2	2·2	2·2	**2·3**	**2·3**	2·2	2·0	1·7	0·9	-0·7	- 2·5	- 4·0
Frühling	5·2	5·5	5·8	6·1	**6·3**	6·2	4·7	1·4	-2·4	-5·6	- 7·9	- 9·2
Sommer .	8·7	9·0	9·3	9·5	**9·6**	8·7	5·3	0·4	-5·9	-9·4	-11·4	-12·3
Herbst	3·5	3·6	3·9	4·0	**4·1**	**4·1**	3·6	1·8	-1·3	-4·4	- 6·5	- 7·6
Jahr	4·9	5·1	5·3	5·5	**5·6**	5·3	3·9	1·1	-2·2	-5·0	- 7·1	- 8·3

II.

der relativen Feuchtigkeit.

1h p.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h n.	Mittel
- 4·4	- 4·5*	- 3·7	- 2·5	-1·3	-0·3	0·4	0·7	1·0	1·5	1·9	2·1	78·2
- 6·2*	- 6·2*	- 5·6	- 4·3	-2·8	-1·3	0·0	0·9	1·6	2·2	2·6	2·8	74·8
- 9·4*	- 9·1	- 8·0	- 6·3	-3·9	-0·8	1·6	3·0	3·6	3·8	4·0	4·3	76·3
- 9·3*	- 9·2	- 8·3	- 6·8	-4·4	-0·9	2·6	4·7	5·2	5·1	4·9	4·9	75·5
-10·5	-10·6*	-10·3	- 9·1	-6·7	-2·9	1·3	4·2	5·5	5·9	6·0	6·1	76·0
-11·8*	-11·6	-11·1	-10·0	-8·0	-4·6	-0·1	4·0	6·4	7·6	8·3	8·7	74·2
-12·7*	-12·6	-11·9	-10·4	-7·8	-3·9	0·7	4·8	7·2	8·1	8·4	8·8	69·8
-12·7*	-12·0	-10·6	- 9·0	-6·4	-2·6	1·6	5·0	6·6	7·0	7·3	7·7	70·4
-12·1*	-11·0	- 8·9	- 6·1	-3·0	0·3	3·2	4·8	5·4	5·6	5·9	6·1	73·5
- 6·7*	- 6·3	- 5·1	- 3·4	-1·6	0·2	1·5	2·1	2·5	2·7	2·9	2·9	80·0
- 4·7*	- 4·6	- 3·8	- 2·5	-0·9	0·2	0·8	0·9	1·1	1·4	1·4	1·5	81·6
- 3·5*	- 3·5*	- 3·0	- 1·8	-0·6	0·1	0·7	0·9	0·9	1·0	1·2	1·4	78·8
- 4·7	- 4·8*	- 4·2	- 2·9	-1·6	-0·5	0·3	0·8	1·1	1·5	1·9	2·1	77·3
- 9·8*	- 9·7	- 8·9	- 7·4	-5·1	-1·6	1·8	3·9	4·7	4·9	4·9	5·0	76·0
-12·4*	-12·1	-11·3	- 9·9	-7·5	-3·8	0·7	4·6	6·8	7·5	7·9	8·3	71·5
- 7·8*	- 7·3	- 6·0	- 4·1	-1·9	0·2	1·8	2·6	2·9	3·2	3·4	3·5	78·4
- 8·7*	- 8·5	- 7·6	- 6·1	-4·0	-1·4	1·1	3·0	3·8	4·3	4·5	4·7	75·8

In nachfolgender Reihe sind diese Differenzen dargestellt:

Eintrittszeit des Maximums der Feuchtigkeit minus Zeit des Sonnenaufganges.

Jän.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct	Nov	Dec.
−3·4	−1·2	−0·4	0·0	0·3	0·3	0·1	−0·7	−1·4	−0·5	−0·3	−2·4

Der Durchgang des absteigenden Curvenastes der Tagescurve durch den entsprechenden Mittelwerth verfrüht sich vom Winter zum Sommer sehr regelmässig, von $9·8^h$ a. des December gegen $7·8^h$ a. des Juli.

In Bezug auf den Sonnenaufgang ist hervorzuheben, dass im Winter dieses I. Medium um circa 2 Stunden, in den Sommermonaten hingegen um $3^1/_2$ Stunden nach Sonnenaufgang zu bemerken ist.

Eintrittszeit des I. Mediums minus Zeit des Sonnenaufganges.

Jän.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1·9	2·4	2·6	2·7	3·5	3·5	3·2	3·0	2·5	2·4	2·6	2·2

Das Minimum wird im Jahresmittel um 4·8 Stunden nach dem I. Medium erreicht; das Intervall ist am kleinsten im November und December, am grössten im Mai und Juli.

Eintrittszeit des Minimums minus Zeit des I. Mediums.

Jän.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept	Oct.	Nov.	Dec.
4·1	4·1	4·4	5·2	5·6	5·1	5·6	4·5	4·1	4·0	3·6	3·6

Unter dem Mittelwerth bleibt die normale Tagescurve durchschnittlich 10 Stunden; in den Sommermonaten länger, im Winter weniger, wie aus nachfolgenden Differenzen ersichtlich wird.

Eintrittszeit des II. Mediums minus Zeit des I. Mediums.

Jän.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
9·0	9·3	9·4	10·1	10·6	11·2	11·0	10·5	9·6	9·0	8·0	8·0

In Bezug auf den Sonnenuntergang wäre hervorzuheben, dass in den Wintermonaten das II. Medium bis gegen 2 Stunden nach dem Untergang, in den Sommermonaten hingegen fast 1 Stunde vor demselben erreicht wird. Die Verschiebung ist eine sehr regelmässige, wie aus folgenden Differenzen ersichtlich ist.

Eintrittszeit des II. Mediums minus Sonnenuntergang.

Jän.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1·8	1·4	0·1	−0·6	−0·7	−0·9	−0·9	−0·6	−0·3	0·5	1·1	1·4

Zur Bestimmung der periodischen Amplitude wurde der nicht ausgeglichene tägliche Gang der Tabelle I benützt. Diese Schwankungen erreichen ihren grössten Betrag mit 23% im Juli, den kleinsten mit 5% im December.

Periodische Amplituden.

Jän.	Feb.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
7·3	9·8	15·4	15·4	18·8	22·0	23·2	22·3	19·6	10·7	7·3	5·2

Bilden wir uns aus den täglichen Extremen die entsprechenden mittleren Maxima und Minima, so ergeben sich für die einzelnen Monate nachfolgende aperiodische Amplituden.

	Mittleres Max.	Mittleres Min.	Aperiod. Amplit.	Verhältniss Aperiod. A. / Period. A.
Jänner	89·3	65·7	23·6	3·23
Februar	86·4	61·6	24·8	2·53
März	89·5	59·0	30·5	1·98
April	88·3	59·4	28·9	1·88
Mai	89·2	57·4	31·8	1·69
Juni	89·9	53·0	36·9	1·68
Juli	87·0	49·0	38·0	1·64
August	87·5	49·8	37·7	1·69
September	88·1	54·5	33·6	1·71
October	90·4	66·3	24·1	2·25
November	90·5	70·6	19·9	2·73
December	88·9	67·4	21·5	4·13

Auch diese ergeben die grösste Schwankung der relativen Feuchtigkeit im Juli mit 38%, die kleinste mit 20% im November. — Naturgemäss sind diese aperiodischen Amplituden grösser als die periodischen, und zwar sind sie in den kalten Monaten (kleinere Schwankung) bedeutend überwiegender als in den warmen Monaten (wo beide Amplituden die grössten Werthe erreichen). Wie in der 4. Columne dargestellt wird, ist die aperiodische im December viermal so gross als die periodische Amplitude, während im Juli nur ein Quotient von 1·6 resultirt.

Gehen wir nun zur Bestimmung der täglichen Periode an **heiteren und trüben Tagen** über.

Als heitere Tage wurden jene bezeichnet, an welchen die Streifen des Sonnenschein-Autographen keine Lücke zeigten und zu den drei Terminbeobachtungen 7^h a., 2^h p. und 9^h p. die Bewölkung 0, 1 oder 2 notirt wurde, während als trübe Tage jene angesehen wurden, an welchen am Sonnenschein-Autographen keine Sonnenspur verzeichnet und ausserdem zu den drei Terminbeobachtungen 7^h, 2^h, 9^h die Bewölkung mit 8, 9 oder 10 angegeben war.

Aus dem hier in Untersuchung gezogenen 10jährigen Zeitraum ergeben sich 687 heitere und 247 trübe Tage. Dieselben vertheilen sich auf die einzelnen Monate folgendermassen:

	J.	F.	M.	A.	M.	Juni	Juli	A.	S.	O.	N.	D.
Heitere Tage......	42	44	**61**	59	45	37_*	94	**114**	83	37	36	35_*
Trübe Tage.......	**50**	34	26	19	9	4	1_*	2	3	20	28	**51**

Es möge hier noch erwähnt werden, dass für die folgende Untersuchung nur 680 heitere und 242 trübe Tage verwendet werden konnten, da von der ersten Gruppe 1 Tag im März und 6 Tage des Juli, von der zweiten Gruppe 2 Tage des Februar und je 1 Tag des März, October und December in Folge lückenhafter Aufzeichnung eliminirt werden mussten. Die oben dargestellten Reihen der Anzahl heiterer und trüber Tage ergeben eine deutlich ersichtliche doppelte Schwankung für den ersten Fall und eine einfache Schwankung für den zweiten. Die grösste Anzahl heiterer Tage lässt sich im März und August, die geringste im Juni und December bemerken. Die grösste

Häufigkeit trüber Tage fällt auf den December, die kleinste auf den Juli. Beide Reihen entsprechen der schon an anderer Stelle[1] berechneten Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Bewölkungsgrade, wo auch für die Bewölkung 0—1 und 9—10 die gleiche Vertheilung der Extreme zu beobachten ist.

In den Tabellen III und IV werden die stündlichen Werthe der relativen Feuchtigkeit nach Ausscheidung des jährlichen Ganges mitgetheilt, und zwar in der Tabelle III für die heiteren, in Tabelle IV für die trüben Tage. In beiden Zusammenstellungen sind die Jahreszeiten unter Berücksichtigung des verschiedenen Gewichtes der einzelnen Monate berechnet worden.

Die mit diesen Daten construirten Gangcurven lassen ersehen, dass dieselben, mit Ausnahme weniger Monate, im Laufe der 24 Stunden eine Hebung erleiden. Zur zahlenmässigen Darstellung dieser Erscheinung wurde die Feuchtigkeit für die Mitternachtsstunde des Vortages herangezogen. Hier mögen nur in Berücksichtigung der geringen Anzahl der Fälle, namentlich der trüben Tage, die resultirenden Werthe nach Jahreszeiten mitgetheilt werden.

Differenzen der Mitternachts-Feuchtigkeit

(12^h Nachts des betrachteten Tages minus 12^h Nachts des Vortages)

	Heitere Tage	Trübe Tage
Winter	1·8	0·6
Frühling	3·1	0·7
Sommer	0·4	2·9
Herbst	2·9	—1·3
Jahr	1·9	0·3

[1] Mazelle Ed., Beziehungen zwischen den mittleren und wahrscheinlichsten Werthen der Lufttemperatur. Denkschriften der math.-naturw. Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1895, S. 89, Tab. XXI, 14. und 16. Columne.

Tabelle

Stündliche Werthe der relativen

	1^h a	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	12^h m
Jänner . . .	73·0	72·6	71·6	69·8	70·5	70·7	68·7	70·4	69·6	67·5	64·8	63·3
Februar .	65·0	65·9	66·4	66·6	66·0	65·4	65·2	64·6	61·0	56·4	53·7	52·8*
März . . .	73·4	72·9	72·8	72·5	73·4	74·0	74·2	70·9	65·5	60·3	56·8	55·8*
April . . .	74·5	74·6	74·0	74·3	75·0	74·4	72·0	66·6	60·2	57·2	55·8	54·7
Mai . . .	78·2	78·8	79·4	80·0	80·8	80·6	77·2	69·4	64·7	61·2	60·0	60·7
Juni . . .	79·5	79·5	81·0	81·0	81·6	81·5	75·5	65·2	60·4	55·9	54·3	52·3*
Juli . . .	77·8	78·2	**78·6**	77·9	78·2	77·3	72·8	64·1	58·7	56·4	54·8	54·4
August . .	78·0	78·3	78·1	78·4	**78·4**	78·5	76·1	69·2	60·2	56·1	54·6	53·9
Septemb.	74·5	74·8	75·5	75·7	75·6	75·5	75·7	70·0	61·5	56·7	54·0	54·0*
October .	74·4	74·0	75·1	75·4	77·1	76·5	75·7	73·7	69·2	63·4	62·6	61·5
Novemb.	71·8	71·8	72·3	71·6	72·3	71·7	71·9	72·2	71·2	69·3	65·6	63·8*
Decemb.	72·9	72·5	71·9	71·2	72·1	71·5	71·8	72·1	70·0	66·4	65·3	64·7
Winter . .	69·9	70·0	69·7	69·0	69·3	69·0	68·3	68·7	66·5	63·1	60·9	59·9
Frühling .	75·2	75·2	75·1	75·4	76·1	76·1	74·3	69·0	63·4	59·5	57·3	56·7
Sommer .	78·1	78·4	78·6	78·5	78·7	**78·9**	74·8	66·7	59·7	56·2	54·6	53·8*
Herbst . .	73·8	73·8	74·7	74·7	75·2	74·9	74·9	71·4	65·6	61·2	59·2	58·4*
Jahr	74·6	74·7	75·0	74·9	75·4	75·3	73·5	68·7	63·1	59·4	57·4	56·7

III.

Feuchtigkeit für heitere Tage.

1ʰ p.	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ n.	Mittel
61·8*	61·8*	65·1	65·3	68·5	69·8	71·7	71·9	71·4	72·5	**74·3**	73·1	69·2
54·1	55·0	55·5	57·6	59·7	62·1	63·7	64·9	64·5	65·9	66·3	**67·5**	61·9
56·5	56·1	58·8	61·1	63·9	70·1	74·2	75·2	76·0	76·8	77·5	**77·7**	68·6
54·5*	56·2	56·2	57·2	60·3	66·5	72·0	74·3	74·2	74·5	**76·1**	75·6	67·1
58·7*	58·7*	61·0	61·0	64·0	68·7	74·3	78·5	81·0	**81·6**	81·5	81·5	71·7
55·5	55·5	58·4	61·3	63·5	67·6	73·9	78·9	80·8	**82·3**	**82·3**	81·8	70·4
53·8*	54·5	55·7	57·5	60·3	63·0	69·0	74·1	75·9	75·9	76·1	77·1	67·6
53·3*	54·1	56·1	58·6	62·3	66·3	72·2	76·4	76·9	77·3	77·7	77·5	68·7
55·1	57·0	59·4	62·9	66·6	70·7	74·8	75·8	75·1	74·6	75·3	**76·4**	68·7
61·1*	63·3	66·6	70·2	72·3	75·6	77·5	78·5	80·3	80·4	**81·0**	80·7	72·8
64·0	64·8	65·9	69·0	71·5	73·3	74·2	73·7	73·1	**74·3**	74·0	73·6	70·7
63·1	63·0*	64·7	68·8	70·9	72·3	73·7	74·3	75·1	75·9	**76·8**	76·0	70·7
59·4*	59·7	61·6	63·6	66·0	67·8	69·4	70·1	70·0	71·1	**72·1**	72·0	67·0
56·4*	56·8	58·4	59·7	62·6	68·3	73·3	75·7	76·6	77·2	**78·0**	77·9	68·9
53·8*	54·5	56·3	58·6	61·7	65·3	71·4	76·0	77·3	77·6	77·9	78·1	68·6
58·6	60·3	62·6	66·0	69·0	72·4	75·2	76·0	75·9	75·9	76·5	**76·7**	70·1
56·5*	57·3	59·2	61·5	64·3	68·1	72·5	75·4	75·8	76·3	76·6	**77·0**	68·7

Tabelle

Stündliche Werthe der relativen

	1h a.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h n.
Jänner . . .	84·5	85·5	**85·7**	85·3	85·2	85·4	84·2	84·4	84·4	85·2	84·7	85·3
Februar . .	84·0	84·6	85·4	86·0	85·9	85·8	**87·1**	86·9	86·2	85·6	84·4	83·2*
März	86·1	87·1	88·3	89·1	89·4	90·5	**90·8**	89·6	89·3	86·6	86·1	86·3
April	87·1	87·9	87·6	85·4	85·7	85·5	86·3	86·9	86·3	85·4	84·7*	85·2
Mai	85·2	85·5	85·5	85·6	86·2	85·9	85·6	83·3	84·3	83·7	84·8	86·0
Juni	87·9	88·4	87·9	87·2	87·2	85·7	83·8	78·8*	80·8	85·5	84·5	87·5
Juli	72	70	68,	69	69	70	82	89	89	91	91	92
August . . .	81.0	83·0	84·0	82·5	82·5	87·5	89·5	90·0	91·0	92·0	91·5	95·0
September	83·2	82·2	79·9	83·4	**85·8**	85·1	81·8	81·1	81·8	81·4	82·0	81·3
October . .	88·2	87·5	87·4	87·2	86·9	86·6	87·1	85·8*	86·2	87·2	87·6	88·2
November	90·4	90·1	90·9	91·4	91·5	90·8	91·5	**92·1**	91·7	91·6	91·9	91·9
December	87·0*	87·7	87·5	88·2	88·5	88·2	87·5	88·0	88·8	88·1	88·1	87·5
Winter . . .	85·1*	86·0	86·2	**86·5**	**86·5**	86·4	86·1	86·3	86·4	86·3	85·8	85·7*
Frühling . .	86·4	87·2	87·6	87·3	87·7	88·0	**88·4**	87·6	87·4	85·8	85·4	85·8
Sommer . .	83·6	84·2	83·9	83·2*	83·2*	83·9	85·1	83·4	84·9	88·1	87·4	90·3
Herbst . . .	89·2	88·7	89·0	89·4	89·4	88·9	89·3	89·2	89·1	89·4	89·7	**89·9**
Jahr	86·2	86·7	87·1	87·2	87·3	87·3	**87·4**	87·2	87·3	87·0	86·5	86·7

IV.

Feuchtigkeit für trübe Tage.

1h p.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h n.	Mittel
84·0	83·1*	83·1*	83·7	83·8	83·9	84·1	84·2	84·1	84·4	84·3	84·0	84·4
84·8	85·9	86·2	86·5	86·0	85·9	85·5	85·4	85·4	85·6	86·0	85·6	85·6
85·0	85·7	84·7*	85·2	85·4	85·4	84·5	85·1	87·1	86·6	86·1	86·0	86·9
86·7	86·1	86·3	86·0	86·0	86·6	87·0	88·5	90·1	**90·4**	89·8	89·0	86·9
85·8	83·1	82·2*	85·1	86·7	88·2	88·1	**88·8**	88·4	87·3	87·1	87·8	85·8
85·8	88·0	87·0	89·0	89·3	90·3	90·4	91·1	**92·6**	90·4	89·1	87·4	87·3
99	92	86	91	94	90	81	87	91	93	94	96	85·3
95·5	95·0	94·5	94·0	95·0	89·5	88·0	89·0	88·0	86·0	85·5	78·0*	88·6
82·0	82·7	79·9	80·6	78·6	78·9	75·6	71·6	71·2*	71·5	72·1	72·5	79·4
88·5	88·3	88·2	88·8	89·4	89·8	**89·9**	89·5	89·8	89·4	88·9	89·6	88·2
91·5	90·8	89·9	89·6	89·1	90·2	90·2	90·5	89·2	89·5	89·5	88·6*	90·6
88·1	88·2	88·2	88·1	88·3	89·2	**89·3**	89·0	88·5	88·3	87·9	87·6	88·2
85·8	85·8	85·8	86·1	86·1	**86·5**	**86·5**	86·4	86·2	86·3	86·2	85·9	86·1
85·7	85·4	**84·8***	85·4	85·7	86·2	85·9	86·8	**88·3**	88·0	87·5	87·3	86·7
90·4	90·6	89·0	90·7	**91·6**	90·0	88·4	90·0	91·1	89·5	88·8	86·0	87·4
89·8	89·4	88·6	88·7	88·5	89·3	89·1	88·9	88·3	88·2	88·2	87·9*	89·0
86·7	86·6	86·2*	86·5	86·6	86·9	86·9	87·1	87·2	87·0	87·0	86·7	86·9

Im Jahresdurchschnitte schliessen die Tage bei heiterem Wetter mit einem grösseren Feuchtigkeitsüberschuss als bei trübem Wetter, 1·9 gegen 0·3. Die heiteren Tage zeigen die geringste Erhöhung während des Sommers, während die grösste im Frühjahr und Herbst stattfindet. Für die trüben Tage lässt sich das Entgegengesetzte hervorheben, da die grösste Zunahme der Feuchtigkeit im Sommer zu bemerken ist. Im Herbst ist das Minimum zu entnehmen; es findet dortselbst sogar eine Abnahme statt.

Für die einzelnen Jahreszeiten wurden die stündlichen Werthe einer Ausgleichung nach $^1/_4(a+2b+c)$ unterzogen, die Resultate finden sich in Tabelle V.

Aus den Gangcurven an heiteren Tagen lassen sich nachfolgende Eintrittszeiten für die Extreme und Medien entnehmen:

Eintrittszeit des

	Max.	I. Med.	Min.	II. Med.
Winter	—	8·7h a.	0·9h p.	5·6h p.
Frühling	5·3h a.	8·0	0·7	6·2
Sommer	4·8	7·8	0·5	6·4
Herbst	5·4	8·2	0·3	5·3
Jahr	4·9	7·9	0·6	6·1

Differenzen

(Allgemein—heiter)

	Max.	I. Med.	Min.	II. Med.
Winter	—	1·0	0·8	1·1
Frühling	0·0	0·4	0·7	0·2
Sommer	—0·2	0·1	0·1	0·4
Herbst	0·0	0·4	0·4	0·5
Jahr	—0·1	0·5	0·6	0·5

Die tägliche Periode an heiteren Tagen zeigt eine Verfrühung der Eintrittszeit des Minimums im Vergleiche zu der an allen Tagen, und zwar ist dieselbe am stärksten ausgeprägt im Winter, am geringsten im Sommer. In Bezug auf das Maximum wäre hervorzuheben, dass die Wintercurve ein solches eigentlich gar nicht anzeigt, die Ordinaten verkleinern

sich continuirlich von 1^h Morgens bis zur Zeit des Minimums, von wo aus sie wieder ohne Unterbrechung zunehmen bis Mitternacht, woselbst der grösste Ordinatenwerth erreicht wird. Für den Sommer ist an heiteren Tagen eine Verspätung des Maximums zu bemerken; im Frühling und Herbst fällt dieses Extrem auf dieselbe Stunde wie im allgemeinen Gange.

In der Jahrescurve der heiteren Tage antecipirt das Minimum um 0·6 Stunden, während das Maximum um 0·1 Stunden später eintrifft als in der Jahrescurve sämmtlicher Tage.

Beide Medien werden an heiteren Tagen durchschnittlich früher erreicht als im allgemeinen täglichen Gange, am grössten erscheint die Verfrühung für beide Medien im Winter.

Die Gangcurven für trübe Tage zeigen einen flachen unregelmässigen Verlauf, immerhin lässt sich hervorheben, dass die Maxima und Minima in der Jahrescurve, wie in der Winter- und Frühlingsgangcurve noch erkennbar sind. Im Allgemeinen verspäten sich diese Extreme im Vergleiche zu denen aller Tage. Erwähnenswerth wäre auch, dass sich an trüben Tagen ausser dem Morgenmaximum noch ein Abend-Maximum entnehmen lässt.

Die Eintrittszeiten sind folgende:

	Max.	I. Med.	Min.	II. Med.
Winter . .	5^h a. (7^h p.)	10·3^h a.	1^h p.	4·5^h p.
Frühling	7^h a. (9·6^h p.)	9·3^h a.	3^h p.	7·8^h p.
Jahr.	6·5^h a. (8·6^h p.)	10^h a.	3·4^h p.	7·0^h p.

Die Herbstcurve fällt an trüben Tagen sehr unregelmässig aus, mit dem Maximum gegen 12^h Mittags und dem Minimum um 4^h p.

Einen ganz abnormalen Verlauf[1] zeigt die Sommercurve. Dieselbe erhebt sich um 10·2^h a. über den Mittelwerth und sinkt um 11·6^h p. unter denselben. Das Minimum wird um 4·4^h a. erreicht, beiläufig zur Zeit, wo in den anderen Gangcurven das Maximum eintrifft, während das Sommermaximum der hier in Betracht kommenden trüben Tage auf 4·8^h p. fällt.

[1] Allerdings konnten aus dem zur Bearbeitung gelangten Jahrzehnt nur 7 trübe Tage herangezogen werden.

Tabelle

Ausgeglichener täglicher Gang

	1h a.	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h m
An heiteren												
Winter . . .	2·9	2·9	2·6	2·3	2·1	1·9	1·6	1·1	–0·8	– 3·6	– 5·8	– 7·0
Frühling . .	6·3	6·3	6·3	6·6	**7·0**	6·8	4·5	0·0	–5·1	– 9·0	–11·2	–12·1
Sommer . .	9·6	9·8	9·9	10·0	**10·1**	9·2	5·2	–1·6	–8·0	– 11·9	–13·8	–14·6$_*$
Herbst . . .	3·7	3·9	4·4	4·7	**4·9**	4·9	3·9	0·7	–4·1	– 8·3	–10·6	–11·5$_*$
Jahr	5·9	6·1	6·2	6·4	**6·6**	6·2	4·1	–0·2	5·1	8·9	11·0	–11·9
An trüben												
Winter . . .	–0·7	–0·3	0·1	0·3	**0·4**	0·2	0·1	0·2	0·3	0·1	– 0·2	– 0·4$_*$
Frühling . .	0·0	0·4	0·7	0·8	1·0	1·3	**1·4**	1·1	0·4	– 0·6	– 1·1	– 1·0
Sommer . .	–3·6	–3·4	–3·6	–4·0$_*$	–4·0$_*$	–3·4	–3·0	–3·2	–2·1	– 0·3	0·9	2·2
Herbst . . .	0·0	–0·1	0·0	0·3	0·3	0·1	0·2	0·2	0·2	0·4	0·7	**0·8**
Jahr	–0·5	–0·2	0·1	0·3	0·4	**0·4**	**0·4**	0·3	0·3	0·0	– 0·2	– 0·2

V.

der relativen Feuchtigkeit.

	1ʰ p.	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ n.	Mittel
Tagen													
	−7·4*	−6·9	−5·4	−3·3	−1·1	0·7	2·2	2·9	3·3	4·1	4·8	5·0	67·0
	−12·3*	−11·8	−10·6	−8·8	−5·6	−0·8	3·8	6·4	7·6	8·4	8·9	9·0	68·9
	−14·6*	−13·8	−12·2	−9·8	−6·8	−2·7	2·4	6·6	8·4	9·0	9·3	9·4	68·6
	−11·1	−9·6	−7·2	−4·2	−1·0	2·1	4·6	5·7	5·8	6·0	6·3	6·5	70·1
	−12·0*	−11·1	−9·4	−7·1	−4·2	−0·5	3·3	5·9	7·1	7·6	8·1	8·3	68·7

	1ʰ p.	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ n.	Mittel
Tagen													
	−0·3*	−0·3	−0·2	−0·1	0·1	0·3	0·4	0·3	0·2	0·1	0·0	−0·1	86·1
	−1·1	−1·4	−1·6*	−1·4	−1·0	−0·7	−0·5	0·2	1·1	1·2	0·9	0·7	86·7
	3·0	2·7	2·4	3·1	3·6	2·6	1·8	2·5	3·0	2·3	0·9	−0·5	87·4
	0·7	0·3	−0·2	−0·4*	−0·2	0·1	0·1	0·2	0·6	0·8	−0·9	1·0	86·6
	−0·2	−0·4	−0·5*	−0·4	−0·3	−0·1	0·0	0·2	0·2	0·1	0·0	0·1	86·9

Für die zwei Jahreszeiten, in welchen die tägliche Periode noch erkennbar ist, beträgt die Verspätung des Maximums für den Winter etwas über eine halbe Stunde (0·6 Stunden), für den Frühling und für das Jahr fast $1^3/_4$ Stunden (1·7 Stunden). Das Minimum ist im Winter etwas früher zu entnehmen, hingegen im Frühling und im Jahresdurchschnitt später als in der Periode aller Tage.

In Bezug auf die Schwankungen in der täglichen Periode der drei Gruppen (allgemein, heitere und trübe Tage) lässt sich constatiren, dass natürlich der tägliche Gang an heiteren Tagen die grösste Amplitude, an trüben Tagen die kleinste aufzuweisen hat.

Die periodischen Amplituden sind (aus den unausgeglichenen Werthen entnommen) nachfolgende:

	Allgemein	Heiter	Trüb
Winter	$7·4_*$	$12·7_*$	$1·4_*$
Frühling ...	16·5	21·6	3·6
Sommer ...	**22·3**	**25·1**	**8·4**
Herbst	12·2	18·3	2·0
Jahr.......	14·5	20·5	1·2

Die grösste Amplitude findet sich in allen drei Gruppen im Sommer, die kleinste im Winter.

Die Amplitude an heiteren Tagen ist im Winter 1·7mal grösser als an allen Tagen, im Frühling 1·3, im Sommer 1·1 und im Herbst 1·5mal grösser. In Bezug auf die Amplitude trüber Tage ist die an heiteren Tagen im Winter und Herbst circa 9mal so gross, im Frühling 6mal und im Sommer 3mal so gross.

Es ist daher die Schwankung an heiteren Tagen im Vergleiche zu der an sämmtlichen Tagen und an ganz trüben Tagen im Winter stets am überwiegendsten, während im Sommer dieser Unterschied den kleinsten Betrag erreicht.

An sämmtlichen Tagen erscheint die Sommerschwankung 3mal so gross als die tägliche Amplitude der Wintermonate, an heiteren Tagen wird der Unterschied geringer, und zwar ist erstere nur 2mal so gross, während an trüben Tagen das

grösste Überwiegen constatirt werden muss, und zwar wird hier die Amplitude des Sommers 6mal so gross als die des Winters.

Die aperiodischen Amplituden sind aus nachfolgender Zusammenstellung zu entnehmen:

	Heiter			
	Mittleres		Aperiod.	Verhältniss
	Max.	Min.	Amplit.	Aperiod. A. / Period. A.
Winter	82·2	51·0	31·2	2·46
Frühling	86·4	48·2	38·2	1·77
Sommer	85·9	46·4	39·5	1·57
Herbst	85·0	52·2	32·8	1·79
Jahr	85·1	49·0	36·1	1·76

	Trüb			
	Mittleres		Aperiod.	Verhältniss
	Max.	Min.	Amplit.	Aperiod. A. / Period. A.
Winter	94·1	76·6	17·5	12·50
Frühling	94·2	76·2	18·0	5·00
Sommer	96·2	72·9	23·3	2·77
Herbst	94·9	80·7	14·2	7·10
Jahr	94·3	77·2	17·1	14·25

Auch hier ergibt sich dasselbe Verhalten der einzelnen Amplituden. In allen Gruppen überwiegt die aperiodische Schwankung gegenüber der periodischen; am meisten in den Wintermonaten, am geringsten in denen des Sommers. Die Quotienten erscheinen zu allen Jahreszeiten am grössten bei den trüben Tagen, am kleinsten bei den heiteren.

Die grösste durchschnittliche Schwankung erreicht im Sommer an heiteren Tagen den Betrag von beiläufig 40%, an trüben 23%, während dieselbe an heiteren Wintertagen nur 31%, an trüben Herbsttagen gar nur 14% beträgt.

Die absoluten Extreme schwanken in dem hier in Betracht gezogenen Zeitraum an heiteren Tagen um 84%, d. i. zwischen 100% und 16%; an trüben Tagen ist diese absolute Schwankung kleiner, und zwar beträgt sie 54%, da die Extreme sich zwischen den Grenzen 100% und 46% bewegen.

Vergleichen wir die einzelnen Gangcurven derselben Jahreszeit, so ersehen wir, dass auch die Ordinatenunterschiede eine tägliche Periode aufweisen, wie aus der Tabelle VI ersichtlich wird, wo diese Differenzen dargestellt erscheinen.

Die Gangcurven der heiteren Tage liegen immer bei kleineren Feuchtigkeitswerthen als an allgemeinen Tagen; der Unterschied ist am grössten im Winter, am kleinsten im Sommer. Die mittlere Ordinatendifferenz beträgt im Winter 10%, im Sommer nur 3%.

An den trüben Tagen, woselbst durch alle Jahreszeiten zu sämmtlichen Stunden höhere Feuchtigkeitswerthe zu finden sind als an den Durchschnittstagen, finden wir den grössten Unterschied im Sommer mit circa 16%, den kleinsten im Winter mit circa 9%.

Die grösste Ordinatendifferenz wird zu allen Jahreszeiten, sowohl an heiteren, als an trüben Tagen im Vergleiche zu den allgemeinen Werthen, immer um die Mittagszeit erreicht. An heiteren Tagen zeigen die Stunden von 10^h und 11^h Vormittags den grössten Ordinatenunterschied, an trüben Tagen die zwischen 1^h und 2^h Nachmittags.

Zum Schlusse soll noch der Ordinatenunterschied der Extreme derselben Art zwischen den in Betracht gezogenen drei Gruppen bestimmt werden.

	Differenzen der Maxima		Differenzen der Minima	
	Allgem.—heiter	Trüb—heiter	Allgem.—heiter	Trüb—heiter
Winter . . .	7·6	14·4	12·9	25·7
Frühling . .	4·5	10·4	9·6	28·4
Sommer . .	2·4	12·7	5·2	29·4
Herbst . . .	5·8	13·2	11·9	29·5
Jahr.	4·4	10·4	10·4	29·7

Es folgt daraus, dass die Ordinaten der Feuchtigkeitsminima um grössere Beträge differiren als die der Maxima, und zwar sind in allen vier Jahreszeiten diese Unterschiede der Minima annähernd doppelt so gross als die der Maxima.

Veränderlichkeit der relativen Feuchtigkeit.

Zur Bestimmung der Veränderlichkeit wurden die Beobachtungen desselben Decenniums (1886—1895) herangezogen, und zwar wurde die Veränderlichkeit von Tag zu Tag, für jede vierte Stunde, für die vier Monate Jänner, April, Juli und October, welche als die Repräsentanten der vier Jahreszeiten betrachtet werden können, bestimmt. Die gewählten Stunden sind 2^h, 6^h und 10^h Vor- und Nachmittags. Kleine Lücken in den Aufzeichnungen wurden durch Interpolation ergänzt. An zwei Stellen, und zwar im Juli 1886 und October 1890, fehlen zwei aufeinanderfolgende Tage ganz, so dass die Veränderlichkeit für drei anschliessende Tage in Wegfall kommen musste.

Die resultirende mittlere Veränderlichkeit in den einzelnen Jahren und Stunden ist in Tabelle VII zusammengestellt. Man ersieht daraus, dass das Maximum in den einzelnen Jahren ziemlich constant auf dieselbe Tageszeit fällt, z. B. im Jänner 7mal auf 2^h p., 1mal auf 10^h a. und nur 2mal auf 2^h a., im April und Juli schwankt es zwischen 10^h a. und 6^h p. und im October zwischen 6^h a. und 2^h p. Das Minimum zeigt hingegen grössere Verschiebungen. Betrachten wir alle vier Monate zusammen, so finden wir eigentlich zu jeder der in Betracht gezogenen Stunden ein Minimum vor, allerdings in den 40 möglichen Fällen nur 1mal um 10^h a. und 4mal um 2^h p. Am häufigsten fällt das Minimum auf die Stunde von 10^h p., das Maximum auf 2^h p.

Bilden wir uns die 10jährigen Mittelwerthe dieser Veränderlichkeiten, siehe Tabelle VIII, so finden wir, dass die grösste mittlere Veränderlichkeit im April (Frühjahr) erreicht wird, mit 11·05, die kleinste im October (Herbst) mit 9·32.

Die Maxima und Minima in der täglichen Periode der Veränderlichkeit treffen zu nachfolgenden Stunden ein:

	Eintrittszeiten der	
	Max.	Min.
Jänner	2^h p.	6^h p.
April.........	10^h a.—2^h p.	2^h a.
Juli	10^h a.	10^h p.
October	2^h p.	6^h p.

Tabelle

Differenzen zwischen den aus-

	1ʰ a	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ m
Allgemeiner Gang minus												
Winter...	9·6	9·6	9·9	10·3	10·5	10·6	10·7	10·9	12·0	13·2	**13·6**	13·3
Frühling..	6·0	6·3	6·6	6·6	6·4$_*$	6·5	7·3	8·5	9·8	**10·5**	10·4	10·0
Sommer..	2·0	2·1	2·3	2·4	2·4	2·4	3·0	4·1	5·0	**5·4**	5·3	5·2
Herbst...	8·1	8·0	7·8	7·6	7·5$_*$	7·5	8·0	9·4	11·1	12·2	**12·4**	12·2
Jahr.....	6·1	6·1	6·2	6·2	6·1	6·2	6·9	8·4	10·0	**11·0**	**11·0**	10·7
Gang an trüben Tagen												
Winter...	5·9	6·3	6·7	6·8	6·9	6·8	6·9	7·3	8·2	9·6	11·1	12·4
Frühling..	5·5	5·6	5·6	5·4	5·4	5·8	7·4	10·4	12·5	15·7	17·5	18·9
Sommer..	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2·4	2·0$_*$	3·8	7·6	13·1	19·7	25·0	28·2	30·4
Herbst...	7·1	6·9	6·7	6·9	6·8	6·6	7·2	9·0	12·1	15·4	17·8	19·0
Jahr.....	5·7	5·8	5·8	5·9	5·9	6·2	7·6	10·4	13·0	16·1	18·0	19·2

VI.

geglichenen täglichen Perioden.

1ʰ p.	2ʰ	3ʰ	4ʰ	5ʰ	6ʰ	7ʰ	8ʰ	9ʰ	10ʰ	11ʰ	12ʰ n	Mittel
Gang an heiteren Tagen												
13·0	12·4	11·5	10·7	9·8	9·1	8·4	8·2	8·1	7·7	7·4	7·4	10·3
9·6	9·2	8·8	8·5	7·6	6·3	5·1	4·6	4·2	3·6	3·1	3·1	7·1
5·1	4·6	3·8	2·8	2·2	1·8	1·2	0·9*	1·3	1·4	1·5	1·8	2·9
11·6	10·6	9·5	8·4	7·4	6·4	5·5	5·2*	5·4	5·5	5·4	5·3	8·3
10·4	9·7	8·9	8·1	7·3	6·2	4·9	4·2	3·8	3·8	3·5	3·5	7·1
minus Allgemeiner Gang												
13·2	**13·3**	12·8	11·6	10·5	9·6	8·9	8·3	7·9	7·4	6·9	6·6	8·8
19·4	19·0	18·0	16·7	14·8	11·6	8·4	7·0	7·1	7·0	6·7	6·4	10·7
31·3	30·7	29·6	28·9	27·0	22·3	17·2	13·8	12·1	10·7	8·9	7·1	15·9
19·1	18·2	16·4	14·3	12·3	10·5	8·9	7·8	7·1	6·6	6·2	6·1	10·6
19·6	19·2	18·2	16·8	14·8	12·4	10·0	8·3	7·5	[illegible]	[illegible]	6·4	11·1

Tabelle

Veränderlichkeit der

	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895
					Jänner					
2^h a.	11·5	10·3*	**14·1**	8·8*	7·3	9·2	8·8*	13·7	**11·6**	7·2*
6	12·4	10·8	12·5	9·0	8·3	9·6	10·4	12·0*	10·2	7·8
10	**15·1**	13·0	12·7	11·5	6·0	9·4	12·7	13·0	8·6	8·1
2^h p.	10·2	**15·9**	13·6	**14·5**	**9·7**	**11·5**	**12·8**	**14·7**	8·2	**12·1**
6	9·4*	10·9	10·9	9·9	5·5*	9·4	10·6	14·0	6·3*	9·7
10	11·5	10·9	10·0*	9·1	7·3	9·0*	10·6	13·8	7·0	10·3
					Juli					
2^h a.	6·3*	9·7*	6·6	7·0	9·3	8·0*	10·5	12·2	6·0	10·3
6	10·7	9·7*	6·6	8·5	10·4	9·9	10·6	12·5	8·8	10·4
10	13·8	**14·8**	**15·4**	**14·9**	10·7	9·6	**14·5**	**13·2**	**10·4**	**12·6**
2^h p.	**14·9**	14·3	10·9	11·4	6·6*	**10·5**	7·7*	13·0	9·7	10·3
6	11·8	13·5	13·8	10·6	**10·9**	**10·5**	11·2	11·0*	8·7	11·6
10	6·8	10·1	5·6*	6·7*	7·3	8·8	11·3	11·5	5·3*	8·2*

VII.

relativen Feuchtigkeit.

	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	1895
					April					
2h a.	9·7	10·3	6·6*	3·3	7·9	11·5	12·6	14·2	6·0*	8·5
6	10·7	10·2*	7·3	3·7	7·1	12·8	10·9*	16·6	8·2	10·4
10	15·6	**15·3**	12·0	**11·1**	10·4	14·4	15·5	13·3	11·4	**13·4**
2h p.	**16·0**	13·2	11·6	10·9	**13·0**	**14·8**	**18·0**	12·4*	**11·8**	10·6
6	10·5	12·1	**12·8**	7·4	7·6	10·2*	16·4	**18·9**	10·6	9·2
10	6·9*	12·7	8·3	2·7*	6·6*	11·4	13·5	14·8	8·6	8·3*
					October					
2h a.	5·2	11·4	9·9	4·1	12·8	8·4	10·3	12·1	7·5	9·8
6	5·0	**13·5**	7·6*	3·8*	**13·0**	6·3*	10·1	12·4	6·5	9·4
10	9·5	12·1	11·6	6·9	12·5	7·3	**11·8**	**15·0**	6·2*	**11·4**
2h p.	**12·1**	11·3*	**12·8**	**7·2**	10·4	**9·4**	9·1	14·0	**11·3**	10·7
6	8·2	11·7	7·9	4·0	9·7*	7·2	6·7*	9·5*	6·4	8·1*
10	4·7*	11·8	10·2	5·2	11·5	6·6	7·6	12·0	7·2	11·2

Tabelle VIII.

Tägliche Periode der Veränderlichkeit.

10 Jahre, 1886—1895.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel	Amplit.
Jänner	10·24	10·31	11·05	**12·82**	9·67*	9·96	10·59	2·65
April	9·06*	9·80	**13·23**	**13·24**	11·58	9·40	11·05	4·18
Juli	8·59	9·81	**12·99**	10·93	11·36	8·16*	10·31	4·83
October ...	9·15	8·76	10·43	**10·83**	7·94*	8·80	9·32	2·89
Jahr	9.26	9·67	**11·98**	11·83	10·14	9·08*	10·32	2·85

Tabelle IX.

Mittlere Zunahme und Abnahme der Feuchtigkeit von Tag zu Tag.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
Zunahme							
Jänner	10·77	10·90	11·84	**12·46**	10·08*	10·86	11·15
April	10·15*	10·61	13·73	**14·04**	11·71	10·19	11·74
Juli	9·26	10·32	**13·65**	10·83	11·29	8·18*	10·59
October	9·66	9·29	10·56	**11·64**	8·15*	9·72	9·84
Jahr	9·96	10·28	**12·45**	12·24	10·31	9·74*	10·83
Abnahme							
Jänner	11·38	11·22	11·15	**12·76**	10·26*	10·82	11·27
April	10·14*	10·70	**13·73**	13·17	13·02	10·64	11·90
Juli..	9·26*	10·10	**13·68**	11·89	11·71	9·85	11·08
October	9·69	10·05	11·01	**11·47**	9·09*	9·23	10·09
Jahr	10·12*	10·52	**12·39**	12·32	11·02	10·14	11·08

Im Jänner und October fällt das Maximum auf die ersten Nachmittagsstunden, im April verlegt es sich gegen Mittag, um im Sommer noch mehr zu verfrühen, da es um 10^h Vormittags zu bemerken ist. Die Eintrittszeit des Minimums zeigt grössere Schwankungen, im Jänner und October fällt die kleinste Veränderlichkeit um 6^h Abends, im Juli um 10^h Nachts und im April um 2^h Morgens. Im Jahresmittel erscheint das Maximum um 10^h Morgens, das Minimum um 10^h Abends.

Man könnte daher hervorheben, dass die Feuchtigkeit die grösste Veränderlichkeit um die Mittagszeit aufweist, dass sich das Eintreffen des Maximums vom Winter auf den Sommer verfrüht, und zwar von den ersten Nachmittags- auf die letzten Vormittagsstunden sich verlegt, während die kleinste Veränderlichkeit der Feuchtigkeit in den Abend- und Nachtstunden stattfindet.

In Bezug auf die tägliche Amplitude der Veränderlichkeit lässt sich hervorheben, dass dieselbe im Sommer am grössten ist, im Winter am kleinsten, 4·83 gegen 2·65.

Betrachten wir die Änderung der Veränderlichkeit der einzelnen Stunden von einer Jahreszeit zur anderen, so finden wir auch aus obiger Tabelle VIII, dass Vormittags, Mittags und Nachmittags die grösste Veränderlichkeit im Frühjahr erreicht wird, die kleinste im Herbst, während Abends, Nachts und Morgens die grösste Veränderlichkeit im Winter, die kleinste im Sommer beobachtet wird. Ausnahme bildet nur die Morgenstunde von 6^h, wo das Minimum im October zu bemerken ist.

Die Trennung der Veränderlichkeiten nach ihren Vorzeichen und die daraus abgeleiteten Mittelwerthe geben die in Tabelle IX zusammengestellten mittleren Zunahmen und Abnahmen der Feuchtigkeit von Tag zu Tag. Die Extreme fallen zu den bereits im allgemeinen Gange der Veränderlichkeit hervorgehobenen Zeiten.

Die mittlere Zunahme erscheint im Durchschnitte etwas kleiner als die mittlere Abnahme, 10·83 gegen 11·08%.

Um das Vorherrschen der Zunahme, beziehungsweise der Abnahme der Feuchtigkeit ziffernmässig darzustellen, wurden die Quotienten bestimmt; dieselben sind nachfolgende:

Quotienten zwischen der mittleren Zunahme und Abnahme der Feuchtigkeit von Tag zu Tag.

	2^h a.	6^h	10^h	2^h p.	6^h	10^h	Mittel
Jänner...	0·95*	0·97	**1·06**	0·98*	0·98*	**1·00**	0·99
April	**1·00**	0·99*	1·00	**1·07**	0·90*	0·96	0·99
Juli	1·00	**1·02**	1·00	0·91*	**0·96**	0·83*	0·96
October..	1·00	0·92*	0·96	**1·01**	0·90*	**1·05**	0·97
Jahr.....	0·98	0·98	**1·01**	0·99	0·94*	0·96	0·98

Man ersieht aus diesen Quotienten eine doppelte tägliche Periode mit nachfolgenden Eintrittszeiten der Maxima und Minima:

	I. Min.	I. Max.	II. Min.	II. Max.
Jänner	2^h a.	10^h a.	2—6^h p.	10^h p.
April.......	6^h a.	2^h p.	6^h p.	2^h a.
Juli........	2^h p.	6^h p.	10^h p.	6^h a.
October	6^h a.	2^h p.	6^h p.	10^h p.

Sämmtliche Extreme zeigen von dem Winter auf den Sommer eine Verspätung und vom Sommer auf den Winter eine Verfrühung.

Die Quotienten zeigen im Jahresdurchschnitt, dass die Feuchtigkeitszunahme nur um 10^h Vormittags grösser ist als die Abnahme, während sonst zu allen Stunden die Abnahme grössere Beträge erreicht.

Ebenso ist aus den Quotienten der Durchschnittswerthe jeder Jahreszeit eine grössere Abnahme zu bemerken, am meisten überwiegt dieselbe im Sommer.

In der Tabelle X wurden die mittleren maximalen Veränderlichkeiten der Feuchtigkeit zusammengestellt und in Tabelle XI die absoluten Maxima der Veränderlichkeit.

Aus ersterer Darstellung lässt sich eine ähnliche tägliche Periode ersehen, wie bei der bereits besprochenen mittleren Veränderlichkeit. Die mittlere maximale Zunahme der Feuchtigkeit von einem Tage zum andern beträgt 30%, die mittlere maximale Abnahme 31%.

Tabelle X.

Mittlere maximale Feuchtigkeitszunahme und Abnahme.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
Zunahme							
Jänner	31·5	31·6	33·4	**35·2**	30·7*	31·6	32·3
April	30·1	30·4	**38·5**	35·0	34·3	27·9*	32·7
Juli	23·6	24·6	32·0	**32·4**	30·3	22·0*	27·5
October	27·5	26·1	**33·4**	31·6	21·1*	26·7	27·7
Jahr	28·2	28·2	**34·3**	33·6	29·1	27·1*	30·1
Abnahme							
Jänner	31·8	32·5	31·3	**36·4**	30·0*	33·1	32·5
April	25·8*	27·9	**35·9**	33·3	35·7	30·4	31·5
Juli	26·2	27·3	**37·0**	30·9	35·5	22·7*	29·9
October ..	28·1	28·5	32·0	**32·8**	27·7*	29·8	29·8
Jahr	28·0*	29·1	**34·1**	33·4	32·2	29·0	30·9

Tabelle XI.

Absolute maximale Feuchtigkeitszunahme und Abnahme.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
Zunahme							
Jänner	42	48	**52**	45	43	40	45·0
April	47	42	**58**	55	51	54	51·2
Juli	30	31	44	**54**	41	51	41·8
October ...	38	47	**50**	42	36	40	42·2
Abnahme							
Jänner	40	42	51	**52**	38	45	44·7
April	39	46	**60**	46	57	**63**	51·8
Juli	41	41	**50**	44	50	38	44·0
October	39	46	**56**	49	42	45	46·2

Die resultirenden Werthe zu den einzelnen Stunden schwanken für die Zunahme zwischen 38·5 und 21·1, für die Abnahme zwischen 37·0 und 22·7.

Die absolut grössten Veränderlichkeiten wurden in diesem 10jährigen Zeitraum, 1886—1895, mit +58 und —63 erreicht. Mit Ausnahme eines einzigen Falles finden sich auch die Extreme dieser grössten Veränderlichkeiten der Feuchtigkeit um die Mittagszeit herum.

In Bezug auf die jährliche Vertheilung wäre zu erwähnen, dass diese absolut grössten Veränderlichkeiten, sowie ihre Durchschnittswerthe auf den Frühling fallen. Es wäre hier am Platze, anzuführen, dass bei der vorbereitenden Zusammenstellung dieser Veränderlichkeiten bemerkt wurde, dass einer grösseren Veränderlichkeit eines bestimmten Vorzeichens häufig sofort eine ähnlich grosse Veränderlichkeit entgegengesetzten Zeichens folgt.

Aus den hier nicht publicirten ersten Tabellen der Veränderlichkeit beider Vorzeichen möge noch die Häufigkeit einer Zunahme, beziehungsweise Abnahme der Feuchtigkeit von einem Tage zum anderen für die einzelnen Monate und Stunden bestimmt werden.

In Tabelle XII sind die Resultate ersichtlich. Die Summen werden nicht mit der Tagesanzahl übereinstimmen, erstens in Folge der bereits oben erwähnten Lücken in den Aufzeichnungen und zweitens, weil die Tage mit einer Veränderlichkeit gleich Null weder der Zunahme, noch der Abnahme zugerechnet werden konnten. Man ersieht in diesen Mittelwerthen das entgegengesetzte Verhalten im Vergleiche zu der oben besprochenen mittleren Zu- und Abnahme der Veränderlichkeit. Es wurde nämlich früher in Bezug auf die Grösse der Veränderlichkeit im Mittel ein Vorherrschen der Abnahme durch alle 4 Monate hervorgehoben, während hier naturgemäss ein Vorherrschen in der Frequenz der Zunahme zu bemerken ist.

Dasselbe Verhalten zeigt sich bei den Quotienten zwischen der Häufigkeit der Zu- und Abnahme im Vergleiche zu den Quotienten zwischen den mittleren positiven und negativen Veränderlichkeiten.

Tabelle XII.

Häufigkeit der Zunahme und Abnahme der Feuchtigkeit.

	2^h a.	6^h	10^h	2^h p.	6^h	10^h	Mittel
			Zunahme				
Jänner	148	150	149	155	152	144	150
April	137	142	148	144	150	143	144
Juli	141	146	145	151	152	153	148
October	142	140	151	143	147	134	144
Jahr	142	145	148	148	150	144	146
			Abnahme				
Jänner	139	139	149	148	143	141	143
April	131	134	141	148	132	128	136
Juli	145	149	147	144	151	128	144
October	147	137	145	145	136	151	143
Jahr	141	140	146	146	141	137	142

Quotienten zwischen den Häufigkeitszahlen der Zunahme und Abnahme der Feuchtigkeit.

	2^h a.	6^h	10^h	2^h p.	6^h	10^h	Mittel
Jänner	**1·07**	**1·08**	1·00*	1·05	**1·06**	1·02*	1·06
April	1·05*	**1·06**	1·05	0·98*	**1·14**	1·12	1·06
Juli	0·98*	0·98*	0·99	**1·05**	1·01*	**1·20**	1·03
October	0·97	1·02	**1·04**	0·99*	**1·08**	0·89*	1·00
Jahr	1·01	1·04	1·01*	1·01	**1·06**	1·05	1·03

Dem Maximum des einen Ganges entspricht das Minimum des anderen, wie aus dem Vergleiche nachfolgender Zusammenstellung mit der der Eintrittszeiten der früher bestimmten Quotienten aus den mittleren positiven und negativen Veränderlichkeiten hervorgeht.

I. Max.	I. Min.	II. Max.	II. Min.
2—6h a.	10h a.	6h p.	10h p.
6h a.	2h p.	6h p.	2h a.
2h p.	6h p.	10h p.	2—6h a.
10h a.	2h p.	6h p.	10h p.

Bei der Bestimmung der Veränderlichkeit von Tag zu Tag ist mitunter eine gewisse Beständigkeit in der Aufeinanderfolge desselben Vorzeichens zu beobachten. Wollen wir daher zur Berechnung der mittleren Dauer einer anhaltenden Feuchtigkeitszunahme und der darauffolgenden Feuchtigkeitsabnahme, oder kurz gesagt einer Feuchtigkeitswelle übergehen.

Tabelle XIII.

Feuchtigkeitswellen, ausgedrückt in Tagen.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
Jänner							
Zunahme	1·58	1·59	1·65	1·63	1·69	1·64	1·63
Abnahme	1·52	1·60	1·68	1·59	1·55	1·64	1·60
Wellenlänge	3·10*	3·19	**3·33**	3·22*	3·24	**3·28**	3·23
April							
Zunahme	1·50	1·59	1·75	1·71	1·73	1·75	1·67
Abnahme	1·44	1·55	1·65	1·65	1·51	1·63	1·57
Wellenlänge	2·94*	3·14	**3·40**	3·36	3·24*	**3·38**	3·24
Juli							
Zunahme	1·45	1·35	1·55	1·53	1·55	1·75	1·53
Abnahme	1·48	1·38	1·51	1·47	1·49	1·46	1·47
Wellenlänge	2·93	2·73*	**3·06**	3·00*	3·04	**3·21**	3·00
October							
Zunahme	1·57	1·58	1·62	1·66	1·59	1·49	1·59
Abnahme	1·54	1·58	1·46	1·68	1·54	1·68	1·58
Wellenlänge	3·11	3·16	3·08*	**3·34**	3·13	3·17	3·17

In der Tabelle XIII findet sich die mittlere Dauer einer Feuchtigkeitszunahme — Wellenberg —, der Feuchtigkeitsabnahme — Wellenthal — und der gesammten Welle dargestellt.

Man entnimmt daraus, dass im Gesammtdurchschnitt eine Welle für ihren Vorübergang etwas mehr als 3 Tage (3·16) braucht.

Im Jänner, April und Juli zeigen die Feuchtigkeitswellen eine deutlich erkennbare doppelte tägliche Periode mit den Maxima um 10^h Morgens und 10^h Abends und den Minima zwischen 2—6^h Vormittags und Nachmittags. Im October ist jedoch eine ebensolche regelmässige Änderung in der Länge dieser Wellen nicht zu ersehen, die grösste Länge wird Nachmittags, die kleinste Vormittags erreicht.

Durchschnittlich überwiegt die Dauer der Zunahme über die der Abnahme, wie aus nachfolgenden Quotienten ersichtlich wird.

Quotienten zwischen der mittleren Dauer der Feuchtigkeitszunahme und -Abnahme.

	2^h a.	6^h	10^h	2^h p.	6^h	10^h	Mittel
Jänner	1·04	0·99	0·98	1·03	1·09	1·00	1·02
April	1·04	1·03	1·06	1·04	1·15	1·07	1·06
Juli	0·98	0·98	1·03	1·04	1·04	1·20	1·04
October	1·02	1·00	1·11	0·99	1·03	0·89	1·01

Am grössten ist dieses Vorherrschen der Dauer einer Feuchtigkeitszunahme im Frühling, am geringsten im Herbst.

Die Wellenlänge ändert sich in den einzelnen Stunden im

Jänner	um	0·23	Tage	(3·33—3·10),
April	»	0·46	»	(3·40—2·94),
Juli	»	0·48	»	(3·21—2·73),
October	»	0·26	»	(3·34—3·08),

sie zeigt daher die grösste Schwankung im Sommer, die kleinste im Winter.

Berechnen wir aus der ersten, hier nicht publicirten Zusammenstellung der Veränderlichkeit die mittlere Häufigkeit der Feuchtigkeitswellen, so finden wir nachfolgende Resultate:

Mittlere Häufigkeit der Feuchtigkeitswellen.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
Jänner	**9·45**	9·30	9·15*	**9·75**	9·40	9·25*	9·38
April	**9·25**	9·00	8·70*	8·90	**8·95**	8·20*	8·83
Juli	9·85	**11·00**	9·70*	10·00	**10·15**	9·05*	9·96
October	9·50	8·95	**9·70**	8·70*	9·30	9·25	9·23
Mittel	9·51	9·56	9·31	9·34	9·45	8·94	9·35

Durchschnittlich fallen 9·35 Wellen pro Monat. Am meisten im Sommer, 9·96, am geringsten im Frühling mit 8·83, entsprechend der Länge der Feuchtigkeitswellen, welche im Sommer am kürzesten sind (3·00 Tage), im Frühling am längsten (3·24 Tage).

Auch die tägliche Periode zeigt das entgegengesetzte Verhalten als bei der Länge der Feuchtigkeitswellen, an Stelle der Maxima fallen die Minima und umgekehrt.

Die mittlere Frequenz der Wellen schwankt innerhalb den einzelnen Stunden um nachfolgende Beträge:

Jänner......(9·75 bis 9·15)....0·60
April.......(9·25 » 8·20)....1·05
Juli........(11·00 » 9·05)....1·95
October.....(9·70 » 8·70)....1·00

Also am meisten im Sommer, am geringsten im Winter; ganz entsprechend der früher erwähnten Schwankung in der Länge der Feuchtigkeitswellen.

Die in der Tabelle XIV zusammengestellten Resultate zeigen, dass die grösste mittlere Dauer einer continuirlichen Feuchtigkeitszunahme 3·1 Tage beträgt, die der Abnahme 3·0. Die erste ist grösser als die zweite im Frühling und Sommer hingegen kleiner im Winter und Herbst.

Tabelle XIV.

Mittlere grösste Dauer einer continuirlichen Veränderlichkeit desselben Zeichens.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
			Zunahme				
Jänner	3·3	3·0	2·9	3·2	3·0	2·8	3·0
April	2·9	3·4	3·6	3·2	3·5	3·7	3·4
Juli	2·7	2·9	2·7	3·0	2·9	3·8	3·0
October	2·0	3·2	3·1	3·0	3·2	2·8	3·0
Jahr	3·0	3·1	3·1	3·1	3·2	3·3	3·1
			Abnahme				
Jänner	2·5	2·9	3·4	3·1	3·1	3·3	3·1
April	2·7	3·0	3·0	3·0	2·8	3·2	3·0
Juli	3·2	2·8	2·6	2·7	2·8	2·9	2·8
October	3·1	3·2	3·2	3·5	2·8	3·4	3·2
Jahr	2·9	3·0	3·1	3·1	2·9	3·2	3·0

Tabelle XV.

Absolut längste Dauer einer continuirlichen Veränderlichkeit desselben Zeichens.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
			Zunahme				
Jänner	5	5	4	5	5	5	4·8
April	5	5	6	5	5	5	5·2
Juli	4	4	4	5	4	6	4·5
October	4	5	5	4	5	4	4·5
Jahr	4·5	4·8	4·8	4·8	4·8	5·0	4·8
			Abnahme				
Jänner	3	5	5	4	5	5	4·5
April	4	5	4	4	4	5	4·3
Juli	4	4	4	4	4	4	4·0
October	4	5	4	5	4	5	4·5
Jahr	3·8	4·8	4·2	4·2	4·2	4·8	4·3

Die absolut längste Dauer einer anhaltenden Feuchtigkeitszunahme wurde mit 6 Tagen bestimmt, die der Abnahme mit 5 Tagen, im Mittel 4·8 gegen 4·3; siehe Tabelle XV.

Die mittlere Häufigkeit einer drei oder mehr als drei Tage dauernden Veränderlichkeit gleichen Zeichens wird in Tabelle XVI ersichtlich gemacht. Am grössten ist die Wahrscheinlichkeit einer längeren Folge von Feuchtigkeitszunahme im Frühling zu bemerken, und zwar ist diese zu allen Stunden grösser als die der Abnahme.

Es würde noch in Bezug auf die Feuchtigkeitszunahme hervorzuheben sein, dass im Winter und Herbst die Wahrscheinlichkeit einer längeren Dauer der Veränderlichkeit positiven Zeichens um die Mittagsstunde (10^h a.—2^h p.) grösser wird, im Frühling hingegen Nachmittags (10^h a.—6^h p.) und im Sommer am Abend (2^h p.—10^h p.).

Zum Schlusse möge die Häufigkeit der Veränderlichkeit, nach bestimmten Schwellenwerthen getrennt, noch mitgetheilt werden.

In Tabelle XVII und XVIII erscheinen dieselben von 5 zu 5% geordnet.

Die zur Verwendung gelangten Aufzeichnungen sind im Jänner 310, im April 300, Juli und October je 307.

Aus diesen Tabellen ersieht man, dass die grösseren Veränderlichkeiten um die Mittagsstunde vorkommen, im Sommer auch Nachmittags und dementsprechend die erste Gruppe mit der kleinsten Veränderlichkeit (0—4%) die relativ geringste Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens um diese Zeit aufweist.

Im Jänner und October finden wir zu allen Stunden die grösste Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der kleinsten Veränderlichkeit von 0—4%. Im April steigt für 2^h p. die Wahrscheinlichkeit für die zweite Gruppe von 5—9%. Im Sommermonat Juli findet dies zu allen Stunden statt, mit Ausnahme der Nachtstunden von 10^h p. und 2^h a. Wir erhalten daher für den Winter eine grössere Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen kleinerer Veränderlichkeiten, im Sommer hingegen und namentlich für die Tagesstunden eine grössere Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von etwas grösseren Veränderlichkeiten.

Tabelle XVI.

Mittlere Häufigkeit einer drei und mehr als drei Tage dauernden Veränderlichkeit desselben Zeichens.

	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	Mittel
Zunahme							
Jänner	1·0	1·2	1·4	1·4	1·2	1·0	1·2
April	1·0	1·2	1·5	1·6	1·7	1·4	1·4
Juli	0·9	0·8	0·8	1·2	1·1	1·6	1·1
October	1·1	1·0	1·2	1·4	1·0	0·9	1·1
Jahr	1·0	1·1	1·2	1·4	1·3	1·2	1·2
Abnahme							
Jänner	0·8	0·9	1·5	1·2	1·0	1·4	1·1
April	0·8	1·0	1·1	1·0	0·9	1·0	1·0
Juli	1·3	0·7	0·9	0·7	0·8	0·7	0·9
October	1·2	1·1	1·1	1·4	1·2	1·4	1·2
Jahr	1·0	0·9	1·2	1·1	1·0	1·1	1·1

Tabelle XVII.

Häufigkeit der Veränderlichkeit, geordnet von 5 zu 5%.

	Jänner						April					
	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h	2h a.	6h	10h	2h p.	6h	10h
0—4	**124**	**112**	**95**	**91**	**122**	**119**	**131**	**125**	**78**	64	**102**	**124**
5—9	58	74	82	68	66	69	63	55	58	**75**	60	[illegible]
10—14	47	43	46	53	53	42	38	40	55	50	48	[illegible]
15—19	20	28	27	30	25	26	26	30	35	35	31	[illegible]
20—24	26	20	27	27	26	29	18	26	29	34	23	18
25—29	20	16	16	11	9	9	13	14	12	[illegible]	11	[illegible]
30—34	6	8	7	13	5	4	5	3	18	14	9	[illegible]
35—39	6	7	6	6	8	9	4	4	7	[illegible]	5	[illegible]
40—44	3	1	1	6	2	2	[illegible]	2	5	1	3	[illegible]
45—49	.	1	1	4	.	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	[illegible]	[illegible]
50—54	.	.	2	1	.	.	.	.	[illegible]	[illegible]	2	1
55—59	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]	[illegible]	.	[illegible]
60—64	.	.	.	.	.	.	.	.	[illegible]	.	[illegible]	1

Tabelle XVIII.

Häufigkeit der Veränderlichkeit, geordnet von 5 zu 5%.

	Juli						October					
	2ʰ a.	6ʰ	10ʰ	2ʰ p.	6ʰ	10ʰ	2ʰ a.	6ʰ	10ʰ	2ʰ p.	6ʰ	10ʰ
0—4	**117**	84	**67**	80	66	**124**	**132**	**133**	**115**	**94**	**136**	**140**
5—9	83	**87**	**67**	**87**	**91**	80	66	79	69	74	71	65
10—14	52	59	64	56	61	53	42	33	40	52	47	38
15—19	21	41	38	39	38	20	26	22	28	38	30	19
20—24	17	20	27	19	19	16	15	13	17	19	12	24
25—29	10	9	23	10	13	10	14	14	22	11	6	9
30—34	3	6	8	9	8	1	8	7	10	12	3	7
35—39	3	0	8	4	4	2	5	2	6	3	3	1
40—44	1	1	2	2	2	0	.	2	2	3	2	3
45—49	.	.	2	0	0	0	.	2	0	1	.	1
50—54	.	.	1	1	2	1	.	.	1	.	.	.
55—59	.	.	.	.			.	.	1	.	.	.
60—64	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabelle XIX.

Ausgeglichene Häufigkeit der Veränderlichkeit von 1 zu 1%.

	Jänner						Juli					
	2ʰ a.	6ʰ	10ʰ	2ʰ p.	6ʰ	10ʰ	2ʰ a.	6ʰ	10ʰ	2ʰ p.	6ʰ	10ʰ
0	24	22	15	13	18	24	21	17	14	14	10	27
1	28	24	20	18	23	27	23	**21**	13	17	14	26
2	**30**	**25**	**21**	**20**	**26**	**29**	**26**	**20**	11	**19**	14	24
3	24	21	18	19	25	21	24	14	13	17	13	23
4	16	19	19	18	25	17	22	15	**17**	14	18	**23**
5	12	16	20	14	21	17	19	19	16	15	**23**	22
6	11	15	18	14	14	17	16	18	11	18	21	19
7	12	17	16	15	13	15	17	16	11	**19**	18	15
8	13	17	17	14	12	12	17	16	14	18	17	12
9	10	12	14	15	12	9	15	16	15	16	15	13
10	10	8	10	14	11	8	13	13	14	14	13	13
11	12	7	10	10	8	8	11	12	14	12	11	11
12	10	9	10	9	9	9	11	11	11	11	10	10
13	7	10	8	9	11	8	10	11	10	11	11	9
14	7	6	6	8	10	7	8	10	13	11	11	8
15	7	4	5	6	7	7	6	9	12	9	8	6

Der häufigste Werth der Veränderlichkeit liegt aber immer unter dem Mittelwerth, welcher im Jahresdurchschnitt etwas über 10% beträgt.

Vom Bestreben geleitet, diese Beobachtungen auch zur genauen Bestimmung der Scheitelwerthe verwenden zu können, wurden sämmtliche Veränderlichkeiten von 1 zu 1% getrennt geordnet. Doch zeigen die darnach construirten Wahrscheinlichkeitscurven noch zu grosse Unregelmässigkeiten, um eine einwurfsfreie Bestimmung vornehmen zu können. Immerhin mögen hier für die zwei extremen Monate Jänner und Juli die ausgeglichenen Werthe in der Tabelle XIX mitgetheilt werden.

Man ersieht daraus, dass im Jänner die häufigste Veränderlichkeit die von 2% ist, und zwar durch alle Stunden des Tages. Doch findet man aus der Betrachtung dieser Zahlen, besser noch aus den darnach construirten Wahrscheinlichkeitscurven, dass dieselben einen minder steilen Abfall um die Mittagszeit aufweisen, dass daher der Scheitelwerth um diese Zeit auf eine etwas grössere Veränderlichkeit sich verschieben muss.

Ein analoges Verhalten zeigen die Wahrscheinlichkeitscurven für den Juli, nur dass hier die Curven eine noch grössere Unregelmässigkeit aufweisen. Man ersieht übrigens aus diesen Daten bereits eine bedeutend entschiedenere Verlegung des Scheitelwerthes auf grössere Veränderlichkeiten um die Mittagsstunden herum. Der Abfall der Häufigkeitscurven ist auch hier um diese Zeit am schwächsten.

Diese grössere Schwankung der Scheitelwerthe entspricht ganz der früher, siehe Tabelle VIII, gefundenen grösseren Amplitude der Mittelwerthe der Veränderlichkeit des Sommers.

Dieser mehr oder minder steile Abfall kann auch zahlenmässig dargestellt werden, und zwar durch die Differenzen zwischen der grössten und der kleinsten der hier mitgetheilten Häufigkeitszahlen.

Diese Differenzen sind für beide Monate nachfolgende:

	2^h a.	6^h	10^h	2^h p.	6^h	10^h
Jänner	23_*	21	16	**14**	19	22
Juli	20	12	**5**	10	15	21_*

und zeigen den flachsten Verlauf, d. i. die grösste Verschiebung des häufigsten Werthes auf höhere Veränderlichkeiten um 2^h p., beziehungsweise 10^h a. Am steilsten fallen die Wahrscheinlichkeitscurven, nach Erreichung des Scheitelwerthes, in den Nachtstunden (2^h a., beziehungsweise 10^h p.) ab.

Mechanische Erklärung der Verdünnungswärme von Lösungen

von

O. Tumlirz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Februar 1899.)

Wenn zwei Flüssigkeiten sich miteinander mischen und eine homogene Lösung bilden, dann ist dieser Vorgang immer mit einer Wärmeentwicklung oder einer Wärmeabsorption, kurz (um einen Ausdruck von Jul. Thomsen zu gebrauchen) mit einer Wärmetönung verbunden. Wir wollen im Folgenden nur solche Flüssigkeiten betrachten, welche nicht chemisch aufeinander reagiren, sondern eine physikalische Lösung bilden. Die Wärmetönung hat dann einen physikalischen Ursprung, d. h. sie entsteht nicht aus einer Änderung in der Zusammensetzung oder in dem Aufbau der Moleküle, sondern aus dem Verhalten und aus der Wirkung der unveränderten Moleküle.

Jul. Thomsen hat zuerst[1] versucht, die Wärmetönung mechanisch zu erklären, indem er von der Vorstellung ausging, dass die Moleküle einer jeden Flüssigkeit eine kreisende Bewegung ausführen. In einer homogenen Flüssigkeit sollen nach ihm alle Moleküle die gleiche kreisende Bewegung (den gleichen Schwingungsradius und die gleiche Winkelgeschwindigkeit) haben, dagegen kann in zwei verschiedenen Flüssigkeiten die Bewegung eine verschiedene sein, indem theils der Schwingungsradius, theils die Winkelgeschwindigkeit verschieden sein kann. Wenn nun zwei Flüssigkeiten sich miteinander mischen und eine homogene Lösung bilden, so entsteht dadurch, dass alle Moleküle dieser Lösung dieselbe Winkelgeschwindigkeit annehmen, ein Verlust an lebendiger Kraft, welcher sich durch

[1] Pogg. Ann., 90, S. 274, 1853.

eine Wärmeentwicklung zu erkennen gibt. Es sei M_1 die Masse, r_1 der Schwingungsradius und φ_1 die Winkelgeschwindigkeit für eine bestimmte Flüssigkeit; die lebendige Kraft der Flüssigkeit ist dann

$$X_1 = \frac{1}{2} M_1 r_1^2 \varphi_1^2.$$

Haben für eine andere Flüssigkeit M_2, r_2, φ_2 die analoge Bedeutung, so ist

$$X_2 = \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \varphi_2^2$$

die lebendige Kraft der zweiten Flüssigkeit. Wenn nun die beiden Flüssigkeiten nach der Mischung dieselbe Winkelgeschwindigkeit Φ annehmen, so ist der Verlust an lebendiger Kraft durch die Gleichung

$$V = \frac{1}{2} M_1 r_1^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \varphi_2^2 - \frac{1}{2} (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \Phi^2$$

bestimmt. Was die Winkelgeschwindigkeit Φ anbelangt, so ist diese, wie Thomsen meint, nach den Gesetzen der Mechanik durch die Gleichung

$$\Phi = \frac{M_1 r_1^2 \varphi_1 + M_2 r_2^2 \varphi_2}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}$$

bestimmt. Durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung für V erhält man

$$V = \frac{1}{2} \frac{M_1 r_1^2 . M_2 r_2^2}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Hat die eine Flüssigkeit a_1 Moleküle von der Masse m_1, die andere Flüssigkeit a_2 Moleküle von der Masse m_2, so ist $M_1 = a_1 m_1$ und $M_2 = a_2 m_2$, also

$$V = \frac{1}{2} \frac{a_1 a_2 m_2 r_2^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{a_1 + a_2 \dfrac{m_2 r_2^2}{m_1 r_1^2}}$$

und daher die entwickelte Wärme

$$W = \frac{1}{2J} \cdot \frac{a_1 a_2 m_2 r_2^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{a_1 + a_2 \dfrac{m_2 r_2^2}{m_1 r_1^2}},$$

wo J das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Setzt man

$$\frac{m_2 r_2^2}{m_1 r_1^2} = q, \quad \frac{m_2 r_2^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2J} = C,$$

so ist

$$W = \frac{a_1 a_2 C}{a_1 + a_2 q}.$$

q und C sind constante Grössen. Bezieht man alle Versuche auf 1 Molekül der zweiten Flüssigkeit, so hat man $a_2 = 1$ zu setzen und erhält die Formel

$$W = \frac{a_1 C}{a_1 + q} \cdot \qquad \ldots 1)$$

Zu dieser Theorie möchte ich nur bemerken, dass nach Thomsen's Vorstellung den Molekülen der beiden Flüssigkeiten nur eine Art von Energie und zwar kinetische Energie zukommt und dass daher, weil äussere Einwirkungen nicht stattfinden, nach dem Princip von der Erhaltung der Energie die Summe der kinetischen Energie des ganzen Systems nach der Mischung ebenso gross sein muss wie vor der Mischung. Thomsen's Vorstellung ist demnach nicht geeignet, die Wärmetönung mechanisch zu erklären.

Was die Formel 1) anbelangt, so ist sie als empirische Formel wohl geeignet, in mehreren Fällen die Versuchsergebnisse darzustellen, allein es gibt viele Fälle, wo diese Formel vollständig versagt.

Ich werde nun im Folgenden eine mechanische Theorie der Wärmetönung entwickeln, welche auf keinen neuen Hypothesen beruht, sondern von jenen Vorstellungen ausgeht, welche wir seit Laplace über die Wechselwirkung zweier Theilchen einer tropfbaren Flüssigkeit haben. Die beiden Flüssigkeiten seien mit A und B bezeichnet und ihre Massen seien M_1 und M_2. Die beiden Flüssigkeiten mögen sich vor der Mischung in zwei getrennten Gefässen befinden. Wir fassen zunächst die

Flüssigkeit A ins Auge. Nach der Laplace'schen Hypothese ziehen sich die Theilchen dieser Flüssigkeit gegenseitig mit Kräften an, welche eine Function des gegenseitigen Abstandes sind und bei wachsender Entfernung so schnell abnehmen, dass sie bei messbarer Entfernung nicht mehr merklich sind. Es sind dies die allgemein bekannten Capillarkräfte. Hat ein unendlich kleines Theilchen die Masse m und ein zweites die Masse m', und ist r ihr gegenseitiger Abstand, so ist die Grösse der Kraft, mit welcher die beiden Theilchen einander anziehen, durch das Product $mm'f(r)$ ausgedrückt. Wächst der Abstand r um dr, so ist die Arbeit der Anziehungskraft durch $-mm'f(r)\,dr$ gegeben, und wächst der Abstand von r bis ins Unendliche, so ist die Arbeit gleich $-mm'\int_r^\infty f(r)\,dr$. Kommen umgekehrt die beiden Massentheilchen aus unendlich grossem Abstand in den Abstand r, so ist die Arbeit der Anziehungskräfte gleich

$$mm'\int_r^\infty f(r)\,dr. \qquad \ldots 1a)$$

Dieser Ausdruck ist die Kräftefunction der Theilchen m und m' aufeinander. Das unendlich kleine Massentheilchen m füllt einen unendlich kleinen Raum aus, den wir mit dv bezeichnen wollen, so dass wir $m = kdv$ setzen können, wo k die Dichte bedeutet. Ebenso können wir $m' = kdv'$ schreiben. Durch Benützung dieser Ausdrücke erhält die zuletzt betrachtete Arbeit die Form

$$k^2 dv\,dv'\int_r^\infty f(r)\,dr. \qquad \ldots 2)$$

Wenn wir in derselben Weise die Anziehung zwischen dem Massentheilchen m und jedem anderen Massentheilchen der Flüssigkeit untersuchen und jedesmal für die Arbeit, welche wir uns bei der Überführung der Theilchen aus unendlich grossem Abstand in den gegenseitigen Abstand r geleistet denken, die Ausdrücke 1) und 2) bilden, so erhalten wir durch Summirung aller dieser Ausdrücke

$$k^2 dv\int dv'\int^\infty f(r)\,dr. \qquad \ldots 3)$$

wo das Integral nach dv' über das ganze Volumen der Flüssigkeit A zu erstrecken ist. Es ist dies dieselbe Arbeit, welche von der ganzen Flüssigkeit geleistet würde, wenn wir uns das Theilchen m aus unendlich grosser Entfernung in die gegenwärtige Lage gebracht denken.

Es ist klar, dass wir für jedes Massentheilchen der Flüssigkeit A dieselbe Betrachtung anstellen können. Denken wir uns für jedes Flüssigkeitstheilchen den Ausdruck 3) gebildet und hierauf diese Ausdrücke addirt, so erhalten wir eine Summe, in welcher jede Combination zweier Massentheilchen zweimal vorkommt; wollen wir also für die Flüssigkeit A die Kräftefunction aller Massentheilchen aufeinander oder kurz ihre Kräftefunction ausdrücken, so haben wir jede Combination nur einmal zu nehmen, d. h. die genannte Summe durch 2 zu dividiren. Es ist also die Kräftefunction der Flüssigkeit A gleich

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} k^2 \int dv \int dv' \int_r^\infty f(r)\, dr. \qquad \ldots 4)$$

Die Integration ist in diesem Ausdrucke sowohl nach dv, als auch nach dv' über das ganze Volumen der Flüssigkeit A zu erstrecken. Setzen wir zur Abkürzung

$$\int_r^\infty f(r)\, dr = F(r), \qquad \ldots 5)$$

so wird

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} k^2 \int dv \int F(r)\, dv'. \qquad \ldots 4a)$$

Um die Integration auszuführen, wählen wir den Schwerpunkt des Volumelementes dv zum Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems und setzen $dv' = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$, wobei r, φ, ϑ die Polarcoordinaten sind. Bei der Integration nach r haben wir die Grenzen $r = 0$ und $r = \rho$ zu nehmen, wo ρ den Radiusvector der Oberfläche für die Winkel φ und ϑ bedeutet. ρ ist eine Function von φ und ϑ. Hierauf haben wir nach φ von 0 bis 2π und nach ϑ von 0 bis π zu integriren. Dadurch erhalten wir

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} k^2 \int dv \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho r^2 F(r)\, dr,$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$\int_0^{\rho} r^2 F(r)\, dr = \mathfrak{F}(\rho) \qquad \ldots 6)$$

schreiben,

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} k^2 \int dv \int_0^{\pi} \sin \vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathfrak{F}(\rho). \qquad \ldots 4b)$$

Die Capillarkräfte haben die Eigenschaft, dass sie bei wachsender Entfernung so schnell abnehmen, dass sie bereits in einer äusserst kleinen Entfernung ganz unmerklich werden. Man bezeichnet den Raum, in welchem sie eine merkbare Grösse haben, als die moleculare Wirkungssphäre. Dieser Raum ist eine Kugel, und wir wollen den Radius mit α bezeichnen. Wenn wir uns jetzt in der Flüssigkeit A eine zur Oberfläche parallele und äquidistante Fläche im Abstande α gezogen denken, so erhalten wir dadurch zwei Raumtheile, von welchen wir den eingeschlossenen mit V' und den anderen mit V'' bezeichnen wollen. Da α ungemein klein ist, so ist auch V'' ungemein klein im Vergleich zu V'. Weil nun für alle Werthe von r, welche grösser als α sind, $f(r) = 0$ ist, so wird auch $F(r)$ zu Folge der Gleichung 5) für solche Werthe von r den Werth Null haben. Setzen wir in der Gleichung 6) $\rho = \alpha$, so wird

$$\int_0^{\alpha} r^2 F(r)\, dr = \mathfrak{F}(\alpha). \qquad \ldots 7)$$

Ist $\rho > \alpha$, so ist

$$\int_0^{\rho} r^2 F(r)\, dr = \int_0^{\alpha} r^2 F(r)\, dr + \int_{\alpha}^{\rho} r^2 F(r)\, dr = \mathfrak{F}(\alpha).$$

Wenn wir also in der Gleichung 4b) die Integration nach dv zuerst über den Raum V' und dann über den Raum V'' vornehmen, so wird für den ersten Theil $\rho \gtreqless \alpha$ und mithin $\mathfrak{F}(\rho) = \mathfrak{F}(\alpha)$ sein. Wir erhalten somit für diesen Theil

$$\frac{1}{2} k^2 \mathfrak{F}(\alpha) \int_{V'} dv \int_0^{\pi} \sin \vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi k^2 V' \mathfrak{F}(\alpha).$$

Was die Integration über V'' anbelangt, so ist $\mathfrak{F}(\rho)$ im Durchschnitt kleiner als $\mathfrak{F}(\alpha)$; ferner ist V'' ungemein klein im Vergleich zu V'. Wir können daher diesen zweiten Theil vernachlässigen und ohneweiters

$$\Pi_1 = 2\pi k^2 V' \mathfrak{F}(\alpha)$$

schreiben. Hierin können wir wieder V' durch das Volumen der ganzen Flüssigkeit $V_1 = V' + V''$ ersetzen, also schreiben

$$\Pi_1 = 2\pi k^2 V_1 \mathfrak{F}(\alpha). \qquad \ldots 8)$$

Da k die Dichte ist, so ist kV_1 die Masse der Flüssigkeit, welche wir mit M_1 bezeichnet haben, also

$$\Pi_1 = 2\pi k M_1 \mathfrak{F}(\alpha). \qquad \ldots 8a)$$

Schliesslich können wir noch die Dichte k durch den Werth $\frac{M_1}{V_1}$ ersetzen und erhalten dann

$$\Pi_1 = \frac{2\pi M_1^2 \mathfrak{F}(\alpha)}{V_1}. \qquad \ldots 8b)$$

Für die Flüssigkeit B können wir die Kräftefunction der Capillarkräfte in ganz derselben Weise ableiten und erhalten bei analoger Bezeichnung

$$\Pi_2 = \frac{2\pi M_2^2 \mathfrak{G}(\beta)}{V_2}. \qquad \ldots 9)$$

Der Radius der Wirkungssphäre β und die Function $\mathfrak{G}$ sind für die zweite Flüssigkeit im Allgemeinen verschieden von den für die erste Flüssigkeit geltenden Werthen α und $\mathfrak{F}$.

Wenn wir nun die beiden Flüssigkeiten A und B miteinander mischen, so erfolgen drei Veränderungen: erstens vertheilt sich die Flüssigkeit A auf ein grösseres Volumen, und zwar auf das von der Mischung eingenommene Volumen, welches wir mit $\mathfrak{V}$ bezeichnen wollen, zweitens vertheilt sich die Flüssigkeit B auf das Volumen $\mathfrak{V}$ und drittens findet eine Anziehung zwischen den Theilchen der Flüssigkeit A einerseits und den Theilchen der Flüssigkeit B anderseits statt.

Wir wollen diese drei Veränderungen einzeln betrachten. Wenn die Masse M_1 der Flüssigkeit A sich auf den Raum $\mathfrak{B}$ vertheilt, dann kommt auf die Volumseinheit die Masse $\frac{M_1}{\mathfrak{B}}$. Bilden wir jetzt die Kräftefunction der Flüssigkeit A, so haben wir in der Gleichung 8b) V_1 durch $\mathfrak{B}$ zu ersetzen und erhalten

$$\Pi_1' = \frac{2\pi M_1^2 \mathfrak{F}(\alpha)}{\mathfrak{B}}. \qquad \ldots 10)$$

Ebenso wird jetzt die Kräftefunction der zweiten Flüssigkeit B eine andere werden, und zwar

$$\Pi_2' = \frac{2\pi M_2^2 \mathfrak{G}(\beta)}{\mathfrak{B}}. \qquad \ldots 11)$$

Um schliesslich die dritte Veränderung zu bestimmen, müssen wir die Kraft betrachten, mit welcher ein Theilchen der Flüssigkeit A auf ein Theilchen der Flüssigkeit B wirkt. Die Kraft ist eine Anziehung. Wir fassen wieder zwei Volumelemente dv und dv' ins Auge, deren Schwerpunkte den Abstand r haben. In dem Volumelemente dv befindet sich von der Flüssigkeit A die Menge $\frac{M_1}{\mathfrak{B}}dv$, anderseits befindet sich in dem Volumelemente dv' von der Flüssigkeit B die Menge $\frac{M_2}{\mathfrak{B}}dv'$. Die Kraft, mit welcher die beiden Mengen aufeinander wirken, hat die Grösse $\frac{M_1M_2}{\mathfrak{B}^2}h(r)dvdv'$. Denken wir uns den Abstand r um dr vergrössert, so leistet diese Kraft die Arbeit: $-\frac{M_1M_2}{\mathfrak{B}^2}dvdv'h(r)dr$, und denken wir uns die Theilchen aus dem Abstande r in einen unendlich grossen Abstand gebracht, so ist die Arbeit ihrer Wechselwirkung gleich

$$-\frac{M_1M_2}{\mathfrak{B}^2}dvdv'\int_r^\infty h(r)dr.$$

Bringen wir umgekehrt die Theilchen aus dem unendlich grossen Abstande in den Abstand r, so ist die Arbeit der Wechselwirkung gleich

$$\frac{M_1 M_2}{\mathfrak{V}^2} dv dv' \int_r^\infty h(r) dr.$$

Diese Arbeit ist wieder nichts anderes als die Kräftefunction der beiden Theilchen aufeinander. Wir wollen zur Abkürzung

$$\int_r^\infty h(r) dr = H(r) \qquad \ldots 12)$$

setzen und können dann für die letzte Arbeit schreiben:

$$\frac{M_1 M_2}{\mathfrak{V}^2} H(r) dv dv'.$$

Wenn wir in derselben Weise die Kräftefunction zwischen der Menge $\frac{M_1}{\mathfrak{V}} dv$ von der Flüssigkeit A und allen Theilchen der Flüssigkeit B betrachten und alle diese Arbeitswerthe addiren, so erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{M_1 M_2}{\mathfrak{V}^2} dv \int H(r) dv',$$

wo das Integral über das ganze Volumen $\mathfrak{V}$ zu erstrecken ist.

Wir führen wieder Polarcoordinaten ein und setzen $dv' = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$. Es ist dann der letzte Ausdruck gleich

$$\frac{M_1 M_2}{\mathfrak{V}^2} dv \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho r^2 H(r) dr,$$

wo ρ abermals den Radiusvector der Oberfläche für die Winkel ϑ und φ bedeutet. Dieser Ausdruck ist die Kräftefunction zwischen der Menge $\frac{M_1}{\mathfrak{V}} dv$ der Flüssigkeit A einerseits und der ganzen Flüssigkeit B anderseits. Wollen wir die Kräftefunction zwischen der ganzen Flüssigkeit A einerseits und der ganzen Flüssigkeit B anderseits kennen lernen, so haben wir den letzten Ausdruck nach dv über das ganze Volumen $\mathfrak{V}$ zu integriren, also den Ausdruck

$$P = \frac{M_1 M_2}{\mathfrak{V}^2} \int dv \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho r^2 H(r) dr \qquad \ldots 13)$$

zu bilden. Die Function $h(r)$ hat ebenso wie die Functionen $f(r)$ und $g(r)$ die Eigenschaft, dass sie bei wachsendem r so schnell abnimmt, dass sie bereits für äusserst kleine Werthe von r ganz unmerklich wird. Die Entfernung, bis zu welcher sie noch merklich ist, wollen wir mit γ bezeichnen. Danach wird die Function $H(r)$ für alle diejenigen Werthe von r, welche grösser als γ sind, den Werth Null haben. Da das Integral $\int_0^\rho r^2 H(r)dr$, welches wir mit $\mathfrak{H}(\rho)$ bezeichnen wollen, für alle diejenigen Werthe von ρ, welche grösser als γ sind, in

$$\int_0^\rho r^2 H(r)\,dr = \int_0^\gamma r_2 H(r)\,dr + \int_\gamma^\rho r^2 H(r)\,dr$$

zerlegt werden kann und da nach dem Gesagten das zweite Glied auf der rechten Seite verschwindet, so hat in diesem Falle das Integral $\mathfrak{H}(\rho)$ den Werth $\int_0^\gamma r^2 H(r)dr$ oder $\mathfrak{H}(\gamma)$.

Wir wollen jetzt ebenso wie früher in dem Raum $\mathfrak{V}$ eine zur Oberfläche parallele Fläche ziehen, welche von der Oberfläche überall den Abstand γ hat. Dadurch zerfällt der Raum $\mathfrak{V}$ in die zwei Theile $\mathfrak{V}'$ und $\mathfrak{V}''$, von welchen $\mathfrak{V}'$ von der gezogenen Fläche eingeschlossen wird. Weil γ ungemein klein ist, so ist es auch $\mathfrak{V}''$ im Vergleich zu $\mathfrak{V}'$. Wenn wir nun in 13) das Integral nach dv in zwei Theile zerlegen, nämlich in das Integral über $\mathfrak{V}'$ und in das Integral über $\mathfrak{V}''$, so wird, weil für alle Punkte des Raumes $\mathfrak{V}'$ $\rho \gtreqless \gamma$ ist, $\mathfrak{H}(\rho) = \mathfrak{H}(\gamma)$ werden und daher der erste Theil des Integrals gleich

$$\frac{4\pi M_1 M_2}{\mathfrak{V}^2}\,\mathfrak{H}(\gamma)\mathfrak{V}'$$

sein. Für den zweiten Theil ist $\mathfrak{H}(\rho)$ im Durchschnitt kleiner als $\mathfrak{H}(\gamma)$, und ferner ist $\mathfrak{V}''$ ungemein klein gegen $\mathfrak{V}'$; wir können daher für P ohneweiters den ersten Theil nehmen und darin noch $\mathfrak{V}'$ durch $\mathfrak{V}$ ersetzen, also schreiben:

$$P = \frac{4\pi M_1 M_2 \mathfrak{H}(\gamma)}{\mathfrak{V}}. \qquad \ldots 14)$$

Fassen wir Alles zusammen, so sehen wir, dass die Summe der Kräftefunctionen aller Capillarkräfte nach der Mischung gleich

$$\Omega_2 = \Pi_1' + \Pi_2' + P \qquad \ldots 15)$$

ist. Vor der Mischung war die Summe der Kräftefunctionen gleich

$$\Omega_1 = \Pi_1 + \Pi_2; \qquad \ldots 16)$$

demnach wird durch die Mischung die gesammte Kräftefunction vergrössert um den Betrag

$$\begin{aligned}\Omega_2 - \Omega_1 &= \Pi_1' - \Pi_1 + \Pi_2' - \Pi_2 + P \\ &= 2\pi M_1^2 \mathfrak{F}(\alpha)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} - \frac{1}{V_1}\right) + 2\pi M_2^2 \mathfrak{G}(\beta)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} - \frac{1}{V_2}\right) + \\ &+ \frac{4\pi M_1 M_2 \mathfrak{H}(\gamma)}{\mathfrak{V}}. \qquad \ldots 17)\end{aligned}$$

Wir können diesen Ausdruck noch mehr vereinfachen, wenn wir setzen:

$$M_1 : M_2 = 1 : n \text{ oder } M_2 = n M_1;$$

es ist dann

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 2\pi M_1^2 \left[\mathfrak{F}(\alpha)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} - \frac{1}{V_1}\right) + n^2 \mathfrak{G}(\beta)\left(\frac{1}{\mathfrak{V}} - \frac{1}{V_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2n\mathfrak{H}(\gamma)}{\mathfrak{V}}\right]. \qquad \ldots 17a)$$

Der Einfachheit halber wollen wir $M_1 = 1$ setzen. V_1 ist das Volumen, welches die Flüssigkeit A vor der Mischung einnimmt, und V_2 das Volumen, welches die Flüssigkeit B vor der Mischung einnimmt. Das Volumen $\mathfrak{V}$ der Lösung wird von $V_1 + V_2$ verschieden sein; wir wollen

$$V_1 + V_2 - \mathfrak{V} = e \qquad \ldots 18)$$

setzen und e die Contraction nennen. Es ist dann

$$\frac{1}{\mathfrak{V}} - \frac{1}{V_1} = \frac{V_1 - \mathfrak{V}}{\mathfrak{V} V_1} = -\frac{V_2 - e}{\mathfrak{V} V_1},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{V}} - \frac{1}{V_2} = \frac{V_2 - \mathfrak{V}}{\mathfrak{V} V_2} = -\frac{V_1 - e}{\mathfrak{V} V_2},$$

also

$$\Omega_2-\Omega_1=\frac{2\pi}{\mathfrak{B}}\left[2n\mathfrak{H}(\gamma)-\frac{V_2-c}{V_1}\mathfrak{F}(\alpha)-\frac{V_1-c}{V_2}n^2\mathfrak{G}(\beta)\right]. \quad \ldots 19)$$

Wir wollen jetzt die specifischen Volumina der Flüssigkeiten A und B einführen, und zwar wollen wir das specifische Volumen von A mit s_1 und dasjenige von B mit s_2 bezeichnen. Alsdann ist

$$V_1 = s_1 \text{ und } V_2 = n s_2,$$

somit

$$\Omega_2-\Omega_2=\frac{2\pi}{\mathfrak{B}}\left[2n\mathfrak{H}(\gamma)-\frac{ns_2-c}{s_1}\mathfrak{F}(\alpha)-\frac{s_1-c}{s_2}n\mathfrak{G}(\beta)\right]$$

$$=\frac{2\pi n}{\mathfrak{B}}\left[2\mathfrak{H}(\gamma)-\frac{s_2}{s_1}\mathfrak{F}(\alpha)-\frac{s_1}{s_2}\mathfrak{G}(\beta)\right]+\frac{2\pi c\mathfrak{F}(\alpha)}{\mathfrak{B}s_1}+\frac{2\pi nc\mathfrak{G}(\beta)}{\mathfrak{B}s_2} \quad \ldots 20)$$

Setzen wir jetzt

$$2\pi\left[2\mathfrak{H}(\gamma)-\frac{s_2}{s_1}\mathfrak{F}(\alpha)-\frac{s_1}{s_2}\mathfrak{G}(\beta)\right]=A$$

$$\frac{2\pi\mathfrak{F}(\alpha)}{s_1}=B, \quad \frac{2\pi\mathfrak{G}(\beta)}{s_2}=C,$$

so wird

$$\Omega_2-\Omega_1=\frac{An+Bc+Cnc}{\mathfrak{B}}. \quad \ldots 21)$$

Die Grössen A, B, C sind constante Grössen. B und C sind wesentlich positiv, dagegen kann A positiv oder negativ sein. Die Grösse $\Omega_2-\Omega_1$ ist jene Arbeit, welche sämmtliche Capillarkräfte bei der Mischung leisten. Ist diese Arbeit positiv, so ist die Mischung mit einer Wärmeentwicklung verbunden, ist aber A negativ und so gross, dass $\Omega_2-\Omega_1$ negativ ausfällt, dann ist die Mischung mit einer Wärmeabsorption verbunden, d. h. die Lösung hat eine niedrigere Temperatur als die beiden Componenten vor der Mischung.

Der letztere Umstand erscheint auf den ersten Blick unglaubwürdig, da man meinen sollte, dass die Bildung einer jeden Lösung mit einer positiven Arbeitsleistung von Kräften verbunden sein müsse, aber ich kann diese Verhältnisse, deren genaue Untersuchung ich zum Gegenstande der nächsten

Mittheilung machen werde, schon jetzt durch den Hinweis auf eine bekannte Thatsache verständlich machen. In 100 *g* verdünnte Schwefelsäure von 0° C., in welcher die Schwefelsäure H_2SO_4 zum Wasser in dem Gewichtsverhältnisse 1:2 steht, werde 1 *g* Eis von 0° C. geworfen. Das Eis löst sich in der verdünnten Schwefelsäure auf, und die Temperatur der ganzen Lösung sinkt dabei auf —0·903° C. Wird 1 *g* Eis von 0° C. in Wasser von 0° C. verwandelt, so wird dabei eine Wärmemenge von 79·25 *gcal.* verbraucht, und wird dann diese Wassermenge mit der gegebenen Lösung gemischt, so wird durch die Verdünnung eine Wärmemenge von 11·06 *gcal.* gewonnen. Es bleibt somit ein Wärmedeficit von 68·19 *gcal.* übrig, welches durch die Lösung in der Weise gedeckt wird, dass sie sich um 0·903° C. abkühlt. Fassen wir die Schmelzwärme des Eises und die Verdünnungswärme als Äquivalente gewisser mechanischer Arbeiten auf, so sehen wir, dass die Auflösung des Eises mit einer negativen Arbeitsleistung, also mit der Überwindung gewisser Widerstände verbunden ist. Überwunden werden diese Widerstände dadurch, dass die Lösung durch ihre Abkühlung die dazu erforderliche Wärmemenge hergibt.

Wir werden nun die Formel 21) an der Hand experimenteller Ergebnisse prüfen. Drücken wir die Wärmemengen durch Calorien aus, so muss die Mischungswärme sich zu Folge der Formel 21) durch die Gleichung

$$W = \frac{an + be + cen}{\mathfrak{B}} \qquad \ldots 22)$$

darstellen lassen, wo *a*, *b*, *c* constante Grössen sind.

Von den vielen Lösungen, welche Jul. Thomsen untersucht hat,[1] führe ich im Folgenden zur Prüfung der Formel 22) drei Lösungen an, und zwar die wässerigen Lösungen von Schwefelsäure, Salpetersäure und Essigsäure; von den übrigen waren nicht alle erforderlichen Daten vorhanden. Für die genannten drei Lösungen zeigte Thomsen, dass die Annahme einer chemischen Reaction, nämlich die Annahme von Hydratbildungen, durchaus auszuschliessen ist; es sind also für diese

[1] Thermochemische Untersuchungen, III, S. 39 ff., 1883.

Lösungen diejenigen Voraussetzungen erfüllt, von welchen unsere Theorie ausgeht.

I. Wässerige Lösungen von Schwefelsäure.

Bezüglich der Verdünnungswärme benützte ich jene Werthe, welche Thomsen[1] angab, nur drückte ich das Mischungsverhältniss anders aus, und zwar durch das Gewichtsverhältniss $1:n$ von Schwefelsäure (H_2SO_3) und Wasser. Dementsprechend stellt in der folgenden Tabelle W diejenige Wärmemenge in Grammcalorien dar, welche entwickelt wird, wenn 1 g Schwefelsäure mit n Gramm Wasser gemischt wird. Die ersten sechs Versuche lassen sich durch eine empirische Formel von der Form der Gleichung 1), nämlich durch

$$W = \frac{182 \cdot 2n}{n + 0 \cdot 3303}$$

sehr gut darstellen, dagegen weichen für die übrigen Versuche die berechneten Werthe von den beobachteten bis zu 4% ab. Thomsen vermuthetete als Ursache dieser Abweichung, dass die Wärmeentwicklung einen zweifachen Ursprung habe, und zwar einerseits aus einer Wirkung des Wassers auf die Säure und andrerseits aus einer Volumsänderung der Flüssigkeit entstehe. Die erstere Wirkung entspreche der hyperbolischen Function, die letztere einem abweichenden Gesetze.

Die Dichten der Lösungen entnahm ich den Tabellen von Lunge und Isler,[2] welche für 15° C. und für Wasser von 4° C. als Einheit gelten, und berechnete daraus $\mathfrak{V}$. Für s_1 wählte ich den Werth $0 \cdot 5430\, cm^3$. Schliesslich ist $V_2 = 1 \cdot 000857\, n\, cm^3$.

n	V_2	$V_1 + V_2$	$\mathfrak{V}$	c	W beob.	W berechn.	Differenz
0·1837	0·1838	0·7268	0·6650	0·0618	65·09	65·97	+0·88
0·3673	0·3677	0·9107	0·8267	0·0840	96·10	96·19	+0·09
0·551	0·5515	1·0945	0·9992	0·0953	113·64	113·01	−0·63

[1] A. a. O. S. 54.

[2] Landolt und Börnstein, Phys.-chem. Tab., S, 196, 197.

n	V_2	V_1+V_2	$\mathfrak{V}$	e	W beob.	W berechn.	Differenz
0·918	0·9191	1·4621	1·3510	0·1111	133·75	132·24	−1·51
1·653	1·6544	2·1974	2·0614	0·1360	152·57	150·56	−2·01
3·490	3·4927	4·0357	3·8670	0·1687	165·90	164·80	−1·10
9·000	9·0076	9·5506	9·3540	0·1966	170·2	172·00	+1·80
18·184	18·200	18·743	18·535	0·2080	172·0	173·94	+1·94
36·550	36·582	37·125	36·905	0·220	174·1	175·30	+1·20
73·284	73·347	73·890	73·662	0·228	176·7	176·00	−0·70
146·75	146·880	147·423	147·160	0·263	180·0	178·72	−1·28
293·70	293·940	294·483	294·050	0·433	182·2	191·47	+9·27

Die Gleichung 22) erhält für diesen Fall die Form

$$W = \frac{159\cdot 40n + 222\cdot 55e + 73\cdot 84en}{\mathfrak{V}}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich die in der vorletzten Spalte stehenden Werthe. H. Pfaundler[1] schätzt die bei der Bestimmung der Verdünnungswärme durch die verschiedenen Ursachen erzeugten Fehler im ungünstigsten Falle auf $1\cdot 5\%$. Nun ist zu beachten, dass wir es hier noch mit einer anderen Fehlerquelle zu thun haben, nämlich mit den Fehlern bei der Bestimmung der Dichte der Lösungen. Sind dabei die möglichen Fehler auch sehr klein, so ist doch ihr Einfluss auf die Grösse e bedeutend. Trotz alledem ist aber mit Ausnahme der letzten Bestimmung die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung nirgends grösser als $1\cdot 35\%$, so dass wir sagen können, dass mit Ausnahme der letzten Bestimmung die Theorie mit der Erfahrung in Übereinstimmung steht. Was nun die letzte Bestimmung anbelangt, so ist für diese das Mischungsverhältniss 1:293·7, d. h. es kommen auf 1 *l* Lösung 3·401 *g* Schwefelsäure. Das ist schon eine sehr starke Verdünnung. Betrachten wir die Werthe von e für die anderen Bestimmungen, so sehen wir, dass e mit wachsendem n zunimmt und einem Grenzwerthe zustrebt. Bei der letzten Bestimmung weicht aber e von diesem

[1] Diese Sitzungsber., 71, 2, 1875, S. 162.

Verhalten ab und nimmt einen übermässig grossen Werth an. Dementsprechend liefert die Formel für W bei Benützung dieses Werthes von c einen zu grossen Werth. Der übermässig grosse Werth von c deutet darauf hin, dass durch die hochgradige Verdünnung ein neuer Umstand hinzutritt, auf welchen unsere Theorie keine Rücksicht genommen hat.

II. Wässerige Lösungen der Salpetersäure.

Wir benützen jene Werthe, welche Thomsen[1] aus seinen Versuchen für die Verdünnungswärme der wässerigen Lösungen der Salpetersäure erhalten hat. Die ersten sechs Bestimmungen lassen sich wieder durch eine empirische Formel von der Form 1) wiedergeben, dagegen versagt diese Formel für die übrigen Bestimmungen gänzlich, denn es müsste nach der Formel die Mischungswärme W mit wachsendem n beständig zunehmen, während die Versuche ergeben, dass von $n = \frac{40}{7}$ angefangen die Mischungswärme nahezu constant bleibt, so dass eine fernere Verdünnung der Lösung fast ohne Wärmetönung vor sich geht.

Die Dichten der Lösungen entnahm ich den Tabellen von Lunge und Rey[2] und berechnete daraus $\mathfrak{V}$. Ferner ist hier $s_1 = 0 \cdot 6560\, cm^3$ und $V_2 = 1 \cdot 000857\, n\, cm^3$.

n	V_2	$V_1 + V_2$	$\mathfrak{V}$	c	W beob.	W berechn.	Differenz
1/7	0·1430	0·7990	0·7699	0·0291	31·83	30·16	−1·67
2/7	0·2860	0·9420	0·8856	0·0564	52·14	52·14	±0·00
3/7	0·4290	1·0849	1·0054	0·0795	66·03	67·92	+1·89
5/7	0·7149	1·3709	1·2569	0·1140	83·75	87·50	+3·75
6/7	0·8579	1·5139	1·3868	0·1271	90·63	93·68	+3·05
10/7	1·4298	2·0858	1·9288	0·1570	105·79	106·10	+0·31
20/7	2·8596	3·5156	3·3332	0·1824	116·16	114·02	−2·14
40/7	5·7192	6·3752	6·1841	0·1911	118·38	116·50	−1·88
80/7	11·4384	12·0944	11·8930	0·2014	118·03	117·84	−0·19
160/7	22·8767	23·5327	23·3368	0·1959	117·79	117·94	+0·15
200/7	28·5959	29·2519	29·0567	0·1952	118·08	118·00	−0·08
320/7	45·7535	46·4095	46·2070	0·2025	118·25	118·31	+0·06
640/7	91·5069	92·1629	91·9160	0·2469	118·94	119·43	+0·49

[1] A. a. O. S. 66.

[2] Landolt und Bornstein, Phys.-chem. Tab., S. 198, 199.

Die Gleichung 22) erhält für diesen Fall die Form:

$$W = \frac{114 \cdot 5\, n + 233\, e + 20\, e n}{\mathfrak{V}}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich die in der vorletzten Spalte stehenden Werthe. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung bei den fünf letzten Bestimmungen eine sehr gute, bei den übrigen ist die Abweichung abwechselnd positiv und negativ, so dass wir sagen können, dass auch dieser Fall die obige Theorie bestätigt.

III. Wässerige Lösungen der Essigsäure.

Bei diesen Lösungen tritt der merkwürdige Fall ein, dass die Wärmetönung je nach dem Mischungsverhältniss positiv oder negativ ist. Das Mischungsverhältniss ist wieder durch das Gewichtsverhältniss von 1 *g* Essigsäure und *n* Gramm Wasser ausgedrückt. Solange $n < 2 \cdot 4$ ist, ist die Wärmetönung negativ, dagegen ist sie für $n > 2 \cdot 4$ immer positiv. Die Wärmetönung wurde ebenfalls von Thomsen bestimmt.[1] Die Dichten der Lösungen entnahm ich den Tabellen von Oudemans.[2] Ferner ist $s_1 = 0 \cdot 95166\, cm^3$ und $V_2 = 1 \cdot 000857\, n\, cm^3$.

n	V_2	$V_1 + V_2$	$\mathfrak{V}$	e	W beob.	W berechn.
0·15	0·1502	1·1019	1·0759	0·0260	−2·17	−1·43
0·30	0·3005	1·2521	1·2138	0·0383	−2·53	−2·34
0·45	0·4507	1·4024	1·3562	0·0462	−2·75	−2·81
0·6	0·6009	1·5526	1·5003	0·0523	−2·60	−2·90
1·2	1·2019	2·1535	2·0863	0·0672	−1·85	−1·98
2·4	2·4037	3·3554	3·2746	0·0808	−0·03	+0·53
6·0	6.0093	6·9610	6·8702	0·0908	+2·88	+3·13
15·0	15·0233	15·9749	15·8793	0·0956	+4·63	+4·59
30·0	30·0465	30·9982	30·9007	0·0975	+5·58	+5·36
60·0	60·0930	61·0447	60·9457	0·0990	+6·25	+6·00

[1] A. a. O. S. 78.

[2] Landolt und Börnstein, Phys.-chem. Tab., S. 202.

Die Gleichung 22) erhält für diesen Fall die Form.

$$W = \frac{-44\cdot00\,n + 122\,e + 505\,en}{\mathfrak{B}}.$$

Die Werthe, welche sich aus dieser Formel ergeben, stehen in der letzten Spalte. Wie man sieht, gibt die Theorie die Beobachtungen in qualitativer Beziehung ganz gut wieder, doch sind die Abweichungen in quantitativer Beziehung mitunter beträchtlich.

Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. II.

Messungen des Potentialgefälles in Sibirien

von

Dr. **Hans Benndorf.**

(Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.)

Die Frage nach den Ursachen und den Gesetzen der atmosphärischen Elektricität steht heute noch nahezu unbeantwortet da. Es sind eine Reihe von Hypothesen aufgestellt worden, die nur zum kleineren Theil endgiltig widerlegt sind. An eine Theorie einer so complicirten meteorologischen Erscheinung, wie es die Luftelektricität offenbar ist, eine Theorie die im Stande wäre, alle wesentlichen Details zu erklären, kann nicht gedacht werden, so lange nicht ein über die ganze Erde ausgedehntes und über einen längeren Zeitraum sich erstreckendes Beobachtungsmaterial vorliegt.

Alle Arbeiten der letzten Jahre beschränken sich daher nur darauf, einen Zusammenhang der luftelektrischen Erscheinungen mit anderen meteorologischen Elementen zu suchen, der im Stande ist, die jährliche und tägliche Periode im Grossen zu erklären; das bis jetzt gesammelte Material reicht nicht aus, mit Sicherheit gegen eine der aufgestellten Theorien zu entscheiden.

Im Vordergrunde des Interesses stehen die Theorie von Franz Exner, der einen directen Zusammenhang des atmosphärischen Potentialgefälles mit der absoluten Feuchtigkeit der Luft annimmt, und eine analoge, von Elster und Geitel aufgefundene Beziehung zwischen Potentialgefälle und Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung.

In beiden Fällen wird das Potentialgefälle in seiner Abhängigkeit vom Dunstdruck, respective Lichtintensität, durch die Formel $\frac{dV}{dn} = \frac{A}{1+Bx}$ dargestellt und durch die bis jetzt vorliegenden Messungen, soweit man es billigerweise fordern kann, ziemlich gleich gut bestätigt.

Das Beobachtungsmaterial reicht aber, was den Wasserdampfgehalt der Luft betrifft, nicht weiter als bis 2 *mm* Dunstdruck herab, und auch hier sind für niedrige Dunstdrucke wenig Messungen vorhanden; was die Strahlung anlangt, so ist sie bisher nur in Mitteleuropa gleichzeitig mit elektrischen Messungen beobachtet worden.[1]

Von hohem Interesse wären daher zur Prüfung der Frage, ob es wirklich der Wasserdampf der Luft ist, der die negative Ladung der Erde entführt, ausgedehnte Messungen der Luftelektricität in Gebieten mit möglichst grosser Trockenheit der Luft, wie sie sich wohl nirgends so ausgesprochen als im Winter in Sibirien finden.

Bis jetzt sind derartige Beobachtungen noch nicht publicirt. Die Resultate der schwedischen Polarstation zu Cap Thordsen,[2] Spitzbergen 1882/83, kommen zur Entscheidung dieser Frage nicht in Betracht, da sie nur relative Werthe des Potentialgefälles bieten. Bedauerlicherweise wird auch jetzt noch oft viel zu wenig Gewicht gelegt auf die Bestimmung der absoluten Grösse des Gefälles, die nur in einer Ebene geschehen kann. Beim heutigen Stande unseres Wissens sind relative Angaben fast werthlos, wenn es unterlassen wurde, gleichzeitig auch den Reductionsfactor auf die absoluten Werthe in der Ebene zu bestimmen.

Von den Beobachtungen der Nansen'schen Expedition konnte ich nichts in Erfahrung bringen; sie sollen im Laufe dieses Jahres publicirt werden.

Durch Unterstützung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, für die ich an dieser Stelle meinen Dank ausspreche,

[1] Um diese Lücke auszufüllen, hat Herr Prof. Fr. Exner im Frühjahre 1898 in Oberägypten Messungen vorgenommen.

[2] S. A. Andrée, Observations faites au Cap Thordsen, Tome II, 2, Électricité atmosph. Stockholm, 1887.

ist es mir im Winter 1897/98 ermöglicht worden, eine Reise nach Sibirien zu unternehmen und dort luftelektrische Messungen anzustellen, über welche die vorliegende Arbeit Bericht erstattet.

Da die mir zur Verfügung stehende Zeit kurz war und ich auch bei günstigeren Witterungsverhältnissen, als ich sie antraf, nur verhältnissmässig wenig klare Tage erwarten durfte, musste ich mich im Vorhinein darauf beschränken, einen Überblick im Grossen über die luftelektrischen Verhältnisse zu gewinnen. Alle Detailuntersuchungen einer späteren systematischen Erforschung, die sich auf mehrere Orte mindestens über ein Jahr erstrecken müsste, überlassend, lag es mir in erster Linie daran, zu untersuchen, welchen Werth das Potentialgefälle im Durchschnitt an elektrisch normalen Tagen hat.

Die Wahl des Beobachtungsortes musste folgenden Bedingungen möglichst gerecht werden: Es soll

1. die absolute Feuchtigkeit klein sein, jedenfalls an schönen Tagen 2 *mm* Dunstdruck nicht überschreiten;

2. die wahrscheinliche Anzahl ganz heiterer Tage nicht zu klein sein;

3. der Beobachtungsort in einer Ebene liegen;

4. die Reise ohne zu grosse Kosten und Zeitaufwand durchzuführen sein.

Alle diese Forderungen erfüllt die Stadt Tomsk in Sibirien in bester Art und bietet ausserdem Annehmlichkeiten der Civilisation, die dem allein reisenden Beobachter persönlich und damit auch seinen Aufgaben zu Gute kommen.

Die Stadt Tomsk (84° 58′ östl. Länge, 56° 30′ nördl. Breite, circa 134 *m* Seehöhe) liegt am Ufer des Tom, eines Nebenflusses des Ob, in der grossen sibirischen Ebene, die sich vom Altai bis zum nördlichen Eismeere hinzieht.

Die mittlere Tagestemperatur beträgt im Jänner —20°, im Februar —17° C.; die mittlere absolute Feuchtigkeit ungefähr 1·0 *mm*.

Die Anzahl der heiteren Tage im Jänner und Februar variirt freilich in den einzelnen Jahren nur zwischen 10 und 4, und war leider in diesem Jahre nicht besonders gross.

Ich wählte also Tomsk zum Zielpunkte meiner Reise und verliess Wien Mitte December 1897.

Dass es mir bei meiner sehr geringen Kenntniss der Landessprache gelungen ist, meine Reise auszuführen und das mir gesteckte Ziel zu erreichen, verdanke ich in erster Linie der ausserordentlichen Liebenswürdigkeit und bereitwilligen Unterstützung, die mir in Russland von allen Seiten zu Theil wurde.

Es ist mir ein Bedürfniss, Allen, die mir mit Rath und That zur Seite gestanden sind, meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Insbesondere den Herren Dr. E. v. Berens, Dr. P. Lebedew, Prof. Dr. E. Leyst in Moskau, ferner Herrn Prof. Th. Kapustin, Pastor A. Keller, W. Napierski und A. Stieren in Tomsk bin ich zu grossem Danke verpflichtet. Herr Prof. Kapustin stellte mir mit ausserordentlicher Liebenswürdigkeit sein Laboratorium zur Verfügung und erleichterte mir durch werthvolle Rathschläge meine Aufgabe.

Beschreibung der Apparate und Versuche.

Ehe ich zur Beschreibung meiner eigenen Versuche gehe, darf ich nicht unerwähnt lassen, dass schon früher Herr Th. Kapustin in Tomsk Messungen über Luftelektricität im Winter angestellt hat. Den Hinweis auf die betreffende Notiz,[1] sowie die Übersetzung verdanke ich der Güte Prof. E. Leyst's in Moskau. Da diese kurze Mittheilung Th. Kapustin's in einer unzugänglichen Zeitschrift in russischer Sprache publicirt ist und eine Reihe interessanter Beobachtungen enthält, die ich durchaus bestätigt gefunden habe und die sehr wichtig für luftelektrische Messungen sind, führe ich hier die Bemerkungen Kapustin's in sinngetreuer Übersetzung an:

»Ich befand mich in Tomsk in den Wintermonaten des verflossenen und gegenwärtigen Jahres und machte mehrfache Versuche, die atmosphärische Elektricität zu beobachten, wobei ich mich des bekannten Exner'schen Elektrometers bediente; denn Beobachtungen dieser Art in sehr kalter Zeit, an Orten wie Tomsk, sind nach dem Hinweis von Exner selbst von besonderem Interesse.«

[1] Th. Kapustin, Einige Eigenthümlichkeiten bei der Beobachtung der atmosphärischen Elektricität im Winter auf einer Schneeoberfläche. Meteorolog. Bote. Petersburg, 1892.

»Wegen Mangel an Zeit und aus anderen Gründen habe ich diese Beobachtungen nicht an regelmässigen Terminen ausgeführt, aber doch nach Möglichkeit und je nach dem Wetter, wobei ich bemüht war, klare und ruhige Tage auszusuchen; ohne jetzt einen Bericht über diese Beobachtungen und die erhaltenen Zahlengrössen abzustatten, beschränke ich mich mit dem Hinweis auf eine nach meiner Ansicht interessante Thatsache, die ich bei der Gelegenheit beobachtete, in der Hoffnung, dass diese Mittheilungen analoge Beobachtungen an anderen Orten veranlasst und vielleicht Fehlern und unnützen Zeitverlust bei Personen vorbeugt, die sich mit atmosphärischer Elektricität beschäftigen werden.«

»Wenn man an einem klaren kalten Tag aus dem Stadtbereiche herausgeht,[1] kommt man auf eine weite, etwas erhöhte Ebene, die im Süden von ihr gelegen ist und zur Zeit mit Schnee bedeckt ist. Als ich, wie es sich gehört, alle Theile des Exner'schen Apparates aufgestellt hatte, war ich über die schnellen und anscheinend zufälligen Schwankungen in den Angaben des Elektrometers erstaunt. Die Blättchen fielen bald zusammen, bald gingen sie so weit auseinander, dass sie an das Gehäuse ankamen. Ich versuchte, die Höhe des Lichtes über der Schneeoberfläche zu verändern, d. h. setzte dasselbe fast bis auf den Schnee und erhob es bis zur Höhe von $1-1^1/_2$ *m*: die Schwankungen und die scheinbaren Unregelmässigkeiten blieben dieselben, so dass es mir nicht einmal gelang, das Zeichen der Elektricität festzustellen. Da mir etwas Ähnliches, obgleich in ungleich schwächerem Maasse, an einigen Tagen auch im Sommer begegnet war, setzte ich die Beobachtungen an diesem Tage aus.«

»Die nächstfolgenden Beobachtungen begann ich, der Zeitersparniss wegen, auf einem ebenen, ziemlich freien Platze des Universitätsgartens zu Stunden auszuführen, an denen in den umliegenden Häusern die Heizung der Öfen nicht bedeutend war; hierbei bemerkte ich, dass die Blättchen schnell auseinander gingen, häufig bis zum Gehäuse, wenn man, nachdem

[1] »Solche Beobachtungen sind besonders wünschenswerth, weil in der Stadt der Rauch das Resultat wesentlich beinflusst.»

man auf dem Schnee gegangen war, mit dem blossen Finger den Knopf des auf eine Bank oder selbst auf den Schnee gestellten Elektroskopes berührte. Diesen letzten Versuch habe ich mehrfach wiederholt und mich davon überzeugt, dass der Beobachter selbst in Folge von Reibung am Schnee oder an Kleidern sich so elektrisirt, dass bei Berührung seiner Hand mit dem Elektroskope die Blättchen desselben heftig auseinander gehen. Es ist mir sogar begegnet, dass es hinreicht, vor dem Elektroskope stehend den Handschuh abzunehmen, um bei einer Berührung die Divergenz der Blättchen zu beobachten. Diese Divergenz der Blättchen wird bedeutend, wenn man vor der Berührung des Elektroskopes einige Schritte auf dem Schnee macht oder gar leicht die Beine hebt. Das Zeichen der Elektricität bleibt dabei nicht constant und hängt dem Anscheine nach von der Kleidung, Beschuhung und der Art der Reibung ab. Bei verschiedenen Personen gelang es mir, wenigstens verschiedene Zeichen der Elektricität zu beobachten.«

»Auf die isolirende Eigenschaft des Schnees hat schon Ermann[1] hingewiesen, und Achard[2] hat sogar aus Eis eine Elektrisirmaschine hergestellt, die Funken gab.«

»Um mich zu überzeugen, in welchem Maasse ein auf den Schnee gestellter Gegenstand isolirt ist, versuchte ich, auf dem Schnee einen nicht grossen, metallischen Ring mit Ständer und Hollundermarkkügelchen aufzustellen und dann denselben mit einem Elektrophor zu laden. Die Kügelchen gingen sofort nach dem Laden zusammen; aber als ich meinen Gehilfen, der über den Stiefeln Filzgaloschen trug, auf reinen Schnee stellte, so konnte ich ihm durch successive Berührung des Ringes und des Elektrophors eine so starke Ladung beibringen, dass bei Annäherung der Hand an sein Gesicht schon schwache Funken bemerkbar waren. Bei diesen Versuchen mit dem Elektrophor habe ich selbst mich die ganze Zeit an einen Eisenstab gehalten, der durch den Schnee zur Erde und sogar etwas in die Erde ging, um mich mit der Erde zu verbinden.«

[1] Gehler's Physikalisches Wörterbuch, Artikel Eis.

[2] »In diesem Winter versuchte ich, aus Eis einen Elektrophor anzufertigen, habe aber mit demselben, wahrscheinlich in Folge ungünstiger Witterung, nur Spuren von Elektricität gefunden.«

»Eine Eisenstange ähnlicher Art könnte auch dazu dienen, um sich mit der Erde zu verbinden, wenn man im Felde Beobachtungen über atmosphärische Elektricität macht. Jedesmal nach der Berührung des Eisenstabes zeigte das Exner'sche Elektroskop keinerlei Elektricität des Beobachters.«

»Unregelmässigkeiten und Sprünge beim oben beschriebenen Versuche, die atmosphärische Elektricität zu beobachten, erklären sich also zum Theile durch zufällige Elektrisirung des Beobachters selbst; als ich bei weiteren Beobachtungen meinen Körper und das äussere Gehäuse des Elektroskopes durch eine Metallstange mit der Erde verband, so waren solche heftige Schwankungen nicht mehr bemerkbar.«

»Nicht genügend leitende Eigenschaft des Schnees erschwerte bedeutend alle Umstände und zwingt, bei Beobachtung der atmosphärischen Elektricität im Winter auf schneebedeckten Flächen besondere Vorsichtsmassregeln zu ergreifen, könnte sogar ausser der Elektrisirung des Beobachters selbst Veränderungen im elektrischen Felde in der Nähe der Oberfläche durch Elektrisiren des Schnees hervorrufen.«

»Wird nicht etwas Ähnliches auch im Sommer über Flächen, die mit trockenem Quarzsand bedeckt sind, beobachtet?«

Wie schon oben erwähnt, habe auch ich ganz ähnliche Erscheinungen bemerkt. Es lag mir daher daran, in erster Linie zu untersuchen, inwieweit aus dieser schlechten Leitfähigkeit des Schnees Fehler für die Messungen des Potentialgefälles entspringen.

Der Platz, den ich für meine Untersuchungen wählte, war der nämliche, den Herr Prof. Kapustin erwähnt; es ist der einige Kilometer vom Centrum entfernte, nach Süden gelegene Exercierplatz der Tomsker Garnison. Er hat eine beträchtliche Ausdehnung und ist vielleicht $^1/_2$ km^2 vollkommen eben und unbewachsen. Seine westliche Grenze bildet ein etwa 50 m tiefer Abfall zum Flussbett des Tom; doch war meine Beobachtungsstation etwa 600 Schritte davon entfernt.

Die Lage des Platzes im Süden der Stadt hat den Vortheil, dass man durch die ziemlich beträchtliche Rauchentwicklung in der Stadt nicht gestört wird, da die Winde fast ausschliesslich von Süden kommen.

Nur zweimal beobachtete ich Nordwind und fand dabei ein auffallend hohes Potentialgefälle, was ich nicht anstehe, wenigstens theilweise dem Rauch zuzuschreiben; doch werde ich darauf noch weiter unten zurückkommen.

Da das Hinausziehen auf das Feld mit allen Utensilien ziemlich mühsam und zeitraubend war, hoffte ich Anfangs, mir in der Stadt eine bequeme Beobachtungsstation einrichten zu können, um vom Zimmer aus zu beobachten. Leider liess es sich nicht ausführen, da, wenigstens in der Gegend, wo ich wohnte, die Rauchentwicklung zu bedeutend war; übrigens sind die Häuser hermetisch verschlossen, so dass man die dicken Holzwände eigens durchbohren müsste, um eine Leitung ins Freie legen zu können.

Gleich bei meinen ersten Versuchen war mir klar, dass mit einem Pelz gar nichts anzufangen ist; erstens ist derselbe (man trägt in Sibirien Doppelpelze mit Haaren nach innen und aussen) so schwer und unbequem, dass man sich nur unbeholfen darin bewegen und bücken kann; zweitens aber wird er bei einer kleinen Bewegung des Armes stark elektrisch und beeinflusst merklich die Ausschläge des Elektroskopes.

Wie man sieht, ist die Kleidung des Beobachters nicht unwesentlich, und ich halte es nicht für überflüssig, meinen Anzug zu beschreiben, da er sich sehr gut bewährt hat.

Im Wesentlichen ist er der Vorschrift Nansen's nachgebildet. Direct am Körper trug ich eine doppelte Lage Jägerwäsche, darüber eine dicke Kniehose aus Loden, Lodengamaschen und zwei bis drei Paar sehr dicke Wollsocken; als Fussbekleidung zog ich dann die landesüblichen, bis über das Knie hinaufreichenden Filzstiefel an, die aus einem Stück gewalkt sind; sie müssen sehr weit sein, damit viel Luft in ihnen sich befindet; eng anliegende, noch so dicke Stiefel schützen auf die Dauer nicht genügend. Besser wären vielleicht noch Schuhe aus Renthierfell; doch haben für meinen Zweck die Filzstiefel ausgereicht.

Auf dem Oberkörper trug ich eine aus Kameelhaar gewirkte Jacke und darüber einen Schafwollsweater, der den Hals und die Arme bis zu den Knöcheln schützte. Das Gesicht war bedeckt durch eine gestrickte Schneehaube, die nur die Augen

frei liess, und darüber eine Pelzkappe mit Ohrenschützern Schneebrillen erwiesen sich wenigstens für meine Augen bei längerem Verweilen auf dem Felde als nothwendig.

Den einzigen Mangel der Bekleidung bildete der Schutz der Hände. Dicke Pelzhandschuhe sind von vorneherein unbrauchbar, da man mit ihnen nicht manipuliren kann; aber auch Wollhandschuhe haben sich nicht bewährt, da nach kurzer Zeit die Kälte doch durchdringt und man dann mit steifen Händen und Handschuhen kein genügend feines Gefühl mehr hat.

Ich musste mich schliesslich dazu bequemen, mit blossen Händen zu arbeiten und sie dann am Körper wieder erwärmen. Abgesehen von dem Schmerz, den das Berühren der kalten Metalltheile verursacht, zwang mich die Unfähigkeit, die Hände weiter zu gebrauchen, einigemale zum Rückzug. Übrigens härtet man sich verhältnissmässig rasch ab, wozu öfteres Abreiben der Hände mit kaltem Schnee wesentlich beiträgt.

Um bei den Beobachtungen nicht durch die lästigen Schneeschuhe behindert zu sein, nahm ich immer eine grosse Holzschaufel mit und säuberte einen Fleck vom Schnee; in der Folge habe ich das Schneeschaufeln als angenehmen und vor Allem erwärmenden Zeitvertreib empfunden.

Zunächst untersuchte ich an verschiedenen Tagen bei Sonnenschein und am Abend den Schnee qualitativ auf seine Leitfähigkeit. Die Elektroskope standen auf kleinen Metallfüsschen auf einem Tische, der aus einem Theodolitfusse mit einer Holzplatte darauf hergestellt war. Dabei zeigte es sich, dass die Elektroskope ohne Anbringung einer besonderen Erdleitung vollkommen isolirt waren, und zwar nicht in Folge des Schnees, auf dem der Tisch stand, sondern weil das Holz des Tisches selbst sehr gut isolirte. (Das Holz wird bei der grossen Trockenheit ein guter Nichtleiter, was sich sogar im Zimmer bemerkbar macht. Wenn man ein paar Schritte auf dem Holzboden geht und dann den Knopf des Elektroskopes berührt, gibt es einen starken Ausschlag;[1] diese Selbstelektrisirung durch Reibung an dem Fussboden kann so stark werden, dass man Funken an

[1] Dieselbe Erscheinung beobachtete Herr Prof. Exner auch in Ägypten.

eine Erdleitung abgibt. Beim Aichen der Elektroskope musste ich mich deshalb auf eine zur Erde geleitete Blechplatte stellen.)

Als Erdleitung genügt es, das Gehäuse des Elektroskopes mit einer 1—2 *cm* in den hartgefrorenen Boden getriebenen Metallstange leitend zu verbinden; übrigens habe ich, um eventuell Fehler in der Erdleitung zu umgehen, meistens mit zwei Flammencollectoren beobachtet.

Zur Prüfung der Frage, wie weit der Schnee isolirt und ob eventuell durch locale Ladungen das normale Erdfeld gestört werden kann, wie Herr Kapustin vermuthet, habe ich folgende Versuche angestellt.

Eine Blechkanne wurde auf den Schnee gestellt und durch einen Draht mit dem Elektroskop verbunden. Wurde er dann geladen, so zeigte das Elektroskop nach Verlauf von etwa einer Secunde bereits keinen Ausschlag mehr. War er dagegen auf eine Holzplatte gestellt, änderte sich der Ausschlag während Minuten nicht. Sehr gut, wenngleich eine Spur weniger als Holz, isolirte Filz.

Nur einmal des Nachts bei einer Kälte von ungefähr —40° C. kam es mir vor, als ob der Schnee wesentlich schlechter leitete als sonst.

Ein in den Schnee gesteckter Draht dagegen, dessen anderes Ende mit dem Gehäuse des Elektroskopes verbunden war, schien nicht immer eine genügend sicher functionirende Erdleitung zu sein.

Eine Störung des Feldes durch locale Elektrisirung des Schnees konnte ich nie beobachten, auch wenn das Elektroskop auf dem Schnee stand, wenigstens so lange nicht, als der Schnee am Boden liegt. Aufgewirbelte Schnee- und Eisnadeln in der Luft erweisen sich aber als sehr stark elektrisch, worauf ich weiter unten noch zurück komme.

Nachdem ich mich aber überzeugt hatte, dass bei sorgfältiger Erdleitung und Vermeidung von Selbstelektrisirung des Beobachters (in Wollkleidung war sie stets minimal) die gewöhnliche Messungsmethode verwendbar war, konnte ich an die eigentlichen Messungen gehen. Leider musste ich beinahe einen Monat auf schönes Wetter warten.

Die bei den Beobachtungen verwendeten Apparate waren die folgenden:

Als Elektroskope verwendete ich die Exner'schen, die sich durchwegs gut bewährt haben. Vor und nach meinen Versuchen aichte ich sie mittelst einer Batterie von Zink-Platinelementen in Wasser und fand die Empfindlichkeit ungeändert; auch eine bemerkbare Empfindlichkeitsänderung derselben bei tiefen Temperaturen konnte nicht constatirt werden. Für höhere Spannungen hatte ich ein Braun-sches Vorlesungselektrometer mitgenommen.

Als Collectoren verwendete ich theils Metalllampen, wie sie Elster und Geitel zu luftelektrischen Messungen angeben, theils Kerzen, die in einem etwas veränderten Trägergestell verwendet wurden (siehe Fig. 1).

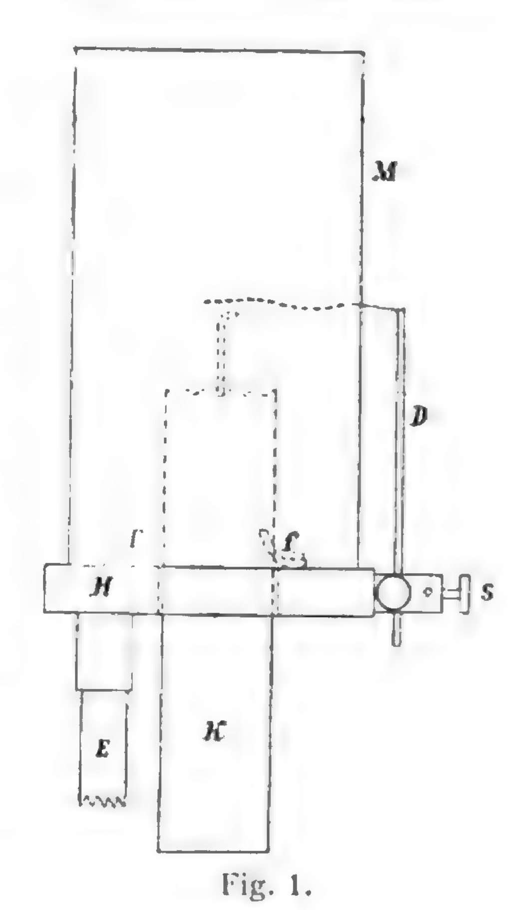


Fig. 1.

Um die Kerze nicht zu oft frisch einsetzen zu müssen, war die Hülse für den Ebonitstab *E* excentrisch an einer Holzscheibe *H* von circa 8 *cm* Durchmesser befestigt. Dadurch war Raum für die Kerze *K* gewonnen, welche durch ein centrisches Loch (circa 4 *mm* weiter als der Kerzendurchmesser) in der Holzscheibe hindurch ragte und durch drei Federn *f* am Herunterfallen gehindert war. Der Metallcylinder *M* war längs einer Erzeugenden aufgeschnitten und passte federnd in eine in der Scheibe *H* ausgedrehte Nuth. Die Klemmschraube *S* hatte 2 Schrauben, eine für den Zuführungsdraht, eine zweite für einen Kupferdraht *D*, an dessen anderem Ende ein Platindraht angelöthet war, der in die Flamme führte.

Für Beobachtungen bei Temperaturen über Null dürfte sich ein Asbestcylinder[1] besser eignen als einer aus Metall, der

[1] Derartige Lampen liefert jetzt der Mechaniker H. Schorss, Wien, V., Siebenbrunngasse 3.

durch Reflexion der Wärmestrahlen die Kerze leicht zum Schmelzen bringt.

War die Kerze ein Stück abgebrannt, so wurde sie nachgeschoben, wodurch das öftere, bei grosser Kälte sehr lästige Anzünden wegfiel. Es machte mir oft grosse Mühe, eine kalte Kerze anzuzünden. Der Docht brennt rasch ab, und die kleine Flamme ist dann nicht im Stande, die nöthige Stearinmenge zu schmelzen, so dass im Anfange der leiseste Windhauch die Kerze auslöscht. Nicht viel besser geht es mit den Metalllampen. Verwendet man Spiritus, so saugt der Docht Wasser an und gefriert dann; auch Petroleum fror theilweise an, da es offenbar nicht genügend rein war.

Zur Messung der Temperatur diente ein Assmann'sches Aspirationspsychrometer, in dem sich zwei von der physikalischen Reichsanstalt geprüfte Alkoholthermometer befanden; es wurden immer beide abgelesen, natürlich ohne Musselinhüllung.

Zur Bestimmung der Feuchtigkeit verwendete ich ein Lambrecht'sches Haarhygrometer, das Herr Prof. E. Leyst in Moskau so freundlich war, mit seinen Instrumenten bei tieferen Temperaturen zu vergleichen. Freilich functioniren diese Apparate nicht sehr genau, sind aber immerhin bei tiefen Temperaturen die besten. Übrigens begeht man keinen zu grossen Fehler, wenn man einfach die jeweilige Tension des gesättigten Wasserdampfes als Dunstdruck nimmt. Der Barometerstand wurde an einem Taschenaneroid abgelesen.

Die weiter unten befindliche Tabelle meteorologischer Daten verdanke ich Herrn Realschuldirector Tiumenzow, der die meteorologischen Messungen in Tomsk dreimal am Tage (7^h, 1^h, 9^h) vornimmt. Sie stimmen, was die Temperaturangaben anlangt, nicht immer ganz mit den meinigen überein; dies hat wohl seinen Grund darin, dass sich das Thermometerhäuschen der dortigen Station in etwas geschützter Lage in der Nähe von Häusern befindet.

Die Flammen stellte ich circa 6 *m* von den Elektroskopen entfernt auf, und zwar so, dass die Verbindungslinie Flamme — Elektroskop senkrecht zur Windrichtung stand.

Meistens verwandte ich zwei Flammen gleichzeitig und bestimmte mit zwei Elektroskopen die Potentialdifferenz einmal zwischen den Flammen und dann als Controle zwischen einer Flamme und der Erde. Aus den nur wenig abweichenden Werthen des Potentialgefälles pro Meter, die aus je zwei solchen Messungen sich ergaben, wurde das Mittel in die Tabellen aufgenommen.

Um zunächst einen Überblick im Grossen über die Witterungsverhältnisse zu geben, führe ich die Beobachtungen der Tomsker Station während der Zeit meines Aufenthaltes an.

Die Daten sind direct dem Beobachtungsjournal des Herrn Tiumenzow entnommen; es fehlen daher die Correctionen; sie sind im Allgemeinen geringfügig; nur von den Angaben der relativen Feuchtigkeit sind ungefähr 9 $^0/_0$ abzuziehen. Die Windstärken sind in der üblichen Scala angegeben. Zur Bezeichnung des Gewölkes sind folgende Abkürzungen benützt:

Ci Cirrus.
Ci-S Cirro-stratus.
Ci-Cu Cirro-cumulus.
A-Cu Alto-cumulus.
A-S Alto-stratus.
S-Cu Strato-cumulus.
N Nimbus.
Cu Cumulus.
Cu-N Cumulo-nimbus.
S Stratus.
Fr-Cu Fracto-cumulus.
Fr-N Fracto-nimbus.
Fr-S Fracto-stratus.

Anschliessend an die Witterungstabellen folgt ein Auszug aus meinem Beobachtungsjournale. Er umfasst 12 Beobachtungstage. Die Potentialdifferenz ist bereits für das Meter berechnet, und aus den Angaben des Haarhygrometers sind die Werthe der absoluten Feuchtigkeit bestimmt.

Meteorologische Beobachtungen

Datum	Barometer, Millimeter			Thermometer, Grad Celsius			Temp.-Min., Grad Cels.	Relative Feuchtigkeit			Windrichtung und	
	7h	1h	9h	7h	1h	9h		7h	1h	9h	7h	1h
1				-12·0	-10·5	-11·2	-12·0	89	86	83·5	S 2	S 4
2				-11·3	- 9·5	- 9·1	-11·3	85	79·5	89·5	OSO 2	SSO 2
3				-21·6	-12·8	-11·9	-23·8	86	88	87	OSO 2	S 3
4	757·4	756·9	754·7	-14·6	-12·6	-12·0	-14·5	87	78	83	SSW 4	SW 5
5	749·6	749·5	755·7	-10·0	- 9·4	- 8·9	-12·1	90·5	81	83	SSW 4	SW 5
6	758·4	759·2	760·4	-13·8	-11·5	-14·4	-13·9	85·5	63	78	SSW 6	SW 6
7	756·4	755·9	758·0	-10·1	- 8·1	-16·9	-15·1	86·5	84	78	SSW 6	SW 5
8	754·7	753·0	748·0	-12·4	- 9·0	- 9·7	-16·9	73	63	71	SSW 5	SW 6
9	743·6	745·1	745·5	- 8·3	- 8·2	-19·2	-10·1	87	72	80	SW 5	WSW 4
10	745·4	746·8	747·6	-14·5	-19·9	-22·9	-14·6	82	77	84	SW 3	WNW 1
11	752·3	755·2	749·0	-33·6	-30·9	-35·4	-33·6	79	72·5	74·5	SSW 3	SW 2
12	762·3	764·3	766·3	-41·6	-37·8	-41·9	-41·6	73	70	73	SSW 2	SSO 1
13	770·4	771·9	771·8	-41·2	-36·2	-41·4	-41·2	73	72	74	S 5	S 6
14	767·3	764·7	760 9	-26·6	-24·1	-22·4	-31·4	72	68	73·5	S 7	S 7
15	758·5	756·3	752·8	-20·8	-18·7	-16·5	-22·7	76	78	83·5	SSW 3	S 4
16	752·1	751·4	751·3	-15·1	-12·1	-10·5	-17·4	82	78	87	S 4	S 5
17	753·9	755·9	755·4	-10·3	-11·0	-11·4	-10·4	79	77	83·5	WSW 6	SW 5
18	749·1	743·8	736·1	-18·3	-12·9	- 9·0	-20·0	78·5	67	72·5	O	O
19	745·3	747·5	747·7	-13·8	-13·0	-11·9	-13·9	82·5	75	81·5	SSW 4	SSW 6
20	744·4	744·7	745·7	- 7·9	- 8·9	-10·8	-11·7	77	82	79	SSW 8	SW 6
21	742·6	740·4	732·6	- 8·8	- 6·6	- 4·9	-11·3	84	87	100	SSW 10	SSW 9
22	733·6	740·8	747·6	- 1·2	- 3·7	- 7·8	- 5·1	87	61·5	67	SW 8	WSW 8
23	745·8	744·5	745·9	- 3·9	- 4·1	- 4·0	-10·1	92·5	78	90	S 5	SSW 6
24	756·0	754·3	752·1	-11·3	- 6·1	- 5·7	-11·3	82·5	77	94	SSW 4	S 5
25	763·6	766·0	742·1	-14·0	-10·9	- 6·2	-14·0	84	75	77	SW 3	SSW 2
26	754·2	751·6	750·1	- 6·8	- 7·0	- 5·5	- 7·2	64	57	69	SSO 3	S 6
27	752·6	754·2	755·9	- 5·4	- 8·1	-15·6	- 6·2	80	68	70	SW 3	SSW 7
28	755·7	756·2	755·6	-20·3	- 4·8	-15·5	-20·3	87	76	89·5	SSW 2	SSO 2
29	753·3	749·4	742·3	- 9·4	- 3·2	- 2·9	-16·3	95·5	87	66·5	O	SSO 3
30	743·0	749·6	751·6	- 2·3	- 6·5	- 9·2	-13·2	83	69	80	WSW 4	SSW 4
31	746·6	749·8	751·3	- 9·4	- 4·8	-10·2	-11·2	90	81	88	S 3	S 5

in Tomsk, Jänner 1898.

…tung Stärke	Bewölkung			Bemerkungen
9^h	7^h	1^h	9^h	
S 2	10 N	10^2	10	
SO 1	10^2 N	10^0 A-Cu	0 .	
SSW 4	10	10^2 N	10	
SSW 5	10 N	10^2	10^2	Tag und Nacht Schneefall.
WSW 3	10^2 N	10^2 N	10	Unter Tags Schneefall.
WSW 5	10	10	10	Nachts Schneefall.
SSW 4	10^2 N	10	10^0	Unter Tags Schneefall.
S 5	10 S-Cu	10^2	10	Nachts Schneefall.
SSW 2	10 Fr-N	10^2 N	10 N	Tag und Nacht Schneefall.
0	10 N	10	10 A-Cu	Unter Tags Schneefall.
SW 2	0	9^0	10^0	
SSW 4	0?	0	4^0	
S 6	10^0	8^0	10^0	Nachts Schneefall.
S 4	10^2	10^2 N	10^0 N	Tag und Nacht Schneefall.
SSW 3	10^2	10	10^0	Tag und Nacht Schneefall.
SSW 4	10^2 N	10	10^2 N	Tag und Nacht Schneefall.
SSW 3	10	10	10^2	Den ganzen Tag Schneefall.
SSO 1	10 S-Cu	10^2 Fr-S	10^2 N	Abends und Nachts Schneefall.
SSW 4	10^2 N	10^2 N	10^2	Den ganzen Tag Schneefall. Nachts Schneesturm.
SSW 8	10^2	10^2 N	10^2 N	Tag und Nacht Schneesturm.
SSW 10	10^2 N	10^2 N	10^2 N	Tag und Nacht Schneesturm.
WSW 3	10^0 Fr-N	5	4^0	Morgens Schneesturm, Nachts Schneefall.
SW 5	10 N	10^0 Fr-N	10^2	Tag und Nacht Schneefall.
SW 3	10^0	10	10^0 Fr-N	Abends und Nachts Schneefall.
SSO 2	10^0	10^2	10^0	Den ganzen Tag Schneefall.
SW 3	10^0	9 A-Cu	10 N	Mittags und Nachts Schneefall.
SW 3	10 Fr-N	10	0	Den ganzen Tag Schneefall.
SSW 2	10^0	1^0 Cu	10 S-Cu	Nachts Schneefall. **I. Beobachtungstag,** 11^h a. m. bis $4^h 30^m$ p. m.
SO 2	10^2	7^0 A-Cu	10 S-Cu	Morgens und Nachts Schneefall.
SSW 3	10 Fr-N	7^0 Ci	10 N	Nachts Schneefall.
S 2	10^2 N	10^2	10 A-Cu	Tag und Nacht Schneefall.

Meteorologische Beobachtungen

Datum	Barometer, Millimeter			Thermometer, Grad Celsius			Temp.-Min., Grad Cels.	Relative Feuchtigkeit			Windrichtung und	
	7h	1h	9h	7h	1h	9h		7h	1h	9h	7h	1h
1	750·2	753·6	756·1	– 9·0	– 7·3	–14·9	–10·1	92	66	80	SW 2	SSW 2
2	754·4	750·5	747·3	–16·6	– 6·7	– 6·6	–18·2	86	65	69·5	S 4	S 5
3	750·6	751·3	760·1	– 7·1	– 9·5	–17·2	– 7·6	86·5	67	77	W 2	WSW 2
4	760·2	759·6	756·6	–22·9	–15·5	–13·8	–23·2	86	68	78	SO 1	SSO 1
5	748·9	750·1	753·5	– 2·8	– 0·8	– 0·5	–13·9	75	79	86	S 6	WSW 5
6	758·9	762·2	764·9	– 3·3	– 1·9	–10·6	– 3·4	85	68	89	WSW 4	W 4
7	763·9	763·5	761·3	–12·7	– 9·6	–10·9	–13·8	93·5	92	96	SSW 4	SSO 3
8	759·3	757·7	754·7	– 8·6	– 8·5	– 7·7	–10·7	98	98	65	SSW 3	S 3
9	751·3	750·6	753·6	– 8·8	– 5·0	5·1	– 8·9	68	66	87·5	S 6	SSO 6
10	756·8	758·7	762·2	–12·8	–12·7	–21·6	–12·9	76	62	68·5	WSW 4	W 5
11	764·6	763·4	763·1	–29·5	–21·6	–26·7	–29·5	79	62	76	S 3	WSW 4
12	759·3	764·7	759·5	–32·1	–24·2	–32·8	–32·3	76	60	74	SSW 2	W 2
13	762·1	759·7	757·7	–34·7	–26·6	–26·5	–37·8	75	72·5	75	S 3	SSO 4
14	754·8	754·3	754·8	–27·2	–22·4	–27·6	–27·4	77	65	73	S 1	S 3
15	756·2	757·2	757·8	–33·7	–23·3	–30·7	–36·1	75	60	74	SSO 2	SSW 3
16	756·2	755·3	753·2	–31·6	–18·9	–23·0	–32·3	76·5	58	68	O [illegible]	O 2
17	751·6	752·4	759·3	–25·7	–20·5	–28·2	–25·9	72·5	56	74	NNO 2	WNW 2
18	766·0	769·1	771·2	–30·6	27·2	–32·3	–30·9	68	56	64	SSW 4	S 4
19	771·8	771·9	770·2	–38·4	–27·6	–38·7	–40·2	71	57	68·5	OSO 2	S 1
20	767·7	765·8	764·5	45·3	27·7	–31·4	–45·3	67·5	63	70·5	O	O
21	763·1	763·4	765·4	–34·3	–26·4	–29·8	–35·2	73·5	61	71	SSO 1	S 2
22	767·4	769·7	772·4	–33·2	–27·5	–31·7	–33·2	75	59	70	SO 2	SSO 5
23	773·8	774·5	774·0	–41·3	–26·2	33·4	–41·9	71	54	69	SO 1	SO 1
24	770·6	767·2	764·5	–31·5	–22·9	–24·8	–37·6	72	49	57	NNO 3	NNO 6
25	765·0	767·0	767·7	–34·8	–22·2	–30·0	–34·8	73	57	68	O	NNW 1
26	768·4	768·0	767·1	–34·8	–28·4	–29·8	–35·3	72	64	72	SSW 3	S 4
27	765·9	766·2	766·9	–31·8	–27·8	–29·4	–32·0	74	65	72	S 6	S 7
28	767·7	769·0	769·9	–28·1	–22·2		29·6	73	61		S 3	SSW 4

in Tomsk, Februar 1898.

tung Stärke	Bewölkung			Bemerkungen
9^h	7^h	1^h	9^h	
S 3	10^2 N	9 Cu	0	Am Tage Schneefall. **II. Beobachtungstag,** $4^h 50^m$ bis $5^h 30^m$ p. m.
SSO 4	10 Cu	10^0 Cu	10^2	Nachts Schneefall.
S 1	10 N	10 Cu	10 A-Cu	Am Tage Schneefall. **III. Beobachtungstag,** $4^h 45^m$ bis $5^h 30^m$ p. m.
SO 1	10 A-S	1 Cu	10^0 A-Cu	Nachts Schneefall. **IV. Beobachtungstag,** $1^h 15$ bis $3^h 30^m$ p. m.
WSW 4	10^2 N	10^2 N	10^2 N	Am Tage Schneefall.
SSW 2	10^2 Fr-N	5 A-Cu	5^0 A-Cu	Morgens Schneefall. **V. Beobachtungstag,** $3^h 00^m$ bis $6^h 00^m$ p. m.
SSW 3	10	10 A-Cu	10	Morgens Schneefall.
S 4	10	10^0 N	10 S-Cu	Morgens Schneefall.
S 3	10^2	7 Fr-N	10^2 N	Abends Schneefall.
W 2	10 S-Cu	10 N	5^0 Cu	Morgens Schneefall.
W 2	0	10 N	0	Morgens und Nachts Schneefall. **VI. Beobachtungstag,** $10^h 30^m$ bis $11^h 45^m$ p. m. (Nachts).
0	10^0	4^0	0	Abends Schnee. **VII. Beobachtungstag,** $11^h 00^m$ a. m. bis $2^h 5^m$ p. m.
S 4	10 S-Cu	10 Fr-N	10^0 Fr-N	Tag und Nacht Schneefall.
S 1	10^0 Fr-N	10^0 N	3^0	Morgens Schneefall. **VIII. Beobachtungstag,** $8^h 15^m$ bis $9^h 30^m$ p. m. (Abends).
0	10 A-Cu	6^0 Cu	3^0	**IX. Beobachtungstag,** $1^h 15^m$ bis $5^h 10^m$ p. m.
0	10^0	10^0	9^0 Cu	Tag und Nacht Schneefall.
SSW 2	10^0 A-Cu	10	0	Morgens Schneefall.
0	10	2^0	3^0	**X. Beobachtungstag,** $11^h 15^m$ bis $12^h 00^m$ p. m. (Nachts).
0	0?	1^0 Cu	0	
0	0	2^0	10^0	Abends und Nachts Schneefall.
SSO 1	10^0	10^0 N	10^0 Cu-N	Tag und Nacht Schneefall.
SSO 2	10 Cu-N	10^0 Cu	0	
0	0	0	0	**XI. Beobachtungstag,** $1^h 30^m$ bis $1^h 45^m$, $4^h 30^m$ bis $5^h 30^m$ p. m.
NNO 2	3 Cu/S-Cu	8^0 Cu/S-Cu	0	
SW 1	0	0	5^0 A-Cu	Nachts Schneefall. **XII. Beobachtungstag,** $12^h 15^m$ bis $1^h 30^m$, $5^h 25^m$ bis $6^h 10^m$ p. m.
SSW 4	8^0 Cu	10^0 Cu/S-Cu	10 Cu/N	Nachts Schneefall.
S 5	10 A-Cu/Fr-N	10^0 Cu/A-Cu	10^0 Cu/A-Cu	Tag und Nacht Schneefall.
	10^2 N	3 Cu		Nachts Schneefall.

Zeit	Temperatur in Graden Celsius	Absolute Feuchtigkeit in Millimetern	$\frac{dV}{dn}$ in Voltmetern	Bemerkungen
I. Beobachtung am 28. Jänner 1898.				
11h 00m a. m.	−20·0	0·85	127	Das Potentialgefälle ist ausnahmslos positiv.
15	−19·7	0·87	129	Barometerstand 755 *mm*.
45	−19·4	0·89	116	Flammenhöhe 1 *m* über dem Schnee. Flammenentfernung 7·5 *m*.
50	−19·0	0·92	127	Hygrometer 1·70 *m* über dem Schnee.
12 00	−17·7	1·03	124	Schneedecke circa 30 *cm*. Schnee leitet.
10 p. m.	−17·8	1·02	136	Erdleitung mittelst Eisenstange.
15	−17·9	1·01	140	11h klarer wolkenloser Himmel ohne Wind.
30	−17·7	1·04	136	11h 15m etwas Südwind. 11h 50m vollkommene Windstille.
45	−17·4	1·06	127	12h 45m ganz schmale Wolkenbank am südöstlichen Horizont sichtbar.
1 00	−17·1	1·04	140	1h Wolkenbank verschwunden.
45	−16·0	1·17	122	1h 45m, 2h 30m ganz wolkenlos, leiser Südwind.
2 15	−16·3	1·16	122	2h 45m Wind frischt auf; Beginn von feinem Eisnadeltreiben, welches nach 10 Minuten aufzuhören scheint.
30	−16·1	1·19	116	
45	−15·9	1·23	132	
3 30	−16·3	1·26	135	3h 45m Wolkenbänke am östlichen Horizont vorüberziehend, wieder Eisnadeltreiben.
45	−16·5	1·25	135	
4 00	−16·7	1·25	122	4h Sonne nahe am Horizont; farbenprächtiger Hof um sie von 22° Öffnungswinkel.
10	−16·7	1·25	91	4h 10m, 18m Sonnenuntergang; Wind frischt auf.
18	−17·2	1·20	97	
30	−17·5	1·17	92	4h 30m Wind verlöscht die Flammen.
Mittel	. . . . . .	. . . . . .	126	

Zeit	Temperatur in Graden Celsius	Absolute Feuchtigkeit in Millimetern	$\frac{dV}{dn}$ in Voltmetern	Bemerkungen
II. Beobachtung am 1. Februar 1898.				
4h50m p. m.	−13·5	1·07	73	Das Potentialgefälle ist ausnahmslos positiv.
5 00	−13·6	1·09	61	Barometerstand ?.
10	−13·8	1·13	64	Flammenhöhe 1 *m* über dem Schnee. Flammenentfernung 4·5 *m*.
30	−13·4	1·20	69	Hygrometer 1 *m* über der Schneedecke.
Mittel......	......	.....	67	Schneedecke circa 30 *cm* dick und hart gefroren. Schnee leitet gut. Erdleitung mittelst Eisenstange. Klarer Himmel mit etwas Südwind. 5h der Wind frischt auf. Wegen zu starken Windes, der die Flammen auslöscht, wird die Beobachtung abgebrochen.
III. Beobachtung am 3. Februar 1898.				
4h45m p. m.	−16·0	1·06	72	Das Potentialgefälle ist ausnahmslos positiv.
5 00	−16·5	0·99	74	Barometerstand 760 *mm*.
15	−16·8	0·97	72	Flammenhöhe 1 *m* über dem Schnee. Flammenentfernung 7 *m*.
25	−16·7	1·00	64	Hygrometer 1 *m* über dem Schnee.
30	−16·8	1·00	69	Schneedecke circa 30 *cm* und hart gefroren.
Mittel......	......	.....	72	Schnee leitet. Erdleitung mittelst Eisenstange. Die Beobachtung beginnt nach Sonnenuntergang. Himmel ziemlich klar; im W niedrige Wolkenbänke, im N und O abziehende Wolkenmassen. Im S ist der Horizont ganz rein. Wind schwach südlich.

Zeit	Temperatur in Graden Celsius	Absolute Feuchtigkeit in Millimetern	$\frac{dV}{dn}$ in Voltmetern	Bemerkungen
IV. Beobachtung am 4. Februar 1898.				
1^h15^m p. m.	−19·0	0·72	89	Das Potentialgefälle ist ausnahmslos positiv.
30	−18·4	0·94	91	Barometer 761 *mm*.
45	−18·4	0·85	94	Flammenhöhe 1·12 *m* über dem Schnee. Flammenentfernung 7·5 *m*.
2 00	−17·0	0·98	128	Hygrometer bis 2^h15^m 1 *m* über dem Schnee, von 2^h15^m 1·70 *m*.
15	−17·3	0·91	109	Schnee leitet. Erdleitung mittelst Eisenstange.
30	−17·8	0·89	104	Klarer Himmel; Wolkenbank am Horizont im W und SW.
50	−17·4	0·95	73	1^h45^m Wolkenbank von SW heraufziehend.
3 00	−17·3	0·96	78	2^h15^m Sonne hinter dünnem Wolkenschleier.
15	−16·8	1·03	73	2^h30^m Himmel bereits vollkommen mit Wolkenschleier bedeckt. Wind
30	−16·4	1·05	71	frischt auf; von S ziehen Wetterwolken herauf.
Mittel	......	......	93	3^h30^m Wind löscht die Lampe aus.
V. Beobachtung am 6. Februar 1898.				
3^h00^m p. m.	−2·8	2·49	86	Das Potentialgefälle ist immer positiv.
15	−3·0	2·50	78	Barometerstand 762 *mm*
30	−3·4	2·46	79	Flammenhöhe 98 *cm* über dem Schnee.
45	−3·7	2·44	81	Flammenentfernung 6 *m*.
4 00	−4·7	2·46	97	Hygrometer 1·7 *m* über dem Schnee.
15	−4·7	2·46	79	Schnee leitet.
30	−5·2	2·49	90	Erdleitung mittelst Eisenstange.
50	−6·8	2·43	66	Klarer Himmel, am westlichen und südwestlichen Horizont kleine
5 05	−6·5	2·51	50	Wolken; leichter Südwind.
40	−6·6	2·58	48	3^h30^m Wolken im SW steigen höher.
45				4^h30—50^m Sonnenuntergang.
6 00	−7·7	2·47	72	5^h40^m Wind frischt auf.
Mittel	......	......	72	

Zeit	Temperatur in Graden Celsius	Absolute Feuchtigkeit in Millimetern	$\frac{dV}{dn}$ in Voltmeter	Bemerkungen
VI. Beobachtung am 11. Februar 1898.				
10h30m p. m.	−29·2	0·30	241	Potentialgefälle stets positiv. Barometerstand 759 *mm*.
50	−27·6	0·36	167	Flammenhöhe 1·04 *m* über dem Schnee.
11 05	−27·7	0·36	155	Flammenabstand 6·5 *m*.
15	−28·1	0·36	178	Da es mir nicht sicher schien, ob der Schnee genügend gut leitet, verwendete ich von 11h 15m an zwei
30	−28·7	0·33	168	Flammen mit 0·65 *m* Höhendifferenz.
45	−28·9	0·32	203	Klare Sternennacht, ohne Wind und Wolken.
Mittel......	......	.....	185	10h 45—50m kurzes Eisnadeltreiben.
VII. Beobachtung am 12. Februar 1898.				
11h00m a. m.	−28·6	0·30	110	Potentialgefälle stets positiv.
15	−28·2	0·32	98	Barometerstand 758 *mm*.
30	−27·6	0·34	120	Es wurde mit zwei Flammen gemessen, um einen etwaigen Fehler
45	−27·4	0·34	104	in der Erdleitung zu umgehen.
12 00	−26·9	0·35	102	Höhendifferenz der Flammen 0·68 *m*. Flammenentfernung 5·5 *m*.
15	−26·5	0·30	109	Schöner klarer Tag; der Horizont etwas umflort.
30	−26·7	0·33	122	11h 30m von S ziehen Wolken herauf.
1 15	−25·8	0·36	140	12h 30m Sonne hinter feinen Federwolken.
30	−25·9	0·37	146	
55	−25·0	0·40	180	1h 15m leichter Westwind.
2 05	−25·2	0·36	184	1h 30m der Himmel bewölkt sich leicht; feines Eisnadeltreiben.
Mittel......	......	......	127	1h 50m ganzer W und ein Theil des Zenithes bewölkt.

Zeit	Temperatur in Graden Celsius	Absolute Feuchtigkeit in Millimetern	$\frac{dV}{dn}$ in Voltmetern	Bemerkungen
VIII. Beobachtung am 14. Februar 1898.				
8h 15m p. m.	—27·3	0·36	113	Potentialgefälle stets positiv.
30	—27·3	0·36	121	Barometer 750 *mm*.
45	—27·8	0·35	124	Es wurde mit zwei Flammen gemessen.
9 00	—27·9	0·35	105	Flammendifferenz 0·73 *mm*.
15	—28·0	0·35	113	Flammenentfernung 6 *m*. Vollkommen klarer Sternenhimmel.
30	—28·0	0·34	116	Sterne bis zum Horizont herunter überall sichtbar.
Mittel	. . . .	. . . . . .	115	Leiser Ostwind. 9h 15m beginnt feines Eisnadeltreiben bei klarem Himmel. 9h 30m von O kommt leichter Nebel.
IX. Beobachtung am 15. Februar 1898.				
1h 50m p. m.	—24·4	0·40	99	Potentialgefälle stets positiv.
2 00	—24·4	0·40	106	Barometerstand 757 *mm*.
30	—24·2	0·42	98	Die Beobachtung geschah mit zwei Flammen.
45	—24·4	0·42	114	Höhendifferenz der Flammen 0·81 *m*.
3 15	—24·8	0·40	104	Flammenentfernung 6·5 *m*.
30	—24·8	0·38	101	2h 00m am Himmel einzelne zarte Federwolken, eine ausgedehntere Wolke am SW-Horizont; leiser Südwind.
45	—24·8	0·40	108	
4 00	—25·2	0·39	99	2h 30m Sonne hinter grossen Federwolken.
30	—25·9	0·37	96	3h 15m Bewölkung wird dünner; Wind flaut ab.
45	—26·5	0·35	95	4h 15m Himmel schon ziemlich rein.
55			110	4h 45m leiser Ostwind.
5 00	—26·5	0·36	78	5h 00m Sonnenuntergang, Himmel klar.
10	—26·4	0·37	98	
Mittel	. . . .	. . .	103	

Zeit	Temperatur in Graden Celsius	Absolute Feuchtigkeit in Millimetern	$\frac{dV}{dn}$ in Voltmetern	Bemerkungen
X. Beobachtung am 18. Februar 1898.				
$11^h 15^m$ p. m.	—35·1	0·18	146	Potentialgefälle stets positiv. Barometer 773 *mm*.
30	—35·2	0·18	134	Die Beobachtung geschah mit zwei Flammen.
45	—34·9	0·18	130	Höhendifferenz der Flammen 0·65 *m*. Hygrometerhöhe 1 *m*.
12 00	—35·0	0·18	118	Flammenentfernung 6 *m*. Vollkommen klarer Sternenhimmel.
Mittel	. . . . . .	. . . . . .	132	Leiser Ostwind.
XI. Beobachtung am 23. Februar 1898.				
$1^h 30^m$ p. m.	—28·6	0·25	310	Potentialgefälle stets positiv. Barometerstand 780 *mm*.
45	—28·5	0·25	272	Höhendifferenz der Flammen 0·84 *m*. Flammenentfernung 6·5 *m*.
Mittel	. . . . . .	. . . . . .	291	Ganz klar und windstill.
$4^h 30^m$ p. m.	—27·0	0·30	238	Höhendifferenz der Flammen 0·80 *m*.
40			240	Flammenentfernung 6 *m*.
45	—27·4	0·29	260	Barometerstand 779 *mm*.
5 00	—28·0	0·28	285	Vollkommen klar und windstill.
05			280	$4^h 45^m$ leiser Nordwind.
08			260	$5^h 15^m$ / 18 } Sonnenuntergang.
11			245	
15	—28·6	0·26	252	
			222	
			252	
			222	
18			222	
30	—28·8	0·26	224	
Mittel	. . . . . .	. . . . . .	255	

Zeit	Temperatur in Graden Celsius	Absolute Feuchtigkeit in Millimetern	$\frac{dV}{dn}$ in Voltmetern	Bemerkungen
XII. Beobachtung am 25. Februar 1898.				
12^h^15^m^	—25·7	0·38	225	Potentialgefälle stets positiv.
30	—25·6	0·38	217	Barometerstand 771 *mm*.
45	—24·6	0·41	266	Höhendifferenz der Flammen 0·93 *m*.
1 00	—24·3	0·43	269	Flammenentfernung 7 *m*.
15	—24·3	0·43	235	Vollkommen klarer Tag mit leisem Nordwind.
30	—24·1	0·46	241	Beim Auffrischen des Windes stets eine Vergrösserung des Elektroskopausschlages.
Mittel	....	....	244	
5^h^25^m^	—24·6	0·41	167	Barometer 773 *mm*.
30	—24·8	0·42	137	Höhendifferenz der Flammen 0·93 *m*.
45	—24·8	0·42	119	Flammenentfernung 7 *m*.
6 00	—24·9	0·43	187	$5^h 25^m$ Sonnenuntergang.
10	—25·0	0·43	217	$5^h 30^m$ kommt Dunst und Rauch von der Stadt.
Mittel	......	...	148	$5^h 45^m$ Rauch wieder verschwunden.

Unter die Beobachtungstage habe ich nur solche aufgenommen, an denen wenigstens eine Zeitlang der Himmel klar war. Leider ist eine Aufeinanderfolge mehrerer klarer Tage nicht vorgekommen. Am schönsten war das Wetter in der Nacht vom 18. und am 23. und 25. Februar. Beiden Tagen ist eine sternenhelle, ganz klare Nacht vorhergegangen.

Das Vorzeichen des Potentialgefälles war an diesen zwölf und fast an allen anderen Tagen, wo ich Messungen gemacht habe, positiv. Nur einigemal bei Schneetreiben glaubte ich ein entgegengesetztes Vorzeichen zu bemerken. Ganz sicher ist dies aber keineswegs, weil das Elektroskop an solchen windigen Tagen, wenn es überhaupt gelang, die Flamme eine Zeitlang brennend zu erhalten, so heftig hin und her schwankte,

dass eine absolut sichere Bestimmung des Vorzeichens nicht möglich war.

Derartige starke Schwankungen des Elektroskopausschlages bei Schneetreiben über grössere Schneeflächen haben auch Elster und Geitel[1] öfters in Wolfenbüttel beobachtet. Etwa gleich oft habe ich, wenn Schnee oder feine Eisnadeln die Luft erfüllten, eine Zunahme, wie eine Abnahme des normalen Potentialgefälles beobachtet. Je nach der Provenienz scheint der Schnee positiv oder negativ zu sein. Was die Grösse des Potentialgefälles anlangt, so sieht man aus den Tabellen, dass die Werthe nicht stark schwanken. Mit Ausnahme einer einzelnen Beobachtung in der Nacht des 11. und der letzten zwei Tage erreicht es nie $200 \frac{V}{m}$. Das Mittel aus allen Beobachtungen ergibt sich zu $145 \frac{V}{m}$; wenn man die Messungen am 11., 23. und 25. nicht einbezieht, zu $101 \frac{V}{m}$. Die auffallend hohen Werthe am 23. und 25. sind zum Theil wenigstens sicher durch den Nordwind zu erklären, der den Rauch der Stadt gegen den Beobachtungsplatz zu trug; ich konnte jedesmal beim Auffrischen des Windes eine deutliche Zunahme des Ausschlages bemerken, während sonst bei anderer Windrichtung bei geringem Lufthauch die Flammengase niedergedrückt werden und das Elektroskop einen etwas kleineren Ausschlag zeigt.

Auch Herr Prof. Kapustin hat, wie er mir mittheilte, immer bei Nordwind höheres Potentialgefälle gefunden. Auf Tafel I sind die gefundenen Werthe des Potentialgefälles als Ordinaten, die Zeit als Abscisse aufgetragen. Die durch Linien verbundenen Punkte gehören einem Beobachtungstag an, dessen Datum am Anfang und Ende angegeben ist.

Zu einer sicheren Bestimmung einer täglichen Periode reichen die Beobachtungen nicht aus, sowohl ihrer geringen Zahl wegen, als auch weil sie nur von 11^h a. m. bis Mitternacht

[1] J. Elster und H. Geitel, Beobachtungen des atmosphärischen Potentialgefälles und der ultravioletten Sonnenstrahlung. Diese Berichte, Bd. 101. 1892.

reichen. Trotzdem habe ich nach Ausscheidung der drei Tage mit den hohen Werthen (11., 23., 25.) Stundenmittel gebildet

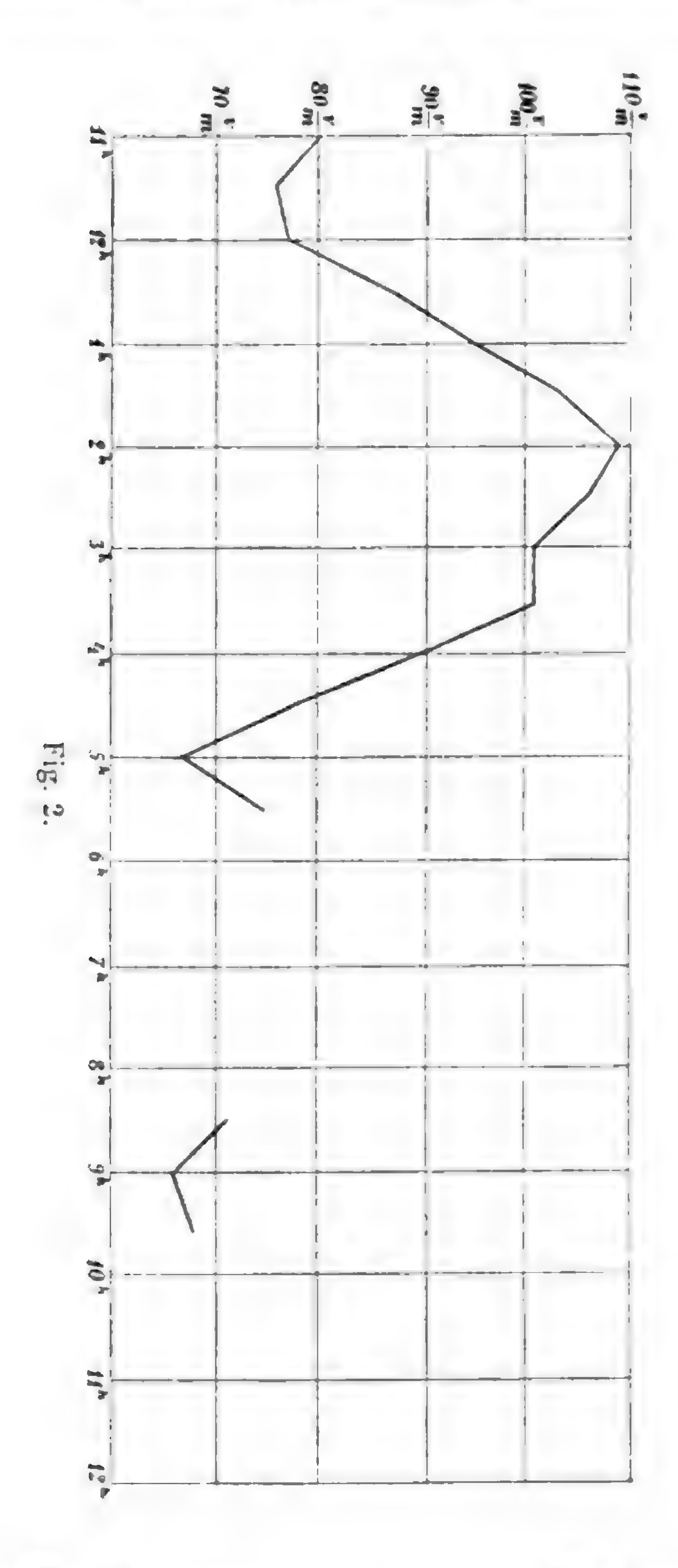


Fig. 2.

und sie in Fig. 2 graphisch aufgetragen. Die Curve lasst ein deutliches Maximum um circa 2^h p. m., und ein Minimum gegen Abend zu erkennen. Vergleicht man damit die Curven des

Winterpotentialgefälles von Elster und Geitel[1] in Wolfenbüttel, so ist eine gewisse Ähnlichkeit nicht zu bezweifeln.

Ein zweites, wahrscheinlich höheres Maximum dürfte etwas vor Mitternacht eintreten und langsam zu einem zweiten Maximum gegen Morgen zu abnehmen. Ob dieses zweifache Minimum mit einer analogen Barometerbewegung zusammenhängt, kann ich leider nicht sagen, da mir keine Angaben darüber zu Gebote stehen.[2]

Ich habe ferner versucht, einen Zusammenhang zwischen Luftfeuchtigkeit und Potentialgefälle zu finden, wobei sich jedoch kein Gesetz ergab. Innerhalb der Grenzen des Dunstdruckes, die beobachtet wurden, liegen die Werthe des Potentialgefälles ganz regellos vertheilt. Ein Gleiches gilt von Beziehungen mit der Temperatur.

Der Zweck meiner Messungen war, die durchschnittliche Grösse des normalen Potentialgefälles in Tomsk zu bestimmen. Wie genau die von mir erhaltenen Werthe sind, lässt sich vorläufig nicht angeben. Bei der geringen Anzahl von Beobachtungstagen und der besonderen Ungunst der Witterung möchte ich ihnen keine allzu grosse Sicherheit beimessen. Wenn man jedoch bedenkt, dass alle gefundenen Werthe der Potentialgefälle nicht sehr von einander abweichen und die am meisten herausfallenden wahrscheinlich noch zu hoch sind, kann man mit grosser Sicherheit annehmen, dass das durchschnittliche Potentialgefälle an normalen klaren Tagen jedenfalls nicht über $300 \frac{V}{m}$ steigt. Übereinstimmend damit sagte mir Herr Kapustin, dass auch er zu verschiedenen Zeiten nie höhere Werthe des Gefälles beobachtet habe.

Bestätigt sich diese Vermuthung auch weiterhin durch Messungen, die Herr Kapustin anzustellen sich erboten hat, so lassen sich immerhin einige wichtige Schlüsse, bezüglich der verschiedenen Theorien der Luftelektricität ziehen.

Die beiden am besten fundirten und auf das grösste Beobachtungsmaterial sich stützenden Theorien von Franz

[1] L. c., S. 748.

[2] Bemerkenswerth ist die einigemal beobachtete Abnahme des Potentialgefälles bei Sonnenuntergang mit späterem Anstiege.

Exner und Elster und Geitel fordern ein viel höheres Potentialgefälle, als ich es thatsächlich gefunden habe, und reichen allein nicht aus, dasselbe zu erklären. Nach der Exner'schen Dampfdruckformel hätte man einen mindestens dreimal höheren Werth erwarten müssen.

Welcher Werth der Strahlungstheorie entsprechen würde, lässt sich nicht genau bestimmen, da ich keine Messungen der Sonnenstrahlung gemacht habe; sicher ist sie jedoch bei der geringen Sonnenhöhe kleiner als im Winter in Wolfenbüttel.

Sucht man nun nach einer Erklärung dieser Discrepanz, so gewinnt eine Erscheinung, über welche M. Brillouin in einem Artikel[1] »Ciel et terre«, XVIII, 1897, berichtet, grosses Interesse. Auf Veranlassung Brillouin's hat Herr Buisson im physikalischen Laboraterium der École normale Untersuchungen angestellt über die Lichtempfindlichkeit des Eises und gefunden, dass dieselbe $^1/_{10}$ bis $^1/_{20}$ des Zinkes beträgt.

Leider sind in der betreffenden Abhandlung nähere Zahlenangaben nicht gemacht und die Versuche nur ganz kurz beschrieben.

Ein Lichtbündel (elektrischer Lichtbogen, Aluminium) durchsetzt eine durchlochte, positiv geladene Messingplatte und fällt auf einen Eisblock, der der Platte gegenüber steht. Der Eisblock ist isolirt aufgestellt und steht mit einem Quadrantenelektrometer in Verbindung, das einen Ausschlag anzeigt, sobald das Eis belichtet wird. Vorher ist natürlich alles zur Erde abgeleitet.

Ein trockener, direct aus einer Kältemischung genommener Eisblock soll die negative Ladung sehr rasch verlieren. Sobald sich eine Wasserschicht auf ihm bildet, nimmt die Lichtempfindlichkeit rapid ab, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Elster und Geitel, dass Wasser nahezu unempfindlich ist.

Bei dem grossen Interese, welches diese Thatsache mir zu haben schien, stellte ich im vergangenen Sommer ähnliche Versuche, jedoch mit vollkommen negativem Resultate an, obwohl ich das Eis vorher in fester Kohlensäure abgekühlt hatte. Es schien mir nicht wahrscheinlich, aber immerhin

[1] Referat: Meteorolog. Zeitschrift, 1898, S. 38.

möglich, dass in Folge der höheren Zimmertemperatur sich rasch eine Wasserschicht an der Oberfläche des Eises gebildet hätte, und verschob weitere entscheidende Versuche auf den Winter, der sich aber in Wien bis jetzt so milde angelassen hat, dass ich keine Gelegenheit dazu hatte.

Sollten sich diese Angaben Buisson's bestätigen, so wäre damit allerdings ein Fingerzeig gegeben zu einer Erklärung des niederen Potentialgefälles in Sibirien. Das von der Exner-schen Theorie geforderte hohe Potentialgefälle bei grosser Trockenheit würde dadurch herabgedrückt, dass unter Tags auf den ungeheuer ausgedehnten, mit Schnee bedeckten Ebenen negative Elektricität an die Luft abgegeben wird und im Laufe der Nacht wenigstens theilweise, vielleicht mit Niederschlägen wieder herunter kommt.

Im Sinne der Elster und Geitel'schen Theorie müsste man annehmen, dass die geringe Intensität der Strahlung über-compensirt wird durch die abnorme Lichtempfindlichkeit der Schneedecke, im Vergleich mit bewachsenem oder steinigem Boden.

Wie gesagt, möchte ich dies nur als eine Erklärungsmöglichkeit hinstellen, für den Fall sich die Beobachtungen Herrn Buisson's als fehlerfrei erweisen sollten. Jedenfalls ist aber die Theorie der Luftelektricität Herrn Brillouin's, die sich auf die Beobachtungen über die Lichtempfindlichkeit des Eises stützen, als noch zu wenig begründet vorderhand abzuweisen.

Was schliesslich die Theorie Le Cadet's anlangt, die der Kohlensäure einen wesentlichen Antheil an den Vorgängen der atmosphärischen Elektricität zuschreibt, so gewinnt dieselbe durch die Beobachtungen in Sibirien wohl kaum eine Stütze.

Die Kohlensäureproduction ist im Winter auf den Schneefeldern Sibiriens sicherlich äusserst gering, weshalb nach den Anschauungen Le Cadet's das atmosphärische Potentialgefälle nahezu Null werden müsste, was mit meinen Beobachtungen nicht übereinstimmt.

Man sieht also, dass eigentlich keine der neuen Theorien durch die Beobachtungen in Sibirien eine Stütze erfährt; im

Gegentheil machen sie überall neue Annahmen nöthig, die einer weiteren Bestätigung harren.

Je mehr aber solche Einzelbeobachtungen neue Thatsachen zu Tage fördern, die sich nicht ohne Weiteres dem Rahmen der alten Theorien einfügen lassen, um so mehr wächst auch der Wunsch und das Bedürfniss, über ein grosses, zeitlich und räumlich ausgedehntes Beobachtungsmaterial verfügen zu können, wie es nur durch Errichtung zahlreicher elektrischer Stationen mit selbstregistrirenden Apparaten, ähnlich den magnetischen, wird erreicht werden können.



300 V/m
280
260
240
220
200 V/m
180
160
140
120
100 V/m
80
60
40
20
0

11 II
11 II
18 II
14 II

8h 9h 10h 11h 12h

Autor del.

Lith Anst v Th Bannwarth, Wien

1899

Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. I.[1]

Messungen des Potentialgefälles in Oberägypten

von

Prof. **Franz Exner,**
w. M. k. Akad.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Februar 1899.)

Die Formel $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{A}{1+kp_0}$, welche ich vor mehr als zehn Jahren für den Zusammenhang zwischen normalem Potentialgefälle $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$ der Luftelektricität und Wasserdampfgehalt (p_0) der Atmosphäre aufgestellt habe, wurde durch eine grosse Anzahl von Beobachtungen geprüft, sowohl von mir selbst, als namentlich auch durch die mehrere Jahre umfassenden Untersuchungen von Elster und Geitel in Wolfenbüttel; dabei zeigte sich zwischen Rechnung und Beobachtung eine Übereinstimmung, die, wenn man bedenkt, dass es sich um ein meteorologisches Element handelt, als eine ganz befriedigende bezeichnet werden kann, umsomehr als ja die Beobachtungen doch nur an einzelnen Orten und durch verhältnissmässig kurze Zeiträume hindurch ausgeführt werden konnten. Dieser

[1] Die vorliegende Mittheilung bildet den Anfang einer Reihe von Arbeiten, die zum Theil schon abgeschlossen sind und, wie z. B. die Messungen Dr. Benndorf's in Sibirien, die Messungen Dr. Tuma's bei Ballonfahrten und die Messungen Dr. Ludwig's bei einer totalen Sonnenfinsterniss, demnächst veröffentlicht werden sollen; zum grössten Theil wurden diese Untersuchungen durch Unterstützung von Seite der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien ermöglicht.

Formel liegt der Gedanke zu Grunde, dass ein Theil der negativen Erdladung jederzeit an den Wasserdampf gebunden ist und sich mit diesem in einer fluctuirenden Bewegung in verticaler Richtung befindet; je nachdem so ein grösserer oder geringerer Theil der Erdladung sich oberhalb des Beobachtungsortes befindet, wird das Potentialgefälle auch kleiner oder grösser ausfallen müssen. Es erklärt sich so die jährliche Periode der Luftelektricität nicht nur qualitativ, sondern gemäss obiger Formel auch quantitativ. Ich habe aber von allem Anfang darauf aufmerksam gemacht, dass gewisse Erscheinungen der Luftelektricität, wie z. B. die so charakteristische tägliche Periode durch diese Rolle des Wasserdampfes nicht erklärt werden können, dass jedenfalls auch noch andere, bisher unbekannte Ursachen, wenn auch nur mit secundärer Intensität, von Einfluss sein müssen.

Wenn ich als Träger dieser fluctuirenden elektrischen Massen den Wasserdampf ansah, so war das wohl die nächstliegende und, wie ich auch jetzt noch glaube, die wahrscheinlichste Annahme; es sind aber in den letzten Jahren Erscheinungen bekannt geworden, welche auch andere Annahmen nicht ausgeschlossen erscheinen lassen. So hat schon Quetelet seinerzeit darauf verwiesen, dass die jährliche Periode der Luftelektricität parall geht der Intensität des Sonnenscheines und einen ursächlichen Zusammenhang zwischen beiden Erscheinungen als wahrscheinlich betrachtet; einen gleichen Zusammenhang will Braun[1] zwischen Potentialgefälle und Temperatur finden, und es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Zusammenhänge, wenigstens für unsere Gegenden, bestehen: es fragt sich nur, ob sie ursächlicher Art sind. Mit dem Übergang von Winter zu Sommer steigt die Intensität der Sonnenstrahlung und damit auch die Temperatur und die Wassermenge in der Luft, der Parallelismus einer jeden dieser Erscheinungen mit der beobachteten Abnahme des Potentialgefälles im Sommer braucht deshalb noch kein Beweis für einen ursächlichen Zusammenhang zu sein. Dazu kommt,

---

[1] Jahres-Ber. der naturf. Gesellschaft zu Bamberg, 1896 und Meteorolog. Zeitschrift, 1896.

dass sowohl die Quetelet'sche, als die Braun'sche Ansicht eine quantitative Prüfung nicht zulassen, und dass selbst die qualitative, wie die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen werden, verneinend ausfällt, wenn man Messungen an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche in den Kreis der Betrachtung zieht.

Ein Phänomen dagegen, das auch erst in den letzten Jahren entdeckt wurde, das sogenannte Hallwachs'sche Phänomen,[1] scheint direct auf die elektrischen Vorgänge in der Atmosphäre hinzuweisen; jeder negativ geladene Körper — und die Erde ist ein solcher — gibt unter dem Einflusse blauer oder ultravioletter Bestrahlung seine Ladung an die Luft ab, und damit wäre eine zweite Möglichkeit gefunden, die zwischen Erdboden und Luft fluctuirende Ladung zu erklären, ganz in analoger Weise, wie ich es mit Zuhilfenahme des Wasserdampfes gethan habe; nur müsste man die weitere Annahme hinzufügen, dass die solcherweise durch Bestrahlung in die Luft übergegangenen Elektricitätsmengen dort an den Wasserdampf und mit diesem in Form von Niederschlägen wieder zur Erde zurückgehen, da die Erdladung im Laufe der Zeit erfahrungsgemäss merklich constant bleibt.

Diese photoelektrische Theorie der Luftelektricität wurde von den Herren J. Elster und H. Geitel ausgebildet und an dem vorhandenen Beobachtungsmateriale geprüft. In ihren »Beobachtungen des atmosphärischen Potentialgefälles und der ultravioletten Sonnenstrahlung«[2] geben sie eine Zusammenstellung dieser beiden Factoren, aus der ein Parallelismus derselben während der Dauer der jährlichen Periode an ein- und demselben Ort ohne Zweifel hervorgeht. Auch in quantitativer Beziehung zeigt sich eine gute Übereinstimmung, indem die verwendete Formel: $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{A}{1+kJ}$, in welcher J die Intensität der ultravioletten Strahlung bedeutet, sich den Beobachtungen ebensogut anpasst, wie die analoge, für den Wasserdampf verwendete.

---

[1] Wied. Ann., XXXIII, 1888.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. CI, 1892.

Aber man steht hier wieder vor derselben Erscheinung, dass nämlich Wasserdampfgehalt der Luft und Sonnenstrahlung in unseren Gegenden während eines Jahres parallelen Gang aufweisen, so dass sich nicht entscheiden lässt, durch welche der beiden Ursachen die jährliche Periode der Luftelektricität primär bedingt wird. Es lässt sich aber nicht leugnen, dass die photoelektrische Theorie von vornherein viel für sich hat, vor Allem den Umstand, dass sie sich auf eine durch das Experiment unzweifelhaft erwiesene Thatsache stützt; denn es treten die photoelektrischen Ströme nicht nur an Metallen auf, wie zuerst angenommen wurde wegen des grossen Effectes, den gerade diese zeigen, sondern auch an natürlichen Gesteinen, wie Feldspath, Granit etc., wie von J. Elster und H. Geitel in einer besonderen Untersuchung[1] nachgewiesen wurde. Sind die Effecte an derartigen Materialien auch nur schwach und nur bei grosser Flächendichte der Ladung nachweisbar, bei Dichten, die einem oberflächlichen Potentialgefälle von circa $20.000\,\frac{V}{m}$ entsprechen, die also in der Natur wohl nie vorkommen werden, so lässt sich doch die Möglichkeit einer Wirkung derselben in dem von der photoelektrischen Theorie geforderten Sinne nicht abweisen, wenn man bedenkt, welche enormen Flächen in der Natur im Vergleich zu jenen bei Laboratoriumsversuchen ins Spiel kommen. Selbst der Umstand, dass, wie Elster und Geitel gezeigt haben, nur frische Bruchflächen der Mineralien merklich gegen Strahlung empfindlich sind, während in der Natur selbstverständlich solche so gut wie nicht vorkommen, scheint mir kein triftiger Einwand dagegen, da man wohl auch bei diesen einen, wenn auch für Versuche im Kleinen unmerklichen Effect annehmen kann, der bei den grossen Verhältnissen in der Natur sehr wohl zur Geltung kommen mag. Dass an reinen Wasserflächen, die ja einen so grossen Theil der Erdoberfläche bedecken, und an frischer Vegetation der Hallwachs'sche Effect bisher nicht nachgewiesen werden konnte — wie unter Anderem aus den

[1] Wied. Ann., Bd. XLIV, 1891.

Versuchen von Stoletow,[1] von Bichat und Blondlot[2] und von Lampa[3] hervorgeht — ist ein Umstand, der, wie mir scheint, schon schwerer ins Gewicht fällt, der aber immer noch auf die Unzulänglichkeit unserer Beobachtungsmethoden zurückgeführt werden könnte; es wird weiter unten noch Gelegenheit sein, auf diesen Punkt zurückzukommen.

Die vorstehenden Erwägungen liessen es mir als äusserst wünschenswerth erscheinen, eine möglichst bestimmte Entscheidung darüber zu treffen, welcher der beiden Factoren, Sonnenstrahlung oder Wasserdampfgehalt der Luft, der für das Potentialgefälle massgebende ist; da bei den bisherigen Messungen der jährlichen Periode in unseren Gegenden beide Factoren, wie schon erwähnt, parallelen Gang aufweisen und auch meine Beobachtungen in Ceylon bei höherem Dampfdruck zugleich mit höherer Temperatur ausgeführt wurden, so können die bisherigen Resultate zu einer Entscheidung nicht herangezogen werden. Es lag aber nahe, einen Beobachtungsort zu wählen, an dem beide Factoren sich trennen, also z. B. hohe Strahlung und Temperatur mit möglichst geringem Wassergehalt der Luft verbunden ist; ein Vergleich der solcherweise erhaltenen Resultate z. B. mit jenen von Ceylon (hoher Wassergehalt bei hoher Temperatur) muss dann die Möglichkeit bieten, eine Entscheidung herbeizuführen oder wenigstens anzubahnen.

Ich wählte als Beobachtungsort Luxor in Oberägypten; dieser Ort, unter 25° 40′ N. Br., hat ausgesprochenes Wüstenklima trotz seiner Lage im Nilthal und unmittelbar am Flusse, denn es dehnen sich nach Osten, wie nach Westen die reinen Wüstengebiete fast ins endlose aus, während das cultivirte Land selbst nur einen Streifen von wenigen Kilometern Breite bildet. Dazu kommt, dass Niederschläge in diesen Gegenden gänzlich unbekannt sind, Wolken in unserem Sinne des Wortes fehlen und zufolge der vorherrschenden Windrichtung aus W und NW die Luftzufuhr zumeist aus den Gebieten der lybischen Wüste erfolgt. Die Folgen dieser Umstände sind denn auch klarer Himmel, hohe Temperatur und sehr geringe absolute

[1] C. R., T. CVI, 1888.

[2] C. R., T. CVI, 1888.

[3] Wiener Anzeiger, 1890, S. 79.

Feuchtigkeit, also jene Combination meteorologischer Elemente, deren Einfluss auf das Potentialgefälle bisher nicht untersucht werden konnte. Als Zeit der Beobachtungen wählte ich den März, um möglichst gleiche Maximal-Sonnenhöhen und Temperaturen zu erreichen wie bei den früheren Messungen in Ceylon. An letzterem Orte hatte ich im Jänner und Anfangs Februar 1889 gemessen (also zu einer Zeit, wo das Hallwachs'sche Phänomen noch nicht bekannt war, daher leider auch aus Ceylon Intensitätsmessungen der Sonnenstrahlung fehlen). Aus diesen Zeitangaben und der Breitendifferenz folgt aber, dass die Mittagssonnenhöhen in Ceylon und Luxor sehr nahe die gleichen waren. Was die Temperaturen anlangt, so sind dieselben in Ceylon ungleich constanter als in Luxor, erreichen jedoch an letzterem Ort beträchtlich höhere Werthe in den Extremen. Im Wassergehalt der Luft ist natürlich ein bedeutender Unterschied, derselbe ist in Ceylon durchschnittlich dreimal so gross wie in Luxor. Ungünstig für den vorliegenden Zweck war der Umstand, dass im Monate März in Luxor schon zuweilen die Vorläufer des Chamsin aufzutreten pflegen, jenes ungemein heftigen Wüstenwindes, der für die Sommermonate jener Gegenden charakteristisch ist; wurden auch zeitweilig dadurch die Messungen empfindlich gestört, so stellte sich doch der normale Zustand nach Aufhören des Windes überraschend schnell wieder her, und die Messungen während dieser Störungen boten viel des Interessanten.

Sämmtliche Messungen des Potentialgefälles wurden mit meinen transportablen Apparaten ausgeführt, und zwar die weitaus grösste Zahl an einem willkürlich gewählten Punkte (für den Flammencollector) vor einem Fenster des ersten und einzigen Stockwerkes eines ganz isolirt stehenden Gebäudes. Dieses war zunächst von einem ausgedehnten Garten und in weiterer Umgebung von ebenen Feldern und dem Nil umschlossen; für den Beobachtungspunkt wurde der Reductionsfactor auf die freie Ebene durch zwei simultane Beobachtungsreihen ermittelt und dabei jeweilig die Werthe 1·78 und 1·73 erhalten, deren Mittel für die Reductionen verwendet wurde. Die Bestimmungen der Feuchtigkeit wurden mit Hilfe eines August'schen Psychrometers ausgeführt.

Für die Messung der Intensität der Sonnenstrahlung — die später auch in Wien bei gleicher Sonnenhöhe des Vergleiches halber weitergeführt wurde — bediente ich mich des von Elster und Geitel[1] angegebenen transportablen Aktinometers,[2] dessen Functionirung eine ganz ausgezeichnete war. Bezüglich der Theorie dieses Apparates, sowie der genauen experimentellen Prüfung derselben durch die Herren Elster und Geitel selbst muss ich auf deren oben citirte Arbeit verweisen; hier genügt es, zu erwähnen, dass ich die Messungen ganz in der dorten angegebenen Weise ausgeführt und auch berechnet habe; doch muss besonders betont werden, dass meine Zahlen mit jenen von Elster und Geitel nicht direct vergleichbar sind, da die beiderseits benutzten Apparate andere Constanten besassen, sondern dass jede der Reihen nur relative, unter sich selbst vergleichbare Zahlen liefert. Ich benützte in meinem Aktinometer als lichtempfindlichen Körper eine amalgamirte Zinkscheibe von 51·5 *mm* Durchmesser und 6·0 *mm* Dicke; dieselbe befand sich am unteren Ende eines metallenen Cylinders von 8·3 *cm* Durchmesser, und zwar 28 *cm* von der Öffnung des Cylinders entfernt. Die Dimensionen des letzteren sind so gewählt, dass, wenn derselbe gegen die Sonne gerichtet ist, gerade ein Hundertel des Himmelsgewölbes auf die Zinkscheibe wirkt. Die erhaltenen Zahlen geben also eigentlich nicht nur die directe Strahlung der Sonne, sondern auch noch die eines kleines Theiles des Himmels; doch dürfte letzterer in der Praxis wohl zu vernachlässigen sein. Die Capacität meines Elektroskopes betrug bei mittlerer Divergenz der Blättchen 12 *cm* und zusammen mit der angehängten Hilfscapacität 82 *cm*.

Die jeweilige Bestimmung der Zenithdistanz der Sonne geschah mit Hilfe eines kleinen Sonnenhöhenapparates und wurde auf circa 10 Minuten genau ausgeführt. Die Zeitangaben beziehen sich durchweg auf mittlere Ortszeit, ohne jedoch Anspruch auf grosse Genauigkeit machen zu können.

---

[1] Diese Sitzungsber., T. CI, 1892.

[2] Ich habe ausschliesslich die directe Sonnenstrahlung bei senkrechter Incidenz auf die empfindliche Platte gemessen, nicht aber das diffuse Himmelslicht.

In der folgenden Tabelle I theile ich das Beobachtungsmateriale, und zwar das sämmtliche, nach Tagen geordnet, mit; unter J sind die am Aktinometer gemessenen Intensitäten der Sonnenstrahlung in einem willkürlichen, aber für die ganze Reihe constantem Maasse angegeben, das auch den später mitzutheilenden Intensitätsmessungen aus Wien zu Grunde liegt. Die den J zugeordneten Zenithdistanzen Z sind ohne Rücksicht auf die Wirkung der Refraction angegeben, bedeuten also die jeweiligen scheinbaren Zenithdistanzen der Sonne. Unter T sind die Temperaturen in Celsiusgraden, unter R. F. und A. F. die relative und absolute Feuchtigkeit und schliesslich unter $\frac{\partial V}{\partial n}$ die gemessenen Potentialgefälle, aber schon auf Volt per Meter reducirt, angegeben. In den »Bemerkungen« ist der Abkürzung wegen H. für Himmel, W. für Wind gesetzt; die Stärke des letzteren wurde nach der Scala 1—10 geschätzt. Bezüglich des Ausdruckes »bewölkt« möchte ich bemerken, dass Wolken in unserem gewöhnlichen Sinne darunter nicht zu verstehen sind, sondern nur Federwolken leichtester Art, die als Dunstschleier den Himmel überziehen. Auch in den seltenen Fällen, wo »Cumuli« notirt wurden, sind darunter nur ganz leichte Wolkengebilde zu verstehen, die aber zum Unterschiede von den Federwolken eine scharfe Begrenzung zeigten. Die Erscheinung des Thaues konnte ich nur ein einzigesmal, am 16. März, beobachten, und dass sie überhaupt in diesen Gegenden nur selten eintreten muss, bewies das lebhafte Interesse, welches derselben von Seite der Einheimischen entgegengebracht wurde, ein Interesse, das in einem Lande sehr begreiflich ist, in welchem Niederschläge unbekannt sind.

Tabelle I.

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{\Delta V}{\Delta n}$	Bemerkungen
10. III.	5ʰ p. m.	38	75°40'	22·8	30	6·1		Der ganze Tag klar, aber Tags vorher sehr windig und viel Staub.
		31	76 45					
		16	79 0					
		8	80 50					
		5	82 30					
		2·5	83 40					
11. III.	7ʰ a.			10·5	77	7·2	117	Vorher und nachher schnell wechselndes Vorzeichen der El. In der Nähe des Bodens —, aber 1·5 *m* darüber +. H. ganz klar. W. = 0. Abends wieder normales +-Gefälle der Elektricität.
	Nachmittag	328	53°50'					
		316	56 20					
		293	57 20					
		271	58 20					
		253	59 30					
		253	60 30					
		210	62 0					
		170	63 30					
		149	65 15					
		136	66 50					
		107	68 45					
		63	70 0					
		53	71 30	23·6	30	6·0		
	4ʰ 30	47	72 40					
12. III.	8ʰ25 a.						133	H. ganz klar.
	30						133	
	35						100	
	40						117	
	45						117	
	50						117	
	55						120	
	9ʰ 0			15·5	54	7·1	[illegible]	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
12./III.	11h 0 a.	379	31°40′					
		400	31 20					
		414	31 0					
		445	30 25					
		445	30 0					
		475	29 10					
	12h	470	28 50					
		414	29 15	22·0	33	6·5		
	4h 0 p.			24·3	31	6·9	82	
	15						91	
	30						108	
	45						100	
	5h 0						120	
	15						130	
	30			23·2	32	6·7	141	
	45						185	
	50						191	
	53						177	
	54						177	Sonnenuntergang
	55						172	
	6h 0						164	
	5						164	
	10						150	
	20						203	
	30			22·6	31	6·3	177	
	40						133	
	8h 25						125	
	45						300	
	9h 0						300	
	15						300	
	45						177	
	10h 0						180	
	15						238	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
12./III.	10h30 p.						238	
	45						268	
	11h 0						209	H. während des ganzen Tages klar, W. = 0. Ausschläge des Elektroskopes sehr ruhig.
	15						225	
	30						150	
	45						164	
	12h 0			15·7	48	6·2	157	
13./III.	6h15 a.			11·9	68	7·1	164	
	30						190	H. ganz klar, W. = 0.
	40						208	
	50						177	
	7h 0						184	
	10						125	
	20						142	
	35						117	
	45						100	
	55						108	Von hier ab dunstig.
	9h05						60	
	15						60	
	35			21·0	36	6·7	65	
	10h05	316	40° 10′				60	Feine Federwolken.
	15	379	37 20				70	Staubsturm aus S.
	45			25·0	20	4·6	—∞	Der Ausschlag dauernd —∞, auch wenn der Collector ganz in das Fenster zurückgezogen wurde.
	12h30			29·0	14	4·2		
	2h 0			31·9	11	4·1		
	4h37	126	59° 0′	31·0	8·6	2·7		Starker Chamsin, H. ganz schleierig.

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
14. III.	6h15 a.			16·7	54	7·5	157	H. ganz klar, W. = 0
	30						177	
	45						132	
	7h 0						100	
	15						71	
	30	11	72°40'				60	
	45	61	69 40				82	
	8h 0	160	64 10				70	
	20	266	60 20				70	Es beginnt Wind. W. = NW_2
	30			19·0	46	7·5		W. = NW_5.
	45	340	53 40				100	
	9h 0			19·0	40	6·5		W. = NW_5.
	30	400	46 20				60	
	10h 0	414	40 20				60	
	30	427	34 30	21·0	34	6·3	50	W. = NW_7.
	11h 0	427	30 20				36	
	30	427	28 0				−150	
	12h 0	379	28 0				0	Im W und im Zenith Federwolken
	20	347	28 0	23·7	31	6·7	0	Mehr Wolken.
	6h 0 p.			22·2	25	5·1	60	W. = NW_3, Einzelne Wolkenstreifen.
	15						82	
	45						108	
	8h45						82	W. = NW_3.
	9 45			20·0	33	5·6	82	
15. III.	6h30 a.			14·7	55	6·8	216	H. ganz klar, Luft sehr rein. W. = 0.
	45						164	
	55						117	
	7h0,5						125	
	15						100	
	25						117	
	30			16·2	50	6·7	100	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
15. III	7h55 a.						82	Wind beginnt.
	8 15						0	
	30						60	Starker Wind, Luft anscheinend klar.
	45						60	
	11h15						0	
	30	248	28°20'				—100	Staub, W. = N_6.
	12h 0	497	27 40				—238	W. = N_7.
	30	546	29 10					„
	1h30	354	35 0					„
	2 30	379	45 30	22·0	32	6·4		
	3 15	277	54 20					Viel Staub und Wind
	30	126	56 10					
	40	177	59 10					
	45	190	60 40					
	4h10	174	65 0				0	
	45	63	73 40					
	5h10	19	78 40					Noch windig, aber klar.
	35	3·8	84 10					
	50	0·9	86 30				82	
	8h10						82	
	9 30						117	
	10 15			16·0	48	6·5	100	
	45						90	W. = 0, etwas dunstig
	11h05						90	
16. III.	5h45 a.			9·3	74	6·4	133	H. ganz klar, W. = 0.
	55						150	
	6h05						203	Sonnenaufgang 6h 7'
	10						170	
	20						216	
	30						177	
	40						170	
	50						117	
	7h00						50	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
16./III.	7^h10 a.						90	
	20						82	
	30			11·9	66	6·9	90	
	45						80	Thau auf freiem Felde.
	8^h15						140	
	30						80	
	45						70	
	9^h00						82	
	15						90	
	30	248	46°40'				100	
	10^h00	480	41 0				60	Bisher vollständig windstill.
	30	516	35 20				40	W. = NW_2
	11^h15	316	28 40				40	W. = NW_1. Dunst vor Sonne.
	12 0	480	27 10	20·0	29	5·1	50	
	30	516	28 40				0	W. = W_1.
	1^h45	475	37 10				−150	W. = 0, aber am anderen Nilufer eine hohe Sandhose
	2 30	427	45 10	22·9	25	5·1	−90	W. = W_2.
	3 30	328	56 30				0	W = W_3.
	4 15	167	66 40	24·3	25	5·6	−60	
	5 15	25	78 10				82	W. = 0.
	45	3	86 20				133	W. = 0, **ganz klar.**
	6^h15						133	
	45			19·0	29	4·7	158	
	7^h15						158	
	8 15						158	W. = 0.
	45						203	
	9^h05						210	
	40						203	
	11 0						177	
	15			15·5	30	3·8	164	
17./III.	6^h 0 a.						40	Der ganze Himmel verschleiert. W. = 0.
	30			16·6	52	5·0	82	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
17./III.	6h40 a.						142	H. fast klar.
	45						177	H. ganz klar, W = 0.
	55						190	
	7h10			12·7	52	5·6	142	
	20						216	Im W eine einzelne Federwolke.
	30						346	
	40						198	
	50						185	
	8h05						117	
	15						133	
	30						100	
	45			17·3	41	5·9	60	
	9h 0						40	
	15	130	48°20′				82	
	30						60	
	10h 0						−50	
	30	300	33°50′					
	11h 0	285	32 0				40	
	30	414	27 50	20·7	26	4·7	40	
	12h30	380	27 50				40	
	1 30	347	34 30				40	
	2 30	328	45 0				80	Dunst.
	3 45						0	Viel Dunststreifen und Federwolken
	5 0			25·0	27	6·3	60	
	15						−60	
	20						0	
	45						80	H. ganz mit Dunst bedeckt.
	6h 0						70	
	15						60	
	30						60	
	9h 0						208	H. [illegible]
	15			18·3	35	5·6	284	
	45						202	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
17. III.	10^h 0						170	
	30						164	
	45						125	
	11^h 0						133	H. klarer.
	15						150	
	30						164	
	45						100	H. dunstig.
	12^h 0			15·7	46	6·0	164	Den ganzen Tag W. = 0.
	15							
18. III.	6^h 0 a.						40	H. ganz mit Dunst bedeckt. W. = 0.
	7 0						40	
	9 0			20·8	48	8·4	90	Fast heiter. W. = 0
	20						90	
	45						70	Dunst.
	10^h 0						70	
	11 0						40	
	30						40	Wieder klarer.
	45	178	26°40'					Dunst.
	12 0	239	26 20	24·0	33	7·4	50	
	1 30						± 0	Fast ganz bewölkt.
	2 15						60	Dunstig, aber keine Wolken.
	3 15						40	Dunstig, aber keine Wolken. W. = S_1.
	4 15						60	Klarer.
	45						70	
	5^h15			25·5	34	8·1	82	H. ganz klar.
	6 0						70	
	15						82	
	30						100	H. ganz klar. W. = 0.
	50						140	
	8^h15			22·1	32	6·3	164	
	45						133	
	9^h15						117	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
18./III.	10h15			19·8	44	7·5	40	W = N_2.
	45						100	"
	11h 0						82	"
	15						70	"
	45						80	"
19./III.	6h30 a.			16·8	72	10·3	82	1/5 des H. mit Cum. bedeckt.
	45						100	
	7h 0						82	Wolken vergehen.
	15						60	
	30						100	H. klar. W = 0.
	45						82	
	8h15						82	
	45			19·0	61	10·0	90	
	9h 0	154	52° 0'				82	
	40	400	42 50				60	Plötzlich W = [illegible].
	10h30	480	35 40				50	
	11 0	497	30 30	25·0	30	7·0	0	W = [illegible].
	45						0	W = [illegible]. H fast ganz bedeckt.
	12h30	480	26°20'				90	Klar, nur im W. Wolken, vor Sonne etwas Dunst.
	2 0						∞	Staubsturm. W = [illegible]. Nachmittag ganz trüb und Sturm, der auch während der folgenden Nacht anhält.
20./III.	7h 0 a.						−100	Sturm lässt nach, H. klar, W = N_1.
	15						50	
	30	41	68° 0'				40	Cumuli. W = N_1.
	8h10	87	63 20	14·5	50	6·8		
	45	271	54 0				60	H. klar, nur [illegible] Cumuli. W = [illegible]. [illegible] W = N_2.
	10h 0	285	39 35					

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
20. III.	10ʰ45						−∞	H. fast ganz mit Cum. bedeckt, W. = NW_1
	2 0						−∞	H. fast klar, W. = NW_0
	15	400	39°30′					H. klar, W. = N_1.
	50	218	47 0	20·0	31	6·0		Viel Staub.
	3ʰ20	285	52 30					
	50	200	59 40					H. klar, viel Wind.
	4ʰ15	150	65 40					» »
	45	80	71 40					» »
	5ʰ 0	40	75 10					» »
	20	15	79 40				40	» »
	8ʰ30						133	Luft rein, W = W_2.
	9 30			17·0	32	4·7	120	
	50						170	Klar, W = W_1.
	10ʰ05						129	
	20						120	W = 0.
								NB. Bis 11ʰ war der H. tief blau, anscheinend viel klarer als sonst, später wieder weisslich wie gewöhnlich.
21. III.	6ʰ15 a.						142	H. ganz klar, W. = 0.
	25			10·7	50	5·7	203	
	35						159	
	50						117	
	7ʰ 0						109	
	15						82	
	45			14·9	52	6·6	142	
	8ʰ 0						100	
	15						60	H. ganz klar.
	30	100	57°40′				60	
	9ʰ30	165	44 10				60	W = W_2.
	10 0	185	38 10				100	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
21. III.	10h30	497	32°40′	17·5	42	6·2	± 0	W = W_6. Staub.
	11 10	497	28 0					W. = W_7.
	35	536	25 40				± 0	
	12h 0	526	25 10					
	35	507	26 20	19·0	32	5·2	± 0	
	1h50	455	36 30					W = W_6. H ganz klar.
	2 45	392	45 30					
	3 0							
	25	285	53 40					
	45	260	58 10				82	
	4h05	213	63 20				82	
	25	167	66 10				90	
	50	80	73 0	20·3	29	5·2	60	
	5h05	75	75 30				100	W = 0 und klar
	20	13	80 10				117	
	35	7	82 10				82	
	40	7	84 0				100	
	50						120	
	6h 0						120	
	15			18·0	36	5·5	127	
	25						133	
	40						142	
	7h 0						142	
	8 50						150	
	9 15						150	
	45						120	
	10 05						125	
	15						125	Der ganze Tag klar
22. III.	5h30 a						117	Ganz klar, W. = [illegible]
	45						117	
	55						133	
	6h05						158	Sonnenaufgang
	15			9·3	77	6·8	160	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
22. III.	$6^h 25$						225	
	35						268	
	40						203	
	50						190	
	$7^h 0$						164	
	10						142	
	20						133	
	40						120	
	$8^h 0$			12·5	56	6·0	70	
	$6^h 10$ p.						150	
	30						305	
	40			20·6	34	5·9	300	
	55						164	
	$8^h 30$						270	
	45						225	
	$9^h 0$						250	
	15			17·5	40	5·9	170	
	40						260	
	$10^h 0$						158	
	15						216	
	30						290	
	45						203	
	$11^h 0$			14·2	58	7·0	216	Der ganze Tag klar und windstill.
23. III.	$6^h 10$ a.						133	
	40						158	
	50						160	
	$7^h 0$			12·[illegible]	56	6·[illegible]	190	
	15						65	
	30	50	[illegible]				90	Leichte Federwolken, aber nicht vor Sonne. W. = 9.
	45	123	85 36				70	
	$8^h 0$	206	92 10				60	
	20	[illegible]	[illegible]	17·0	51	7·3	60	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
23. III.	9h 0	218	48°40'				60	
	30	260	44 10					
	10h45	480	31 0				90	
	11 30	480	25 30				82	
	12 0	546	24 30	23·7	32	7·1	40	
	30	600	25 20				60	
	1h30	497	31 50				40	
	2 10	516	38 20					
	3 0	497	49 50					
	4 0	316	60 20	26·0	29	7·2	117	
	30	190	68 10				125	
	5h 0	20	78 30				110	
	30	5	81 30				150	
	45			24·3	26	5·8	203	
	55						190	
	6h05						125	
	20						150	
	35						240	
	45						284	
	7h 0						238	
	8 10						384	
	9 05			17·7	36	5.5	170	
	25						203	
	45						180	
	10h 0						158	
	30						117	
	45						117	
	11h 0			20·0	34	6·0	117	Ausser dieser abnormen Temperatursteigerung war der ganze Tag besonders normal und klar, W. = 0.
	15						117	
	35						117	
24. III.	3h 0 a.						91	H. schleierig.
	6 30						100	Im Zenith Federwolken.

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
24./III.	6^h45						90	
	7 0						100	W. = W_2.
	15			14·0	57	6·7	60	
	45						40	Tagsüber starke Federwolken.
	6^h20 p.						60	
	7 0			25·7	29	7·0	346	H. wieder ganz klar. W. = 0.
	15						284	
	8^h20						315	H. wieder ganz klar.
	9 15						190	
	45			21·7	39	7·5	164	
	10^h05						142	
	20						142	H. wieder ganz klar. W. = 0.
25./III.	5^h45 a.						60	Viel Federwolken.
	6 0						71	
	15						100	
	30						100	
	7^h 0						82	
	30						60	
	8^h15			19·0	55	9·0	60	
	3 0 p.			33·0				Über Mittag schleierig und abnorm feucht, Abends wieder klar, aber feucht. W. = 0.
	7 0			24·0	51	11·2	82	
	9 0						100	
	30						100	
	10^h 0						100	
	30						100	
	45						90	
	11^h05						100	
	20						90	
	45			23·2	51	10·8	100	
26./III.	5^h40 a.			21·5	73	13·9	82	H. ganz klar, W. = 0.
	6 05						82	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
26. III.	6h20						78	
	35						90	
	7h20						71	
	8 0	152	61°30′				60	
	9 0	445	49 20	24·8	60	13·9	± 0	W. = NO_3.
	11 30	465	24 0	29·0	49	14·5	60	W. = NO, Einzelne Federwolken, Dunst
	12 45	427	26 0					
	6h30 p.						82	Klar, W. = 0. Später starker Nordwind und Staub.
27. III.	6h 0 a.			19·5	61	10·3	82	Einzelne Cumuli. W. = 0.
	45						70	Viele Cumuli.
	7h45						60	H. wolkenlos, aber dunstig
	8 30	196	55°10′	24·0	50	10·9	40	
	9 45	480	40 40				40	H. ganz klar, W. = N_1
	10 40	497	30 40	26·5	43	10·9	40	
	11 45	497	23 30				60	
	12 40	436	23 50	28·0	40	11·2	70	
	2 15	400	40 10				70	
	4 15	138	63 30	32·3	24	9·1	45	
	5 0	32	75 30	31·5	24	8·8	70	
	6 45			29·0	26	7·9	238	W. = 0.
	7 0						[illegible]	
	15						240	
	8 30						[illegible]	
	9 0			25·5	34	8·1	150	
	40						170	
	10h20						142	
	11 0						110	Der ganze Nachmittag [illegible]
	30						115	
	12h 0			25·5	44	[illegible]	110	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
28. III.	5^h35 a.			18·6	50	7·9	70	H. ganz klar, W. = 0.
	45						82	
	55						82	
	6^h05						117	
	15						82	
	30						117	
	45						117	
	7^h 0						164	
	15			19·5	55	9·3	142	
	45						60	
	8^h 0						40	
	15						40	
	11^h 0	400	26°55'				40	
	12 0	516	22 35	29·0	28	8·4	60	
	45	516	24 30				65	
	3^h 0	218	50 0	32·5	13	4·8	78	
	4 15	126	64 50				82	
	5 0						82	
	30						82	
	45			30·2	19	6·2	117	
	55						155	
	6^h05						416	Sonnenuntergang, möglicherweise Rauch.
	10						120	
	15						157	
	25			28·2	21	6·1	248	
	40						150	
	55						253	
	7^h15						203	
	8 15						216	
	30						238	
	50						290	
	9^h15						260	
	40			23.0	38	7·8	260	
	10^h 0						268	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
28./III.	10h15						238	
	30						216	
	45						190	
	11h10						133	Tag und Nacht vollkommen klar und windstill.
	30						177	
	50			20·5	41	7·2	190	
29./III	1h45 a						91	
	3 45			16·2	40	5·4	40	
	5 45			16·5	49	7·0	100	H ganz klar, W = 0
	6 0						90	
	15						60	
	30						48	
	45						48	
	7h 0						100	
	15						100	
	30						60	
	45			20·7	42	7·5	70	
	8h15						48	
	9 0	218	46°50				238	
	10						± 0	W. = S.
	10h 0	455	36 20				+ 70	
	11 0	577	26 40	20·5	19	6·0	— 36	
	1 15	400	28 30				± 0	W. = SW., viel Staub, dunstig.
	3 0			32·0	16	6·0		Staubsturm aus SW
	3 45			33·0	14	5·4		
								Seit 8h p. m. hat der Sturm aufgehört, H klar, doch ist um 9h noch immer $\frac{\partial V}{\partial n}$ = ∞, um 9h 30 aber schon = 100, [illegible] der [illegible] Wind [illegible]

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
30. III.	6h15 a.			13·5	41	4·7	60	H. ganz klar, W. = 0
	30						60	
	8h 0						70	
	9 30			24·7	30	6·8	50	
	10 15	354	31°20'				60	
	11 10	526	25 10				90	
	30						70	
	12h30	516	23 20				70	
	2 05	427	37 0				50	
	3 15	347	51 0	33·0	16	5·9	60	
	5 10	28	76 40	31·4	16	5·6	60	
	40						110	
	50						110	
	6h 0						216	
	10						260	
	20						177	
	30						198	
	50						290	
	7h10			27·0	26	6·8	416	
	8 15						454	
	50						416	
	9h30			25·5	29	6·4	430	
	10 0						248	
	30						203	
	11h 0						70	
	30						117	
	45						100	Der ganze Tag klar
	12h 0			23·5	23	4·8	117	und W. = 0.
31. III.	2h30 a.						50	
	4 0						60	H. ganz klar, W. = 0.
	6 0						117	
	15			16·7	64	8·0	82	
	45						82	

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	$\frac{dV}{dn}$	Bemerkungen
31. III.	7h 0						120	
	15						100	
	30						95	
	50						70	
	8h15			21·5	46	8·7	50	
	45						50	
	9h15						60	

Die vorstehende Tabelle lässt erkennen, dass die Beobachtungen, namentlich in den ersten Tagen, Störungen unterworfen waren, die sich als solche allerdings deutlich kennzeichnen und die durch das Auftreten zum Theil recht heftiger Winde hervorgerufen wurden. Bei der grossen Trockenheit von Luft und Boden wirbelt der Wind viel Staub auf; dieser ist bekanntlich stets negativ elektrisch und drückt somit das normale positive Potentialgefälle wesentlich herab oder verwandelt es, wie häufig genug zu beobachten war, in ein negatives, niemals aber wird dasselbe durch derartige Störungen vergrössert, so dass der beobachtete Mittelwerth jedenfalls als ein unterer Grenzwerth anzusehen ist. Dass derartige Störungen sich mehrere Kilometer weit auch in windstille Gebiete hinein bemerklich machen, konnte einmal sehr deutlich bei dem Auftreten einer Sandhose in grösserer Entfernung beobachtet werden, während am Beobachtungsorte selbst vollkommene Windstille herrschte. Derartige deutlich als Störungen erkennbare Beobachtungen glaubte ich daher bei der weiteren Discussion des Beobachtungsmateriales ausschliessen zu müssen; im Übrigen zeigen die Messungen einen der Constanz des Klimas in Luxor entsprechenden sehr regelmässigen Verlauf an den verschiedenen Tagen, so dass man für die ganze Beobachtungsperiode die Werthe des Potentialgefälles unbedenklich zu Stundenmitteln vereinen und daraus eine mittlere Tagescurve construiren kann. Auch die Temperatur- und Feuchtig-

keitsverhältnisse zeichnen sich durch grosse Constanz aus — wenn man wieder von einzelnen deutlich gestörten Tagen absicht —, speciell die absolute Feuchtigkeit schwankte nur innerhalb weniger Millimeter des Dunstdruckes; wenn man für letzteren dreistündige Mittel bildet, so erhält man folgenden ganz regelmässigen täglichen Gang, wobei Mitternacht als 0^h gezählt ist:

0^h	.... 6·43 *mm*
3	.... 6·67
6	.... 7·10
9	.... 7·80
12	.... 8·00
3 p.	.... 7·60
6	.... 6·63
9	.... 6·60

Der Mittelwerth des Dunstdruckes während der ganzen Beobachtungsperiode betrug 7·2 *mm*. Nur an zwei Tagen, am 25. und 26. März, war plötzlich eine abnorm hohe Feuchtigkeit zu beobachten, 10·3 *mm*, respective 14·0 *mm*, die sich auch ohne Messung dem Gefühle des Laien sofort bemerkbar machte und die vermuthlich durch eine der sonst herrschenden westlichen entgegengesetzte östliche Luftströmung hervorgerufen war, die der Luft vom Rothen Meere her grössere Feuchtigkeitsmengen zugeführt haben mag. Die Beobachtungen des Potentialgefälles an diesen beiden Tagen, auf die ich später noch speciell zurückkommen werde, wurden deshalb auch bei der Bildung der Stundenmittel ausgeschlossen.

Wenn man mit Ausschluss der im Vorhergehenden als Störungen charakterisirten Beobachtungen die an verschiedenen Tagen zur gleichen Stunde gemessenen Potentialgefälle zu Mittelwerthen vereinigt, so erhält man die den ganzen Tag umfassende Tabelle II der Stundenmittel, die einen ausserordentlich regelmässigen und durch die scharf ausgeprägten Maxima und Minima interessanten Gang erkennen lässt. Mitternacht ist wieder als 0^h bezeichnet.

Tabelle II.

Zeit	Stundenmittel des Potentialgefälles V in $\frac{V}{m}$	Zahl der Beobachtungstage
0^h	166	8
1	110	2
2	70	2
3	65	3
4	69	3
5	105	5
6	157	7
7	163	9
8	130	5
9	80	8
10	61	8
11	56	5
12	57	6
1 p.	62	5
2	65	5
3	72	6
4	86	5
5	106	5
6	193	7
7	243	7
8	280	7
9	255	9
10	214	8
11	167	7

Der tägliche Gang des Potentialgefälles zu Luxor, wie er sich aus dieser Tabelle ergibt, ist in der folgenden Fig. 1 durch die Curve *aa'* dargestellt.

Diese Curve hat zwei deutliche Maxima und Minima: ein schwächeres Maximum um 7^h a. und ein stärkeres um 8^h p. sind durch die beiden nahezu gleichen Minima um 3^h a. und

um Mittag von einander getrennt. Ich glaube nicht, dass bei irgendwelchen früheren Messungen die doppelte tägliche Periode der Luftelektricität mit gleicher Deutlichkeit ausgeprägt erscheint wie bei diesen Beobachtungen aus Luxor. Allerdings liegen für das Nachtminimum nur Messungen von wenigen Tagen vor, allein der Abfall der Curve gegen Mitternacht zu sowohl, als der Anstieg derselben von 5^h a. ab konnte oft und regelmässig beobachtet werden, so dass über die Existenz dieses Nachtminimums nicht der geringste Zweifel bestehen kann.

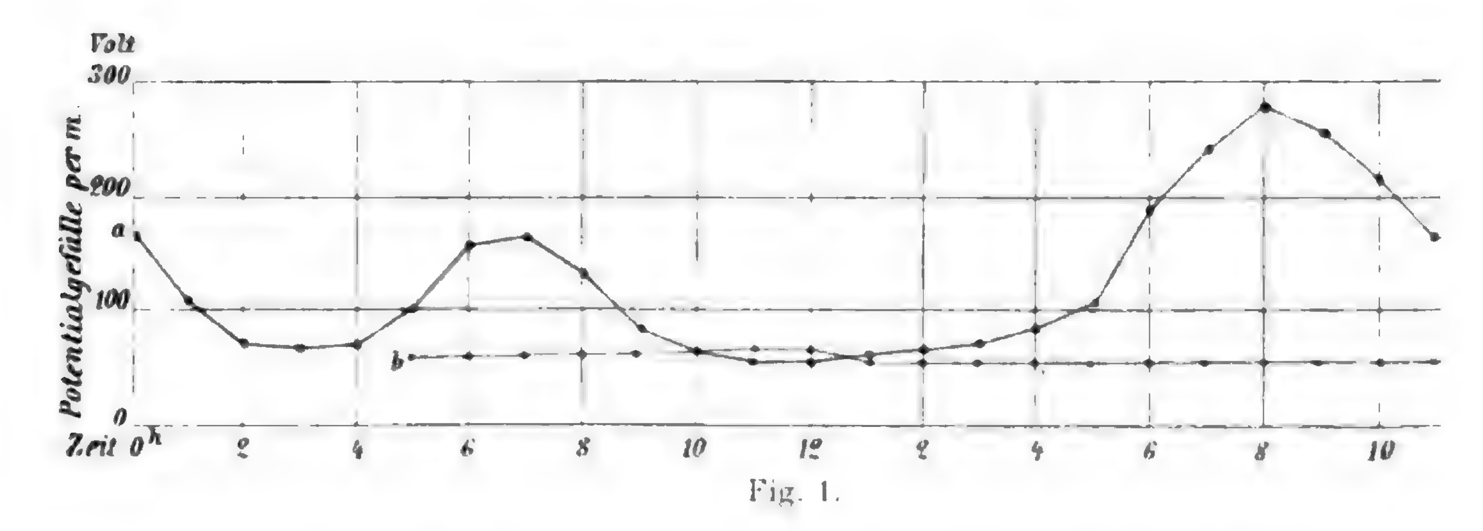


Fig. 1.

Ich will auf die möglichen Ursachen dieser täglichen Periode hier nicht weiter eingehen, dieselben werden in einer späteren Abhandlung besonders besprochen werden, sondern vorläufig nur den Werth des Tagesmittels ins Auge fassen, respective dessen Verhalten zur Wasserdampftheorie und zur photoelektrischen Theorie. Als Tagesmittel hat man die mittlere Ordinate, welche der Curve aa' in Fig. 1 entspricht, anzusehen; für dieselbe ergibt sich durch planimetrische Ausmessung der Curve der Werth 128, d. h. das mittlere Potentialgefälle zu Luxor betrug 128 Volt pro Meter. Es mag immerhin fraglich sein, ob dieser Werth vollkommen der Wirklichkeit entspricht, insoferne nämlich, als es, wie ich an anderem Orte genauer auszuführen gedenke, sehr wahrscheinlich ist, dass die tiefen Depressionen eigentlich als Störungen aufzufassen sind, die möglicherweise durch Verticalbewegungen des Staubes in der Atmosphäre hervorgerufen werden. Es ist überhaupt festzuhalten, dass Störungen des normalen Potentialgefälles durch

Staub — und solche könnten in unserem Falle in erster Linie im Spiele sein — stets eine Herabminderung desselben zur Folge haben; der aus obiger Curve unter der Voraussetzung, dass dieselbe störungsfrei ist, abgeleitete Werth von $128 \frac{V}{m}$ stellt also eine untere Grenze dar, und es ist recht wohl möglich, dass der wirklich störungsfreie Werth noch beträchtlich höher liegt.

Was den schon früher erwähnten Mittelwerth der absoluten Feuchtigkeit von 7·2 *mm* anlangt, so dürfte dieser durch locale Einflüsse kaum merklich gestört sein. Zwar lag der Beobachtungsort im Nilthale, nur etwa 100 *m* vom Flusse selbst entfernt, an dessen beiden Ufern sich ein schmaler Streifen Culturlandes hinzieht, so dass zu hohe Angaben des Psychrometers in Folge local gesteigerten Wassergehaltes der untersten Luftschichten nicht ganz ausgeschlossen sind; doch war anderseits die fast ausschliessliche Windrichtung während der ganzen Beobachtungsperiode eine derartige, dass die Luft das Nilthal vom Westen her quer passirte und daher nur die circa 2 *km* betragende Breite des Culturlandes zu passiren hatte, das den Beobachtungsort von der Lybischen Wüste, aus welcher die Luftströmung kam, trennte.

Die Curve *bb'* in Fig. 1 habe ich des späteren Vergleiches halber beigesetzt. Sie stellt den täglichen Gang des Potentialgefälles dar, wie ich ihn vor mehreren Jahren auf Ceylon als Mittel aus mehrwöchentlichen Messungen beobachtet habe:[1] auf den ersten Blick erkennt man das vollständig verschiedene Verhalten dieser Erscheinung dort und in Luxor. Zwar fehlen von Ceylon Beobachtungen aus den frühen Morgenstunden, zwischen Mitternacht und 5^h a., doch lässt der ganze Verlauf der Curve auch bezüglich dieses Zeitintervalles wohl keinen Zweifel übrig.

Wir wollen nun untersuchen, ob die Ergebnisse der Beobachtungen in Luxor mit den Forderungen der photoelektrischen Theorie in Einklang zu bringen sind oder nicht; dazu wird es nothwendig sein, dieselben einerseits mit jenen Resultaten zu

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 99 (1890).

vergleichen, welche die früheren Messungen in Ceylon, Wolfenbüttel, St. Gilgen (Salzburg) und Wien ergeben haben, wobei für den vorliegenden Zweck namentlich jene aus Ceylon ins Gewicht fallen werden, anderseits aber auch die Strahlungsverhältnisse an diesen verschiedenen Orten in Betracht zu ziehen.

Was den letzteren Umstand anlangt, so wäre zu bemerken, dass ich nach der eingangs erwähnten Methode von Elster und Geitel sowohl in Luxor, als in Wien mit demselben Apparate gemessen habe, die erhaltenen Zahlen daher direct mit einander vergleichbar sind; die zahlreichen Messungen dagegen, welche Elster und Geitel in Wolfenbüttel ausführten, sind nur unter sich, nicht aber mit meinen vergleichbar, da die Apparate verschiedene Constanten besassen. Aus Ceylon liegen leider keine Messungen der Sonnenstrahlung vor, da, wie ich schon erwähnte, zur Zeit, als ich mich dorten befand, die ganze Frage nach dem Zusammenhange zwischen Potentialgefälle und Sonnenstrahlung noch nicht aufgeworfen war; wir besitzen aber in den »Untersuchungen über das photochemische Klima von Wien, Cairo und Buitenzorg« von J. Wiesner[1] ein für den vorliegenden Zweck ausserordentlich werthvolles Materiale, da bei der völligen Gleichheit der Klimate von Ceylon und Java die an letzterem Orte angestellten Beobachtungen wohl unbedenklich auf ersteren übertragen werden können. Zwar hat sich Wiesner einer anderen Methode bedient, nämlich der Bunsen'schen, da aber auch bei dieser in erster Linie die blauen und ultravioletten Strahlen zur Messung kommen durch die Schwärzung photographischen Papiers, so können die nach den beiderseitigen Methoden gewonnenen Resultate sehr wohl mit einander verglichen werden. Ich werde weiter unten auf die Schlüsse zurückkommen, die sich aus den Messungen Wiesner's für die Stärke der Strahlung in Ceylon ziehen lassen.

Um zunächst einen Überblick über das die Strahlung betreffende, in Luxor gewonnene Beobachtungsmateriale zu geben, ordne ich die in Tabelle I gegebenen Messungen nach

[1] Denkschriften der Wiener Akad., Bd. 64 (1896).

Zenithdistanzen in Gruppen, die je 5° umfassen, indem für eine jede dieser Gruppen der Mittelwerth gebildet wird; es ergibt sich so die folgende Tabelle III.

Tabelle III.

Z	n	J Vormittag	n	J Nachmittag	n	J Tagesmittel
22½—25	5	511	3	490	8	503
25—30	14	462	11	463	25	463
30—35	13	415	3	400	16	412
35—40	5	457	5	454	10	456
40—45	7	401	1	400	8	401
45—50	6	276	6	374	12	325
50—55	3	255	5	307	8	286
55—60	5	192	8	245	13	225
60—65	5	174	8	202	13	191
65—70	4	70	8	155	12	126
70—75	—	—	5	61	5	61
75—80	3	28	8	34	11	32
> 80	3	5	7	6	10	6

Hier bedeutet Z die Zenithdistanz der Sonne, n die Anzahl der Beobachtungstage und J die Intensität der Strahlung; trägt man letztere Werthe, für die Vormittags- und Nachmittagsstunden getrennt, als Ordinaten und die approximativen Mittelwerthe der Zenithdistanzen der einzelnen Gruppen als Abscissen auf, so erhält man ein anschauliches Bild des Ganges der Strahlung, wie es nachstehende Fig. 2 zeigt, wobei die Vormittagswerthe durch die gestrichelte, die Nachmittagswerthe durch die ausgezogene Curve dargestellt sind. Die punktirte Curve bedeutet die später zu erwähnenden Messungen der Strahlung in Wien.

Die auf Luxor bezüglichen Curven der Fig. 2 lassen zunächst zwei auffallende Thatsachen erkennen: erstens überwiegt die Strahlung in den späteren Nachmittagsstunden nicht

unbeträchtlich diejenige der Vormittagsstunden bei gleichem Sonnenstande, ein Verhalten, wie es auch von Elster und Geitel für Wolfenbüttel im Monate Juni, also bei hohem Sonnenstande, gefunden wurde, während in den Stunden von ungefähr 10^h—2^h die Strahlungsintensität vor und nach der Culmination der Sonne sich gleich ergab. Zweitens zeigt sich um die Mittagsstunden eine zur Culmination ganz symmetrisch gelegene, scharf ausgeprägte Anomalie entsprechend einer etwa zwischen $10^1/_2{}^h$ und $1^1/_2{}^h$ plötzlich eintretenden und ebenso plötzlich verschwindenden Absorption von constantem Betrage, deren Ursache dem Auge nicht wahrnehmbar wurde.

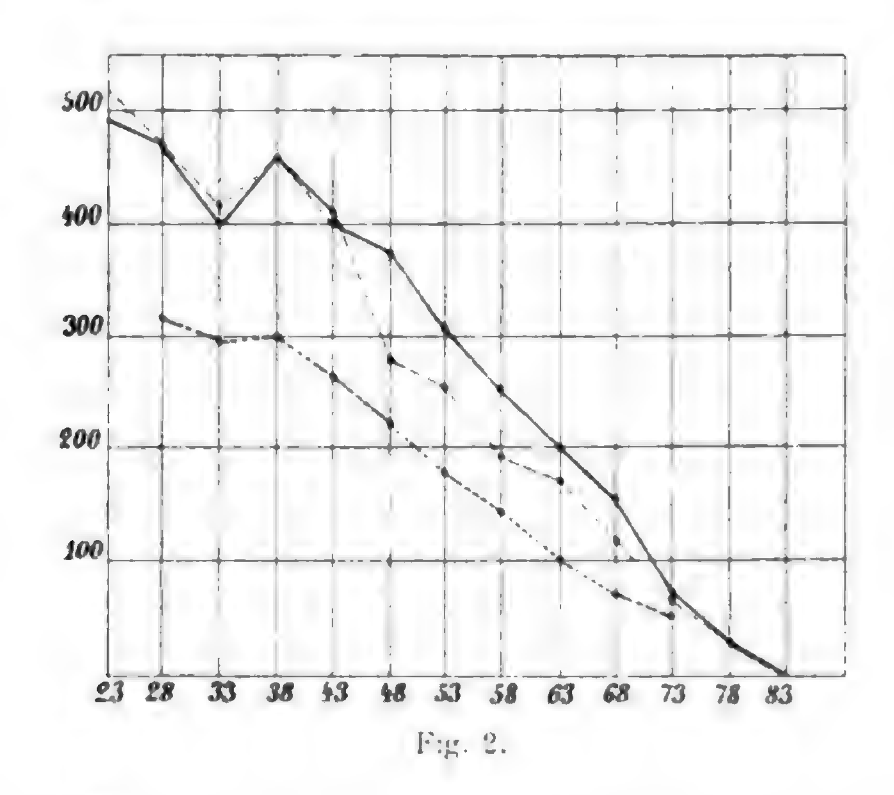


Fig. 2.

Derartige Depressionen in der Strahlung zur Mittagszeit sind schon bekannt; sie wurden unter Anderem von Elster und Geitel in Wolfenbüttel beobachtet, aber nur in den Frühjahrs- und Herbstmonaten und in einer von der hier gefundenen etwas abweichenden Form, in dem das Maximum der Depression auf den Mittag fiel; auch Wiesner hat die gleiche Erscheinung zur Frühjahrszeit bei unbedeckter Sonne in Cairo beobachtet, doch macht sich da, im Gegensatze zu Luxor, der absorbirende Schleier schon dem Auge bemerkbar, und fällt gleichfalls das Minimum auf die Mittagszeit. Auch die Messungen Wiesner's im hohen Norden, in Tromsö und

Spitzbergen[1] lassen die Existenz dieses mittäglichen Minimums erkennen.

Wie die punktirte Curve in Fig. 2 lehrt, ist bei den Wiener Strahlungsbeobachtungen — Mai und Juni 1898 — von dieser Mittagsdepression nichts oder nur eine schwache Andeutung zu bemerken. Die Maxima der Strahlung fielen in Luxor an je drei Tagen auf die Stunden 11^h, $11^1/_2{}^h$, 12^h und $12^1/_2{}^h$.

Behufs Vergleiches der absoluten Werthe der Strahlung in Luxor und in unseren Breiten lasse ich nun die betreffenden Messungen aus Wien folgen; auch diese geben, mit demselben Apparate ausgeführt wie die in Luxor, die directe Sonnenstrahlung bei senkrechter Incidenz auf die empfindliche Fläche und sind ausschliesslich bei klarem Wetter ausgeführt. Es bedeutet in Tabelle IV J die Intensität der Strahlung — im gleichen Maasse gemessen wie in Luxor — Z die Zenithdistanz der Sonne, T die Temperatur der Luft und R. F. und A. F. relative und absolute Feuchtigkeit.

Tabelle IV.

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	Bemerkungen
20./IV.	11^h30 a.	267	36°40'				Fast klar, ganz leichter Schleier.
	11 45	296	—				
	12 0	240	36 30	17·5	59	8·7	
30./IV.	4^h35 p.	95	65° 0'				Ganz klar.
	4 50	95	67 15				
	4 58	95	68 40				
	5 03	92	69 30				
	5 13	63	71 10	19·5	50	8·4	
1./V.	11^h10 a.	340	34°30'	20·0	44	7·7	Klar.
	11 35	323	33 30				
	12 10	344	32 50	20·5	44	7·8	
	12 45	267	34 0				
	1 15 p.	251	36 0	20·0	45	7·7	Einzelne [illegible]

[1] Denkschriften der Wiener Akad., Bd. 67 (1898).

1898 Tag	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	Bemerkungen
2. V.	11h 0 a.	230	35°20′	20·5	47	8·4	Klar.
	11 25	373	33 30				
	11 45	366	32 40				
	12 0	363	32 40				
	12 40	323	33 10				
	1 15 p.	278	35 40	20·5	48	8·4	
	4 25	109	63 30	21·5	47	8·8	
	4 50	84	67 20				
	5 0	67	68 50				
	5 10	60	70 30	21·5	48	9·2	
3. V.	11h 0 a.	454	35° 0′	20·2	50	8·8	W. = SO_4, Staub, sonst klar.
	11 30	413	33 0				
	12 0	385	32 30				
	12 30	382	33 0				
	1 15 p.	337	35 40	21·0	49	9·0	
14./V.	10h35 a.	284	34°10′				Einzelne Cumuli, sonst klar.
	11 10	323	31 20	15·0	46	5·8	
	12 50	220	31 05	16·5	40	5·5	
	1 05 p.	217	31 40				
	4 0	160	56 50				
15. V.	11h10 a.	217	30°40′	18·0	46	7·1	Himmel klar, aber weisslich.
	11 40	294	29 30				
	12 0	294	29 15				
	12 30	282	29 40				
	1 0 p.	214	31 30				
	1 15	217	33 0				
	1 35	192	34 40				
	1 50	192	36 30	28·7	40	11·6	
	4 45	68	64 20				Dunstig.
	5 05	102	66 40				
	5 20	71	69 30				
	5 30	43	71 0	20·0	37	6·4	
16. V.	11h 0 a.	337	31°20′				Klar.
	11 30	355	29 30				
	11 45	336	29 10				
	12 15	217	29 10				Dunstig.
	12 30	263	29 30				Klar.
	12 50	253	30 40				
	1 15 p.	230	32 0				

1898 Zeit	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	Bemerkungen
23./V.	10^h 0 a.	362	36°30′	21·0	51	9·4	Himmel ganz klar, aber weisslich.
	10 30	331	33 0				
	11 0	331	30 40				
	11 30	335	28 10				
	11 45	337	27 40				
	12 0	337	27 30				
	12 30	290	28 10				
	1 0 p.	282	29 40	23·0	47	9·9	
24./V.	11^h30 a.	472	28° 0′				Himmel klar, etwas dunstig.
	11 45	472	27 30				
	12 0	390	27 15				
31./V.	12^h10 a.	362	26°20′				Nach Regen Himmel ganz klar, Cumuli.
1./VI.	11^h30 a.	331	26°50′				Klar.
2./VI.	11^h10 a.	197	27°30′				Klar.
	11 30	324	26 50	20·0	49	8·5	
	12 45	324	27 20				
5./VI.	10^h10 a.	232	33°30′				Klar.
	10 30	297	30 40				
	10 45	297	29 30	18·5	42	6·5	
	11 0	297	27 10				
	11 45	297	25 50				
	12 30	266	26 0	20·0	37	6·4	
	1 15 p.	243	29 0				
12./VI.	10^h40 a.	362	30°10′				Sehr klar.
	11 0	366	27 40	22·5	49	9·9	
	11 10	414	27 20				
	11 30	370	25 30				
	11 45	370	25 20				
	12 05	360	25 0				
	12 30	297	25 40				
	1 0 p.	278	27 40	25·0	40	9·6	

1898 Zeit	Zeit	J	Z	T	R. F.	A. F.	Bemerkungen
13. VI	11h25 a.	344	26°10'				
	4 0 p.	178	53 10				
	4 15	178	54 50				
	4 30	147	57 0				
	4 45	137	60 0				Klar.
	5 0	116	63 0				
	5 15	78	65 0				
	5 30	54	67 0				
	5 45	32	69 0				
14. VI.	2h 0 p.	313	34°30'				
	2 15	313	36 15				
	2 35	297	39 30				Klar.
	2 50	285	42 0				
	3 10	272	45 0				
17. VI	11h45 a.	232	23° 0'				Einzelne Cumuli.
	12 0	297	24 30	19·5	39	6·6	
	12 15	297	—				
	12 30	289	25 0				Klar.
	1 0 p.	270	27 30				
	1 15	236	29 0				
	1 30	216	30 30	20·5	36	6·6	

Zieht man die Einzelwerthe vorstehender Tabelle wieder in Gruppen zusammen, die je 5° Zenithdistanz entsprechen, so erhält man die folgende Tabelle V, in welcher für jene Stunden, für die eine grössere Anzahl von Beobachtungen vorliegen, die Vormittags- und Nachmittagswerthe getrennt angeführt sind; n bedeutet wieder die Anzahl der Beobachtungstage. Die Mittelwerthe von J sind in Fig. 2 durch die punktirte Curve dargestellt.

Tabelle V.

Z	n	J Mittel	n	J Vormittag	n	J Nachmittag
28°	38	319	24	330	16	302
33	30	298	16	328	16	278
38	11	294	6	308	6	272
43	—	—	—	—	—	—
48	—	—	—	—	—	—
53	2	177				
58	3	148				
63	4	100				
68	9	76				
73	3	56				

Einzelne Beobachtungen, die um 12^h angestellt wurden, sind hiebei sowohl den Vor-, als den Nachmittagsmessungen zugezählt. Die Temperatur schwankte während der Beobachtungsperiode zwischen 18° und 23° mit einem Mittelwerth von 20·5, die absolute Feuchtigkeit zwischen 6·6 *mm* und 10·6 *mm* mit einem Mittel von 9·2 *mm*. Da alle Messungen innerhalb der Stadt ausgeführt wurden, so stand zu befürchten, dass die Werthe von J in Folge der Stadtatmosphäre vielleicht zu klein ausgefallen sind; ich habe deshalb an mehreren sehr klaren Tagen gleichzeitige Messungen in der Stadt und in ganz freiem Culturland im NW derselben bei westlicher Windrichtung ausgeführt, konnte jedoch keinen Unterschied an beiden Standorten bemerken.

Vergleicht man den Gang der Strahlung in Wien und Luxor, so fällt auf, dass an letzterem Orte in den Mittagsstunden die Intensitäten vor und nach der Culmination der Sonne bei gleichem Stande derselben fast identisch sind, während die Wiener Beobachtungen eine bedeutend grössere Strahlung für die Vormittagsstunden ergeben als für die correspondirenden Nachmittagsstunden; dagegen überwiegt in

Luxor die Strahlung der späteren Nachmittagsstunden, etwa von 3^h ab, bedeutend die der entsprechenden Vormittagsstunden. Ferner fehlt in Wien die schon früher erwähnte, in Luxor beobachtete Mittagsdepression, wenngleich eine schwache Andeutung davon vielleicht in der Curve bei den Zenithdistanzen von 38° und 33° zu erkennen ist.

Wir wollen nun die absoluten Grössen der Potentialgefälle mit den Strahlungsintensitäten vergleichen, um daraus ein Urtheil über die Zulässigkeit der photoelektrischen Theorie zu gewinnen. Dazu werden wir die drei, in ihrem Verhalten möglichst differenten Beobachtungsgebiete: Ceylon, Luxor und unsere Breiten in Betracht ziehen, in Bezug auf welch' letztere wir wohl annehmen dürfen, dass an den verschiedenen Beobachtungsorten, Wien, Salzburg, Wolfenbüttel, die Sonnenstrahlung bei gleicher Himmelsbeschaffenheit auch angenähert die gleiche sein wird, so dass die Wiener Strahlungsmessungen für unsere Gebiete schlechtweg im Grossen und Ganzen als massgebend angesehen werden können; es zeigt sich ja auch zwischen den Potentialmessungen in Wien, Salzburg und Wolfenbüttel kein irgend wesentlicher Unterschied.

In Bezug auf die Intensität der directen Sonnenstrahlung müssen wir nun den vorstehenden Messungen zufolge sagen, dass dieselben in Luxor — selbstverständlich bei gleicher Sonnenhöhe — wesentlich grösser ist als in unseren Gegenden; sie beträgt in den Mittagsstunden dort ungefähr das anderthalbfache, in den Nachmittagsstunden das Doppelte von hier, ein Resultat, das eigentlich nicht sehr überraschen kann, wenn man die ausserordentliche Reinheit der Luft in Gebieten mit ausgesprochenem Wüstencharakter bedenkt.

Was Ceylon betrifft, so fehlen, wie schon gesagt wurde, directe Strahlungsmessungen von dorten, allein wer Gelegenheit gehabt hat, den sogenannten klaren Himmel im heissfeuchten Tropenklima mit jenem Oberägyptens zu vergleichen, der wird nach dem blossen Anblick keinen Moment daran zweifeln können, dass die Absorption der Strahlung in ersterem eine viel lebhaftere sein muss als bei letzterem; zum mindesten kann man nach dem directen Anblick schliessen, dass die Strahlung in Ceylon sicherlich nicht grösser ist als die in

Luxor. Diese Vermuthung findet ihre volle Bestätigung durch die vergleichenden Messungen, welche J. Wiesner (l. c.) in Buitenzorg auf Java und in Wien über die Strahlung nach der Bunsen'schen Methode ausgeführt hat. Er sagt darüber u. A.: »Die bisher angenommene grosse, mit der Annäherung an den Äquator eintretende starke Steigerung der Lichtsumme trifft nicht zu« und weiter, dass bei unbedeckter Sonne und Sonnenhöhen zwischen 57° und 64° in Wien und Buitenzorg »fast die gleichen chemischen Lichtintensitäten gefunden wurden«.

Nun muss allerdings bemerkt werden, dass sich die Zahlen Wiesner's auf die Gesammtstrahlung des Himmelsgewölbes beziehen, allein da bei unbedeckter Sonne und höherem Stande derselben diese der directen Strahlung, soweit diesbezügliche Beobachtungen reichen, angenähert proportional geht, so kann obiger Satz auch für letztere allein als giltig angesehen werden. Das ergibt sich denn auch, wenn man aus den Tabellen Wiesner's jene Messungen, die bei völlig unbedeckter Sonne und bei gleichem Stande derselben in Wien und Buitenzorg ausgeführt wurden, mit einander vergleicht; leider sind die Fälle klaren Himmels nicht sehr zahlreich, aber es ergibt sich aus dieser Vergleichung doch unzweifelhaft, dass Buitenzorg Wien nur um ein ganz unerhebliches, wenn überhaupt, überwiegt. Reducirt man dagegen meine Strahlungsmessungen aus Luxor mit Hilfe meiner Messungen in Wien auf dasselbe Maass, in welchem die Wiesner'schen Zahlen angegeben sind, so erhält man schliesslich die folgende Vergleichstabelle, in welcher Z wieder die Zenithdistanz der Sonne bedeutet, als Mittel je einer 5°-Gruppe.

Tabelle VI.

Z	Wien	Buitenzorg	Luxor
27°	1·324	1·428	1·97
32	1·220	1·167	1·67
50	0·969	1·000	1·50

Man sieht daraus, wie bedeutend die Strahlung in Luxor diejenige von Buitenzorg überwiegt, und da wir aus den früher schon angeführten Gründen die letztere mit jener in Ceylon als identisch ansehen können, wenigstens innerhalb jener Grenzen, die für den vorliegenden Zweck überhaupt in Betracht kommen, so sind wir wohl ohne Zweifel zu der Annahme berechtigt, dass die Strahlung in Luxor gewiss nicht kleiner ist als jene in Ceylon, wahrscheinlich aber beträchtlich grösser.

Wir hätten demnach für die drei in Betracht gezogenen Gebiete: einen niedrigen Werth der Strahlung in Wien, einen fast doppelt so hohen in Luxor und einen zwischenliegenden in Ceylon, welch' letzterer aller Wahrscheinlichkeit nach sehr nahe an dem Werthe von Wien liegt.

Wollen wir nun diese Strahlungsverhältnisse mit den Potentialgefällen in den drei betrachteten Gebieten mit Rücksicht auf die photoelektrische Theorie vergleichen, so müssen wir uns zunächst die Frage vorlegen, ob letztere für diese beiden Factoren einen momentanen Zusammenhang fordert oder ob nur die Strahlung während eines längeren Zeitraumes, etwa von Tagen und Wochen, für den Werth des Potentialgefälles massgebend sein soll. Ich glaube, man könnte wohl für beide Annahmen plausible Gründe finden, da mir aber beide den Beobachtungen ganz direct zu widersprechen scheinen, so will ich hier auch weiter nicht auf diesen Unterschied eingehen. Was die erstere Möglichkeit anlangt, dass der photoelektrische Strom sich nahezu momentan ausbildet, so muss ich gestehen, dass ich nach meinen ersten Messungen in Luxor — zwischen den Morgen- und Abendstunden — sehr geneigt war, an die Existenz dieses Stromes zu glauben. Die tiefe Depression des Potentialgefälles zur Mittagszeit und der rasche Anstieg desselben in den Abendstunden machen genau den Eindruck, als wären sie eine Folge der starken Insolation des Bodens. Dass eine derartige Depression z. B. in Ceylon fehlt, hätte allenfalls auf den Unterschied in der Intensität der Strahlung zurückgeführt werden können, allein dass dieser mittäglichen Depression in Luxor eine zweite ebenso deutliche in den Nachtstunden folgt, das ist ein Umstand, der ein Festhalten an der photoelektrischen Natur dieser Depressionen

absolut unmöglich macht. Wenn auch die doppelte tägliche Periode der Luftelektricität meines Wissens sonst an keinem Orte noch mit solcher Regelmässigkeit und Deutlichkeit beobachtet wurde wie in Luxor, so ist sie doch an vielen Orten unzweifelhaft constatirt, und gerade, dass sie eine doppelte Periode ist, widerspricht entschieden der Annahme einer photoelektrischen Ursache derselben. Ich kann demnach im täglichen Gang des Potentialgefälles in Luxor nur einen Widerspruch gegen die photoelektrische Theorie erblicken, wenn man eine momentane Wirkung der Insolation annimmt.

Viel wichtiger scheint es mir aber noch zu sein, nicht den täglichen Gang, sondern die absoluten Werthe der Tagesmittel der Potentialgefälle in den drei betrachteten Gebieten unter einander zu vergleichen, um zu sehen, ob die Strahlung während einer längeren Zeitperiode den von der photoelektrischen Theorie geforderten Einfluss auf das Potentialgefälle hat. Ich greife zu diesem Zwecke aus dem vorhandenen Beobachtungsmateriale von St. Gilgen, respective Wolfenbüttel (Messungen von Elster und Geitel) und von Luxor und Ceylon jene Zeitperioden heraus, die gleicher mittäglicher Sonnenhöhe und damit auch wenigstens angenähert gleicher Temperatur entsprechen, wobei selbstverständlich nur Tage mit normalem Wetter berücksichtigt wurden. Bildet man für jede dieser Gruppen den Mittelwerth des Potentialgefälles, so lässt sich mit Hilfe dessen, was im Vorangehenden über die Strahlungsverhältnisse gesagt wurde, entscheiden, ob wirklich, wie es die photoelektrische Theorie fordert, dem Gebiete mit grösserer Strahlung das kleinere Potentialgefälle zukommt und umgekehrt.

Die folgende Tabelle VII ist wohl ohne Weiteres verständlich; ich ordne sie nach den Werthen des Potentialgefälles $\frac{\partial V}{\partial n}$, indem ich noch des Vergleiches halber mit der Wasserdampftheorie die mittleren Dunstdrucke p und die relativen Intensitäten der directen Sonnenstrahlung J aus Tabelle VI, auf eine Decimale abgekürzt, hinzufüge.

Tabelle VII.

Beobachtungsort	Zahl der Tage	$\frac{\partial V}{\partial n}$ in $\frac{V}{m}$	p in Millimetern	J
Ceylon Jänner—Februar	16	57	20·9	1·4
St. Gilgen Juni—Juli	16	81	14·7	1·3
Wolfenbüttel Juni	10	102	10·4	
Luxor März	20	128	7·2	2·0

Vergleicht man in dieser Tabelle etwa die Werthe von Ceylon mit jenen von Luxor, so sieht man, dass keineswegs dem Gebiete mit grösserer Strahlung das kleinere Potentialgefälle zukommt, sondern umgekehrt; und zwar bewegen sich die Werthe hiebei innerhalb so weiter Grenzen, dass an einen Irrthum oder an zufällige Störungen wohl nicht gedacht werden kann. Dazu kommt noch, dass der Werth von Luxor sehr wahrscheinlich zu klein gefunden wurde wegen der vielfachen Störungen durch Staub, denen man dorten naturgemäss ausgesetzt ist und die bekanntlich das Potentialgefälle immer herabdrücken; diese Störungen fallen aber in Ceylon in Folge des feuchten Klimas vollständig fort, so dass der thatsächliche Unterschied an beiden Orten sicherlich noch grösser ist, als ihn obige Tabelle angibt.

Aber noch andere Umstände wirken im gleichen Sinne zu Ungunsten der photoelektrischen Theorie; so muss man z. B. bedenken, dass der Himmel in Luxor das ganze Jahr über unbedeckt ist, die Insolation somit in all' den weiten Wüstengebieten umher auch während des ganzen Jahres mit der gemessenen Intensität wirkt, dass dagegen in Ceylon nur Jänner und Februar wolkenfrei sind, während der übrigen zehn Monate des Jahres aber bedeckter Himmel vorherrscht, die

Insolation während eines längeren Zeitraumes somit noch wesentlich kleiner sein wird, als durch Tabelle VII, die sich auf klaren Himmel bezieht, angedeutet ist.

Ferner ist zu bemerken, dass für die Grösse des photoelektrischen Stromes nicht nur die Intensität der Bestrahlung, sondern auch die Natur der bestrahlten Fläche massgebend ist; vergleicht man von diesem Gesichtspunkt aus Ceylon mit Luxor, so kommt man wieder zum Schlusse, dass selbst bei beiderseits gleicher Insolation an letzterem Orte die photoelektrische Wirkung die stärkere und somit das Potentialgefälle das kleinere sein müsste. Denn Luxor ist, von dem schmalen Streifen Culturlandes in unmittelbarer Nähe abgesehen, auf ungemessene Weiten hin von trockenem, absolut vegetationslosem Gestein umgeben, in Ceylon dagegen wird kaum einmal ein Sonnenstrahl durch die üppige Vegetation hindurch den Erdboden erreichen; jedenfalls muss man als empfindliche Fläche die Vegetation ansehen, insoweit die Insel selbst in Betracht kommt, und für die weitere Umgebung das Meer. Nun haben aber Elster und Geitel[1] in ihren Untersuchungen über die photoelektrische Wirksamkeit verschiedener Oberflächen nachgewiesen, dass alle nicht metallischen Substanzen zwar von wesentlich geringerer Wirkung sind, dass sich aber eine solche, z. B. an den natürlichen trockenen Gesteinen, dennoch deutlich nachweisen lässt; befeuchtet man dieselben, so lässt die Wirkung bedeutend nach. Dagegen konnte bis jetzt eine photoelektrische Wirkung an frischen Vegetationsgebilden und an Wasser[2] nicht constatirt werden, so dass dieselbe entweder gar nicht existirt oder in ihrer Grösse doch bedeutend hinter jener an Gesteinen zurückbleibt. Daraus ergibt sich aber für unseren Fall, dass, selbst gleiche Strahlung in Ceylon und Luxor vorausgesetzt, die photoelektrische Wirkung an ersterem Orte doch schwächer und damit das Potentialgefälle daselbst grösser sein müsste als in Luxor. Auch meine sechstägigen Messungen im Indischen Ocean, also auf einer Fläche von geringster photoelektrischer

[1] Wied. Ann., Bd. 44 (1891).

[2] So z. B. von Stoletow, Bichat und Blondlot u. A.

Empfindlichkeit, wenn sie überhaupt eine besitzt, haben ein sehr niedriges Potentialgefälle ergeben, nämlich 53 $\frac{V}{m}$ bei einem Dunstdrucke von 20 *mm*, welcher Werth gut mit den Ceyloner Beobachtungen stimmt, aber gar nicht mit der photoelektrischen Theorie, derzufolge derselbe ein höherer sein sollte wie in Luxor.

Noch ein Umstand ist zu erwähnen; zum Zustandekommen eines photoelektrischen Stromes ist es natürlich eine nothwendige Bedingung, dass die bestrahlte Fläche die Elektricität leitet. Man könnte glauben, dass bei der grossen Trockenheit der Luft und bei der starken Insolation in Luxor die Sand- und Gesteinsflächen isoliren, dem ist jedoch nicht so. Ich habe bei allen Beobachtungen im Freien nach der gewöhnlichen Methode und auch beim Anbringen von Erdleitungen die natürliche Bodenfläche stets leitend gefunden. Isolirung zeigten dagegen alle Hölzer und Bretter, auch nicht von der Sonne beschienene, wie z. B. die Fussböden der Zimmer, so dass für die Standbeobachtungen im Hause eine eigene Erdleitung unbedingt nothwendig war, was in unseren Gegenden bekanntlich nicht der Fall ist. Es kann demnach das Ausbleiben der erwarteten photoelektrischen Wirkung meines Erachtens nicht auf mangelhafte Leitung der Bodenfläche geschoben werden.

Noch eine Beobachtung, die sich allerdings nicht auf die Messungen in Luxor, sondern auf ältere bezieht, steht mit den Consequenzen der photoelektrischen Theorie in Widerspruch. Wie schon Elster und Geitel ziffernmässig nachgewiesen haben, wächst die Stärke der Insolation bedeutend mit der Meereshöhe des Beobachtungsortes; es würde daraus folgen, dass z. B. auf einem ausgedehnten Hochplateau der photoelektrische Strom ein grösserer, das Potentialgefälle somit ein kleineres sein muss als in tieferer Lage. Dass diese Wirkung keine kleine wäre, lässt sich aus den Zahlen entnehmen, welche Elster und Geitel für die Intensität der Strahlung in Wolfenbüttel (Seehöhe 80 *m*), Kolm-Saigurn (Seehöhe 1600 *m*) und Sonnblick (Seehöhe 3100 *m*) angeben. Freilich gehören dieselben verschiedenen Tagen an; vergleicht man aber Werthe, die sich auf die gleiche Zenithdistanz der Sonne (28°) beziehen,

so erhält man immerhin ein Bild des Einflusses der Meereshöhe. Diese Zahlen sind, in willkürlichen Einheiten, für Wolfenbüttel 40, Kolm-Saigurn 61 und Sonnblick 90, woraus jedenfalls eine recht beträchtliche Steigerung der Strahlung mit der Höhe des Beobachtungsortes folgt. Ich habe nun vor mehreren Jahren Gelegenheit gehabt, zwei Messungsreihen des Potentialgefälles auf hoch gelegenen Plateaux auszuführen (andere diesen Punkt betreffende Beobachtungen sind mir nicht bekannt), und beide haben das entgegengesetzte Resultat ergeben, nämlich ein grösseres Potentialgefälle oben als unten. Wenn ich auch der ersten Messung, am Mokkatam bei Cairo, wegen der geringen Erhebung und Ausdehnung desselben und namentlich wegen des zeitweise grossen Staubgehaltes der Luft in der Nähe Cairos kein grosses Gewicht beilegen möchte, so ist doch die zweite, wie ich glaube, ganz einwurfsfrei. Sie wurde auf dem Hochplateau von Newara Eliya im Innern Ceylons angestellt, einem Plateau von sehr grosser Erstreckung und circa 2000 *m* Erhebung über dem Meere. Der Mittelwerth des Potentialgefälles aus mehrtägigen Beobachtungen wurde daselbst zu $83\frac{V}{m}$ gefunden, während er am Meeresspiegel nur $57\frac{V}{m}$ betrug, eine Differenz, die bei dem gleichförmigen Gang der Beobachtungen unmöglich auf Störungen oder dgl. beruhen kann.

Aus all' dem Vorstehenden glaube ich den Schluss ziehen zu müssen, dass die bisherigen Beobachtungen über Luftelektricität der Richtigkeit der photoelektrischen Theorie entschieden widersprechen; damit ist natürlich nicht gesagt, dass dieser Effect gar nicht bestehen könne; er mag sich vielleicht in bisher nicht nachweisbarer Weise zu den anderen Ursachen addiren, aber keinesfalls spielt er bei dem betrachteten Phänomen eine hervorragende Rolle. Vergleicht man dagegen die in Tabelle VI gegebenen Werthe der Potentialgefälle mit den zugehörigen Dunstdrucken, so ergibt sich nicht nur eine qualitative, sondern auch eine recht gute quantitative Übereinstimmung mit der Wasserdampftheorie. Dieser zufolge sollte, wie man der in einer meiner früheren Arbeiten[1] gegebenen

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 99 (1890).

Tabelle entnehmen kann, dem in Luxor gefundenen mittleren Dunstdruck von 7·2 *mm* ein Potentialgefälle von circa $150 \frac{V}{m}$ entsprechen. Thatsächlich wurde ein solches von $128 \frac{V}{m}$ im Mittel beobachtet, also etwas zu niedrig, was aber, wie schon erwähnt, aller Wahrscheinlichkeit nach dem störenden Einflusse des Staubes zuzuschreiben ist.

Auch die beiden abnorm feuchten Tage in Luxor, von denen schon Eingangs die Rede war, der 25. und 26. März, zeigen ein mittleres Potentialgefälle, das sich vollkommen der oben erwähnten Tabelle einordnet; am 25. wurde $p = 10·3$ und $\frac{\partial V}{\partial n} = 90 \frac{V}{m}$ gefunden, am 26. $p = 14·0$ und $\frac{\partial V}{\partial n}$ $78 \frac{V}{m}$, statt der nach den bisherigen Messungen diesen Drucken entsprechenden Werthen von $89 \frac{V}{m}$, respective $79 \frac{V}{m}$.[1]

Noch möchte ich darauf aufmerksam machen, dass die auffallende Steigerung der Strahlungsintensität der Sonne bei vermehrter Luftfeuchtigkeit, welche Elster und Geitel in unzweifelhafter Weise für Wolfenbüttel beobachtet haben, eine Erscheinung ist, die nur für ein und denselben Beobachtungsort, und zwar in unseren Breiten gilt, dass der Satz sich aber nicht auf eine Vergleichung verschiedener Klimate anwenden lässt; denn in Luxor zeigt sich die Sonnenstrahlung trotz der im Vergleiche zu Wien verminderten Feuchtigkeit doch bedeutend höher als an letzterem Ort. Es wird dies auch nach der Erklärung, welche Elster und Geitel von dieser Erscheinung geben, verständlich, denn offenbar lassen sich niederschlagsreiche Gebiete mit solchen, wo Niederschläge gänzlich fehlen, überhaupt nicht vergleichen. Ob die erwähnte Beziehung auch innerhalb der Beobachtungen von Luxor sich für diesen Ort bestätigt, lässt sich bei den geringen Variationen des

---

[1] Ich will gleich hier erwähnen, dass aus den in den folgenden Mittheilungen zu erörternden Messungen bei Luftballonfahrten und in Sibirien sich ergibt, dass die Wasserdampftheorie nicht ausreicht, alle Erscheinungen der Luftelektricität zu erklären, sondern dass jedenfalls noch andere Ursachen die Grösse des Potentialgefälles mitbestimmen.

Dunstdruckes daselbst schwer sagen; die einzige diesbezügliche Beobachtung, die den Satz allerdings zu bestätigen scheint, wäre die, dass an dem früher erwähnten abnorm feuchten 26. März die Intensität der Strahlung sich etwas über dem Mittelwerthe hielt.

Es sind in letzter Zeit mehrfach Versuche gemacht worden, die Änderungen der erdmagnetischen Elemente auf das Vorhandensein elektrischer Ströme in der Atmosphäre zurückzuführen, speciell auch auf solche, welche die Erdoberfläche senkrecht durchsetzen. Das Vorhandensein solcher Ströme müsste sich dadurch manifestiren, dass das Linienintegral der magnetischen Kraft längs einer geschlossenen Curve an der Erdoberfläche einen von Null verschiedenen Werth ergibt. Die diesbezüglichen Untersuchungen haben aber bisher zu keinem entscheidenden Resultate geführt, da sie sich gegenseitig zum Theil widersprechen; so erhält z. B. Carlheim-Gyllenskiöld[1] für Schweden, A. W. Rücker[2] für Grossbritannien und Liznar[3] für Österreich ein negatives Resultat, nach Messungen in Holland dagegen soll sich daselbst ein schwacher positiver Strom nach oben ergeben. Auch A. Bauer[4] findet, indem er die ganze Erdoberfläche zwischen 60° n. Br. und 60° s. Br. in den Kreis seiner Betrachtung zieht, ein regelmässig ausgebildetes Stromsystem: zwischen Äquator und 5. Breitengrad einen aufsteigenden (positiven) Strom, zwischen 5° und 40° einen absteigenden und zwischen 40° und 60° wieder einen aufsteigenden, im Mittel aus beiden Hemisphären. (Ob das Netz der Beobachtungsstationen namentlich in den niederen Breiten dicht genug ist, um eine derartige Berechnung mit einiger Sicherheit ausführen zu können, mag vielleicht zweifelhaft erscheinen, anderseits spricht die Regelmässigkeit des gefundenen Stromsystems doch sehr für seine Richtigkeit.) Herr Trabert[5] glaubt nun in diesem Stromsystem eine ganz besondere Stütze für die photoelektrische Theorie erblicken zu

[1] Sv. Vetensk.-Akad., Bd. 27 (1895).

[2] Phil. Mag. (V.), Bd. 41 (1896) und Nature (1897).

[3] Diese Sitzungsberichte, Bd. 107 (1898).

[4] Terrestr. Magn., Bd. 2 (1897).

[5] Zeitschr. für Meteor., Nov. 1898.

müssen, indem nach dieser sich in den niederschlagsarmen und stark bestrahlten Gegenden zwischen 5° und 40° sich ein aufsteigender negativer Strom, in den stark bewölkten und niederschlagsreichen Gebieten dagegen, d. i. am Äquator und in unseren Breiten, sich ein absteigender negativer Strom ausbilden müsste. Es wird dabei angenommen, dass bei der Insolation die negative Ladung der Erdoberfläche in die Luft geht und, in höheren Schichten weitergeführt, in den Niederschlagsgebieten mit dem Niederschlag selbst wieder zur Erde gelangt. Das stimmt denn auch ganz gut mit dem Stromsystem Bauer's, aber was hier die photoelektrische Theorie leistet, das leistet auch, und in noch viel ungezwungenerer Weise, die Wasserdampftheorie. Denn nach dieser entweicht der Wasserdampf negativ elektrisch von der Erde und führt bei seiner Condensation dieser die Ladung wieder zurück; es ist also unmittelbar klar, dass in niederschlagslosen Gebieten nur ein aufsteigender negativer Strom herrschen kann, dass in den niederschlagsreichen Gegenden aber dieser negative Überschuss aus der Luft wieder zur Erde zurückgeführt wird. Während vom Standpunkte der Wasserdampftheorie dieser Vorgang ein selbstverständlicher ist, hat die photoelektrische Theorie noch die Frage zu lösen, warum und wie die negative Ladung von den Lufttheilchen auf den Wasserdampf übergeht. Übrigens möchte ich dieser Übereinstimmung des Bauer'schen Stromsystems mit dem nach unserer Theorie zu erwartenden keine grosse Bedeutung beilegen, vor Allem deshalb nicht, weil sich bisher in quantitativer Beziehung durchaus keine Übereinstimmung erzielen lässt. Es hat schon A. Schuster[1] gelegentlich auf diesen Umstand hingewiesen, und wenn Trabert (l. c.) meint, dass der Einwand Schuster's nicht stichhältig sei, weil er die Luftströme als Convectionsströme ansieht und nicht als elektrolytische, so kann ich dem nicht beistimmen. Eine elektrolytische Leitung der Luft unter gewöhnlichen Umständen — auch bei ultravioletter Bestrahlung — anzunehmen, widerspricht aller Erfahrung, und auch Elster und Geitel haben es bei Aufstellung ihrer photoelektrischen Theorie ganz besonders betont.

[1] Meteorolog. Zeitschr. 1896.

dass dabei von einer elektrolytischen Leitung nicht die Rede sein kann, sondern nur von einer convectiven.

Bezüglich der aus den magnetischen Messungen gefolgerten Luftströme längs der Parallelkreise geht es nicht besser; wie Trabert ausführt, lassen sie sich in quantitativer Beziehung auch nicht näherungsweise erklären.

Auffallend ist beim Bauer'schen Stromsystem die Asymmetrie bezüglich des Äquators: es überwiegen auf der südlichen Halbkugel, verglichen mit der nördlichen, die aufsteigenden positiven Ströme. Will man dieses Stromsystem überhaupt mit den Niederschlagsgebieten in Zusammenhang bringen, so würde diese Vertheilung der Ströme allerdings dem klimatischen Unterschied beider Halbkugeln entsprechen.

Schliesslich will ich noch kurz erörtern, wie sich die Beobachtungen in Luxor zu der seinerzeit von Braun[1] aufgestellten Theorie der Luftelektricität verhalten; Braun nimmt an, dass das Potentialgefälle in erster Linie durch die Temperatur bedingt sei, und zwar, dass es abnehme, wenn letztere steigt und umgekehrt. Vergleicht man aber die Werthe für Ceylon $\left(57 \frac{V}{m}\right)$ und Luxor $\left(128 \frac{V}{m}\right)$, die bei angenähert gleicher Temperatur erhalten wurden — die Temperaturen in Luxor waren zum Theil noch höher als in Ceylon —, so findet man obigen Zusammenhang nicht bestätigt; zum gleichen Resultat kommt man, wenn man aus Tabelle VII die Werthe für St. Gilgen und Luxor in Parallele stellt. Ganz unhaltbar wird die Ansicht Braun's aber, wenn man den Werthen aus Luxor die, bisher noch nicht publicirten, aus Sibirien gegenüberstellt: da ergeben sich nahezu die gleichen Werthe, obwohl die Temperaturen von —40° bis +30° variiren.

[1] Jahresber. d. nat. Ges. zu Bamberg, 1896, und Meteorolog. Zeitschr. 1896.

Über transcendente Functionen, deren sämmtliche Wurzeln transcendente Zahlen sind

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Bekanntlich hat Liouville zuerst die Existenz von Zahlen nachgewiesen, die nicht Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coëfficienten sein können, und G. Cantor sodann dargethan, dass sich in jedem noch so kleinen Intervalle derartige Zahlen befinden. Diesem Resultate — so interessant dasselbe auch ist — wurde lange Zeit nicht die verdiente Beachtung zu Theil, wohl deshalb, weil man es nur als ein bemerkenswerthes Curiosum ansah, das für keine derjenigen Zahlen nachgewiesen war, welche in der Analysis oder deren Anwendungen eine grössere oder geringere Rolle spielen.

Erst als Hermite und Lindemann gezeigt hatten, dass den Zahlen e und π diese Eigenschaft zukommt, dass diese Zahlen also sogenannte transcendente Zahlen sind — was seither wiederholt auf immer einfacheren Wegen von Weierstrass, Gordan, Hilbert, Hurwitz, Mertens u. A. bewiesen wurde —, begann man schon den angehenden Mathematiker mit der Existenz nichtalgebraischer Zahlen bekannt zu machen.

Es dürfte daher nicht uninteressant sein, zu erfahren, dass sich transcendente Functionen, von denen manche vielleicht künftighin in der Physik Verwendung finden werden, in beliebiger Zahl aufstellen lassen, die, wie die Functionen $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x$, $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$ u. s. f., keine algebraischen Wurzeln besitzen. Dies zu zeigen, ist der Zweck dieser kurzen Mittheilung.

I. Ist die Function $f(z)$ innerhalb des reellen Intervalles $a \ldots b$ eindeutig, endlich, stetig und stets gleichbezeichnet, so ist die Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x-z}$$

regulär und es sind die Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ derselben durch die Relationen

$$\int_a^b f(x)\psi_\lambda(x)g_{\lambda-1}(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

in denen $g_{\lambda-1}(x)$ eine beliebige ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $\lambda-1$ ist, bis auf je einen constanten Factor definirt, der sich aus der Beziehung

$$\int_a^b f(x)\psi_\lambda^2(x)\,dx = \frac{1}{\alpha_{\lambda+1}} \tag{2}$$

ergibt, in welcher $\alpha_{\lambda+1}$ der Coëfficient von x im $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Theilnenner der erwähnten Kettenbruchentwicklung ist.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ unter einander verschiedene, nicht innerhalb des Intervalles $a \ldots b$ gelegene Grössen, so lässt sich selbstverständlich auch das Integral

$$\int_a^b \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}f(z)\,dz}{x-z},$$

in welchem $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ ganze positive Zahlen sind, in einen regulären Kettenbruch entwickeln, für dessen Näherungsnenner $\bar{\psi}_\lambda(x)$ aus der Verbindung der Relationen 1) und 2) mit den ihnen analogen

$$\int_a^b (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}f(x)\bar{\psi}_\lambda(x)g_{\lambda-1}(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b (x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}f(x)\bar{\psi}_\lambda^2(x)\,dx = \frac{1}{\bar{\alpha}_{\lambda+1}}$$

sich die folgende Gleichung ermitteln lässt:

$$\bar{\psi}_\lambda(x) = \frac{c_\lambda}{(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\dots(x-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}} \left|\psi_{\lambda+\sigma}^{(\mu_\tau)}(x_\tau)\right|_{(\sigma=0,1,2,\dots,\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_\varkappa=n;\ \tau=0,1,2,\dots,\varkappa;\ \mu_\tau=0,1,2,\dots,\nu_\tau-1;\ x_0=x,\ \mu_0=0)},$$

in welcher die Horizontalreihen in der Weise aufeinanderfolgen sollen, dass alle zu einem τ gehörigen Werthe von μ_τ genommen werden, bevor zu einem grösseren Werthe von τ übergegangen wird. Die Constante c_λ ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$c_\lambda = (-1)^{n-1} \frac{[\bar{\psi}_\lambda(x)]_{x^\lambda}}{[\psi_\lambda(x)]_{x^\lambda} \left|\psi_{\lambda+\sigma}^{(\mu_\tau)}(x_\tau)\right|_{(\sigma=0,1,2,\dots,n-1;\ \tau=1,2,\dots,\varkappa;\ \mu_\tau=0,1,2,\dots,\nu_\tau-1)}}.$$

Setzt man in dieser Formel speciell

$$-a = b = +1;\ f(x) = (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right)$$

und beachtet, dass der λ^{te} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-z^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dz}{x-z}$$

sich von der Function $C_\lambda^\nu(x)$ nur um einen constanten Factor unterscheidet, sowie dass

$$[C_r^\mu(x)]^{(s)} = 2^s \frac{\Pi(\mu+s-1)}{\Pi(\mu-1)} C_{r-s}^{\mu+s}(x)$$

ist, so erhält man für die Näherungsnenner $C_\lambda^\nu(x; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$ der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}(1-z^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dz}{x-z}$$

die Gleichung

$$C_\lambda^\nu(x; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa) =$$

$$= \frac{C_\lambda}{(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}} \left| C_{\lambda+\varrho-\mu_\sigma}^{\nu+\mu_\sigma}(x_\sigma) \right|_{(\varrho=0,1,2,\ldots,n;\; \sigma=0,1,2,\ldots,\varkappa;\; \mu_\sigma=0,1,2,\ldots,\nu_\sigma-1;\; x_0=x;\; \mu_0=0)},$$

wo C_λ eine leicht zu ermittelnde Constante ist, deren Bestimmung für den Zweck, welchen diese Mittheilung verfolgt, überflüssig ist, und daher unterlassen werden mag.

Multiplicirt man diese Gleichung mit $e^{\alpha xi}(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\ldots(x-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx$ und integrirt nach x von -1 bis $+1$, so erhält man für den Coëfficienten $J_\lambda^\nu(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$ der Entwicklung von $e^{\alpha xi}$ nach den Functionen $C_\lambda^\nu(x; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$ die Formel

$$J_\lambda'(\alpha;\, x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa) =$$

$$= \beta_\lambda \alpha^{-\nu} \left| \begin{array}{lllll}
J^{\lambda+\nu}(\alpha) \;, & \frac{\lambda+2\nu}{i(\lambda+1)} J^{\lambda+\nu+1}(\alpha), & -\frac{(\lambda+2\nu)(\lambda+2\nu+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} J^{\lambda+\nu+2}(\alpha), & \ldots, & \frac{(\lambda+2\nu)(\lambda+2\nu+1)\ldots(\lambda+2\nu+n-1)}{i^n(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)} J^{\lambda+\nu+n}(\alpha) \\
C^\nu_\lambda(x_1) \;, & C^\nu_{\lambda+1}(x_1) \;, & C^\nu_{\lambda+2}(x_1) & \ldots\ldots & C^\nu_{\lambda+n}(x_1) \\
C^{\nu+1}_{\lambda-1}(x_1) \;, & C^{\nu+1}_\lambda(x_1) \;, & C^{\nu+1}_{\lambda+1}(x_1) & \ldots\ldots & C^{\nu+1}_{\lambda+n-1}(x_1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda-\nu_1+1}(x_1), & C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda-\nu_1+2}(x_1) \;, & C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda-\nu_1+3}(x_1) & \ldots, & C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda+n-\nu_1+1}(x_1) \\
C^\nu_\lambda(x_2) \;, & C^\nu_{\lambda+1}(x_2) \;, & C^\nu_{\lambda+2}(x_2) & \ldots, & C^\nu_{\lambda+n}(x_2) \\
C^{\nu+1}_{\lambda-1}(x_2) \;, & C^{\nu+1}_\lambda(x_2) \;, & C^{\nu}_{\lambda+1}(x_2) & \ldots, & C^{\nu+1}_{\lambda+n-1}(x_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda-\nu_2+1}(x_2), & C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda-\nu_2+2}(x_2) \;, & C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda-\nu_2+3}(x_3) & \ldots, & C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda+n-\nu_2+1}(x_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
C^\nu_\lambda(x_\varkappa) \;, & C^\nu_{\lambda+1}(x_\varkappa) \;, & C^\nu_{\lambda+2}(x_\varkappa) & \ldots, & C^\nu_{\lambda+n}(x_\varkappa) \\
C^{\nu+1}_{\lambda-1}(x_\varkappa) \;, & C^{\nu+1}_\lambda(x_\varkappa) \;, & C^{\nu+1}_{\lambda+1}(x_\varkappa) & \ldots, & C^{\nu+1}_{\lambda+n-1}(x_\varkappa) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda-\nu_\varkappa+1}(x_\varkappa), & C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda-\nu_\varkappa+2}(x_\varkappa) \;, & C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda-\nu_\varkappa+3}(x_\varkappa) & \ldots, & C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda+n-\nu_\varkappa+1}(x_\varkappa)
\end{array} \right| ,$$

wo β_λ eine leicht zu bestimmende Constante ist.

Es sollen nun einige Sätze über die Wurzeln dieser transcendenten Function abgeleitet werden. Setzt man

$$\begin{vmatrix} \frac{2\nu}{x}, & 1 \; , & 0 \; , & 0, \; 0, \ldots, & 0 \; , & 0 \\ 1 \; , & \frac{2(\nu+1)}{x}, & 1 \; , & 0, \; 0, \ldots, & 0 \; , & 0 \\ 0 \; , & 1 \; , & \frac{2(\nu+2)}{x}, & 1, \; 0, \ldots, & 0 \; , & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \; , & 0 \; , & 0 \; , & 0, \; 0, \ldots, & \frac{2(\nu+n-2)}{x}, & 1 \\ 0 \; , & 0 \; , & 0 \; , & 0, \; 0, \ldots, & 1 \; , & \frac{2(\nu+n-1)}{x} \end{vmatrix},$$

so ist, wie ich in meiner im Jahre 1885 im 92. Bande dieser Sitzungsberichte veröffentlichten Note: »Über ein Theorem des Herrn Charles Hermite« hervorgehoben habe, $\frac{F_{n-1,\nu+1}(x)}{F_{n,\nu}(x)}$ der n^{te} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung des Quotienten $\frac{J^{\nu}(x)}{J^{\nu-1}(x)}$, deren n^{te} Restfunction $\frac{J^{n+\nu-1}(x)}{J^{\nu-1}(x)\,F_{n,\nu}(x)}$ ist. Man hat daher die Beziehung

$$J^{n+\nu}(x) = F_{n,\nu}(x)J^{\nu}(x) - F_{n-1,\nu+1}(x)J^{\nu-1}(x),$$

mit Hilfe deren sich die Gleichung für $J_\lambda^\nu(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$ auf folgende Gestalt bringen lässt.

$$J_\lambda^\nu(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa) =$$

$$= \begin{vmatrix}
F_{\lambda,\nu}(\alpha) & , \dfrac{\lambda+2\nu}{i(\lambda+1)} F_{\lambda+1,\nu}(\alpha), & -\dfrac{(\lambda+2\nu)(\lambda+2\nu+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} F_{\lambda+2,\nu}(\alpha), & \ldots, & \dfrac{(\lambda+2\nu)(\lambda+2\nu+1)\ldots(\lambda+2\nu+n-1)}{i^n(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)} F_{\lambda+n,\nu}(\alpha) \\
C_\lambda^\nu(x_1) & , C_{\lambda+1}^\nu(x_1) & , C_{\lambda+2}^\nu(x_1) & ,\ldots, & C_{\lambda+n}^\nu(x_1) \\
C_{\lambda-1}^{\nu+1}(x_1) & , C_\lambda^{\nu+1}(x_1) & , C_{\lambda+1}^{\nu+1}(x_1) & ,\ldots, & C_{\lambda+n-1}^{\nu+1}(x_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C_{\lambda-\nu_1+1}^{\nu+\nu_1-1}(x_1), & C_{\lambda-\nu_1+2}^{\nu+\nu_1-1}(x_1) & , C_{\lambda-\nu_1+3}^{\nu+\nu_1-1}(x_1) & ,\ldots, & C_{\lambda+n-\nu_1+1}^{\nu+\nu_1-1}(x_1) \\
C_\lambda^\nu(x_2) & , C_{\lambda+1}^\nu(x_2) & , C_{\lambda+2}^\nu(x_2) & ,\ldots, & C_{\lambda+n}^\nu(x_2) \\
C_{\lambda-1}^{\nu+1}(x_2) & , C_\lambda^{\nu+1}(x_2) & , C_{\lambda+1}^{\nu+1}(x_2) & ,\ldots, & C_{\lambda+n-1}^{\nu+1}(x_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C_{\lambda-\nu_2+1}^{\nu+\nu_2-1}(x_2), & C_{\lambda-\nu_2+2}^{\nu+\nu_2-1}(x_2) & , C_{\lambda-\nu_2+3}^{\nu+\nu_2-1}(x_2) & ,\ldots, & C_{\lambda+n-\nu_2+1}^{\nu+\nu_2-1}(x_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C_\lambda^\nu(x_\varkappa) & , C_{\lambda+1}^\nu(x_\varkappa) & , C_{\lambda+2}^\nu(x_\varkappa) & ,\ldots, & C_{\lambda+n}^\nu(x_\varkappa) \\
C_{\lambda-1}^{\nu+1}(x_\varkappa) & , C_\lambda^{\nu+1}(x_\varkappa) & , C_{\lambda+1}^{\nu+1}(x_\varkappa) & ,\ldots, & C_{\lambda+n-1}^{\nu+1}(x_\varkappa) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C_{\lambda-\nu_\varkappa+1}^{\nu+\nu_\varkappa-1}(x_\varkappa), & C_{\lambda-\nu_\varkappa+2}^{\nu+\nu_\varkappa-1}(x_\varkappa) & , C_{\lambda-\nu_\varkappa+3}^{\nu+\nu_\varkappa-1}(x_\varkappa) & ,\ldots, & C_{\lambda+n-\nu_\varkappa+1}^{\nu+\nu_\varkappa-1}(x_\varkappa)
\end{vmatrix} J^\nu(\alpha)\cdot$$

$$
\left|\begin{array}{lllll}
F_{\lambda-1,\nu+1}(\alpha), & \frac{\lambda+2\nu}{i(\lambda+1)} F_{\lambda,\nu+1}(\alpha), & -\frac{(\lambda+2\nu)(\lambda+2\nu+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} F_{\lambda+1,\nu+1}(\alpha), & \ldots, & \frac{(\lambda+2\nu)\ldots(\lambda+2\nu+n-1)}{i^{n}(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} F_{\lambda+n-1,\nu+1}(\alpha) \\
C^{\nu}_{\lambda}(x_1) & , C^{\nu}_{\lambda+1}(x_1) & , C^{\nu}_{\lambda+2}(x_1) & , \ldots, & C^{\nu}_{\lambda+n}(x_1) \\
C^{\nu+1}_{\lambda-1}(x_1) & , C^{\nu+1}_{\lambda}(x_1) & , C^{\nu+1}_{\lambda+1}(x_1) & , \ldots, & C^{\nu+1}_{\lambda+n-1}(x_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda-\nu_1+1}(x_1), & C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda-\nu_1+2}(x_1) & , C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda-\nu_1+3}(x_1) & , \ldots, & C^{\nu+\nu_1-1}_{\lambda+n-\nu_1+1}(x_1) \\
C^{\nu}_{\lambda}(x_2) & , C^{\nu}_{\lambda+1}(x_2) & , C^{\nu}_{\lambda+2}(x_2) & , \ldots, & C^{\nu}_{\lambda+n}(x_2) \\
C^{\nu+1}_{\lambda-1}(x_2) & , C^{\nu+1}_{\lambda}(x_2) & , C^{\nu+1}_{\lambda+1}(x_2) & , \ldots, & C^{\nu+1}_{\lambda+n-1}(x_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda-\nu_2+1}(x_2), & C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda-\nu_2+2}(x_2) & , C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda-\nu_2+3}(x_2) & , \ldots, & C^{\nu+\nu_2-1}_{\lambda+n-\nu_2+1}(x_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C^{\nu}_{\lambda}(x_\varkappa) & , C^{\nu}_{\lambda+1}(x_\varkappa) & , C^{\nu}_{\lambda+2}(x_\varkappa) & , \ldots, & C^{\nu}_{\lambda+n}(x_\varkappa) \\
C^{\nu+1}_{\lambda-1}(x_\varkappa) & , C^{\nu+1}_{\lambda}(x_\varkappa) & , C^{\nu+1}_{\lambda+1}(x_\varkappa) & , \ldots, & C^{\nu+1}_{\lambda+n-1}(x_\varkappa) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda-\nu_\varkappa+1}(x_\varkappa), & C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda-\nu_\varkappa+2}(x_\varkappa) & , C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda-\nu_\varkappa+3}(x_\varkappa) & , \ldots, & C^{\nu+\nu_\varkappa-1}_{\lambda+n-\nu_\varkappa+1}(x_\varkappa)
\end{array}\right| J^{\nu-1}(\alpha)
$$

$$
= R_{\lambda,\nu}(\alpha;\nu;x_1,x_2,\ldots,x_\varkappa;\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\varkappa)J^{\nu}(\alpha) - S_{\lambda-1,\nu+1}(\alpha;\nu;x_1,x_2,\ldots,x_\varkappa;\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varkappa)J^{\nu-1}(\alpha),
$$

wo die unten angehängten Indices sich lediglich auf die in der ersten Horizontalreihe der betreffenden Determinante stehenden Functionen von x beziehen.

Ist nun ξ eine von Null verschiedene Wurzel von $J_\lambda^\nu(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$, so muss einer der folgenden fünf Fälle eintreten:

1. $J^\nu(\xi) = 0$ und gleichzeitig $J^{\nu-1}(\xi) = 0$.

2. $R_{\lambda,\nu}(\xi) = 0$ und gleichzeitig $J^{\nu-1}(\xi) = 0$.

3. $S_{\lambda-1,\nu+1}(\xi; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa) = 0$ und gleichzeitig $J^\nu(\xi) = 0$.

4. $R_{\lambda,\nu}(\xi; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa) = 0$ und gleichzeitig $S_{\lambda-1,\nu+1}(\xi; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa) = 0$.

5. $\dfrac{J^\nu(\xi)}{J^{\nu-1}(\xi)} = \dfrac{S_{\lambda-1,\nu+1}(\xi; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)}{R_{\lambda,\nu}(\xi; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)} = \mathfrak{R}(\xi)$.

Der erste Fall ist wegen der bekannten Relationen

$$J^\nu(x) J^{-\nu+1}(x) + J^{-\nu}(x) J^{\nu-1}(x) = \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi x} \quad (\nu \text{ nicht ganzzahlig})$$

$$J^m(x) Y^{m-1}(x) - J^{\nu-1}(x) Y^m(x) = \frac{1}{x}$$

unmöglich.

Bei geeigneter Wahl von $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ ist auch der vierte Fall auszuschliessen. Die Resultante der Functionen

$$R_{\lambda,\nu}(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

und

$$S_{\lambda-1,\nu+1}(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

ist nämlich eine ganze Function von $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$, welche, wie sofort gezeigt werden soll, nicht identisch gleich Null ist; daher gibt es auch unendlich viele Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$, für welche die genannten zwei Functionen theilerfremd sind. Um die letzte Behauptung zu beweisen, setze man

$$\varkappa = 2;\ x_1 = -x_2 = +1;\ \nu_1 = \nu_2 = n,$$

alsdann wird

$$J_\lambda^\nu(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa) = c\,\alpha^{-n_1+\nu} J^{\nu+n_1+\nu}(\alpha)$$

und demnach stimmen in diesem Falle

$$R_{\lambda,\nu}(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

und

$$S_{\lambda-1,\nu+1}(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

im Wesentlichen mit $F_{n_1+\lambda,\nu}(\alpha)$ und $F_{n_1+\lambda-1,\nu+1}(\alpha)$ überein. Nun ist aber, wie aus den von mir a. a. O. aufgestellten Formeln hervorgeht:[1]

$$\begin{vmatrix} F_{n_1+\lambda-1,\nu+1}(\alpha), & F_{n_1+\lambda-2,\nu+1}(\alpha) \\ F_{n_1+\lambda,\nu}(\alpha), & F_{n_1+\lambda-1,\nu}(\alpha) \end{vmatrix} = 1,$$

und daher sind die eben erwähnten speciellen Functionen $R_{\lambda,\nu}(\alpha)$ und $S_{\lambda-1,\nu+3}(\alpha)$ theilerfremd.

Es seien nun die reelle Grösse ν und die nicht innerhalb der reellen Grenzen $-1 \ldots +1$ gelegenen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ unter einander verschiedene algebraische, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ ganze, positive Zahlen; dann kann weder

$$R_{\lambda,\nu}(\alpha; \nu; x_1, x_2, \ldots, x; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

und

$$S_{\lambda-1,\nu+1}(\alpha; \nu; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

für einen transcendenten Werth des Argumentes verschwinden. Hat man nämlich eine rationale Function einer transcendenten Zahl mit algebraischen Coëfficienten, so kann man diese Coëfficienten rational durch eine algebraische Zahl, unter der alle auftretenden algebraischen Irrationalitäten enthalten sind, ausdrücken. Ersetzt man sodann die letztere Zahl durch ihre sämmtlichen Conjugirten und multiplicirt alle auf diese Weise erhaltenen Ausdrücke mit einander, so entsteht eine rationale

[1] Die Function $F_{n,\nu}(\alpha)$ ist identisch mit der Lommel'schen Function $R^{n,\nu}(\alpha)$ und der von Graf als Schläfli'sche Function eingeführten Function $P_n^{\nu-1}(\alpha)$. Vergl. Lommel, »Zur Theorie der Bessel'schen Functionen«. Math. Annalen, 4. Bd. — J. H. Graf, »Relations entre la fonction Besselienne de 1re espèce et une fraction continue«. Annali di matematica. Serie II (1892), tomo 23. — L. Crelier, »Sur quelques propriétés des fonctions Besselienne, tirées de la theorie des fractions continues«. Ibidem tomo 24 (1895). Die in den beiden letzten Arbeiten aufgestellten Relationen über die Functionen $P_n^{\nu-1}(\alpha)$ sind schon in meiner oben citirten Note enthalten.

Function der transcendenten Zahl mit rationalen Coëfficienten, deren Zähler verschwinden müsste, wenn die ursprüngliche Function der transcendenten Zahl Null wäre, und dies widerspricht dem Begriff der transcendenten Zahl.

Es kann daher auf Grund der unter 2) und 3) aufgeführten Fälle folgendes Theorem ausgesprochen werden:

Sind die reelle Zahl ν und die nicht innerhalb des reellen Intervalles $-1\ldots+1$ gelegenen, unter einander verschiedenen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ algebraische, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ ganze positive Zahlen, so können die Coëfficienten $J_\lambda^\nu(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$ von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}(1-z^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dz}{x-z}$$

mit einer der beiden Bessel'schen Functionen $J^\nu(\alpha)$ und $J^{\nu-1}(\alpha)$ nur algebraische Zahlen als gemeinsame Wurzeln haben.

Nimmt man speciell $\nu=\frac{1}{2}$ und beachtet, dass

$$J^{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x;\; J^{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

ist, so erhält man das specielle Theorem:

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ nicht innerhalb des reellen Intervalles $-1\ldots+1$ gelegene, unter einander verschiedene algebraische Zahlen, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ ganze positive Zahlen, so verschwinden die Coëfficienten

$$J^{\frac{1}{2}}(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}\,dz}{x-z}$$

für kein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$.

Da eine rationale Function einer algebraischen Zahl mit algebraischen Coëfficienten eine algebraische Zahl ist, so erschliesst man aus 2), 3) und 5) das Theorem:

Sind die reelle Zahl ν und die nicht innerhalb des reellen Intervalles $-1\ldots+1$ gelegenen, unter einander verschiedenen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ algebraische, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ ganze positive Zahlen und so beschaffen, dass die zwei Functionen

$$R_{\lambda,\nu}(\alpha;\, \nu;\, x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa),$$
$$S_{\lambda-1,\nu+1}(\alpha;\, \nu;\, x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa)$$

keine gemeinsame endliche Wurzel haben und der Quotient der zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Bessel'schen Functionen $J^{\nu-1}(\alpha)$, $J^{\nu}(\alpha)$ für keinen endlichen algebraischen Werth des Argumentes algebraisch oder unendlich wird, so hat der λ^{te} Coëfficient der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-x_1)^{\nu_1}(z-x_2)^{\nu_2}\ldots(z-x_\varkappa)^{\nu_\varkappa}(1-z^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dz}{x-z}$$

abgesehen von einer etwaigen Wurzel 0 nur transcendente Zahlen als Wurzeln.

Für $\nu = \frac{1}{2}$ erhält man den speciellen Satz:

Sind die nicht innerhalb des Intervalles $-1\ldots+1$ gelegenen, unter einander verschiedenen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ algebraische, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa$ ganze, positive Zahlen und so beschaffen, dass die Functionen

$$R_{\lambda,\frac{1}{2}}\left(\alpha;\, \frac{1}{2};\, x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa\right),$$
$$S_{\lambda-1,\frac{3}{2}}\left(\alpha;\, \frac{1}{2};\, x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varkappa\right)$$

keine gemeinschaftliche endliche Wurzel besitzen, so hat der λ^{te} Coëfficient $J_\lambda^{\frac{1}{2}}(\alpha;\, x_1, x_2, \ldots, x_\nu;\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\nu)$ der Entwicklung

von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-x_1)^{\gamma_1}(z-x_2)^{\gamma_2}\dots(z-x_\varkappa)^{\gamma_\varkappa}\,dz}{x-z}$$

abgesehen von der Null nur transcendente Zahlen zu Wurzeln.

Als specielle Fälle der abgeleiteten Theoreme erhält man leicht über die Wurzeln der Bessel'schen Functionen im Allgemeinen und von solchen, deren Indices ungerade Vielfache von $^1/_2$ sind, Sätze, welche ich und Porter[1] ausgesprochen haben.

---

[1] »On the Roots of the Hypergeometric and Bessels Functions«. American Journal of Mathematics, Vol. XX.

Beiträge zur Kenntniss der atmosphärischen Elektricität. IV.

Über eine während der totalen Sonnenfinsterniss vom 22. Jänner 1898 ausgeführte Messung der atmosphärischen Elektricität

von

Dr. Rud. Ludwig.

(Mit 1 Tafel.)

Schon Elster und Geitel (Meteorologische Zeitschrift Januar 1888) haben auf die Wichtigkeit hingewiesen, welche eine Messung der atmosphärischen Elektricität, ausgeführt während der Totalität einer Sonnenfinsterniss, haben könne; sie selbst stellten derartige Beobachtungen am 19. August 1887 an, nur waren die damaligen Witterungsverhältnisse ziemlich ungünstige, indem der Himmel gänzlich bedeckt war und die Luft bei einer Temperatur von 10·2° C. 92% relative Feuchtigkeit aufwies.

Über Anregung des Herrn Prof. F. Exner und durch seine gütige Unterstützung, sowie durch das Zusammentreffen mehrerer günstiger Umstände war es mir möglich, in Indien am 22. Jänner 1898 oberwähnte Messungen auszuführen.

Der Ort der Messungen war Jeur in der Bombay Presidency, bereits auf dem Tafellande von Deccan in einer ungefähren Höhe von 600—700 *m* gelegen; zur näheren Orientirung führe ich noch an, dass Jeur circa unter 75° 15′ östlicher Länge und 18° 9′ nördlicher Breite gelegen ist.

Der benützte Apparat war das von Prof. F. Exner (vergl. diese Sitzungsberichte, II. Abth., Mai-Heft 1887) angegebene transportable Elektroskop. Als Aufsaugevorrichtung benützte

ich eine Kerzenelektrode, deren Entfernung vom Boden circa 3·60 *m* betrug, welche aber leider bei der langen Dauer der Eklipse ein öfteres Erneuern der Kerze erforderte.

Weiter muss ich noch erwähnen, dass in Folge einiger unerwarteter Hindernisse mir es erst möglich war, kurz nach Beginn der Eklipse in Jeur einzutreffen, so dass mir keine Zeit blieb zur Wahl eines besseren Aufstellungsplatzes, sowie zur stabileren Montirung meiner Instrumente. Mein Beobachtungsplatz war die Mitte eines Feldes, dessen 40—50 *m* weit entfernter Rand allerdings mit mässig hohen Bäumen bewachsen war. Bezüglich der Witterung ist zu bemerken, dass der Himmel vollkommen wolkenlos war und dass in jenen Gegenden dem betreffenden Tage eine Periode besonderer Trockenheit vorangegangen war, wodurch der ganze Boden ein mehr oder minder sandiges Gepräge erhalten hatte. Noch zu erwähnen ist, dass hie und da leichte Luftströmungen sich bemerkbar machten.

In der folgenden Tabelle sind die Potentialgefälle in Volt auf Meter reducirt angegeben.

Bombay-Zeit	Divergenz der Aluminiumblättchen	Potentialdifferenz in Volt pro Meter	Bemerkungen
$11^h\ 32^m\ 30^s$	12·5	165·7	
34	10	135	
35 35	10·5	140	
36 22	10	135	
38 5	12	159	
38 42	12	159	Schwacher Wind.
39 18	12	159	
46 30	8·5	120	Auswechseln der Kerze.
47 9	8·5	120	
48 12	7·5	110	
49 9	8·5	120	
50 14	8·5	120	
52 37	8	115	
53 45	8	115	
54 46	8·5	120	
56 15	8·5	120	
57 25	10	135	
58 39	9·5	130	

Bombay-Zeit	Divergenz der Aluminium-blättchen	Potential-differenz in Volt pro Meter	Bemerkungen
11h 59m 17s	14	148·4	Schwacher Wind.
12 — 12	12	159	
1 —	11·5	154	
2 —	10	135	
2 35	9·5	130	
4 47	8·5	120	
5 20	9	125	
6 —	9	125	
7 20	9	125	
8 58	8·5	120	
9 58	10	135	
12 —	9	125	
14 5	8	115	
15 45	10·5	140	
17 7	10	135	
18 25	10	135	
19 10	10	135	
20 12	14	183·8	Ganz windstill.
21 10	12	159	Kerze ausgewechselt.
25 2	8·5	120	
25 50	8	115	
27 55	6·75	102·5	
28 45	8	115	
29 36	9	125	
30 27	8·5	120	
31 26	8	115	
32 30	8·5	120	
33 20	9	125	Windstill.
34 35	8·5	120	
37 35	9	125	
38 50	10	135	
40 32	11	148·4	Windstill.
42 7	7·5	110	
43 —	9	125	Windstill.
43 25	10	135	
44 20	7	105	
46 —	9	125	
46 40	8·5	120	
47 10	8	115	Beginn der Totalität.
47 25	9	125	Totalität.

Bombay-Zeit	Divergenz der Aluminium-blättchen	Potential-differenz in Volt pro Meter	Bemerkungen
12h 47m 40s	8	115	Totalität.
48 —	7	105	
48 15	6·5	100	
48 30	6	93·75	
48 45	6·5	100	
49 —	6	93·75	
49 15	7	105	Ende der Totalität.
49 25	7·5	110	
49 45	6·5	100	
49 55	5	84·2	
50 5	5	84·2	
50 20	6·5	100	
50 32	7	105	
50 45	7·5	110	
51 —	7	105	
51 20	8·5	120	
51 30	7·5	110	
51 44	6	93·75	Auswechseln der Kerze.
52 5	5	84·2	
52 28	5	84·2	
53 —	6	93·75	
56 35	5	84·2	
57 —	4	73·75	
57 35	6	93·75	
57 55	7·5	110	
58 12	8	115	
58 42	6	93·75	Windstill.
59 15	3	61·25	
59 35	4·5	80	
1h — —	4·5	80	
0 22	5	84·2	
— 47	4·5	80	
1 16	5·5	88·34	
2 2	5·5	88·34	
2 40	5·5	88·34	Auswechseln der Kerze.
5 35	7	105	
6 7	8	115	
7 6	6	93·75	Wind.
8 16	6	93·75	Auswechseln der Kerze.
11 26	4	73·75	

Bombay-Zeit	Divergenz der Aluminium-blättchen	Potential-differenz in Volt pro Meter	Bemerkungen
1h 13m 3s	7·5	110	Auswechseln der Kerze.
17 32	3·5	67·5	
17 53	4	73·75	Wind.
18 36	7	105	
19 25	7	105	
20 43	7	105	
21 17	8	115	
22 8	9·5	130	
22 47	8·5	120	
23 37	7·5	110	
25 24	7	105	
26 5	6	93·75	
26 58	8	115	
27 37	8	115	
30 9	7·5	110	
31 —	8	115	
31 35	8	115	
32 26	8	115	
38 14	7	105	Auswechseln der Kerze.
38 56	9	125	
39 53	9	125	
40 50	11·5	154	
43 16	9	125	
44 45			

Die oben angeführten Ablesungen weisen zahlreiche Sprünge auf, die theilweise auf die schon eingangs erwähnten leichten Brisen, theilweise auch darauf zurückgeführt werden können, dass ich gezwungen war, während der circa $2^h 10^m$ dauernden Beobachtung die Kerze der Flammenelektrode auszuwechseln, wobei auf dem scholligen Felde es unmöglich war, genau dieselben Höhen einzuhalten. Weiters verbog sich auch etwas der Ebonitstab in Folge der hohen Temperatur, und endlich mag es der Fall sein, dass, durch die lange Dauer ermüdet, ich meinen Arm mit Stock und Elektrode nicht mehr ganz gestreckt und senkrecht über meinem Kopf zu halten vermochte.

Zur besseren Veranschaulichung füge ich noch die Tabelle und das Diagramm bei, welches die 10^m-Mittel darstellt, sowie meine Temperaturablesungen und Bestimmungen der absoluten Feuchtigkeit.

Bombay-Zeit	Potentialdifferenz in Volt pro Meter		Bombay-Zeit	Temperatur in C°	Hygrometer von Lambrecht	Absolute Feuchtigkeit p in Millim.
$11^h\ 30^m$						
	150·4					
40						
	117·5					
50						
	125·4					
12 0			$12^h\ 0^m\ 0^s$	27°	33½%	8·7
	132·8					
10			12 12	25¾°	33%	8·0
	130·8					
20						
	131·5					
30			$12^h\ 37^m\ 30^s$	24½°	34%	8·0
	123	Totalität				
40						
	108·2					
50			$12^h\ 52^m\ 30^s$	23°	37%	7·7
	94·1					
1 0						
	93·0					
10			$1^h\ 1^m\ 15^s$	23¼°	40%	8·6
	89·2					
20			1 7	22½°	41%	8·3
	112·1					
30						
	115·7					
40			$1^h\ 44^m\ 45^s$	24½°	41½%	9·0

Bezugnehmend auf den Barometerstand vom 22./I. 1898 in jenen Gegenden, citire ich Eliot (Nature, vol. 57, p. 366):

»Die Curve des Barographen am 22. war fast identisch mit jener am 21. und 23., und der Einfluss der Sonnenfinsterniss auf den Luftdruckgang war entweder Null oder ungemein klein und würde eine sorgfältige Untersuchung des Curvenzuges erfordern.«

Zum Vergleiche mit meinen Angaben der Temperatur und absoluten Feuchtigkeit citire ich aus dem »Indian Daily Weather Report« die entsprechenden Angaben für Poona, das dem Beobachtungsorte am nächsten gelegen ist, und zwar

22./I. 1898. 8^h a. m. 57·2 F, 38%, das ist 14° C., 4·5 $mm = p$,
23./I. 1898. 8^h a. m. 56·6 F, 42%, das ist 13·5° C., 4·8 $mm = p$,

dessgleichen die Messungen des Capt. Hills in Pulgaon (Süd-Indien) aus den Proc. Roy. Soc. Aug. 1898

22. I. 1898	9h a. m.		12h		3h p. m.		
	trocken	nass	trocken	nass	trocken	nass	
	69	59	90	73	88	71	*F*°
das entspricht . . .	20·6	15·0	32·6	22·7	31·2	21·2	*C*°
und bedeutet absolute Feuchtigkeit	$p = 9 \cdot 3$ *mm*		14·4 *mm*		12·6 *mm*		
oder relative Feuchtigkeit	51%		39%		37%		

Hiezu noch folgende Angaben von Capt. Hills:

22. I. 1898		*F*°	*C*°	*F*°	*C*°	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit %
		trocken		nass			
	12h21m	90°	32·6°	73°	22·7°	14·4 *mm*	39
	36	87	30·6	70	21·2	13·1	41
	51	85	29·6	69	20·6	12·5	40
	1 6	83	28·4	67	19·4	11·2	39
Beginn der Totalität	21	80	26·8	66	18·8	11·2	43
Ende der Totalität	23	79	26·2	66	18·8	11·6	46
	31	78	25·6	66	18·8	12·0	49
	46	78	25·6	67	19·4	13·0	53
	2 1	82	27·8	67	19·4	11·7	42
	16	85	29·6	68	20·0	11·5	37
	31	86	30·0	69	20·6	12·3	39

Aus dem Vergleiche dieser Angaben geht hervor, dass der von mir gefundene geringe Feuchtigkeitsgehalt der Luft für jene Gegenden zu dieser Jahreszeit eigenthümlich ist.[1]

[1] So wurde z. B. am 22. I. 1898 in den naheliegenden Stationen Kurnool und Bellari der Dunstdruck zu 8·2, respective 7·6 *mm* bestimmt und am 23. I. zu 10·7 und 8·8 *mm*.

Naheliegend ist es, meine Angaben des Potentialgefälles mit jenen zu vergleichen, welche Herr Prof. F. Exner (diese Sitzungsberichte, Bd. 99, Abth. II, 1890) für Bombay gefunden hat.

Bombay:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 64\frac{V}{m} \text{ Tagesmittel}$$

$$p = 18 \cdot 2\, mm$$

$$t = 26° \text{ C.}$$

Jeur:

Mittel des $\frac{\partial V}{\partial n}$ vor der Sonnenfinsterniss $= 131 \frac{V}{m}$

Mittel der absoluten Feuchtigkeit $p = 8 \cdot 3\, mm$

Mittlere Temperatur $t = 18 \cdot 2°$ C.

Hiezu ist zu bemerken, dass der aus allen früheren Beobachtungen gerechnete Werth (diese Sitzungsberichte, Bd. 98 und 99, 1889 und 1890) für die angegebene absolute Feuchtigkeit $134 \frac{V}{m}$ beträgt, was mit dem beobachteten Werthe $181 \frac{V}{m}$ sehr gut übereinstimmt; mag diese nahe Übereinstimmung auch vielleicht einem Zufalle zuzuschreiben sein, so lehrt die Beobachtung doch, dass an zwei so nahe aneinander gelegenen Orten wie Bombay und Jeur trotz der Ähnlichkeit des Klimas die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial n}$ sehr verschieden sein können, und dass diese Verschiedenheit in dem grossen Unterschied in der absoluten Feuchtigkeit seinen Grund hat, wird kaum bezweifelt werden können.

Obiger Vergleich lehrt auch, dass $\frac{\partial V}{\partial n}$ durchaus nicht primär von der Temperatur abhängt, wie dies Braun (XVII. Jahrbericht der Naturforsch. Gesellschaft in Bamberg) behauptet.

Bezüglich der photo-elektrischen Theorie von Elster und Geitel (diese Sitzungsberichte, Bd. 101, 1892) ist zu bemerken, dass bei der bedeutenden Höhendifferenz von Bombay und

Jeur in Folge stärkerer Insolation $\frac{\partial V}{\partial n}$ in Jeur geringer sein müsste als in Bombay; thatsächlich ist gerade das Umgekehrte der Fall.

Noch sei mir gestattet, auf den Umstand hinzuweisen, dass nach den Annahmen der photo-elektrischen Theorie von Elster und Geitel und endlich auch nach der Ansicht Arhenius' $\frac{\partial V}{\partial n}$ während einer Sonnenfinsterniss zunehmen müsste; wie jedoch meine Beobachtungen zeigen, hat $\frac{\partial V}{\partial n}$ während der Eklipse ganz entschieden abgenommen, wie einen ähnlichen Gang die diesbezüglichen Messungen von Elster und Geitel am 19. August 1887 ja ebenfalls aufweisen.



Volt pro Meter

200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50

Bombay-Zeit: 11^{h} 30'

20'
30'
40'
50'

Autor

Lith Anst v Th Bannwarth Wien

IX. SITZUNG VOM 16. MÄRZ 1899.

Die Leitung des Wiener Flugtechnischen Vereines dankt für die Herrn Hugo Ludwig Nikel bewilligte Subvention zur Fortsetzung der Versuche mit grossen Registrirdrachen.

Die Direction des königl. Sächsischen Meteorologischen Institutes in Leipzig spricht den Dank für die bewilligte Überlassung mehrerer akademischer Publicationen aus.

Der prov. Secretär legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Heinrich Gottlieb in Lemberg vor, welche den Titel führt: »Zur Ätiologie der Schwere und des Lebens«.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. E. v. Mojsisovics legt den von dem Mitgliede der südarabischen Expedition, Herrn Dr. Franz Kossmat (de dato Hanlâf bei Tamarida, Sokotra, 15. Februar 1899), eingelangten vorläufigen Bericht über die geologischen Untersuchungen in Sokotra, Abd al-Kuri und Semha vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ludwig Boltzmann legt eine Voranzeige einer von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Mache durchgeführten Arbeit: »Über eine Modification der van der Waals'schen Zustandsgleichung« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. G. Jäger in Wien, betitelt: »Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium: »Zur Kenntniss des Nitrovanillins«, von W. Vogl.

Das w. M. Herr Obersanitätsrath Prof. A. Weichselbaum legt eine Arbeit aus dem pathologisch-anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien vor, welche den Titel führt: Über Gangrène foudroyante«, von Dr. Fritz Hitschmann und Dr. Otto Th. Lindenthal.

Das w. M. Herr Director E. Weiss bespricht die Kometenentdeckung, welche, soweit man dies aus dem etwas unklar gehaltenen Entdeckungstelegramm entnehmen kann, Lewis Swift in den ersten Abendstunden des 3. März gelungen ist.

Se. Hochwürden P. Franz Schwab, Director der Stiftssternwarte zu Kremsmünster, übersendet einen Bericht über die seismographischen Beobachtungen in den Monaten Jänner und Februar d. J.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Lukas Franz Karl: Über Hilfsmittel und deren Anwendung bei statistischen und versicherungstechnischen Untersuchungen. Wien, 1899; 8°.

Jahr E.: Die Urkraft, oder Gravitation, Licht, Wärme, Elektricität, chemische Kraft etc. sind secundäre Erscheinungen derselben Urkraft der Welt. Berlin, 1898; 8°.

Petersen G. J.: Über die Harmonie im Weltenraum. Bändchen I. Gleiswitz, 1899; 8°.

Grecescu D., Dr.: Conspectul Florei Romaniei, Bucuresti, 1898; 8°.

Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die innere Reibung der Gase

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger.**

Die kinetische Gastheorie berechnet die innere Reibung eines Gases auf die Weise, dass sie die Zahl der Molekeln aufsucht, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit einer Ebene passiren, welche senkrecht auf dem Geschwindigkeitsgefälle des Gases steht. Die in der einen Richtung die Ebene passirenden Molekeln tragen dann durch die Flächeneinheit mehr Bewegungsgrösse hindurch, als die in der entgegengesetzten Richtung passirenden, und der Überschuss der hindurchgetragenen Bewegungsgrösse ist gegeben durch

$$\Gamma = k\rho c\lambda \frac{\partial u}{\partial z},$$

wobei ρ die Dichte, c die mittlere Geschwindigkeit, λ die mittlere Weglänge der Gasmolekeln, $\frac{\partial u}{\partial z}$ das Geschwindigkeitsgefälle und k einen Zahlenfactor bedeutet. Wir nennen dann die Grösse

$$\eta = k\rho c\lambda$$

den Reibungscoëfficienten des Gases. Diese Formel gilt eigentlich nur für ideale Gase und sie verliert ihre Bedeutung, wenn wir das Molecularvolumen gegenüber dem Gesammtvolumen des Gases nicht mehr vernachlässigen können. Da man den Druck eines Gases als die gesammte Bewegungsgrösse definiren kann, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit eines Gases von den hindurchfliegenden Molekeln getragen wird, so

muss die innere Reibung bezüglich dieses Gesichtspunktes ebenso vom Molecularvolumen abhängen, wie der Druck des Gases. Wenn wir demnach, wie ich gezeigt habe,[1] die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens derart corrigiren können, dass

$$pv = RT\left(1+\frac{4b}{v}+\frac{10b^2}{v^2}+\ldots\right)$$

wird, so können wir ganz analog auch für den Reibungscoëfficienten schreiben

$$\eta = k\rho c\lambda\left(1+\frac{4b}{v}+\frac{10b^2}{v^2}+\ldots\right), \tag{1}$$

wobei wir unter b das Molecularvolumen verstehen. Nun ist aber auch die mittlere Weglänge λ eine Function des Molecularvolumens, und ich habe in der Abhandlung »Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmolekeln«[2] gezeigt, dass

$$\lambda = \frac{1}{N\pi s^2\left(1+\frac{5b}{2v}+\ldots\right)}\,\frac{c}{r} = \frac{\lambda_0}{1+\frac{5b}{2v}}$$

ist, wenn N die Zahl der Molekeln in der Volumseinheit, s den Durchmesser einer Molekel und $\frac{c}{r}$ das Verhältniss der mittleren absoluten zur mittleren relativen Geschwindigkeit der Molekeln bedeuten und

$$\lambda_0 = \frac{c}{N\pi s^2 r}$$

ist. Dadurch ergibt sich für den Reibungscoëfficienten

$$\eta = k\rho c\lambda_0\,\frac{1+\frac{4b}{v}}{1+\frac{5b}{2v}}.$$

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 105, Abth. IIa, 1896, S. 15—21.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 105, Abth. IIa, 1896, S. 97—111.

Bedenken wir, dass $\rho = Nm$ die Dichte des Gases ist, und führen wir diesen Werth nebst dem obigen für λ_0 ein, so wird

$$\eta = k_1 \frac{mc}{\pi s^2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{b}{v}\right) = \eta_0\left(1 + \frac{3}{2}\frac{b}{v}\right). \tag{2}$$

η_0 ist dann der Coëfficient der inneren Reibung des verdünnten Gases. Diese Gleichung gilt nur für eine mässige Dichte des Gases, da wir ja auch die corrigirten Formeln für den Druck und die mittlere Weglänge nur für mässige Dichten abgeleitet haben. Wie man sieht, wächst das Product aus Druck und Volumen mit abnehmendem Volumen rascher als die innere Reibung.

In der bereits citirten Abhandlung »Die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens« habe ich auch weiter angeführt, dass das Correctionsglied für den Druck gegeben ist durch

$$\frac{2\pi m n^2 s^3 c^2}{9v^2}\left(1 + \frac{5}{2}\frac{b}{v}\right) = \frac{4bRT}{v}A,$$

wobei $A = 1 + \frac{5}{2}\frac{b}{v}$ zu setzen ist. Dieses Correctionsglied gilt aber für jede beliebige Dichte, nur wird dann A eine unendliche Reihe, welche nach wachsenden Potenzen von $\frac{b}{v}$ fortschreitet. Sonach erhalten wir weiter

$$pv = RT\left(1 + \frac{4b}{v}A\right),$$

während sich für die mittlere Weglänge

$$\lambda = \frac{1}{N\pi s^2 A}\frac{c}{r}$$

ergibt. Daraus resultirt für die innere Reibung

$$\eta = \frac{k\rho c}{N\pi s^2}\frac{c}{r}\left(\frac{1}{A} + \frac{4b}{v}\right) = \eta_0\left(\frac{1}{A} + \frac{4b}{v}\right).$$

Wir erhalten somit das interessante Resultat, dass bei hohen Drucken die Reibung proportional der Dichte ist und sich mit wachsendem Druck dem Grenzwerth $4\eta_0$ nähert.

Wir haben bisher die Kräfte, welche die Molekeln auf einander ausüben, vernachlässigt; aber wir können auch diese näherungsweise bei einer mässigen Dichte des Gases mit in Rechnung ziehen, wenn wir, wie es ja thatsächlich von verschiedenen Seiten schon geschehen ist, die Hypothese aufstellen, dass die Abweichung, welche in der Van der Waals'schen Zustandsgleichung durch die Grösse $\frac{a}{v^2}$ gegeben wird, durch Association der Molekeln zu erklären ist. Nach Gleichung 2) ist η_0 eine constante Grösse; dies gilt jedoch nicht mehr, sobald der Durchmesser einer Molekel s einen anderen Werth annimmt, wie es bei Associationen ja thatsächlich der Fall ist. Wir setzen nun voraus, dass die Zahl der associirten Molekeln gegenüber der Gesammtzahl klein sei; es wird dann der Einfluss der associirten Molekeln auf die innere Reibung ein Correctionsglied ergeben, welches proportional der Zahl n_2 der associirten Molekeln ist. Wir haben demnach die Gleichung 2) umzuwandeln in

$$\eta = k_1 \frac{mc}{\pi s^2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{b}{v}\right)(1 + k_2 n_2),$$

wobei k_2 sowohl eine positive, als eine negative Zahl sein kann, da der Einfluss, welchen eine Doppelmolekel auf die innere Reibung hat, je nach deren mittlerem Durchmesser s' ein verschiedener ist.

Es sei die Zahl der Molekeln, welche im Gase bei unendlicher Verdünnung vorhanden ist, n_0; es gilt dann die Gleichung

$$p(v-4b) = \frac{n_0 m \overline{c^2}}{3} = RT;$$

entstehen nun beim Comprimiren Associationen, so dass die Zahl der Molekeln bei einem bestimmten Druck durch n gegeben ist, so ist jetzt analog

$$p(v-4b) = \frac{n m \overline{c^2}}{3} = \frac{n}{n_0} RT.$$

Nach dem Obigen ist

$$n = n_1 + n_2,$$

wenn wir unter n_1 die Zahl der freien Molekeln verstehen, und

$$n_0 = n_1 + 2n_2.$$

Es wird somit

$$p(v-4b) = \frac{n_0 - n_2}{n_0} RT.$$

Daraus folgt, dass

$$n_2 = n_0 \left[1 - \frac{p(v-4b)}{RT}\right] = n_0 \frac{a}{vRT},$$

wenn wir p aus der Van der Waals'schen Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-4b) = RT$$

suchen und die Grösse $\frac{4b}{v}$ gegen 1 vernachlässigen, indem diese in dem Endresultat ein Glied höherer Ordnung ergeben würde, als die noch in Betracht gezogenen. Danach wird Gleichung 3)

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{3}{2}\frac{b}{v}\right)\left(1 + \frac{\varkappa}{v}\right),$$

wenn wir unter $\varkappa$ die Grösse $\frac{k_2 n_0 a}{RT}$ verstehen, so dass wir schliesslich für den Reibungscoëfficienten die Formel

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{\frac{3b}{2} + \varkappa}{v}\right)$$

erhalten. Wäre somit angenähert $\varkappa = -\frac{3b}{2}$, so würde der Einfluss des Druckes auf die innere Reibung bei mässigen Dichten völlig verschwinden, indem dann erst die Glieder mit höheren Potenzen von $\frac{b}{v}$ in Betracht kämen, wie es ähnlich

Warburg und Babo[1] für das Verhalten der Kohlensäure gefunden haben. Auch fanden diese Beobachter, dass die innere Reibung in einfacherer Beziehung zur Dichte, als zum Druck des Gases steht, indem bei den Temperaturen 32°6 und 40°3 die Werthe von η für Kohlensäure bei gleichen Dichten wenig von einander abweichen, während die entsprechenden Drucke sehr verschieden sind.

Bei der Theorie der inneren Reibung verdünnter Gase nimmt man gewöhnlich an, dass die Geschwindigkeit parallel zur Strömungsrichtung des Gases, welche eine Molekel besitzt, im Mittel der sichtbaren Geschwindigkeit des Gases an der Stelle entspricht, wo der Zusammenstoss der Molekel stattfindet. Dieses Mittel wollen wir weiterhin die Durchschnittsgeschwindigkeit der Molekeln nennen. Sobald wir aber der Molekel eine Ausdehnung geben, bleibt es fraglich, ob wir den Mittelpunkt der Molekel oder den gemeinschaftlichen Berührungspunkt beim Stoss als jenen Ort im Gase annehmen müssen, dessen sichtbare Geschwindigkeit der Durchschnittsgeschwindigkeit der Molekel gleichzusetzen ist. Wohl stimmt dies für die Durchschnittsgeschwindigkeit sämmtlicher Molekeln, welche von einem bestimmten Punkt des Gases ausfliegen; es dürfte aber nicht mehr richtig sein, wenn man nur diejenigen Molekeln in Betracht zieht, welche von diesem Punkte aus nach einer bestimmten Richtung ausfliegen. Hätte nämlich eine Molekel als Durchschnittsgeschwindigkeit die sichtbare Geschwindigkeit jenes Punktes, von dem sie ausfliegt, so würde dies voraussetzen, dass der letzte Stoss, den sie empfangen hat, mit einer Wahrscheinlichkeit erfolgt ist, der für alle Richtungen, aus welchen die stossende Molekel gekommen sein kann, die gleiche ist. Dies ist aber thatsächlich nicht der Fall, wie aus folgender Überlegung leicht zu ersehen ist. Wollen wir nämlich die Wahrscheinlichkeit wissen, mit welcher die stossenden Molekeln aus einer bestimmten Richtung kommen, so können wir sie auf die Art finden, dass wir das Problem einfach umkehren und nach der Wahrscheinlichkeit fragen, mit welcher eine Molekel von gegebener Geschwindigkeit auf

[1] Wied. Ann., Bd. 17, S. 390, 1882.

eine zweite von ebenfalls gegebener Richtung und Geschwindigkeit stösst. Der Einfachheit der Rechnung halber wollen wir voraussetzen, alle Molekeln hätten dieselbe Geschwindigkeit c. Die Zahl der Zusammenstösse, welche eine Molekel mit anderen macht, deren Richtung mit der Richtung der ersten Molekel den Winkel ϑ einschliesst, ist

$$dZ = \frac{1}{2}\pi s^2 r N \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

wenn s den Durchmesser einer Molekel, r die relative Geschwindigkeit bedeutet, welche die Molekeln gegeneinander haben, und N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit ist. Wir haben sonach

$$r = c\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}.$$

Die Molekeln legen im Durchschnitt von einem bestimmten Stoss zum nächsten die mittlere Weglänge λ zurück. Die Richtung der stossenden Molekel wollen wir uns vorläufig nach abwärts gehend denken. Eine Ebene senkrecht dazu durch den Stosspunkt sei die XY-Ebene eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, bezüglich deren wir die negative Z-Coordinate einer Molekel ihre Tiefe nennen. Die vorhergehenden Stösse der Molekeln erfolgten demnach in einer Tiefe $-\lambda\cos\vartheta$. Multipliciren wir diese Grösse mit der Zahl der Zusammenstösse, integriren nach dem Winkel ϑ über den ganzen Raum und dividiren das Resultat durch die Zahl der Zusammenstösse, so ergibt dies die mittlere Tiefe, aus welcher die Molekeln kommen. Für die Summe sämmtlicher Tiefen finden wir somit

$$S = -\frac{N\pi s^2 c\lambda}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{15}N\pi s c^2\lambda.$$

Für die Zahl der Zusammenstösse ergibt sich

$$Z = \frac{N\pi s^2 c}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{3}{4}N\pi s^2 c;$$

die Molekeln kommen mithin aus einer mittleren Tiefe

$$\frac{S}{Z} = \frac{1}{5}\lambda.$$

Aus dieser Formel ersehen wir, dass jede Molekel ihre Geschwindigkeit durch Molekeln erlangt hat, welche von einem Punkt kommen, der im Durchschnitt um $\frac{1}{5}\lambda$ tiefer liegt, als die Stelle des letzten Zusammenstosses. Deshalb können wir auch nicht annehmen, dass unsere Molekel eine Geschwindigkeit besitzen wird, welche mit der sichtbaren Geschwindigkeit des Gases übereinstimmt, da die Richtungen der sie stossenden Molekeln über den Raum nicht gleichmässig vertheilt sind.

Das eine ist nun klar, dass wegen der allseitig gleichen Vertheilung der Geschwindigkeiten eine Molekel, welche aus einer gewissen Tiefe kommt, als Durchschnittsgeschwindigkeit nicht die sichtbare Geschwindigkeit des letzten Zusammenstosspunktes besitzt. Würden nun die stossenden Molekeln jene Durchschnittsgeschwindigkeit besitzen, welche das Gas in den Tiefen hat, aus denen sie kommen, so hätten somit unsere gestossenen Molekeln die Geschwindigkeit jenes Punktes, der um $\frac{1}{5}\lambda$ tiefer liegt, als der Zusammenstosspunkt. Nach der obigen Überlegung können wir aber nicht voraussetzen, dass die stossenden Molekeln dieser Bedingung entsprechen, sondern auch sie würden jetzt durch die früheren Stösse eine Geschwindigkeit erlangen, welche wieder einem um $\frac{1}{5}\lambda$ entfernteren Punkt entspräche. Es werden deshalb mit dieser Berücksichtigung unsere Molekeln auch nicht die Durchschnittsgeschwindigkeit jener Stelle haben, welche um $\frac{1}{5}\lambda$ tiefer liegt, als der letzte Zusammenstosspunkt, sondern sie hätten jetzt die Geschwindigkeit jenes Punktes, welcher um $\frac{1}{5}\left(\lambda + \frac{1}{5}\lambda\right)$ tiefer liegt. Aber auch dies ist noch nicht völlig richtig, denn wir müssen von Stoss zu Stoss die Entfernung, aus welcher die Molekeln kommen, um $\frac{1}{5}\lambda$ vergrössern, um deren resultirende Wirkung richtig in Rechnung zu ziehen. Wenn wir nun annehmen, wir hätten ein Gas, welches parallel zur Z-Axe ein Geschwindigkeits-

gefälle $\frac{\partial u}{\partial z}$ besitzt, und wir legen durch dasselbe eine Ebene, und es kommt gegen diese Ebene von unten eine Molekel geflogen, deren Geschwindigkeitsrichtung mit der Z-Axe einen Winkel ϑ einschliesst, so dürfen wir nicht annehmen, dass diese Molekel eine durchschnittliche Geschwindigkeitscomponente in der Richtung der Strömung besitzt, welche das Gas in der Tiefe $\lambda \cos\vartheta$ unter der Ebene hat, sondern dass sie als Durchschnittsgeschwindigkeit die Geschwindigkeit jener Gasschicht hat, welche sich in der Tiefe

$$\cos\vartheta\left(\lambda + \frac{1}{5}\lambda + \frac{1}{5^2}\lambda + \ldots\right) = \frac{5}{4}\lambda\cos\vartheta$$

befindet. Wir haben deshalb in die gewöhnliche Formel für den Reibungscoëfficienten

$$\eta = \frac{1}{3}\rho c\lambda$$

anstatt λ, $\frac{5}{4}\lambda$ zu setzen, woraus folgt

$$\eta = \frac{5}{12}\rho c\lambda.$$

Diese Überlegung gilt nun in gleicher Weise für verdünnte und verdichtete Gase, so dass damit die früher hergeleiteten Formeln für die Abhängigkeit der inneren Reibung vom Druck gerechtfertigt sind. Es liegt keine principielle Schwierigkeit vor, obige Überlegungen auf ein Gas zu übertragen, das den Maxwell'schen Vertheilungszustand besitzt, nur gelangt man dabei zu überaus complicirten bestimmten Integralen, welche sich nur mit Hilfe mechanischer Quadraturen lösen lassen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

X. SITZUNG VOM 13. APRIL 1899.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XX, Heft 1 und 2 (Jänner bis Februar 1899).

Der Vorsitzende, Herr Präsident E. Suess, bringt ein Dankteiegramm Sr. kaiserl. Hoheit des durchlauchtigsten Curators Herrn Erzherzogs Rainer für die Trauerkundgebung der kaiserlichen Akademie anlässlich des am Dienstag den 4. April l. J. erfolgten Hinscheidens Sr. kaiserl. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ernest zur Kenntniss.

Der Vorsitzende gedenkt des schmerzlichen Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 20. März l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes, Herrn Hofrathes Dr. Franz Ritter v. Hauer, Intendanten des k. k. naturhistorischen Hofmuseums i. R., erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der prov. Secretär verliest ein Schreiben des Herrn Oberbergrathes Dr. Emil Titze in Wien, in welchem derselbe anlässlich des Ablebens seines Schwiegervaters, Hofrathes v. Hauer, der kaiserlichen Akademie für die bewiesene Theilnahme den Dank ausspricht.

Die Direction der k. k. Geologischen Reichsanstalt in Wien spricht der kaiserlichen Akademie ihr Beileid über den Verlust aus, den sie durch das Hinscheiden ihres w. M. Hofrathes v. Hauer erlitten hat.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Herausgabe des Schlussbandes seines Werkes: »Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens«.

Herr Prof. Dr. Theodor Escherich in Graz dankt in seinem und im Namen seines Mitarbeiters, Herrn Prof. Dr. Ernest Mischler, für die ihnen bewilligte Subvention zur Durchführung der Arbeiten über die Morbidität und Mortalität der Kinder.

Das w. M. Herr Prof. Leopold Pfaundler in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Über den Begriff und die Bedingungen der Convergenz und Divergenz beden Linsen«.

Herr Joachim Unger in Wien übersendet ein Manuscript astronomischen Inhaltes.

Herr Mark Mihalinez in Brenham, Washington Co. Texas, übersendet eine Mittheilung, betreffend die Corona der Sonne.

Der Leiter der Erdbebenwarte in Laibach, Herr Prof. A. Belar, legt eine Mittheilung vor, betitelt: »Beobachtungen an der Erdbebenwarte in Laibach im Monate März 1899«.

Versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität haben eingesendet:

1. Herr Karl Schiebel in Oberlangendorf mit der Aufschrift: »Über weitere Steigerung optischer Vergrösserungen«;
2. Herr Dr. Oskar Nagel in Wien mit der Aufschrift: »Über borsaure Salze«.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. E. v. Mojsisovics legt Namens der Erdbeben-Commission folgende für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlungen vor, welche in der Reihe der »Mittheilungen der Erdbeben-Commission« die Nummern X bis XIII tragen werden, und zwar:

X. »Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1898 innerhalb des Beobachtungsgebietes erfolgten Erdbeben«, zusammengestellt von Dr. E. v. Mojsisovics, w. M.

XI. »Die Einrichtung der seismischen Station in Triest und die vom Horizontalpendel aufgezeich-

neten Erdbebenstörungen von Ende August 1898 bis Ende Februar 1899«, von Eduard Mazelle, Referenten der Erdbeben-Commission.

XII. »Übersicht der Laibacher Osterbebenperiode für die Zeit vom 16. April 1895 bis Ende December 1898«, von Ferdinand Seidl, Referenten der Erdbeben-Commission.

XIII. »Bericht über das obersteierische Beben vom 27. November 1898«, von Rudolf Hoernes, Referenten der Erdbeben-Commission.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht eine Mittheilung von Herrn Privatdocenten Dr. Theodor Pintner: »*Nectonema agile* Verrill in der Bai von Neapel«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien: »Über die Einwirkung von Chlor auf die Homologen des Phloroglucins«, von Max Schneider.

Das w. M. Herr Prof. L. Boltzmann theilt mit, dass Herr Dr. Mache die Formel

$$p+\frac{0\cdot 00874}{v^2}=\frac{1\cdot 00646\,T}{273\left(v-0\cdot 003+\dfrac{0\cdot 0000000195623}{v^2+0\cdot 00000961782}\right)}$$

mit den Beobachtungen Amagat's über CO_2 verglichen hat. Die Übereinstimmung ist bei den tiefen Temperaturen eine recht befriedigende, bei den hohen aber sind die Abweichungen ziemlich gross.

Das w. M. Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung von den Herren Regierungsrath Director Dr. J. M. Eder und Prof. Ed. Valenta, welche den Titel führt: »Das Spectrum des Chlors«.

Herr Privatdocent Dr. Richard Wallaschek in Wien legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Die Entstehung der Scala«.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Herr Eduard Mazelle, übersendet

einen Bericht über die in Triest am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Monate März 1899 beobachteten Erdbebenstörungen.

Seine Hochwürden, Herr P. Franz Schwab, Director der Stiftssternwarte in Kremsmünster, übersendet einen Bericht über die am Ehlert'schen Seismographen der kais. Akademie der Wissenschaften im März 1899 zu Kremsmünster angestellten Beobachtungen.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Adamkiewicz, Dr. A.: Ein weiterer Beitrag zur Behandlung der Krebse nach meinem Verfahren mittelst Injectionen von Cancroin. Separatabdruck aus Nr. 7, 1899 der »Klin.-therap. Wochenschrift«; 8°.

Brown Goode G.: The Smithsonian Institution 1846—1896 The History of its First Half Century. City of Washington. 1897; Gross 8°.

Cronander A. W., Ph. Dr.: On the Laws of Movement of Sea-Currents and Rivers. Norrköping, 1898; 4°.

K. k. Geologische Reichsanstalt: Geologische Karte der im Reichsrathe vertretenen Königreiche und Länder der Österreichisch-ungarischen Monarchie i. M. von 1 : 75000; I. und II. Lieferung: Jubiläumsausgabe. Wien, December 1898.

— Erläuterungen zu Lieferung I und II der geologischen Karte 1: 75000.

Gravis A.: Recherches anatomiques et physiologiques sur le Tradescantia Virginica L. Bruxelles, 1898; 4°.

Indraccolo, S.: Quadratura del Circolo. Problema resoluto dal sacerdote italiano —. Buenos Aires, 1898.

XI. SITZUNG VOM 20. APRIL 1899.

Erschienen: Denkschriften, Bd. 67 (1899). — Sitzungsberichte, Bd. 107, Abth. II. a., Heft IX und X (November und December 1897).

Herr Dr. Julius Tandler in Wien spricht den Dank für die ihm bewilligte Subvention zur Ausarbeitung des II. Theiles seiner Arbeit über die Schädelarterien aus.

Herr Dr. Oskar Nagel in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Über Eiweiss«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Steindachner berichtet über eine neue *Uromastix*-Art, *U. simonyi*, welche während der arabischen Expedition der kaiserlichen Akademie von Herrn Prof. O. Simony in Südarabien sowohl in den gebirgigen Umgebungen von ʿAzzan, als auch — und zwar in besonderer Häufigkeit und seltener Grösse — in dem nördlich von Ras Farták gelegenen Weihrauchgebiete beobachtet wurde. Im letzteren nährt sich dieses träge, ausschliesslich pflanzenfressende Nachtthier nach zuverlässigen Mittheilungen der Eingebornen vorwiegend von den Blättern des Weihrauchbaumes.

Das w. M. Herr Dr. E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Hofrath Prof. Dr. W. Tinter, betitelt: »Bestimmung des Azimuthes der Richtung: Observatorium der k. k. technischen Hochschule Wien (Punkt 4)—Leopoldsberg und Bestimmung der Meereshöhe einzelner Punkte des Observatoriums«.

Herr Dr. Egon v. Oppolzer, I. Assistent der k. k. Sternwarte in Prag, übersendet eine vorläufige Notiz über eine neue Methode, Fadenantritte zu beobachten.

Herr k. und k. Linienschiffslieutenant Theodor Scheimpflug überreicht eine von ihm und Herrn Max Stotter verfasste Abhandlung: »Temperaturmessungen im Quecksilberbergwerke von Idria«.

Herr Leopold Kohn überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Otto Bleier im II. chemischen Universitätslaboratorium in Wien ausgeführte Arbeit: »Über ein allgemein verwendbares Verfahren der Dampfdichtebestimmung unter beliebigem Drucke« (I. Mittheilung).

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Hildebrand Hildebrandsson, Dr. H. et Teisserenc de Bort, L.: Les bases de la Météorologie dynamique, historique-état de nos connaissances. Paris, 1898; 8°.

Lais, P. Giuseppe: Tre nebulose fotografate recentemente alla Specola Vaticana. Rom, 1899; 8°.

Schumann, Dr. W.: Die Verbreitung der *Cactaceae* im Verhältniss zu ihrer systematischen Gliederung. (Aus dem Anhang zu den Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1899.) Berlin, 1899; 4°.

Vallot, J.: Annales de l'Observatoire météorologique, physique et glaciaire du Mont Blanc. Tome III. Avec figures et 14 reproductions photographiques. Paris, 1898; Gross-8°.

Weinek, Dr. L.: Photographischer Mondatlas, vornehmlich auf Grund von focalen Negativen der Lick-Sternwarte im Maassstabe eines Monddurchmessers von 10 Fuss. Heft V (Tafel 81—100 in Lichtdruck). Prag, 1899.

Woldřich, J. N.: Geologische Studien aus Südböhmen. I. Aus dem böhmisch-mährischen Hochlande. Das Gebiet der oberen Nežárka. (Archiv der naturwissenschaftlichen Landesdurchforschung von Böhmen, Bd. XI, Nr. 4.) Prag, 1898; 8°.

— Sesuti u klapého z roku 1898. (Věstnik král. české společnosti náuk. Třida mathematicko-přirodovědecká, 1899, II.) Prag, 1899; 8°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XII. SITZUNG VOM 4. MAI 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte: Bd. 107, Abth. I, Heft VIII—X (October bis December 1898), womit nun der Druck dieses Bandes in allen Abtheilungen abgeschlossen ist. — Monatshefte für Chemie, Bd. 20, Heft III (März 1899).

Das k. und k. militär-geographische Institut übersendet eine Studie über die Niveauveränderungen im Gebiete von Laibach von k. und k. Oberlieutenant Julius Gregor, betitelt: »Trigonometrische Höhenbestimmung des Punktes Uranschitz (Rašica) im Erdbebengebiete von Laibach«.

Der prov. Secretär legt folgende zwei Arbeiten von Herrn Karl Garzarolli-Thurnlackh in Prag vor:

1. »Über die Einwirkung von Benzylidenanilin auf Brenztraubensäure und ihren Äthylester«.
2. »Über die Einwirkung von Brenztraubensäure auf Malonsäure (Synthese der Itaconsäure«).

Die Marine-Section des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums übermittelt den von Herrn k. und k. Linienschiffscapitän Paul Edlen v. Pott verfassten »Beschreibenden Theil« der Expedition S. M. Schiff »Pola« in das Rothe Meer (Südliche Hälfte) September 1897 bis März 1898.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Herr Eduard Mazelle, übersendet einen Bericht über die in Triest am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Monate April 1899 beobachteten Erdbebenstörungen.

Herr Johann Meissner in Budapest übersendet eine Notiz über einen nach ähnlichen Gesetzen wie ein Pendel schwingenden Kreis.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel legt folgende im I. chemischen Laboratorium der Universität in Wien ausgeführte Arbeiten vor:

I. »Über den Bindungswechsel bei den Homologen des Phloroglucins«, von R. Reisch.

II. »Über ein Condensationsproduct des Trimethylphloroglucins«, von J. Čečelsky.

III. »Über Brasilin und Hämatoxylin«, von J. Herzig.

Das w. M. Herr Hofrath Fr. Steindachner berichtet über eine von Herrn Prof. O. Simony während der südarabischen Expedition in Sokotra entdeckte neue *Sepsina*-Art.

Das w. M. Herr Hofrath L. Boltzmann legt folgende Arbeiten vor:

1. »Über die Wärmeentwicklung durch Foucault-sche Ströme bei sehr schnellen Schwingungen«, aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck, von Prof. Dr. Ignaz Klemenčič.
2. »Über die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkt«, von Dr. M. Radaković in Innsbruck.

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung aus dem histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Zur Entwicklung der Vogelhypophyse«, von Constantin J. Economo.

Das c. M. Prof. J. M. Pernter überreicht eine vorläufige Mittheilung über die blaue Farbe des Himmels.

Herr Dr. St. Bernheimer in Wien legt die Ergebnisse seiner experimentellen Studien zur Kenntniss der Bahnen der synergischen Augenbewegungen beim Affen und der Beziehungen der Vierhügel zu denselben, vor.

Herr O. Abel, Assistent am geologischen Institute der k. k. Universität in Wien, legt eine Abhandlung vor, welche den Titel führt: »Untersuchungen über die fossilen Platanistiden des Wiener Beckens«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Hirschberg, Dr. J.: Handbuch der gesammten Augenheilkunde. XII. Band: Geschichte der Augenheilkunde. Leipzig, 1899; 8°.

Poincaré, H.: »Scientia«. La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes. Chartres; 8°.

XIII. SITZUNG VOM 12. MAI 1899.

Das w. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet vier im chemischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Untersuchungen, betitelt:

1. »Über Pseudocinchonin und das Verhalten von Hydrochlorcinchonin«, von F. v. Arlt.
2. »Über den Glutakonsäureester. I.«, von Ferdinand Henrich.
3. »Isomerien in der Cinchoningruppe«, von Zd. H. Skraup.
4. »Über Umlagerungen«, von Zd. H. Skraup.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch in Prag übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Botanische Beobachtungen auf Java; IV. Abhandlung: Über Pseudoindican, ein neues Chromogen in den Cystolithenzellen von Acanthaceen«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine im Laboratorium des k. k. technologischen Gewerbemuseums in Wien ausgeführte Arbeit von Prof. Dr. v. Georgievics in Bielitz: »Über die Condensation von Bernsteinsäureanhydrid und Pyrogallol«.

Herr Prof. V. Hilber in Graz übersendet eine im geologischen Institute der dortigen Universität ausgeführte Abhandlung des Herrn cand. phil. Karl Bauer: »Zur Conchylienfauna des Florianer Tegels«.

Der prov. Secretär legt eine Arbeit von Herrn Ing. Hermann Büttner in Temesvár vor, welche den Titel führt: »Die natürliche Entwicklung des Dreiecks«.

Seine Hochwürden, Herr P. Franz Schwab, Director der Stiftssternwarte in Kremsmünster, übersendet einen Bericht über die am Ehlert'schen Seismographen der kais. Akademie der Wissenschaften im April 1899 zu Kremsmünster angestellten Beobachtungen.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht folgende zwei von ihm verfasste Arbeiten:

1. »Zur Theorie der symmetrischen Functionen«.
2. »Beweis, dass jede lineare Function mit ganzen complexen theilerfremden Coëfficienten unendlich viele complexe Primzahlen darstellt«.

Das w. M. Herr Prof. F. Becke legt eine Arbeit vor, betitelt: »Über die optische Orientirung des Anorthits«.

Das w. M. Herr Hofrath K. Toldt überreicht eine Arbeit aus dem I. anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien von dem Demonstrator Herrn Josef Wiesel, betitelt: »Über accessorische Nebennieren am Nebenhoden beim Menschen und über Compensations-Hypertrophie dieser Organe bei der Ratte«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang legt eine Arbeit vor, betitelt: »Magnetische Orientirung einer Anzahl einaxiger Krystalle«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

K. k. Landesschulrath in Lemberg: Sprawozdanie c. k. rady szkolnej krajowej o stanie szół średnich galicyjskich, 1897/8.

— Sprawozdanie c. k. rady szkolnej krajowej o stanie szkół przemysłowych, 1897/8.

K. k. Landesschulrath in Lemberg: Sprawozdanie c. k. radyszkolnej krajowej o stanie wychowania publicznego, 1897/8.

Fritsche, Dr. H.: Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780, 1842, 1885 und ihre säcularen Änderungen, berechnet mit Hilfe der aus allen brauchbaren Beobachtungen abgeleiteten Coëfficienten der Gauss'schen »Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus«. St. Petersburg, 1880; 8°.

Stossich M.: Filarie e spiroptere. Triest, 1897; 8°.

Zur Theorie der symmetrischen Functionen

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Eine ganze symmetrische Function von n Unbestimmten

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

welche nicht identisch verschwindet, besteht aus Gliedern von der Gestalt

$$Cx_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu,$$

wo C einen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängigen Coëfficienten bezeichnet, und muss neben jedem Gliede auch alle diejenigen enthalten, welche aus demselben durch Permutation der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ entstehen. Bezeichnet demnach

$$S_{\alpha\beta\ldots\nu} = \Sigma x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu$$

die Summe aller verschiedenen Ausdrücke, welche aus $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu$ durch alle möglichen Vertauschungen der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ hervorgehen, so erscheint jede ganze symmetrische Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Aggregat von Ausdrücken $CS_{\alpha\beta\ldots\nu}$.

Ein Ausdruck $S_{\alpha\beta\ldots\nu}$ heisse von der Ordnung m, wenn m in der Reihe der Exponenten $\alpha, \beta, \ldots \nu$ die grösste Zahl ist. Die Ausdrücke $S_{\alpha\beta\ldots\nu}$ von der ersten Ordnung sind die elementaren symmetrischen Functionen

$$\sigma_1 = \Sigma x_1$$

$$\sigma_2 = \Sigma x_1 x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Es sei $S_{\alpha\beta\ldots\nu}$ von der Ordnung m und $m > 1$. Sind h von den Exponenten $\alpha, \beta, \ldots \nu$ von Null verschieden, so ergibt sich durch Verminderung derselben um je eine Einheit eine Reihe von nicht negativen Zahlen $\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'$, unter welchen $m-1$ vorkommt, so dass $S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'}$ von der Ordnung $m-1$ ist.

Ist nun $h = n$, so ist

$$S_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \sigma_n S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'}.$$

Ist dagegen $h < n$, so enthält das Product $\sigma_h S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'}$ nach erfolgter Entwickelung alle Glieder von $S_{\alpha\beta\ldots\nu}$ und sonst nur noch Glieder mit Potenzproducten $x_1^p x_2^q \ldots x_n^s$, unter deren Exponenten mehr als h von Null verschiedene, m nicht übersteigende Zahlen vorkommen. Stellt man daher die Differenz

$$S_{\alpha\beta\ldots\nu} - \sigma_h S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'}$$

als Aggregat von Ausdrücken $S_{pq\ldots s}$ dar, so ergibt sich

$$S_{\alpha\beta\ldots\nu} = \sigma_h S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'} + C S_{\mathfrak{ab}\ldots\mathfrak{n}} + C' S_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\ldots\mathfrak{n}'} + \ldots,$$

wo $C, C', \ldots$ ganze Zahlen sind und

$$S_{\mathfrak{ab}\ldots\mathfrak{n}},\ S_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\ldots\mathfrak{n}'}$$

mehr als h von Null verschiedene Exponenten enthalten.

Kommen unter diesen Ausdrücken

$$S_{\mathfrak{ab}\ldots\mathfrak{n}},\ S_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\ldots\mathfrak{n}'}, \ldots$$

noch solche von der Ordnung m vor, so kann man jeden derselben ebenso behandeln und entweder durch ein Product

$$\sigma_n S_{\alpha''\beta''\ldots\nu''}$$

darstellen, wenn alle seine Exponenten von Null verschieden sind, oder aber durch ein Product

$$\sigma_{h'} S_{\alpha''\beta''\ldots\nu''}$$

und ein Aggregat von Ausdrücken $S_{pq\ldots s}$ ersetzen, welche mindestens $h+2$ von Null verschiedene Exponenten aufweisen. Man erhält dann

$$S_{\alpha\beta\ldots\nu} = \sigma_h S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'} + \sigma_{h'} S_{\alpha''\beta''\ldots\nu''} + \ldots + C_1 S_{\mathfrak{pq}\ldots\mathfrak{s}} + C_1' S_{\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\ldots\mathfrak{s}'},$$

wo $C_1, C_1', \ldots$ ganze Zahlen und

$$S_{pq\ldots s}, \; S_{p'q'\ldots s'}$$

entweder von der Ordnung $m-1$ sind oder wenigstens $h+2$ von Null verschiedene Exponenten enthalten.

Kommen unter den Ausdrücken

$$S_{pq\ldots s}, \; S_{p'q'\ldots s'}$$

noch solche vor, welche von der Ordnung m sind, so ist auf dieselben das nämliche Verfahren anzuwenden und das Verfahren so lange fortzusetzen, bis sich für $S_{\alpha\beta\ldots\nu}$ ein Aggregat von Ausdrücken

$$\sigma_h S_{\alpha\beta\ldots\nu}, \; \sigma_{h'} S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'}, \ldots$$

und Ausdrücken $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$S_{ab\ldots c}, \; S_{a'b'\ldots c'}, \ldots$$

ergibt. Dies muss nach höchstens $n-h$ maliger Anwendung des Verfahrens eintreten. Denn entweder verschwinden schon früher aus der Darstellung von $S_{\alpha\beta\ldots\nu}$ alle Ausdrücke $S_{pq\ldots s}$ von der m^{ten} Ordnung oder aber können nach $n-h-1$ maliger Anwendung des Verfahrens nur noch solche Ausdrücke m^{ter} Ordnung $S_{pq\ldots s}$ zurückgeblieben sein, welche lauter von Null verschiedene Exponenten aufweisen und bei der nächsten Anwendung des Verfahrens durch ein Product $\sigma_n S_{p'q'\ldots s'}$ ersetzt werden.

Man erhält daher in allen Fällen eine Identität

$$S_{\alpha\beta\ldots\nu} = g_1 S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'} + g_1' S_{\alpha''\beta''\ldots\nu''} + \ldots,$$

wo $g_1, g_1', \ldots$ ganzzahlige lineare Functionen von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ und

$$S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'}, \; S_{\alpha''\beta''\ldots\nu''}, \ldots$$

von nicht höherer als der $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung sind.

Ist $m > 2$, so können

$$S_{\alpha'\beta'\ldots\nu'}, \; S_{\alpha''\beta''\ldots\nu''}, \ldots$$

in derselben Weise dargestellt werden, und man erhält

$$S_{\alpha\beta\ldots\nu} = g_2 S_{\lambda\mu\ldots\rho} + g_2' S_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} + \ldots,$$

wo $g_2, g'_2, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen zweiten Grades von $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ und

$$S_{\lambda\mu\ldots\rho},\quad S_{\lambda'\mu'\ldots\rho'}$$

höchstens von der Ordnung $m-2$ sind.

Ist $m > 3$, so ist dasselbe Verfahren fortzusetzen.

In allen Fällen gelangt man daher zu einer Identität

$$S_{\alpha\beta\ldots\nu} = g_{m-1} S_{\xi\eta\ldots\omega} + g'_{m-1} S_{\xi'\eta'\ldots\omega'} + \ldots,$$

wo $g_{m-1}, g'_{m-1}, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ und

$$S_{\xi\eta\ldots\omega},\quad S_{\xi'\eta'\ldots\omega'}$$

von der ersten Ordnung oder elementarsymmetrische Functionen sind. Man hat dann eine Darstellung von $S_{\alpha\beta\ldots\nu}$ als ganze ganzzahlige Function m^{ten} Grades von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$.

Über den Begriff und die Bedingungen der Convergenz und Divergenz bei den Linsen

von

L. Pfaundler.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. April 1899.)

1. Vorbemerkungen.

Nach den grundlegenden Arbeiten von Gauss und nach den mehrfach erschienenen elementaren Darstellungen, welche die Lehre von den Linsen (mit Beschränkung auf Null- oder Centralstrahlen) seither von verschiedenen Seiten, zuletzt in dem vortrefflichen Buche von G. Ferraris und in dessen Übersetzung von F. Lippich, gefunden hat, möchte man meinen, dass sich über das im Titel angegebene Thema nichts Bemerkenswerthes mehr beibringen lasse. In der That ist Alles das, was ich im Folgenden darlegen will, bereits vollständig in der Theorie enthalten. Ich vermisse jedoch in didaktischer Beziehung noch die Entwicklung gewisser Folgerungen, welche sich auf das Verhalten dicker Linsen beziehen und welche zu Widersprüchen mit den geläufigen Bezeichnungen bezüglich der Ausdrücke Convergenz und Divergenz führen. Dass eine solche Lücke vorhanden ist, dürfte aus Folgendem erhellen:

Wenn man einen Physikkundigen fragt, ob eine Linse, welche die Sonnenstrahlen in einem Brennpunkte jenseits der Linse vereinigt oder welche von einem entfernten Gegenstande ein reelles Bild entwirft, eine convergente oder eine divergente Linse sei, so wird er sicherlich antworten: »eine conver-

gente«. Trotzdem gibt es Linsen, welche nach der Gauss'schen Theorie, wie sie z. B. von Ferraris (Lippich) vorgetragen wird, als divergent bezeichnet werden, obwohl sie die obigen Bedingungen erfüllen. Anderseits gibt es Linsen, welche diese Theorie als convergent bezeichnet, welche trotzdem ein axenparallel einfallendes Strahlenbündel als ein divergentes Strahlenbündel austreten lassen. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass diese Widersprüche nicht auf einem Fehler in der Theorie, sondern lediglich auf dem Umstande beruhen, dass die Ausdrücke »Convergenz« und »Divergenz« nicht immer mit denselben Begriffen verbunden werden.

Der Grund, warum diese scheinbaren Anomalien nicht mehr beachtet worden sind, dürfte darin zu suchen sein, dass dieselben nur bei Linsen vorkommen, welche eine in der Praxis ungewöhnliche Dicke besitzen.[1] Es scheint mir aber doch nicht zulässig, die Richtigkeit von Definitionen von dem zufälligen Umstande, dass Linsen gewisser Dicke seltener gebraucht werden, abhängig zu machen.

2. Benennung und Bezeichnung der Linsen und ihrer Krümmungen.

Die gewöhnliche Benennung der Linsen als biconvexe, biconcave, convexconcave, concavconvexe, planconvexe, planconcave ist nicht vollkommen ausreichend. Abgesehen davon, dass bei den Menisken nicht immer feststeht, ob man mit dem Grundwort das Überwiegen der Convexität oder der Concavität ausdrücken will und daher noch eine umständliche Beifügung, welche sagt, welcher Krümmungsradius der grössere sein soll, nöthig wird, sagen diese Namen auch nichts darüber aus, welche Lage die Linse dem Lichte gegenüber hat, falls sie

[1] v. Helmholtz hat diesem Umstande dadurch Rechnung getragen, dass er die Definition der Linse auf Dicken einschränkte, welche kleiner als der kleinere Krümmungsradius sind (Vorlesungen über theoretische Physik, V, S. 280). Es wird gezeigt werden, dass bei Linsen, die von Luft umgeben sind, diese Grenze auf das $\frac{n}{n-1}$ fache des kleineren Radius erweitert werden kann.

$f_2 + h_2$

net.

$r - \Delta)$

$(n-1)\Delta$

$R - \Delta)$

$(n-1)\Delta$

$> \frac{n}{n-1}(R+R')$

$(R+R')$

$R + \Delta)$

$(n-1)\Delta$

gativ

$R - \Delta)$

$(n-1)\Delta$

R

-1

$R + \Delta)$

nicht symmetrisch ist. Wenn nun auch für Nullstrahlen die Grösse und das Vorzeichen der Brennweite durch das Umwenden einer Linse nicht verändert wird, so ändert doch die Schnittweite bei allen asymmetrischen Linsen ihre Grösse und manchmal auch ihr Vorzeichen, und gerade dies ist für unsere folgenden Darlegungen von entscheidender Wichtigkeit. Wir wollen deshalb für unsere Zwecke festsetzen, dass wir die dem Lichte zugekehrte (in den Figuren nach links gewendete) Fläche der Linse zuerst nennen. Die Convexconcavlinse wird also dann durch Umwenden zur Concavconvexlinse. Durch den Zusatz positiv (negativ) werden dann noch die in der Mitte dickeren (dünneren) Menisken von denen unterschieden, die in der Mitte dünner (dicker) sind. Eine Unterscheidung der asymmetrischen Biconvex- oder Biconcavlinsen nach ihrer Lage ist auf diese Weise noch nicht möglich, aber für unsere Zwecke auch nicht nothwendig.

Eine derartige Unterscheidung und überhaupt eine erschöpfende kurze Bezeichnung aller Linsen und Linsenlagen wäre die folgende: Man bezeichnet die beiden Krümmungen durch die Zeichen $+$, $-$, ∞ und setzt das Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen dazwischen, um auszudrücken, welcher Krümmungsradius der grössere ist. In der beiliegenden Übersichtstabelle sind diese Bezeichnungen beigefügt. Leider herrscht aber noch keine feste Regel über das Vorzeichen der Krümmung. Während man bei der Darstellung der Gauss'schen Theorie sehr zweckmässig das Vorzeichen positiv wählt, sobald sich der Krümmungsradius auf der Axe vom Scheitel in der Richtung der Lichtbewegung erstreckt, gebraucht man manchesmal auch das Zeichen $+$ für alle nach aussen convexen Flächen der Linse. Im ersten Falle ist also z. B. die symmetrische Convexlinse durch $+ = -$, im zweiten Falle durch $+ = +$ ausgedrückt. Wir haben erstere Bezeichnung gewählt.

Die algebraisch genommenen Krümmungsradien wollen wir mit r und r', die absoluten Werthe derselben mit R und R' bezeichnen.

3. Die Brennweite und die Schnittweite; die auf diese Begriffe gegründeten beiden Definitionen der convergenten und der divergenten Linse.

Nach der Gauss'schen Theorie, wie sie z. B. in dem Buche von Ferraris (Lippich) vorgetragen wird, heisst jede Linse eine convergente, deren zweite Brennweite einen positiven Werth hat; sie heisst eine divergente, wenn dieser Werth negativ ist. Dabei wird bekanntlich die Brennweite vom zugehörigen zweiten Hauptpunkte aus in der Richtung der Lichtbewegung als positiv gerechnet.

Hat also die Linse die Dicke Δ, den Brechungsindex n und die Krümmungen r und r', so entscheidet das Vorzeichen von

$$f_2 = -\frac{\frac{n}{n-1} rr'}{n(r-r')-(n-1)\Delta}$$

darüber, ob die Linse eine positive oder negative, eine convergente oder divergente genannt wird.

Um dies festzustellen setzt man statt r und r' die absoluten Werthe R und R' ein. Die zweite Columne der Übersichtstabelle zu Seite 479 neben den Linsenbezeichnungen enthält die Resultate dieser Operation. Es ergibt sich, dass nach dieser Definition als unbedingt positive oder convergente Linsen anzusehen sind: die positive Convexconcav- und Concavconvexlinse, sowie die Convexplan- und Planconvexlinse. Als unbedingt negativ oder divergent die Biconcavlinse, die Concavplan- und die Planconcavlinse. Die Biconvexlinse ist nur dann positiv (convergent), wenn die Dicke unter $\frac{n}{n-1}(R+R')$ beträgt, für grössere Dicke wird sie negativ (divergent). Die negativen Menisken bleiben nur negativ (divergent), so lange die Dicke nicht den Betrag $\frac{n}{n-1}(R-R')$ erreicht. Darüber hinaus werden sie positiv (convergent). Für $\Delta = \frac{n}{n-1}(R+R')$, beziehungsweise $= \frac{n}{n-1}(R-R')$ werden

die Biconvexlinse und die negativen Menisken teleskopisch, d. h. sie lassen axenparallel einfallende Strahlen auch axenparallel austreten.

So lautet die Eintheilung auf Grund der Gauss'schen Definition, welche vollständig einwurfsfrei und richtig ist, so lange man die Bezeichnungen convergent und divergent mit dem Vorzeichen der vom Hauptpunkt an gerechneten Brennweite verknüpft.

Nun gibt es aber noch eine andere, auf der etymologischen Bedeutung aufgebaute Weise, die Convergenz und Divergenz der Linsen zu definiren. Nach dieser nennt man jene Linsen convergent, welche ein axenparallel einfallendes Strahlenbündel jenseits der Linse als convergentes Strahlenbündel austreten lassen. Dagegen nennt man jene Linsen divergent, welche ein axenparallel einfallendes Strahlenbündel jenseits der Linse als ein divergentes austreten lassen. Im ersten Falle liegt der Schnittpunkt mit der Axe auf der positiven Seite des zweiten Scheitels, im zweiten Falle liegt er auf der negativen Seite, d. h. die divergirenden Strahlen würden sich nach rückwärts verlängert noch vor der Austrittsfläche auf der Axe schneiden. Demnach lautet diese Definition: Convergent ist jede Linse, deren Schnittweite (für axenparallel einfallende Strahlen) eine positive ist, divergent ist jede Linse, deren Schnittweite negativ ist.

Um also zu untersuchen, welche Linsen nach dieser Definitionsweise als convergent oder als divergent zu bezeichnen sind, müssen wir die Schnittweiten berechnen. Diese Rechnung geschieht einfach, indem man zur Brennweite den Abstand des zweiten Hauptpunktes vom zweiten Scheitel mit Rücksicht auf das Zeichen addirt. Für diesen Abstand gilt allgemein:

$$h_2 = \frac{\Delta r'}{n(r-r')-(n-1)\Delta}.$$

Durch Addition von f_2 und h_2 erhält man

$$s_2 = -\frac{r'\left(\frac{n}{n-1}r-\Delta\right)}{n(r-r')-(n-1)\Delta}.$$

Setzt man auch hier für r und r' die den einzelnen Linsenarten und Linsenlagen entsprechenden absoluten Werthe von R und R' ein, so erhält man die in der vierten Columne der Übersicht aufgeführten Formeln. Man sieht sofort, dass, während die Brennweite (der Nullstrahlen) beim Umwenden der Linse Grösse und Vorzeichen behält, die Schnittweite sowohl die Grösse, als auch das Zeichen wechseln kann.

Als unbedingt positiv erfolgt die Schnittweite nur für die positive Concavconvexlinse und für die Planconvexlinse. Als unbedingt negativ nur für die Biconcavlinse und für die Concavplan- und Planconcavlinse. Bei allen übrigen hängt das Vorzeichen von der Dicke ab, aber in complicirterer Weise als die Brennweite, denn es gibt hier Fälle, wo mit wachsender Dicke die Schnittweite zweimal das Zeichen wechselt, die betreffende Linse also auch zweimal ihren Charakter ändert.

4. Vergleich der beiden Definitionsweisen der Convergenz und Divergenz.

Vergleicht man die in der zweiten und vierten Columne erhaltenen Resultate miteinander, so findet man, dass in sechs Fällen das Vorzeichen der Brennweite mit dem der Schnittweite unbedingt übereinstimmt. In diesen sechs Fällen fallen daher auch die beiden Definitionen der Convergenz und Divergenz zusammen und ergibt sich kein Widerspruch zwischen denselben. Es sind dies die Fälle, welche in der ersten Columne ohne * belassen sind.

In den zwei mit nur einem * bezeichneten Fällen stimmen die Vorzeichen überein, so lange die Linsendicke den Betrag $\frac{n}{n-1}R$ nicht erreicht. In den zwei mit ** bezeichneten Fällen endlich, d. i. bei der Biconvexlinse und bei der negativen Convexconcavlinse sind die Verhältnisse complicirter.

Bei der Biconvexlinse hat die Schnittweite das gleiche positive Zeichen mit der Brennweite solange $\Delta < \frac{n}{n-1}R$, dagegen das entgegengesetzte negative Zeichen für den Fall $\frac{n}{n-1}R < \Delta < \frac{n}{n-1}(R+R')$ und dann das entgegengesetzte positive Zeichen für den Fall $\Delta > \frac{n}{n-1}(R+R')$.

Bei der negativen Convexconcavlinse hat die Schnittweite dasselbe negative Zeichen mit der Brennweite für den Fall $\Delta < \frac{n}{n-1} R$, dasselbe positive für den Fall

$$\frac{n}{n-1}(R-R') < \Delta < \frac{n}{n-1} R.$$

Dagegen hat die Schnittweite das entgegengesetzte (negative) Zeichen für den Fall $\Delta > \frac{n}{n-1} R$.

Der Nachweis für diese Sätze ist leicht zu führen.

Die Schnittweite s_2 für die Biconvexlinse ist gegeben durch die Formel

$$s_2 = \frac{R'\left(\frac{n}{n-1} R - \Delta\right)}{n(R+R') - (n-1)\Delta}.$$

Dieser Ausdruck bleibt positiv:

1. Wenn $\Delta < \frac{n}{n-1} R$ und zugleich $\Delta < \frac{n}{n-1}(R+R')$, welch' letztere Ungleichung schon in der ersteren enthalten ist, also entfällt, oder

2. wenn $\Delta > \frac{n}{n-1} R$ und zugleich $\Delta > \frac{n}{n-1}(R+R')$, welch letztere Ungleichung bereits die erstere enthält, also überflüssig macht.

Es bleibt also s_2 positiv, wenn $\Delta < \frac{n}{n-1} R$ oder $\Delta > \frac{n}{n-1}(R+R')$.

Der obige Ausdruck wird negativ,

1. Wenn $\Delta < \frac{n}{n-1} R$ und zugleich $\Delta > \frac{n}{n-1}(R+R')$, was unmöglich ist,

2. wenn $\Delta > \frac{n}{n-1} R$ und zugleich $\Delta < \frac{n}{n-1}(R+R')$ ist, d. h. wenn die Dicke einen Werth zwischen $\frac{n}{n-1} R$ und $\frac{n}{n-1}(R+R')$ hat. (Für $n = {}^3/_2$ und $R = R'$ sind also der

dreifache und der sechsfache Werth des Radius die kritischen Dicken für das Verhalten der Linse in Bezug auf die Schnittweite.)

Für die Schnittweite der negativen Convexconcavlinse hat man

$$s_2 = -\frac{R'\left(\frac{n}{n-1}R-\Delta\right)}{n(R-R')-(n-1)\Delta}.$$

Dieser Ausdruck bleibt negativ für $\Delta > \frac{n}{n-1}R$, denn dann ist umsomehr auch $\Delta > \frac{n}{n-1}(R-R')$, also Zähler und Nenner negativ, so dass das davorstehende Minuszeichen stehen bleibt. Der Ausdruck bleibt aber auch negativ für $\Delta < \frac{n}{n-1}(R-R')$, denn dann ist umsomehr auch $\Delta < \frac{n}{n-1}R$, also Zähler und Nenner positiv.

Dagegen wird der Ausdruck positiv, wenn entweder

1. $\Delta > \frac{n}{n-1}R$ und zugleich $\Delta < \frac{n}{n-1}(R-R')$, was unmöglich ist, oder

2. $\Delta < \frac{n}{n-1}R$ und zugleich $\Delta > \frac{n}{n-1}(R-R')$, d. h. wenn Δ einen Werth zwischen $\frac{n}{n-1}(R-R')$ und $\frac{n}{n-1}R$ hat.

Die kritischen Dicken betragen also hier $3R$ und $3(R-R')$.

Bei den asymmetrischen Linsen wird beim Umwenden der Werth von R geändert, und damit ändern sich möglicherweise die Bedingungen für das Zeichen der Schnittweite. Definirt man daher die Convergenz durch das positive Vorzeichen der Schnittweite, so kann es kommen, dass eine als convergent bezeichnete Linse beim Umwenden zu einer divergenten wird. Dieser Umstand allein schon lässt diese Definitionsweise als unzweckmässig erscheinen.

5. Graphische Darstellung des Strahlenganges bei verschiedener Dicke der Linsen.

Die etwas complicirten Beziehungen zwischen Dicke, Brennweite und Schnittweite werden sofort vollständig über-

sichtlich und klar, wenn man dieselben graphisch darstellt. Wir wählen dazu zunächst die unsymmetrische Biconvexlinse. Auf der Tafel I ist eine Reihe solcher Linsen von der unendlich kleinen Dicke bis zur Dicke von 90 *mm* und den Radien $R = 15$ *mm*, $R' = 10$ *mm* so aufgezeichnet, dass die Scheitelpunkte derselben auf den convergenten Geraden oO und $o'O$ zu liegen kommen.[1] Als Brechungsindex ist $n = {}^3/_2$ angenommen. Die zweiten Brennpunkte φ_2 der Eintrittsflächen liegen dann auf der zu oO im Abstande $\varphi_2 = \frac{n}{n-1} R = 45$ *mm* gezogenen Parallelen $\varphi_2 \varphi_2$. Die ersten Brennpunkte der Austrittsfläche liegen auf der im Abstande $\frac{n}{n-1} R' = 30$ *mm* nach links zu $o'O$ gezogenen Parallelen $\varphi_1' \varphi_1'$. Die Hauptpunkte liegen auf den zwei getrennten punktirt gezeichneten Curvenstücken $h_2 h_2$, denen sich die Axe XX' der teleskopischen Linse asymptotisch nähert. Die Brennpunkte endlich liegen auf den beiden getrennten gestrichelten Curvenstücken $f_2 f_2$, welchen sich ebenso die Axe XX' asymptotisch nähert. Die Axe XX' theilt die Linsen in zwei Gruppen, deren Grenze durch die teleskopische Linse von der Dicke $\frac{n}{n-1}(R+R')$ gebildet wird. Diese beiden Gruppen unterscheiden sich durch das Zeichen der Brennweite, welche oberhalb negativ, unterhalb positiv ist, wie man sofort daran ersieht, dass oberhalb die f_2-Curve links von der h_2-Curve, unterhalb rechts davon verläuft.

Die untere Gruppe zerfällt selbst wieder in zwei Untergruppen, deren Grenze durch die Linse mit der Dicke $\frac{n}{n-1} R$ gebildet wird, welcher die Schnittweite 0 zukommt, da der Brennpunkt f_2 in den Scheitel der Austrittsfläche fällt.

Verfolgen wir von der unendlich dünnen Linse an zu den dickeren Linsen aufsteigend den Strahlengang.

Bei der unendlich dünnen Linse sind Brennweite und Schnittweite identisch. Ein in der Zeichnungsebene zwischen

[1] Bei der Ausführung der Tafeln wurde eine Reduction auf $^5/_6$ vorgenommen.

der Axe und dem Strahle LM parallel einfallendes Strahlenbündel tritt als convergentes aus. Bei der nächsten Linse (es wurde hiefür die concentrische gewählt) wird der Strahl LM zuerst gegen φ_2, dann von M' an gegen f_2 gebrochen. Der Brennpunkt rückt näher an den Scheitel. Bei der Linse von der Dicke $\frac{n}{n-1} R = 45$ *mm* fallen der Brennpunkt f_2 und der Punkt φ_2 beide in den Scheitel, so dass wir die Direction für den austretenden Strahl verlieren. Durch die aus der Figur ersichtliche Hilfsconstruction ersehen wir, dass der austretende Strahl noch stärker von der Axe sich entfernt als die Fortsetzung des Strahles innerhalb der Linse. Das austretende Strahlenbündel ist ein divergirendes. Die Convergenz desselben bei den dünneren Linsen geht also sprungweise in eine Divergenz über in dem Moment, wo der Brennpunkt die Scheitelfläche durchsetzt, ohne dass die Strahlenrichtung sich plötzlich ändern würde. Bei der nächsten Linse von 60 *mm* Dicke ist der austretende Strahl weniger divergirend als die Fortsetzung des Strahles innerhalb der Linse. Es muss daher zwischen dieser und der vorigen Linse eine solche geben, bei welcher der Strahl beim Austritt gar nicht gebrochen wird. Es ist dies die (in der Figur nicht gezeichnete) Linse von der Dicke $\varphi_2 + R' = \frac{n}{n-1} R + R' = 55$ *mm*, auf deren Axe die Gerade $\varphi_2\varphi_2$ von der f_2-Curve geschnitten wird. Von da an nähert sich der austretende Strahl allmälig immer mehr der Axe und wird in der teleskopischen Linse von der Dicke $\frac{n}{n-1}(R+R') = 45$ *mm* mit derselben parallel, um dann allmälig immer mehr gegen dieselbe zu convergiren, wie beispielsweise bei der Linse von der Dicke 90 *mm* der Fall ist. Wie man übersieht, verhalten sich nur die Linsen unterhalb der Dicke $\frac{n-1}{n} R = 45$ *mm* in dem Sinne normal, dass einer positiven Brennweite ein convergirendes Strahlenbündel entspricht. Die Linsen der mittleren Gruppe bis hinauf zur teleskopischen Linse haben ebenfalls positive Brennweite, aber divergirendes Strahlenbündel, weil die Schnittweite negativ ist. Die oberste

Gruppe hat negative Brennweite, aber trotzdem convergirendes Strahlenbündel.

In Tafel 2 sind diese Constructionen für die negative Convexconcavlinse durchgeführt, deren Radien $R = 15$ *mm*, $R' = 10$ *mm* gewählt wurden. Auch hier sind drei Gruppen von Linsen zu unterscheiden. Die untere enthält die Linsen bis zur Dicke $\frac{n}{n-1}(R-R') = 15$ *mm*; bis dahin sind Brennweite und Schnittweite beide negativ. Die zweite Gruppe reicht von der teleskopischen Linse mit der Dicke $\frac{n}{n-1}(R-R') = 15$ *mm* bis zur Linse von der Dicke $\frac{n}{n-1}R = 45$ *mm*. Hier sind Brennweite und Schnittweite positiv. Die dritte Gruppe endlich umfasst die Linsen, deren Dicke über $\frac{n}{n-1}R = 45$ *mm* beträgt, für welche die Brennweite positiv, aber die Schnittweite negativ ist.

6. Die Begriffe Convergenz und Divergenz; Schlussfolgerung.

Fassen wir noch einmal die Tafel I ins Auge, so kann uns nicht entgehen, dass zwischen der Convergenzwirkung der dünnen und der dicken Linsen ein wesentlicher Unterschied ist. Bei der dünnen Linse nähert sich der auf der Oberseite der Axe parallel eintretende Strahl nach dem Austritt von derselben Seite der Axe und divergirt nach deren Durchschneidung nach der entgegengesetzten Seite. Bei der dicken Linse nähert sich derselbe Strahl nach dem Austritt von der entgegengesetzten Seite der Axe und divergirt nachher nach derselben Seite, auf der er eingetreten ist. Die dicke Biconvexlinse gibt schliesslich dem Strahle genau dieselbe Richtung, wie er sie durch eine dünne Concavlinse, welche bei ll' statt der Biconvexlinse eingeschaltet wäre, erhalten würde.

Die dicke Biconvexlinse erzeugt zwar von einem entfernten Object ein reelles Bild in der Nähe von f_2, aber dasselbe ist kein verkehrtes, wie sonst die reellen Bilder der dünnen Convexlinsen sind, sondern ein aufrechtes.

Ebenso unterscheidet sich die Divergenzwirkung der Biconvexlinse von der Dicke 45 *mm* oder 60 *mm* wesentlich

von der einer dünnen Concavlinse (siehe auch die Linsen 5 und 60, Tafel II). Bei einer solchen wird der an der Oberseite axenparallel eintretende Strahl nach dem Austritte sofort nach derselben Seite von der Axe divergirend austreten, während er hier auf der entgegengesetzten Seite divergirt. Die verkehrte Divergenz ist aber als eine Convergenz aufzufassen. Dann verschwindet auch jeder Widerspruch.

Jedes convergirende Lichtbündel ist in seiner Fortsetzung ein divergirendes und umgekehrt. Es gibt also, wenn man die Strahlen als unbegrenzte Gerade auffasst, überhaupt kein ausschliesslich convergirendes oder divergirendes Lichtbündel. Die Eintrittsfläche der Biconvexlinsen auf Tafel I erzeugt ein solches zuerst convergirendes, dann wieder divergirendes Bündel, und es kommt nur auf den mehr äusserlichen Umstand an, ob die Austrittsfläche vor, in oder hinter dem Convergenzpunkte dieser Bündel in den Weg tritt.

Im ersten Falle tritt dann ein convergentes Bündel aus, in den anderen Fällen entweder ein divergentes, ein paralleles oder ein verkehrt convergentes, je nachdem der zweite Brennpunkt der ersten Fläche vor, in oder hinter den ersten Brennpunkt der zweiten Fläche zu liegen kommt.

Die beiden Flächen wirken ähnlich wie zwei getrennte Convexlinsen. Ein von der ersten erzeugtes verkehrtes reelles Bild dient der zweiten als Object und wird als nochmals umgekehrtes, also aufrechtes reelles Bild reproducirt, wenn die Dicke der Linse mehr als $\left(\frac{n}{n-1}\right)(R+R')$ beträgt.[1]

Aus diesen, zum Theil längst bekannten Sätzen folgt, dass die Bezeichnung: »Convergente und divergente Linsen« eine unzweckmässige, weil unter Umständen irreführende ist. Ob das austretende Strahlenbündel für sich betrachtet convergirt oder divergirt, ist gar nicht charakteristisch für die Linse, nur die Lage der Strahlen mit Beziehung auf ihre Lage vor dem Eintritt ist es. Diese Charakteristik wird

[1] Vergleiche die Bemerkungen über Fernrohre aus einem Glasstück in dem Buche von E. Reusch, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten, S. 38.

aber durch das Vorzeichen der Brennweite viel besser gegeben, daher die Eintheilung der Linsen in positive und negative viel rationeller ist als in convergente und divergente. Es ist hieraus auch ersichtlich, wie genial und zweckmässig die Einführung von Gauss war, die Brennweite vom Hauptpunkte an zu rechnen.

Wir haben schon im Eingange bemerkt, dass Alles hier Gesagte bereits in der Gauss'schen Theorie enthalten ist. Dennoch halten wir unsere Studie in didaktischer Hinsicht nicht für überflüssig und glauben auch, dass sich die in den Tafeln gegebene Darstellung zum Unterrichte in der Dioptrik empfehlen dürfte.

Linsendicke unter $\frac{n}{n-1}(R+R')$
Brennweite u. Schnittwt. negat.
Strahlenbündel divergent

Brennweite und Schnittweite ∞

Linsendicke zwischen $\frac{n}{n-1}(R+R')$ u. $\frac{n}{n-1}R$,
Brennweite und Schnittweite positiv.
Strahlenbündel convergent

Schnittweite ∞

Linsendicke über $\frac{n}{n-1}R$
Brennweite positiv Schnittweite negativ.
Strahlenbündel verkehrt divergent

Autor del. Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien

Untersuchungen über permanente Magnete. I.

Über die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten vom Dimensionsverhältniss

von

Ignaz Klemenčič.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1899.)

Die Zahl der Untersuchungen über permanente Magnete ist ausserordentlich gross, und es könnte beinahe scheinen, als wäre in dieser Richtung nichts mehr zu thun. Allein dies ist nicht der Fall. Die Bedeutung eines guten permanenten Magnets für die messende Physik und Elektrotechnik wird allgemein anerkannt; doch scheint die Möglichkeit der Herstellung genügend permanenter Magnete erst durch die Erfahrungen der allerneuesten Zeit wieder näher gerückt, nachdem man lange an ihr gezweifelt hatte, wie dies du Bois in seinem Buche: »Magnetische Kreise u. s. w.« ganz richtig bemerkt. In der That hat man in neuerer Zeit Magnetstahlsorten hergestellt, welche den alten gegenüber einen ausserordentlichen Fortschritt bedeuten. Das Verhalten dieser Stahlsorten muss noch in mancher Beziehung erforscht werden; ja es gibt noch Fragen allgemeiner Natur zu erledigen, welche sich auf permanente Magnete überhaupt beziehen. Im Nachfolgenden soll nun über Untersuchungen berichtet werden, welche mit vielen Probestücken aus verschiedenen Stahlsorten angestellt wurden und zunächst allgemeine Fragen betreffen, dann aber auch einigen Aufschluss über den Werth verschiedener Stahlsorten liefern sollen. Zur Durchführung dieser Untersuchungen hat mir die hohe kaiserl. Akademie eine Subvention bewilligt, wofür ich ihr sehr zu Dank verpflichtet bin.

Die erste Untersuchung, deren Resultate hiemit veröffentlicht werden, betrifft den Temperaturcoëfficienten eines Magnets, respective dessen Abhängigkeit vom Dimensionsverhältniss, wobei ich unter letzterem das Verhältniss der Länge des Magnets zu dessen Seite (bei quadratischem Querschnitt) verstehe. In dieser Beziehung sind bisher nur spärliche Beobachtungen gemacht worden. S. Thompson gibt in seinem bekannten Buche: »Der Elektromagnet«, S. 361 einige diesbezügliche Daten, welche von Cancani gefunden wurden. S. Thompson sagt jedoch an derselben Stelle: »Der Temperaturcoëfficient von Magneten ist jedenfalls eine Function ihrer Gestalt; es scheint auch, dass Magnete von kurzer cylindrischer Form grosse Coëfficienten besitzen, Magnete von mehr verlängerter Gestalt kleinere Coëfficienten. Magnete, die so gestaltet sind, dass sie fast einen geschlossenen magnetischen Kreis bilden, haben Temperaturcoëfficienten von nahezu Null, möglicherweise zeigen sie sogar einen negativen Werth.« Wie man sieht, hält S. Thompson diese Frage noch nicht für erledigt.

Die Untersuchung der Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten vom Dimensionsverhältniss bietet nun in der That verschiedene Schwierigkeiten. Zunächst muss man hiezu Magnete von verschiedener Länge, aber sonst ganz gleichen Eigenschaften haben. Insbesondere sollen die Probestücke eine ganz gleiche Behandlung beim Schmieden und Härten erfahren, welche Forderung die Herstellung äusserst erschwert. Die von mir untersuchten 18 Stahlstücke hat die Firma Böhler & Cie., welche ja am ehesten in der Lage ist, die erwähnten Bedingungen zu erfüllen, in bereitwilligster Weise verfertigt und geliefert. Eine Untersuchung des specifischen elektrischen Widerstandes der Probestücke hat ergeben, dass das gleichmässige Härten der einzelnen Gruppen ziemlich gut gelungen ist. Überdies hat die Firma Böhler & Cie., deren Magnetstahl sich bereits als ausgezeichnet bewährt hat, zu den Probestücken die besten neuesten Magnetstahlsorten verwendet.

Das magnetische Moment eines Stabes nimmt mit der Temperatur ab; dies ist offenbar darauf zurückzuführen, dass bei höherer Temperatur die Streuung der Kraftlinien etwas

grösser ist als bei niederer und dass in Folge dessen eine Verschiebung der Pole eintritt. Der Temperaturcoëfficient ist nun das Resultat der gleichzeitigen Verschiebung beider Pole; diese scheint jedoch in den meisten Fällen für die beiden Enden etwas ungleich zu sein, was durch einen kleinen Unterschied in der Härtung erklärt werden kann. Es entspringt hieraus eine besondere Schwierigkeit bei der Beobachtung. Wird nämlich der Magnet sehr nahe an das Magnetometer gebracht, was bei dünneren Magneten gewöhnlich geschehen muss, so zeigt das Magnetometer eine ungleich starke Änderung des magnetischen Momentes je nach der Lage der Pole gegenüber der Magnetometernadel und je nach der Entfernung des Magnets an. Der richtige Werth des Temperaturcoëfficienten würde nur bei grosser Entfernung des Magnets vom Magnetometer gefunden werden, wobei man jedoch kaum genügend grosse Änderungen an der Scalenablesung bei verschiedenen Temperaturen bekommen könnte, um den Temperaturcoëfficienten noch halbwegs richtig zu bestimmen. Die Überwindung dieser Schwierigkeiten hat viel Mühe gekostet, bis endlich die richtige Sachlage erkannt und die definitive Beobachtungsmethode aufgefunden wurde. Die Versuche habe ich schliesslich immer so gemacht, dass einmal ein Pol und dann der andere gegen das Magnetometer gekehrt war. Überdies beobachtete ich auch immer aus zwei verschiedenen Entfernungen. Auf diese Weise glaube ich wirklich jene Änderung des Momentes gefunden zu haben, welche für die Fernwirkung auf eine sehr entfernte Magnetnadel oder für das Verhalten des Magnets im homogenen Felde massgebend ist.

Die Versuchsmethode und die Apparate.

Zur Bestimmung des Temperaturcoëfficienten wurde ein Verfahren angewendet, welches im Princip schon von W. Weber[1] angegeben worden ist. Der zu untersuchende Magnet wird in einer mässigen Entfernung gegenüber einer kleinen Magnetometernadel in der ersten Hauptlage angebracht. Die grosse Ablenkung der Magnetometernadel wird jedoch abcompensirt.

[1] F. Kohlrausch, Praktische Physik, 8. Aufl., S. 276.

Weber machte dies mit einem Hilfsmagnet. Bei den vorliegenden Versuchen geschah es durch die Wirkung einer in der Nähe der Magnetometernadel angebrachten, von einem Strome durchflossenen Spule. Man kann nach Aufstellung des Versuchsmagnets durch die Gegenwirkung des Stromes die Einstellung der Nadel genau auf Null zurückführen, indem man die Stärke des Stromes durch Ein- oder Ausschaltung von Widerständen im Stromkreise variirt. Die Manganinwiderstände, sowie die Accumulatoren, welche durchwegs gebraucht wurden, geben einen ausserordentlich constanten Strom, welcher sich zu diesem Zwecke vorzüglich eignet. Dabei muss natürlich der

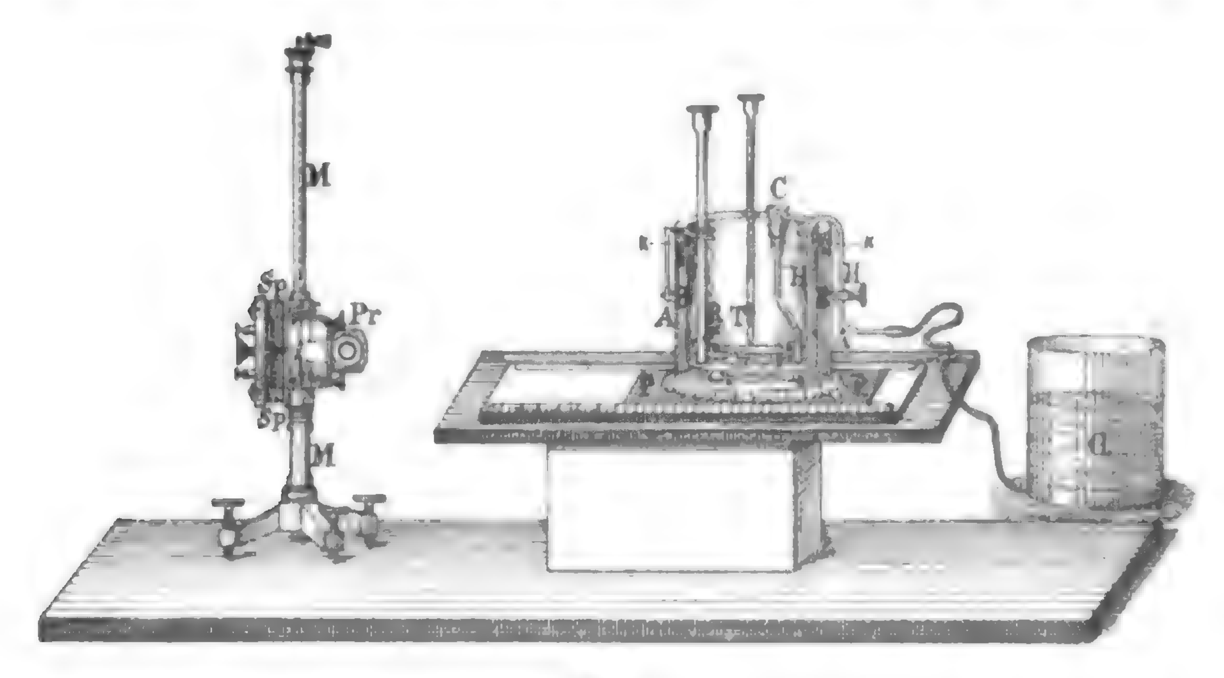


Fig. 1.

äussere Widerstand (Manganin) gegen den Widerstand der Ablenkungsspule (Kupfer) sehr gross sein, damit die Temperaturschwankungen keinen bemerkenswerthen Einfluss ausüben können. In unserem Falle war der Widerstand der Spule 118 Ω, jener des äusseren Kreises gewöhnlich über 1000 Ω, wobei zwei oder drei Accumulatoren zur Anwendung kamen. Die Ablenkungen der Magnetometernadel wurden mit Fernrohr Spiegel und Scala beobachtet.

Der zu den Messungen verwendete Apparat ist in Fig. 1 abgebildet. *MM* ist ein Magnetometer aus Messing mit drei Stellschrauben. Die Magnetometernadel, bestehend aus einem runden Stahlspiegel, ist auf einem langen Coconfaden auf-

gehängt und von einem Kupferdämpfer umgeben. Die Galvanometerspule *Sp* ist durch Schrauben mit dem Dämpfer fest verbunden. Vor der Galvanometernadel ist am Dämpfer ein Reflexprisma *Pr* angebracht, welches die Visur mit dem Fernrohr in einer zur Ost—Westlage senkrechten Richtung gestattet. Der Abstand der Scala vom Spiegel betrug 1650 *mm*. Das Magnetometer war auf einer in die Mauer eingemauerten Steinplatte aufgestellt.

Der zu untersuchende Magnet wurde in der ersten Hauptlage in einem eigens für diese Versuche construirten Gefässe, das ich kurzweg als Calorimeter bezeichnen will, untergebracht. Das Calorimeter besteht aus einem grösseren äusseren *AA* und einem kleineren inneren Messinggefäss *BB*, welche durch keilförmig zugeschnittene Korke *k* derart von einander getrennt sind, dass zwischen ihnen eine Lufthülle von 1·5 *cm* Dicke vorhanden ist. Das innere Gefäss, dessen Höhe und Durchmesser 13 *cm* beträgt, ist am Boden mit zwei ebenfalls keilförmig zugeschnittenen Korken versehen, über welche der zu untersuchende Magnet *ns* gelegt wird. Überdies befindet sich im inneren Gefäss eine Rührvorrichtung *R*, ein in $^1/_{10}{}^\circ$ getheiltes Thermometer *T*, ein Trichter *C*, dessen Rohr nahe bis an den Boden des Gefässes reicht und endlich ein Heberrohr *HH*, dessen eine Mündung knapp am Boden von *H* endigt, während die andere mit einem Kautschukschlauch versehen ist, der zum grossen Gefässe *G* führt. Durch den Trichter wird das innere Gefäss mit kaltem oder warmem Wasser gefüllt; mittelst des Heberrohres kann es ohne Erschütterung rasch wieder entleert werden. Zu diesem Zwecke ist es nur nothwendig, das Reservoirgefäss *G* zunächst zu heben und dann zu senken. Damit bei dieser Manipulation das Calorimeter durch den Kautschukschlauch nicht verschoben wird, ist dieser an der sehr soliden Grundlage des Calorimeters befestigt. Das äussere Gefäss ist in einer rechteckigen Messingplatte *PP* drehbar angebracht, und es kann die Einstellung des Calorimeters an einer Kreistheilung abgelesen werden. Die Platte *PP* lässt sich in einer Schlittenführung längs einer Scala hin- und herschieben. Durch Schrauben kann der ganze Apparat in irgend einer Lage festgestellt werden.

Der Schlitten wurde so aufgestellt, dass seine Mittellinie ziemlich genau die Ost—Westrichtung hatte und möglichst genau die Richtung gegen eine durch die Mitte der Magnetometernadel gelegte Verticale einhielt. Das Schlittenbrett wurde gegenüber dem Magnetometer auf das sorgfältigste fixirt und in einer solchen Höhe angebracht, dass der eingelegte Versuchsmagnet gerade in die Höhe der Magnetometernadel zu liegen kam. Der Versuchsmagnet wurde zunächst nur beiläufig in die Ost—West-Richtung eingelegt und die genauere Einstellung in die erste Hauptlage durch Drehung des Calorimeters innerhalb des getheilten Kreises bewirkt. Dieses Calorimeter war ausreichend für Magnete bis zu circa 12 *cm* Länge; da ich jedoch auch einige Messungen mit Magneten von 15 *cm* Länge anzustellen hatte, so wurde für diese ein anderes grösseres Calorimeter hergerichtet, welches zwar nicht alle Details, aber doch im Allgemeinen eine ähnliche Einrichtung, wie das soeben beschriebene zeigte.

Als Beobachtungstemperaturen wählte ich bei einer Reihe von Versuchen erstens eine Temperatur von ungefähr 8°5 bis 9°, hervorgebracht durch Eingiessen von Wasserleitungswasser, und zweitens eine solche von 30—32°, entsprechend der Temperatur eines etwas vorgewärmten Wassers, von welchem immer vor Beginn der Versuche eine grössere Quantität bereitet wurde. Bei einer anderen Reihe von Versuchen habe ich Messungen bei drei Temperaturen angestellt, und zwar bei 2·0 bis 2°5 (Mischung von Wasser mit Schnee), bei 16—18° (Wasser von der Zimmertemperatur) und schliesslich bei 33° bis 35° (vorgewärmtes Wasser wie oben).

Der Vorgang bei den Beobachtungen war nun der folgende: Nach Einlegen des Magnets ins Calorimeter und möglichst genauer Orientirung in die erste Hauptlage wurde das Calorimeter auf eine passende, mässige Entfernung zum Magnetometer herangeschoben und die Ablenkung mit Hilfe eines constanten Stromes compensirt, zu dessen Lieferung, wie bereits erwähnt, zwei bis drei Accumulatoren und zu dessen Regulirung Manganinwiderstände dienten. Manchmal war der Vorgang auch so, dass schon a priori ein bestimmter Strom durch

die Galvanometerspule geschickt und die Compensation durch Verschiebung des Calorimeters bewirkt wurde.

Da eine dauernde Abnahme des Momentes überhaupt durch die aufeinander folgenden Temperaturunterschiede möglich schien, wurde bei den ersten zwei oder vier Wechseln noch nicht beobachtet.

Eine dauernde Abnahme des Momentes kann übrigens an der Scala leicht constatirt werden. Eine solche war allerdings bei einigen, jedoch nicht bei allen Probestücken, und zwar nur nach dem ersten Temperaturwechsel zu constatiren. Obwohl beim Eingiessen des Wassers der Stoss desselben durch den Ausfluss aus der nahe am Boden befindlichen Trichtermündung stark gedämpft wurde, hatte ich doch den Magnet in den meisten Fällen noch mit einem Metallstück beschwert, um seine Stabilität zu erhöhen. Das Calorimeter wurde nun abwechselnd mit kaltem und warmem Wasser beschickt. Vor jeder Beobachtung wurde das Wasser im Calorimeter mittelst der Rührvorrichtung gemischt, dann noch kurze Zeit gewartet und schliesslich die Ablesung an der Scala und am Thermometer gemacht. Für jeden Fall und jede Entfernung des Magnets vom Magnetometer bekam das Calorimeter sieben Füllungen abwechselnd mit kaltem und warmem Wasser, woraus drei Werthe für den Einstellungsunterschied bei höherer und niederer Temperatur folgen. Mit den meisten Probestücken wurde aus zwei Entfernungen und an beiden Polen beobachtet. Dies gibt zusammen 28 Scalenablesungen und 12 Werthe für den Stellungsunterschied, welche zu Mittelwerthen zusammengezogen wurden.

Aus dem Einstellungsunterschied und der compensirten Ablenkung lässt sich der Temperaturcoëfficient leicht berechnen. Um die compensirte Ablenkung zu bestimmen, wurde der Versuchsmagnet entfernt und in den Stromkreis ein grosser Widerstand eingeschaltet, der eine an der Scala ablesbare Ablenkung ergab. Aus dieser und dem bekannten Verhältniss der Widerstände lässt sich die durch den Strom compensirte Ablenkung berechnen.

Die Versuchsmagnete.

Zur Durchführung dieser Versuche mussten Magnete von sonst ganz gleicher Eigenschaft, aber verschiedenem Dimensionsverhältniss genommen werden. Es schien am besten, die einzelnen Probestücke aus demselben Stabe herzustellen und ihnen nur verschiedene Längen zu geben. Zu diesem Zwecke konnte aber der Querschnitt nicht zu gross gewählt werden, da sonst einzelne Magnete eine für die Beobachtung ungünstige Länge erhalten hätten. Ich wählte daher einen quadratischen Querschnitt von 4 *mm* Seitenlänge. Nur drei Probestücke hatten quadratischen Querschnitt mit 6 *mm* Seitenlänge. Für die Magnete mit 4 *mm* Seite wurde die Länge zu 4, 6, 8, 10 und 15 *cm* genommen, für die anderen drei zu 3, 6 und 9 *cm*. Die Probemagnete hat mir, wie schon erwähnt, die Firma Böhler & Cie. in der bereitwilligsten Weise unentgeltlich überlassen und auch deren Härtung besorgt; es wurden drei Wolframstahlsorten mit den Marken »45«, »00« und »U I« verwendet und aus jeder Sorte 5 Probestücke von nahezu gleichem Querschnitt und den oben angeführten Längen hergestellt. Die drei Versuchsmagnete mit 6 *mm* Seite und den Längen von 3, 6 und 9 *cm* hatten die Marke »45«. Ich hatte also drei Gruppen zu je 5 Magnete mit den Dimensionsverhältnissen von 10, 15, 20, 25 und 37·5 und drei Stücke von 5, 10 und 15, wobei, wie erwähnt, mit diesen Zahlen angegeben wird, wie oft die Seite in der Länge enthalten ist.

Die Magnete wurden im homogenen Felde einer langen Spule magnetisirt, und zwar bei mehrmaligem Stromwechsel und bei plötzlicher Unterbrechung des magnetisirenden Stromes. Die Feldstärke betrug 865 abs. E.

Um einen Einblick in die Gleichmässigkeit der Härtung bei den verschiedenen Gruppen zu gewinnen, habe ich den specifischen Widerstand der einzelnen Probestücke bestimmt, und zwar mit Hilfe von 2 Stahlschneiden, über welche der Magnet gelegt wurde. Er befand sich neben einem Vergleichswiderstand von 0·0017 Ω in einem Stromkreise, und es konnte mit Hilfe eines Rubens-du Bois-Galvanometers der Potentialunterschied zwischen dem Vergleichswiderstand und

den um 2·2 *cm* auseinanderstehenden Stahlschneiden gemessen werden. Zur Sicherung eines guten Contactes zwischen den Stahlschneiden und dem Magnet wurde letzterer mittelst eines mit Korkunterlage versehenen Hebels gegen die Stahlschneiden gedrückt. Bei den längeren Magneten habe ich eine Messung des specifischen Widerstandes sowohl in der Mitte, als auch an den beiden Enden, sonst jedoch nur in der Mitte vorgenommen.

In der Tabelle I sind die näheren Daten über die Magnete eingetragen.

In der Rubrik »Bez.« sind die Probestücke mit der die Stahlsorte kennzeichnenden Marke nebst der auf ganze Centimeter abgerundeten Länge eingetragen;

unter L ist die genaue Länge in Millimetern verzeichnet;

S bedeutet die Seitenlänge, und zwar bei den längeren Magneten gemessen am Südpol (—), in der Mitte (0) und am Nordpol (+); sonst aber nur in der Mitte;

σ ist der specifische Widerstand in Ohm mit der gleichen Bezeichnung für die Enden und die Mitte wie vorher;

V bedeutet das genaue Dimensionsverhältniss;

M das magnetische Moment in abs. E.;

G das Gewicht und

m den specifischen Magnetismus, bezogen auf 1 *g*.

Um zu sehen, wie nahe die Magnete im genannten Felde ihrem Sättigungspunkte gebracht wurden, habe ich das Stück 00, 4 einmal im Felde von 793* und sodann in einem solchen von 922 Einheiten magnetisirt. Das Moment des Magnets hatte im zweiten Falle um 1·2% zugenommen. Unter den gleichen Umständen erhöhte sich das Moment 00, 6 nur um 0·5%. Dies ist wohl ein Beweis, dass selbst die kurzen Magnete nahezu bis zur Sättigung magnetisirt waren. Etwas anders liegt die Sache bei 45, 3, dessen Dimensionsverhältniss 5 ist, bei dem also die entmagnetisirende Kraft der Enden schon sehr gross ist. Das Moment steigerte sich bei gleicher Erhöhung

* Zur Magnetisirung wurden Ströme von 12 bis 14·5 A. verwendet. Um eine zu starke Erwärmung der Spule zu vermeiden, wurde der Strom immer nur ganz kurz geschlossen.

Tabelle I.

Bez.	L	S			σ			V	M	G g	m
		+	0	—	+	0	—				
45, 4	40·0		4·06			39·8		9·85	106	5·04	21·0
45, 6	60·7		4·00			39·1		15·2	278	7·46	37·3
45, 8	80·5		3·91			39·5		20·6	492	9·72	50·1
45, 10	100·0	3·96	3·93	3·91	39·4	39·2	38·8	25·4	746	12·03	62·1
45, 15	150·7	3·99	3·96	4·02	37·5	38·5	39·0	37·7	1352	18·68	72·2
U I, 4	41·0		4·08			36·8		10·1	115	5·10	22·6
U I, 6	61·0		4·04			36·2		15·2	286	7·52	38·0
U I, 8	80·0		3·90			35·2		20·8	513	9·35	54·7
U I, 10	100·5	4·03	3·97	4·02	36·7	36·4	36·8	25·3	770	12·32	62·5
U I, 15	151·0	3·99	3·94	4·02	36·6	36·3	38·5	37·7	1425	18·23	78·3
00, 4	40·6		3·94			45·2		10·3	137	4·92	27·8
00, 6	60·3		3·89			45·4		15·5	309	7·32	42·3
00, 8	80·3		3·95			45·8		20·3	495	9·80	50·5
00, 10	100·5	3·96	3·91	3·92	43·2	43·2	44·1	25·6	745	12·10	61·5
00, 15	150·3	4·05	3·96	3·96	44·1	44·1	43·9	37·6	1296	18·74	69·2
45, 3	30·1		5·97			34·2		5·0	67	8·26	8·1
45, 6	60·2		5·95			34·0		10·1	327	16·73	19·5
45, 9	90·3	5·96	5·94	5·97	33·7	33·3	33·8	15·2	803	24·77	32·5

des Feldes wie oben um circa 7%. Dieser Magnet wurde sodann zwischen die Pole eines allerdings nicht sehr starken, durch einen Strom von 14 A. erregten Plücker'schen Elektromagnet gebracht, wobei das Moment wieder um 15% zunahm. Der specifische Widerstand ist für die einzelnen Stücke einer Gruppe ziemlich gleich, was also auf eine nahezu gleiche Härtung derselben schliessen lässt. Allerdings sind kleine Unterschiede vorhanden, worauf ich bei der Besprechung der Schlussresultate zurückkommen werde.

Die Versuchsresultate.

Wie schon eingangs erwähnt, hat es sich gezeigt, dass man in den meisten Fällen einen etwas verschiedenen Temperaturcoëfficienten bekommt, je nachdem der eine oder der andere Pol dem Magnetometer zugekehrt ist. Der Unterschied wird dabei umso bemerkbarer, je näher man an das Magnetometer heranrückt. Diese Erscheinung ist jedenfalls auf eine ungleiche Härtung der beiden Pole zurückzuführen, was an einigen Beispielen weiter unten erläutert werden soll. Ich habe also stets so beobachtet, dass einmal der eine und dann der andere Pol gegen das Magnetometer gekehrt war. Aus beiden Werthen nahm ich das Mittel. Überdies beobachtete ich auch stets, mit Ausnahme der längsten Magnete, bei zwei verschiedenen Entfernungen. Die in diesen beiden Entfernungen bestimmten Werthe des Temperaturcoëfficienten stimmen recht gut mit einander.

Bedeutet δ den Stellungsunterschied an der Scala für die Temperaturen t_2 und t_1, ist ferner α der einseitige Ausschlag der Magnetometernadel beim Widerstande W im Stromkreise und w der Widerstand im Falle der Compensation, so berechnet sich der Temperaturcoëfficient μ aus der Formel:

$$\mu = \frac{\delta}{t_2 - t_1} \frac{w}{W\alpha}.$$

Zunächst möge hier ein Beispiel einer Beobachtung angeführt werden, welche mit 45, 4, und zwar bei drei verschiedenen Entfernungen des Magnets vom Magnetometer, denen natürlich drei verschiedene Werthe von w entsprechen, angestellt wurde. Das Zeichen + bedeutet, dass der Nordpol, — dass der Südpol gegen das Magnetometer gekehrt war.

45·4; 2 Acc.; $W = 68380\ \Omega$; $\alpha = 83·7$

+

$w =$ 4213	2759	1558
$\mu =$ 0·000421	0·000413	0·000390

w =	4194	2750	1572
μ =	0·000450	0·000464	0·000486
Mittel μ =	0·000435	0·000438	0·000438

Die Mittelwerthe stimmen alle recht gut überein, trotzdem die bei der kleinsten Distanz beobachteten Werthe sehr stark differiren. Für die definitiven Beobachtungen habe ich nur zwei, und zwar möglichst grosse Entfernungen gewählt, so dass ich gerade noch einen gut beobachtbaren Stellungsunterschied erhielt. Dieser bewegte sich in den meisten Fällen bei einer Temperaturdifferenz von 20° zwischen 10 und 30 Scalentheilen. Bei den längsten Magneten, die ein sehr kleines μ haben, musste ich mich sogar mit Stellungsunterschieden unter 10 Scalentheilen begnügen. Die Genauigkeit wurde durch die grosse Zahl der Beobachtungen erhöht; dabei konnte natürlich nur zu Zeiten beobachtet werden, wo in der Umgebung eine grosse Ruhe herrschte, denn es handelte sich doch darum, die Richtigkeit der Beobachtungen bis in die Zehntel eines Scalentheiles zu treiben. Das physikalische Institut hier hat nun in dieser Beziehung eine sehr ungünstige Lage und räumliche Eintheilung, so dass diese Messungen mit grossen Schwierigkeiten verbunden waren.

In den nachfolgenden Tabellen II und III theile ich die Resultate mit.

Unter »Acc.« ist die Anzahl der verwendeten Accumulatoren und unter $T = \frac{t_2 + t_1}{2}$ die mittlere Beobachtungstemperatur eingetragen. Die Bedeutung der übrigen Zeichen und Buchstaben ist bereits oben erklärt worden.

Aus diesen Tabellen wollen wir nun die Daten für 45, 10, 45, 15, U I, 15, 00, 10 und 00, 15 etwas näher betrachten und nachsehen, wie der für eine bestimmte Polrichtung gefundene Werth vom specifischen Widerstand, respective von der Härte des Pols abhängt. Bei 45, 15 ergab der +Pol einen kleineren Temperaturcoëfficienten als der —Pol; dafür ist σ für den ersteren grösser als für den letzteren, d. h. der Pol mit grösserem specifischen Widerstande hatte den kleineren Temperaturcoëfficienten; dasselbe trifft auch bei U I, 15, 00, 10

Tabelle II.

Bez.	Acc.	$W\Omega$	a	+			—			Mittel μ	Mittel $T°$
				$w\Omega$	$T°$	μ	$w\Omega$	$T°$	μ		
45, 4	2	68380	83·7	4213 2759	18·7 19·5	0·000421 413	4194 2750	20·2 19·5	0·000450 464	0·000435 438	19·5 19·5
45, 6	2	68380	83·3	1931 1343	19·5 19·2	293 292	1926 1335	19·7 19·4	308 316	301 304	19·6 19·3
45, 8	2	68380	83·3	1929 1330	20·1 20·1	214 212	1936 1345	19·5 19·5	213 211	213 211	19·8 19·8
45, 10	3	108150	78·7	1917 1334	19·6 19·6	165 156	1946 1323	20·2 19·6	186 199	175 177	19·9 19·6
45, 15	3	108150	79·3	5668	20·7	127	6018	21·0	143	135	20·8
U I, 4	2	68380	83·2	4185 2741	19·4 19·3	0·000464 461	4091 2732	19·0 19·3	0·000506 476	0·000485 469	19·2 19·3
U I, 6	2	68380	83·3	2768 1879	19·9 20·3	344 337	2768 1931	19·4 19·0	348 382	346 359	19·6 19·6
U I, 8	2	68380	84·5	1879 1118	19·6 19·6	237 230	1879 1115	19·4 19·9	269 292	253 261	19·5 19·6
U I, 10	2	68380	84·4	1892 1129	19·2 20·1	207 202	1885 1120	20·0 19·7	209 222	208 212	19·6 19·9
U I, 15	3	108150	79·6	7468	19·9	150	7918	2·01	131	140	20·0

Tabelle III.

Bez.	Acc.	W	α	+			—			Mittel μ	Mittel T
				w	T	μ	w	T	μ		
00, 4	3	108150	79·4	8586 2882	20·2 20·5	0·000275 257	8586 2816	19·9 19·7	0 000278 290	0·000276 274	20·0 20·1
00, 6	3	108150	79·4	5494 2741	20·0 19·8	174 168	5494 2741	19·9 19·8	186 187	180 178	19·9 19·8
00, 8	3	108150	79·2	5613 2773	20·3 20·4	137 131	5547 2750	19·9 19·8	140 142	139 136	20·1 20·1
00, 10	3	108150	79·3	5518 2806	19·9 20 0	156 163	5518 2783	19·8 19·6	150 151	153 157	19·8 19·8
00, 15	3	108150	79·4	5918	19·8	130	5838	20·9	152	141	20·4
45, 3	2	68360	83 8	5522 3665	20·6 20·0	0·000703 696	5530 3590	20·5 19·5	0·000711 719	0·000707 707	20·5 20·0
45, 6	3	108150	79·5	8586 4091	20·4 20·1	481 482	8548 4091	20·0 20·0	494 486	488 484	20·2 20·0
45, 9	3	108150	79·5	4288	19·5	357	4561	19·9	361	359	19·9 19·7

und 00, 15 zu; nur bei 45, 15 stimmt diese Regel nicht. Wir können daher unsere Vermuthung, dass der Unterschied in den Werthen des Temperaturcoëfficienten für die beiden Polrichtungen auf einen Unterschied in der Härte der beiden Pole zurückzuführen ist, als durch die Erfahrung bestätigt ansehen, wobei wir freilich für 45·15 einen Beobachtungsfehler annehmen müssen.

In Tabelle IV sind nun die Schlussmittelwerthe für μ und $T = \frac{t_2 + t_1}{2}$ zusammengestellt. Daselbst ist auch nochmals das Dimensionsverhältniss V und das Product $\mu . V . 10^4$ verzeichnet. Hieraus ist das Gesetz der Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten vom Dimensionsverhältniss ziemlich gut zu erkennen. Die Producte sind nämlich im Allgemeinen für die Probestücke einer Gruppe nahezu constant, obwohl es sich nicht bestreiten lässt, dass mitunter ganz bemerkbare Abweichungen von dieser Regel vorkommen. Hiefür lässt sich jedoch ein ziemlich annehmbarer Grund finden, der dieses Verhalten wenigstens qualitativ erklärt. Die Constanz dieses Productes bedeutet, dass der Temperaturcoëfficient dem Dimensionsverhältniss verkehrt proportional ist.

Tabelle IV.

Bez.	μ	T	V	$\mu \times V \times 10^4$
45, 4	0·000437	19·5	9·9	42·2
45, 6	301	19·5	15·2	46·5
45, 8	213	19·8	20·6	43·7
45, 10	176	19·7	25·4	44·8
45, 15	135	20·8	37·7	51·8
U I, 4	0·000477	19·3	10·1	48·1
U I, 6	352	19·6	15·2	53·5
U I, 8	257	19·5	20·8	53·5
U I, 10	210	19·7	25·3	53·2
U I, 15	140	20·0	37·8	53·2

Bez.	μ	T	V	$\mu \times V \times 10^4$
00, 4	0·000275	20·0	10·3	28·3
00, 6	179	19·8	15·5	27·6
00, 8	137	20·1	20·3	27·6
00, 10	155	19·8	25·6	39·6
00, 15	141	20·4	37·6	53·0
45, 3	0·000707	20·3	5·04	35·7
45, 6	486	20·1	10·1	49·1
45, 9	359	19·9	15·2	54·5

Wie aus den Tabellen ersichtlich, war die mittlere Beobachtungstemperatur T nicht in allen Fällen ganz gleich. Sie schwankte z. B. bei der Gruppe 45 zwischen 19·5 und 20·8. Nun ist bekannt, dass der Temperaturcoëfficient mit zunehmender Temperatur wächst; es sollten daher die Werthe von μ auf dieselbe mittlere Temperatur reducirt werden. Wie wir jedoch weiter unten sehen werden, ist die Zunahme des Temperaturcoëfficienten mit der Temperatur keine so grosse, dass diese Schwankungen von T bei der Zusammenstellung des Resultates hätten berücksichtigt werden müssen.

Wenn wir nun auf die Abweichungen des Productes von einer vollkommenen Constanz zu sprechen kommen, so können wir dieselben in zwei Kategorien eintheilen: 1. In ziemlich grobe Abweichungen, wie sie sich etwa in der Gruppe 00 für die Magnete 00, 10 und 00, 15 und in der letzten Gruppe namentlich für 45, 3 ergeben. 2. In kleinere Abweichungen, wie sie z. B. in der ersten Gruppe 45 für die beiden Endmagnete 45, 4 und 45, 15 auftreten. Wir wollen in einer besonderen Tabelle V die Werthe des Productes $\mu \times V \times 10^4$ und des specifischen Widerstandes σ zusammenstellen. Wenn man nun die erste Gruppe »45« ins Auge fasst, so erkennt man sehr deutlich, dass die Schwankungen des Productes mit den Werthen von σ gerade verkehrt verlaufen, wie dies aus den in Fig. 2 verzeichneten Curven besonders deutlich hervorgeht.

Bei durchaus gleichen Werthen von σ würde auch das Product ganz constant sein. Auch in Gruppe »U I« finden sich ähnliche

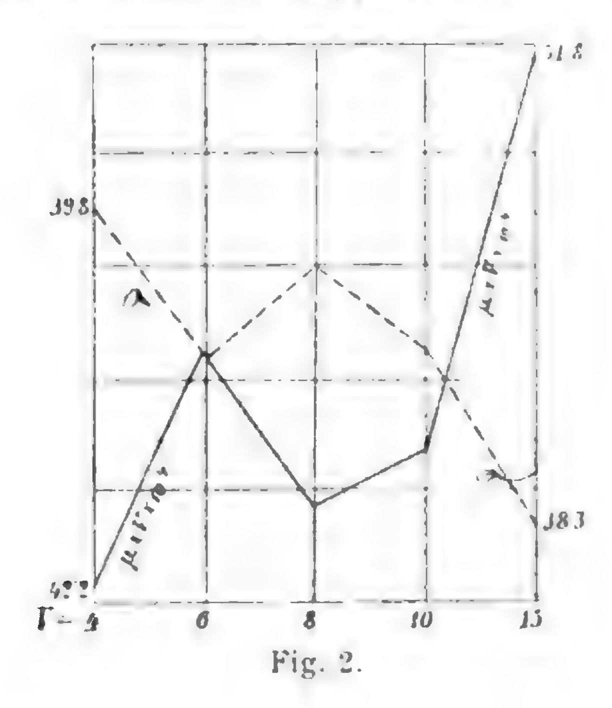


Fig. 2.

kleine Schwankungen, wenn auch deren Zusammenhang mit den Werthen von σ nicht so deutlich ausgeprägt ist wie bei »45«.

Tabelle V.

Bez.	$\mu \times \Gamma \times 10^4$	σ	Bez.	$\mu \times \Gamma \times 10^4$	σ
45, 4	42·2	39·8	U I, 4	48·1	36·8
45, 6	46·5	39·1	U I, 6	53·5	36·2
45, 8	43·7	39·5	U I, 8	53·5	35·2
45, 10	44·8	39·1	U I, 10	53·2	36·6
45, 15	51·8	38·3	U I, 15	53·2	37·1
00, 4	28·3	45·2	45, 3	35·7	34·2
00, 6	27·6	45·4	45, 6	49·1	34·0
00, 8	27·6	45·8	45, 9	54·5	33·6
00, 10	39·6	43·6			
00, 15	53·0	43·7			

Die groben Abweichungen bei 00, 10 und 00, 15 dürften nun auch wenigstens zum Theile durch die Verschiedenheit von σ erklärt werden können, da ja diese beiden Magnete

beträchtlich kleineren specifischen Widerstand aufweisen wie die anderen drei derselben Gruppe. Zu den Abweichungen bei der letzten Gruppe »45« muss bemerkt werden, dass der Werth von μ für 45, 3 bei einem Moment von 67 abs. E. gilt. Der Temperaturcoëfficient wächst nun im Allgemeinen mit dem Moment. Als dieser Magnet durch Magnetisiren an einem Elektromagnet auf das Moment von 77 abs. E. gebracht wurde, zeigte er auch einen um 1·3% höheren Werth des Temperaturcoëfficienten. Möglicherweise war er aber auch da noch nicht am Sättigungspunkt angelangt. Im Allgemeinen wird also der bei 45, 3 verzeichnete Werth von μ wegen des noch nicht erreichten Maximums dés Momentes zu klein sein; dann aber ist es auch noch sehr wahrscheinlich, dass die oben ausgesprochene Regel von der Beziehung zwischen dem Temperaturcoëfficienten und dem Dimensionsverhältniss für Werthe des Dimensionsverhältnisses, die kleiner als 10 sind, gar nicht mehr gilt. Das gefundene Gesetz kann jedenfalls nur für das Gebiet der hier untersuchten Dimensionsverhältnisse, deren Werth zwischen 10 und 37 liegt, als bewiesen angesehen werden.

Bei der Berechnung des Temperaturcoëfficienten aus den mitgetheilten Beobachtungen habe ich für den Zusammenhang zwischen zwei Temperaturen t_2 und t_1 und den ihnen entsprechenden Momenten M_2 und M_1 die einfache Formel

$$M_2 = M_1[1-\mu(t_2-t_1)]$$

zu Grunde gelegt. In Wirklichkeit ist die Relation zwischen diesen Grössen durch die Formel

$$M_2 = M_1[1-\mu_1(t_2-t_1)-\mu_2(t_2-t_1)^2]$$

dargestellt. Dies bedeutet also, dass der Temperaturcoëfficient μ mit der Temperatur ansteigt. Soll nun die früher constatirte Proportionalität zwischen dem Temperaturcoëfficienten und dem reciproken Werth des Dimensionsverhältnisses auch über die hier angewendeten Temperaturgrenzen hinaus gelten, so muss auch der Anstieg des Werthes von μ mit der Temperatur für alle Dimensionsverhältnisse gleich sein. Um darüber einen Aufschluss zu erhalten, habe ich weitere Versuche bei drei

verschiedenen Temperaturen mit den Magneten U I, 10, U I, 4 45, 10 und 45, 4 angestellt. Hiebei benützte ich, wie schon erwähnt, eine Temperatur nahe bei 2°, sodann die Zimmertemperatur zwischen 16 und 17°5 und schliesslich eine Temperatur bei ungefähr 33—34°.

Ich beobachtete in gleicher Weise wie vorher, jedoch nur aus einer Entfernung und erhielt folgende Werthe:

						T	$\Delta^0{}_0$
U I, 10:	$\mu = 0\cdot000185$	zwischen	$2\cdot0$	und	$16\cdot7$	$9\cdot3$	$10\cdot8$
	205	»	$16\cdot9$	»	$33\cdot3$	$25\cdot1$	
U I, 4:	$\mu = 0\cdot000430$	»	$2\cdot3$	»	$16\cdot0$	$9\cdot1$	$9\cdot6$
	471	»	$16\cdot3$	»	$32\cdot7$	$24\cdot5$	
45, 10:	$\mu = 0\cdot000173$	»	$2\cdot2$	»	$16\cdot7$	$9\cdot4$	$10\cdot4$
	191	»	$16\cdot6$	»	$33\cdot9$	$25\cdot2$	
45, 4:	$\mu = 0\cdot000393$	»	$2\cdot1$	»	$16\cdot4$	$9\cdot2$	$10\cdot4$
	434	»	$16\cdot6$	»	$33\cdot4$	$25\cdot0$	

Wie man sieht, ist für die beiden Dimensionsverhältnisse (10 und 25) der Anstieg von μ mit der Temperatur wirklich nahezu gleich.

Die zuletzt gefundenen Werthe weichen zum Theile von den früher gefundenen Werthen um einige Procente ab. Diese Abweichung dürfte nur zum geringsten Theile auf Beobachtungsfehler zurückzuführen sein, sondern dieselbe dürfte ihren Grund hauptsächlich in dem Umstande haben, dass zwischen den vorher und den zuletzt angeführten Beobachtungen ein längeres Zeitintervall lag, während dessen an den Probestücken verschiedene Manipulationen (Wägungen, Dickebestimmungen, Abschmirgeln, Bestimmung von σ u. s. w.) vorgenommen wurden, die geeignet waren, die Individualität des Stückes ein wenig zu ändern.

Schliesslich kann ich nicht unerwähnt lassen, dass ich auch für das Dimensionsverhältniss $37\cdot7$ den Anstieg von μ mit der Temperatur zu bestimmen suchte. Ich wählte dazu den Magnet U I, 15 und erhielt bei $w = 2520\,\Omega$ folgende Werthe

					T	$\Delta^0{}_0$
$\mu = 0\cdot000137$	zwischen	$1\cdot7$	und	$17\cdot5$	$9\cdot6$	$-0\cdot9$
136	»	$17\cdot5$	»	$33\cdot0$	$25\cdot2$	

Für $w = 5498$ erhielt ich bei den höheren Temperaturen sogar einen um 5% kleineren Werth als bei den niederen. Freilich waren bei diesen Messungen die Änderungen der Scaleneinstellungen bei verschiedenen Temperaturen schon sehr klein; doch ist es immerhin bemerkenswerth, dass μ in beiden Fällen einen Abfall mit der Temperatur zeigt. Ich begnüge mich hier, diese Thatsache mitgetheilt zu haben, ohne weitere Schlüsse daran zu knüpfen, da die Richtigkeit dieser Beobachtung erst durch weitere Untersuchungen sichergestellt werden muss.

Aus den hier mitgetheilten Beobachtungen geht hervor, dass der Temperaturcoëfficient eines Magnets dem Dimensionsverhältniss umgekehrt proportional verläuft, und zwar gilt dies beiläufig für die Temperaturgrenzen zwischen 9° und 32° und für Dimensionsverhältnisse, die etwa zwischen 10 und 37 liegen.

XIV. SITZUNG VOM 18. MAI 1899.

Herr Prof. Dr. Gustav Gärtner übersendet eine vorläufige Mittheilung über eine neue Methode der Messung des arteriellen Blutdruckes am Menschen.

Versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität sind eingelangt:

1. von Herrn Anton Mistaro in Wien mit der Aufschrift: »Fenomeno elettrico«;
2. von Herrn Josef Seelig in Wien, die Lösung eines wichtigen physikalischen Problems betreffend;
3. von Prof. Dr. E. Lippmann in Wien mit der Aufschrift: »Über den Nachweis eines dem Chlor nahestehenden Elementes im Brom und Bromverbindungen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Dr. Stefan Meyer, betitelt: »Über Krystallisation im magnetischen Felde« (I. Mittheilung).

Das c. M. Herr Oberst R. v. Sterneck legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Untersuchungen über den Zusammenhang der Schwere unter der Erdoberfläche mit der Temperatur«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Agamemnone G.: Eco in Europa del terremoto indico del 12. Giugno 1897 (Estratto dal Bollettino della Società Sismologica Italiana, vol. IV). Modena, 1898; 8°.

Berthelot, M.: Chaleur animale.
I. Principes chimiques généraux. Paris, 8°.
II. Données numériques. Paris, 8°.
Janet Ch.: Notice sur les traveaux scientifiques présentés à l'Académie des Sciences au concours de 1896 pour le prix Thore.

Über Krystallisation im magnetischen Felde

(I. Mittheilung)

von

Dr. Stefan Meyer.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Tafeln.)

Seit Faraday's grundlegenden Untersuchungen[1] ist es bekannt, dass die meisten Krystalle verschieden stark magnetisch ausgebildete Axen haben.

Kommt diese Eigenschaft auch schon den noch in Lösung befindlichen kleinsten Partikelchen zu, so war anzunehmen, dass in einer in ein magnetisches Feld gebrachten Lösung eines magnetischen Salzes die äusseren Kräfte trachten müssten, die Theilchen mit den Axen ihrer grössten Susceptibilität in die Richtung der Kraftlinien einzustellen, was sich dann bei der Krystallbildung im Felde bemerkbar machen konnte.

Die Frage blieb nur, ob neben den Molecularkräften, mit denen die Partikelchen während der Krystallisation auf einander wirken, Kräfte, wie sie durch starke Elektromagnete erzeugt werden, noch im Stande seien, einen Einfluss auszuüben, der sichtbar wird.

Dank einem besonders geeigneten Magneten[2] und der glücklichen Auswahl der Substanzen ist es mir nun gelungen, eine deutliche Wirkung des Feldes bei der Auskrystallisation gesättigter Lösungen nachzuweisen.

---

[1] Die erste hievon Pogg. Ann., 76, S. 144; 1849.

[2] Bezüglich Beschreibung desselben vergl. diese Sitzungsberichte, 106, II. a, S. 595.

Hiezu brachte ich ein kleines Uhrgläschen oder ein Objectglas, wie es zu mikroskopischen Zwecken benützt wird, mit einigen Tropfen der Lösung zwischen die Pole des Elektromagneten, an eine Stelle, die bei den angewendeten Stromstärken gewöhnlich etwa 10.000 (C. G. S.) betrug. In der Nähe, ausserhalb des Feldes, wurde ausserdem zum Vergleiche immer ein gleiches Gläschen mit Tropfen derselben Lösung aufgestellt, um eventuelle Einflüsse der Gefässform zu erkennen.

In den beigegebenen Tafeln sind die Ergebnisse, die man so für einige Substanzen erhält, wiedergegeben. Die photographischen Aufnahmen verdanke ich der Freundlichkeit des Herrn Dr. E. Haschek.

Fig. 1 und 2 stellen die Mischkrystalle von Kobaltsulfat und Zinksulfat in etwa $^5/_4$ natürlicher Grösse dar, beide gleichzeitig in je einem Uhrgläschen auskrystallisirt, in dem einen Falle unter Einwirkung des Magnetfeldes, dessen Richtung durch die Buchstaben N, S angedeutet ist, im anderen Falle zum Vergleiche ohne diese Beeinflussung. Es bilden sich lange, rothe, prismatische Nadeln, die im ersteren Falle sich grösstentheils in der Richtung der Kraftlinien anordnen. Verschiedene Mischungen der beiden Bestandtheile ergaben immer ähnliche Resultate. Eine Entmischung und Trennung der beiden Componenten $CoSO_4$ und $ZnSO_4$ findet anscheinend nicht statt.

Fig. 3 ist ein Mangansulfatkrystall. Seine Theilchen sind alle gleich orientirt, wie man durch Einbringen und Drehen desselben in einer Turmalinzange zeigen kann.

Ähnliche Formen, mit den Spitzen der Längsaxen den Polen zugewendet, ergaben Lösungen von Kobaltsulfat, doch waren die Bilder nicht so deutlich.

Die entgegengesetzte Anordnung zeigen Krystalle von Ferroammonsulfat, indem die Spitzen der Längsaxen senkrecht zu der Kraftlinienrichtung gestellt sind. Fig. 7 ist die Wiedergabe von auf einem Objectgläschen gewonnenen Krystallen in etwa fünffacher linearer Vergrösserung. Ausserhalb des Feldes krystallisirt diese Substanz in wirren Häufchen, die einen völlig verschiedenen Eindruck hervorrufen.

Sehr anschaulich ist die Erscheinung an gesättigter Kobaltchloridlösung Fig. 4 und 5 in analoger Anordnung wie Fig. 1

und 2 und stark (ungefähr viermal linear) vergrössert in Fig. 6, letztere Krystalle wieder auf einem ebenen Objectgläschen gewonnen. Hiebei konnte man während des Auskrystallisirens auch deutlich sehen, dass alle ausgeschiedenen Theilchen sofort am Glase haften, und es ist daher nicht anzunehmen, dass etwa schwimmende kleine Kryställchen entstehen und sich dann in die Feldrichtung einstellen. Diese Annahme würde auch dadurch erschwert, dass die Ergebnisse bei einer grossen Zahl stark magnetischer Substanzen überhaupt ganz negativ waren.

So konnte ich bei Lösungen von Eisensulfat, Nickelsulfat oder Mischungen eines dieser beiden Salze mit Zinksulfat, ferners bei rothem und gelbem Blutlaugensalz und Kaliumbichromat, dann bei Kupfersulfat, Zinksulfat und Wismuthnitrat bisher durchwegs keine deutliche Beeinflussung bemerken.

Weitere Beobachtungen bei verschiedenen Feldstärken und Temperaturen, die ich demnächst vornehmen will, werden vielleicht etwas mehr Einblick in dieses Erscheinungsgebiet ermöglichen.

Als allgemeine Beobachtung möchte ich noch anführen, dass im Felde die Tropfen regelmässig bedeutend rascher auskrystallisirten als ausserhalb, und zwar so viel schneller, dass eventuelle geringe Temperaturunterschiede und Luftströmungen an der Stelle des Uhrglases im Felde und desjenigen, das zum Vergleiche ausserhalb aufgestellt war, kaum zur Erklärung genügen können.

Eine Gleichrichtung der gelösten Partikelchen durch den Magneten würde diese Erscheinung verständlich machen.

Damit ist also eine Einwirkung der magnetischen Kräfte auf die Bildung und das Wachsthum der Krystalle sichergestellt. Ob sich ein Einfluss auf den inneren Aufbau selbst zeigen wird, soll Gegenstand späterer Untersuchungen sein.

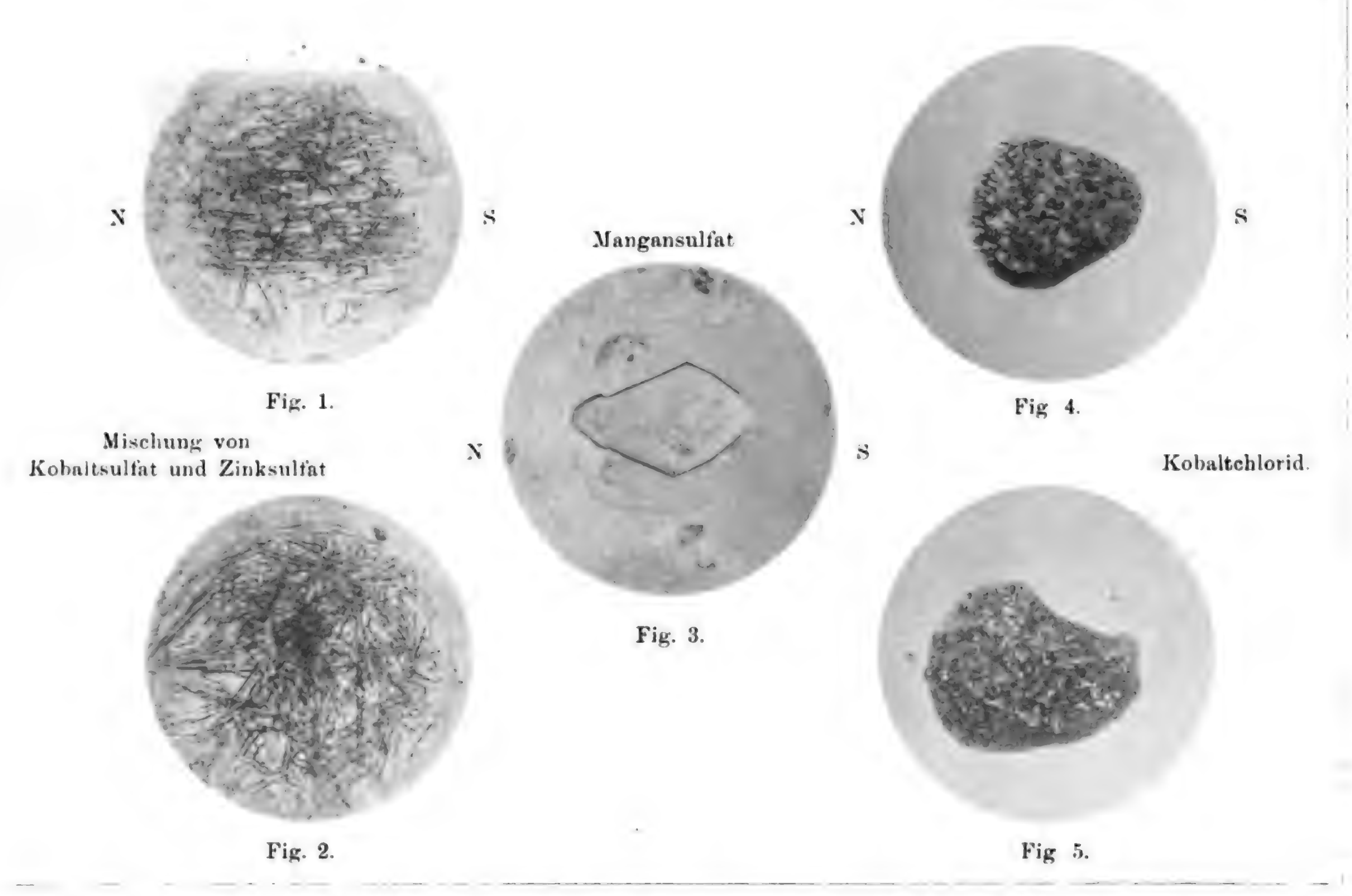


Fig. 1.

Mischung von Kobaltsulfat und Zinksulfat

Fig. 2.

Mangansulfat

Fig. 3.

Fig 4.

Kobaltchlorid.

Fig 5.

Kobaltchlorid

Ferro ammonsulfat.

N

S N

S

Fig. 6.

Fig 7.

Beweis, dass jede lineare Function mit ganzen complexen theilerfremden Coëfficienten unendlich viele complexe Primzahlen darstellt

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

1.

Dirichlet[1] hat den Satz, dass jede lineare Function $L+Mz$ mit ganzen theilerfremden Coëfficienten L, M unendlich viele Primzahlen darstellt, auch für diejenigen ganzen complexen Zahlen $a+bi$ geführt, in welchen a, b reelle ganze Zahlen sind. Er bedarf aber zu seinem Beweise nicht nur des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der genannten complexen Zahlen, sondern auch einer ausgedehnten Theorie der binären quadratischen Formen mit ganzen complexen Coëfficienten.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, dass der Beweis mit einfachen Hilfsmitteln geführt werden kann, wie in dem Folgenden gezeigt werden soll.

2.

Es sei eine lineare Function $L+Mz$ mit ganzen complexen theilerfremden Coëfficienten L, M gegeben und es handele sich um den Beweis, dass es unendlich viele ganze complexe Zahlen z gibt, für welche $L+Mz$ eine zweigliedrige complexe Primzahl wird.

---

[1] Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1841. — Dirichlet's Werke, Bd. 1, S. 511.

Eine ungerade, d. h. nicht durch $1+i$ theilbare ganze complexe Zahl ζ werde primär genannt, wenn

$$\zeta \equiv 1 \quad (\text{mod. } (1+i)^3)$$

ist. Man kann dann den Beweis unbeschadet der Allgemeinheit auf den Fall beschränken, wo L ungerade und primär, M wenigstens durch $(1+i)^3$ theilbar und $N(M) > 8$ ist.

Ist nämlich L gerade, also M ungerade, so kann die Function $L+Mz$ durch $(L+M)+Mz$ ersetzt werden. Die Function $(L+M)+Mz$ kann aber nur dann ungerade Primzahlen darstellen, wenn z gerade ist, und die durch die Function $L+Mz$ darstellbaren ungeraden Primzahlen fallen mit den durch die Function $(L+M)+(1+i)Mz$ darstellbaren zusammen. Man darf also L ungerade, M gerade voraussetzen.

Ist M durch $1+i$, aber nicht durch $(1+i)^3$ theilbar, so fallen die durch die Function $L+Mz$ darstellbaren Primzahlen mit den durch die Functionen

$$L+(1+i)^2Mz,\quad L+M+(1+i)^2Mz,\quad L+iM+(1+i)^2Mz,$$
$$L+(1+i)M+(1+i)^2Mz$$

darstellbaren zusammen und man braucht den Beweis nur für jede dieser Functionen zu führen.

Ist M durch $(1+i)^2$, aber nicht durch $(1+i)^3$ theilbar, so fallen die durch $L+Mz$ darstellbaren Primzahlen mit den durch die Functionen

$$L+(1+i)Mz,\quad L+M+(1+i)Mz$$

darstellbaren zusammen.

Ist aber M durch $(1+i)^3$ theilbar, $L \equiv i^\rho$ (mod. $(1+i)^3$) und ρ nicht $= 0$, so stellt, wenn man associirte Primzahlen als nicht wesentlich verschieden betrachtet, die Function $Li^{-\rho}+Mz$ dieselben Primzahlen dar wie $L+Mz$, aber in primärer Gestalt.

Man darf endlich $N(M) > 8$ annehmen. Denn für die Function $1+(1+i)^3z$, durch welche alle möglichen ungeraden primären Primzahlen darstellbar sind, bedarf es keines Beweises.

3.

Es sei

$$M = a+ib$$
$$N(M) = a^2+b^2 = P$$

und d der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b.

Man erhält ein vollständiges Restsystem $\mathfrak{R}$ für den Modul M, wenn man alle Zahlen $x+iy$ aufstellt, in welchen x der Zahlenreihe

$$0, 1, 2, \ldots \frac{P}{d}-1,$$

y der Zahlenreihe

$$0, 1, 2, \ldots d-1$$

angehören.

Der Inbegriff aller Zahlen von $\mathfrak{R}$, welche zu M theilerfremd und primär sind, werde mit Ω, ihre Anzahl mit r bezeichnet.

Nach Kronecker[1] gibt es in Ω ein System von Zahlen

$$g_1, g_2, \ldots g_\nu,$$

welche folgender Bedingung genügen: Gehören $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ nach dem Modul M beziehungsweise zu den Exponenten

$$\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu,$$

so ist jede Zahl von Ω nach dem Modul M einem und nur einem Potenzproduct

$$g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_\nu^{\alpha_\nu}$$

congruent, in welchem α_1 der Zahlenreihe

$$0, 1, 2, \ldots \tau_1-1,$$

α_2 der Zahlenreihe

$$0, 1, 2, \ldots \tau_2-1$$

u. s. f., α_ν der Zahlenreihe

$$0, 1, 2, \ldots \tau_\nu-1$$

[1] Monatsberichte der Berliner Akademie, 1870.

angehören, so dass

$$\tau_1\tau_2 \ldots \tau_\nu = r$$

ist.

Ist also ζ eine zu M theilerfremde primäre Zahl, so gibt es ganz bestimmte beziehungsweise unter $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu$ liegende Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ von der Art, dass

$$\zeta \equiv g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_\nu^{\alpha_\nu} \pmod{M}$$

ist. Diese Exponenten mögen die Indices von ζ genannt werden, und zwar sei

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \operatorname{ind}_1 \zeta \\ \alpha_2 &= \operatorname{ind}_2 \zeta \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_\nu &= \operatorname{ind}_\nu \zeta. \end{aligned}$$

Sind ζ_1, ζ_2 zu M theilerfremde primäre Zahlen, so hat man

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_1 (\zeta_1\zeta_2) &\equiv \operatorname{ind}_1 \zeta_1 + \operatorname{ind}_1 \zeta_2 \pmod{\tau_1} \\ \operatorname{ind}_2 (\zeta_1\zeta_2) &\equiv \operatorname{ind}_2 \zeta_1 + \operatorname{ind}_2 \zeta_2 \pmod{\tau_2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \operatorname{ind}_\nu (\zeta_1\zeta_2) &\equiv \operatorname{ind}_\nu \zeta_1 + \operatorname{ind}_\nu \zeta_2 \pmod{\tau_\nu}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\operatorname{ind}_1 \zeta = \operatorname{ind}_2 \zeta = \ldots = \operatorname{ind}_\nu \zeta = 0,$$

wenn $\zeta \equiv 1 \pmod{M}$ ist, und nur in diesem Falle.

4.

Um das System $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ aufzustellen, ist folgendermassen zu verfahren.

Es seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{E}$ Zahlen aus Ω und J der Inbegriff aller Zahlen von Ω, welche einem Potenzproduct $\mathfrak{A}^\alpha \mathfrak{B}^\beta \ldots \mathfrak{E}^\varepsilon$ nach dem Modul M congruent sind. Die Zahlen von J haben dann folgende Eigenschaften.

Das Product irgend zweier Zahlen m, n aus J ist wieder einer dieser Zahlen nach dem Modul M congruent. Ebenso die Wurzel der Congruenz

$$mz \equiv n \pmod{M}.$$

Für jede zu M theilerfremde primäre Zahl ζ gibt es einen kleinsten positiven Exponenten ε von der Art, dass ζ^{ε} einer Zahl aus J nach dem Modul M congruent wird. Dieser Exponent heisse der Exponent von ζ in Bezug auf J.

Die Producte aller Zahlen aus J in die Potenzen

$$1, \zeta, \zeta^2, \ldots \zeta^{\varepsilon-1}$$

sind nach dem Modul M incongruent. Denn die Annahme

$$\zeta^{\alpha} m \equiv \zeta^{\beta} m' \quad (\text{mod. } M)$$

führt, wenn $\alpha > \beta$ ist, zu dem Widerspruche

$$\zeta^{\alpha-\beta} \equiv m'' \quad (\text{mod. } M),$$

wo m, m', m'' Zahlen aus J bedeuten. Die diesen Producten nach M congruenten Zahlen von Ω bilden daher alle Zahlen in Ω, welche einem Potenzproducte der Zahlen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots \mathfrak{C}, \zeta$ nach dem Modul M congruent sind.

Jeder Exponent, für welchen ζ einer Zahl aus J nach dem Modul M congruent ist, ist ein Vielfaches von ε.

Sind m, n zu M theilerfremde primäre Zahlen und α, β ihre Exponenten in Bezug auf J, so kann man eine primäre Zahl angeben, deren Exponent in Bezug auf J das kleinste Vielfache μ von α und β ist.

Zu diesem Ende sei δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von α, β und $\alpha = \delta\alpha'$, $\beta = \delta\beta'$. Man zerlege δ in einen zu α' theilerfremden Factor ρ und einen in einer Potenz von α' aufgehenden σ. Die Zahl $m^{\rho} n^{\sigma}$ hat dann den Exponenten μ in Bezug auf J.

Es sei π der Exponent von $m^{\rho} n^{\sigma}$ in Bezug auf J. Die Zahl $m^{\rho\pi} n^{\sigma\pi}$ ist einer Zahl aus J nach dem Modul M congruent und daher auch die Zahlen

$$(m^{\rho\pi} n^{\sigma\pi})^{\frac{\beta}{\sigma}} = (n^{\beta})^{\pi} m^{\beta'\pi\rho\rho}$$

$$(m^{\rho\pi} n^{\sigma\pi})^{\frac{\alpha}{\rho}} = (m^{\alpha})^{\pi} n^{\alpha'\pi\sigma\sigma}$$

Dann sind aber $m^{\beta'\pi\rho\rho}$, $n^{\alpha'\pi\sigma\sigma}$ Zahlen aus J congruent, und es müssen demzufolge $\beta'\pi\rho^2$ durch α, $\alpha'\pi\sigma^2$ durch β oder $\beta'\pi\rho$

durch $\alpha'\sigma$, $\alpha'\pi\sigma$ durch $\beta'\rho$ theilbar sein. Weil aber die Zahlen $\alpha'\sigma$, $\beta'\rho$ theilerfremd sind, so muss π durch jede derselben und demzufolge auch durch ihr Product $\alpha'\sigma . \beta'\rho = \alpha'\beta'\delta = \mu$ theilbar sein. Anderseits ist

$$(m^\rho n^\sigma)^\mu = (m^\alpha)^{\rho\beta'} . (n^\delta)^{\sigma\alpha'}$$

einer Zahl aus J nach M congruent und μ muss auch durch π theilbar sein. Es ist also $\pi = \mu$.

Aus dem vorstehenden Satze folgt sogleich, dass die Exponenten aller Zahlen von Ω in Bezug auf J in dem grössten derselben, γ, aufgehen müssen. Demzufolge ist die γ^{te} Potenz jeder zu M theilerfremden primären Zahl einer Zahl aus J nach dem Modul M congruent.

Dies vorausgeschickt, sei g_1 eine Zahl aus Ω, welche zu einem grösstmöglichen Exponenten τ_1 nach dem Modul M gehört oder, was dasselbe ist, welche in Bezug auf den nur die Einheit 1 enthaltenden Inbegriff J_0 einen grösstmöglichen Exponenten τ_1 besitzt, und J_1 der Inbegriff aller Zahlen von Ω, welche einer der Potenzen

$$1, g_1, g_1^2, \ldots g_1^{\tau_1 - 1}$$

nach dem Modul M congruent sind.

Ist $\tau_1 = r$, so fällt J_1 mit Ω zusammen und g_1 bildet ein System der gewünschten Art.

Ist dagegen $\tau_1 < r$, so suche man in Ω eine Zahl g_2, deren Exponent in Bezug auf J_1 möglichst gross ist und welche nach dem Modul M zu einem möglichst kleinen Exponenten t_2 gehört, und es sei J_2 der Inbegriff aller Zahlen aus Ω, welche einem Potenzproducte der Zahlen g_1, g_2 nach dem Modul M congruent sind. Es ist dann $\tau_2 > 1$ und der Inbegriff J_2 enthält $\tau_1\tau_2$ Zahlen, ist also umfassender als J_1.

Ist nun schon $\tau_1\tau_2 = r$, so fällt J_2 mit Ω zusammen.

Ist dagegen $\tau_1\tau_2 < r$, so suche man in Ω eine Zahl g_3, welche in Bezug auf J_2 einen möglichst grossen Exponenten τ_3 hat und nach dem Modul M zu einem möglichst kleinen Exponenten t_3 gehört. Es ist dann $\tau_3 > 1$, und J_3 enthält $\tau_1\tau_2\tau_3$ Zahlen, also mehr als J_2.

Ist $\tau_1\tau_2\tau_3 = r$, so fällt J_3 mit Ω zusammen.

Ist aber $\tau_1\tau_2\tau_3 < r$, so ist in derselben Weise fortzufahren.

Da die Inbegriffe $J_1, J_2, J_3, \ldots$ immer mehr Zahlen von Ω umfassen, so leuchtet ein, dass man in allen Fällen nach einigen Schritten zu einer Reihe von Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ gelangen muss, welche alle zu Ω gehören und die Eigenschaft haben, dass der Inbegriff J_ν der $\tau_1\tau_2\ldots\tau_\nu$ Zahlen von Ω, welche einem Potenzproducte von $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ nach dem Modul M congruent sind, mit Ω zusammenfällt. Es ist dann $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ ein System der gewünschten Art.

Um dies darzuthun, braucht man nur noch zu zeigen, dass $t_2 = \tau_2, t_3 = \tau_3, \ldots t_\nu = \tau_\nu$ ist, wenn $\nu > 1$.

Der Exponent τ_k geht, wenn $k > 1$ ist, in jedem früheren, etwa τ_i, auf. Denn $g_k^{\tau_i}$ ist einer Zahl aus J_{i-1} und daher auch aus J_{k-1} nach dem Modul M congruent und τ_i muss demzufolge durch den Exponenten τ_k von g_k in Bezug auf J_{k-1} theilbar sein.

Ist das Product von g_i^λ in eine Zahl m aus J_{i-1} der τ_k^{ten} Potenz einer primären Zahl c nach M congruent und $i < k$, so ist λ durch τ_k theilbar. Denn man hat

$$(mg_i^\lambda)^{\frac{\tau_i}{\tau_k}} \equiv c^{\tau_i} \quad (\text{mod. } M)$$

und da $m^{\frac{\tau_i}{\tau_k}}$, c^{τ_i} Zahlen aus J_{i-1} nach dem Modul M congruent sind, so ist auch $g^{\frac{\lambda\tau_i}{\tau_k}}$ einer solchen congruent und $\frac{\lambda\tau_i}{\tau_k}$ muss demzufolge durch τ_i, also λ durch τ_k theilbar sein.

Die τ_k^{te} Potenz jeder zu M theilerfremden primären Zahl c ist der τ_k^{ten} Potenz einer Zahl aus J_{k-1} nach dem Modul M congruent. Dies bedarf nur eines Beweises, wenn $k > 1$ ist. c^{τ_k} ist einer Zahl aus J_{k-1} nach M congruent und man darf demnach

$$c^{\tau_k} \equiv g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \quad (\text{mod. } M)$$

setzen. Dieser Congruenz zufolge ist das Product von $g_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ in eine Zahl aus J_{k-2} der τ_k^{ten} Potenz einer primären Zahl c nach M congruent, also α_{k-1} durch τ_k theilbar, und man hat eine Congruenz

$$c_1^{\tau_k} \equiv g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_{k-2}^{\alpha_{k-2}} \quad (\text{mod. } M),$$

wenn $k > 2$ ist. Aus dieser Congruenz folgt durch denselben Schluss die Theilbarkeit von α_{k-2} durch τ_k. In dieser Weise ergibt sich nach und nach

$$\alpha_{k-1} \equiv \alpha_{k-2} \equiv \ldots \equiv \alpha_1 \equiv 0 \pmod{\tau_k}.$$

Man hat also, wenn m eine Zahl aus J_{k-1} bezeichnet,

$$g_k^{\tau_k} \equiv m^{\tau_k} \pmod{M}.$$

Ist

$$mm' \equiv 1 \pmod{M}$$

und n die dem Producte $m'g_k$ nach M congruente Zahl aus Ω, so besitzt n in Bezug auf J_{k-1} den Exponenten τ_k, da für jeden positiven unter τ_k liegenden Exponenten τ g_k^{τ} und daher auch $m'^{\tau} g_k^{\tau}$ keiner Zahl aus J_{k-1} nach M congruent ist. Nach der Annahme muss daher n nach dem Modul M zu einem Exponenten gehören, welcher $\geqq t_k$ ist. n gehört aber zu dem Exponenten τ_k, wie die Congruenz

$$n^{\tau_k} \equiv (m'g_k)^{\tau_k} \equiv (m'm)^{\tau_k} \equiv 1 \pmod{M}$$

zeigt. Daher ist $\tau_k \geqq t_k$.

Da anderseits t_k durch τ_k theilbar sein muss, so muss $t_k = \tau_k$ sein.

5.

Es seien

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$$

beziehungsweise beliebige $\tau_1$te, $\tau_2$te, ... $\tau_\nu$te Einheitswurzeln. Stellt man jeden Werth von ω_1 mit jedem Werthe von ω_2 u. s. f. zusammen, so erhält man $\tau_1\tau_2\ldots\tau_\nu = r$ Wurzelverbindungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$. Unter denselben kommt die Verbindung $1, 1, \ldots 1$ vor und werde als die 0te Wurzelverbindung bezeichnet. Die übrigen Verbindungen mögen in beliebiger Reihenfolge die 1te, 2te, ... $r-1$te genannt werden.

Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$ die $h$te Wurzelverbindung, so werde für jede zu M theilerfremde primäre complexe Zahl m

$$c_{h,m} = \omega_1^{\mathrm{ind}_1 m} \omega_2^{\mathrm{ind}_2 m} \ldots \omega_\nu^{\mathrm{ind}_\nu m}$$

gesetzt. Für Zahlen m dagegen, welche entweder nicht zu M theilerfremd oder nicht primär sind, werde unter $c_{h,m}$ die Null verstanden.

Man hat

$$c_{h,m'} = c_{h,m},$$

wenn $m' \equiv m \pmod{M}$ ist, und

$$c_{h,n} \cdot c_{h,n'} = c_{h,nn'},$$

wenn n, n' primäre ungerade Zahlen sind.

Ist $h > 0$, so ist, über alle Zahlen m von $\mathfrak{R}$ summirt,

$$\Sigma c_{h,m} = 0.$$

Denn man darf bei der Summation von allen Zahlen m absehen, welche nicht zu Ω gehören, und die übrigen in der Gestalt $g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_\nu^{\alpha_\nu}$ annehmen. Es wird dann

$$c_{h,m} = \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \ldots \omega_\nu^{\alpha_\nu}$$

und die Summation braucht nur in Bezug auf die Werthe $0, 1, 2, \ldots \tau_1 - 1$ von α_1, die Werthe $0, 1, 2, \ldots \tau_2 - 1$ von α_2 u. s. f. ausgeführt zu werden. Ist nun ω_λ in der $h$ten Wurzelverbindung eine von 1 verschiedene Wurzel, so setze man

$$g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_\nu^{\alpha_\nu} = n g_\lambda^{\alpha_\lambda}.$$

Führt man dann zuerst die Summation nach α_λ aus, so ergibt sich ein Aggregat von lauter Ausdrücken

$$c_{h,n}(\omega_\lambda^0 + \omega_\lambda + \omega_\lambda^2 + \ldots \omega_\lambda^{\tau_\lambda - 1}) = c_{h,n} \frac{\omega_\lambda^{\tau_\lambda} - 1}{\omega_\lambda - 1},$$

welche alle $= 0$ sind.

Ist k irgend eine ganze complexe Zahl, so durchläuft $k + m$ zugleich mit m ein vollständiges Restsystem des Moduls M, und es ist daher auch

$$\Sigma c_{h,k+m} = 0.$$

6.

Das Verschwinden der über alle Zahlen von $\mathfrak{R}$ erstreckten Summe $\Sigma c_{h,m}$ hat zur Folge, dass die über alle Zahlen m,

deren Normen eine gegebene positive Grösse s nicht übersteigen, zu erstreckende Summe

$$\Theta(s) = \Sigma c_{h,m}$$

von der Ordnung $\sqrt{s}$ ist, wenn $h > 0$ ist.

Es sei, wenn unter $E(z)$ die grösste in z enthaltene ganze Zahl verstanden wird,

$$E\sqrt{s} = \eta \qquad E\frac{d\eta_1}{P} = A \qquad E\frac{\eta_1}{d} = B$$

und man bezeichne zur Abkürzung eine complexe Grösse, deren absoluter Betrag die positive Grösse G nicht übersteigt, allgemein mit $[G]$.

Ist y eine ganze Zahl, welche, vom Vorzeichen abgesehen, η_1 nicht übersteigt, und setzt man

$$E\sqrt{s-y^2} = \xi$$

$$S_y = c_{h,\eta y} + c_{h,1+\eta y} + c_{h,2+\eta y} + \ldots + c_{h,\xi+\eta y},$$

so wird, wenn $k\frac{P}{d}$ ein ξ nicht übersteigendes Vielfaches von $\frac{P}{d}$ ist,

$$S_y = c_{h,\eta y} + c_{h,1+\eta y} + \ldots + c_{h,\frac{kP}{d}-1+\eta y} + \left[\xi + 1 - k\frac{P}{d}\right];$$

da aber

$$\xi + 1 \leqq \frac{P}{d}\left(1 + E\frac{d\sqrt{s-y^2}}{P}\right)$$

ist, so wird

$$S_y = c_{h,\eta y} + c_{h,1+\eta y} + \ldots + c_{h,\frac{kP}{d}-1+\eta y} +$$
$$+ \frac{P}{d}\left[1 + E\frac{d\sqrt{s-y^2}}{P} - k\right].$$

Ist nun $(l+1)d \leqq \eta_1$, $l \geqq 0$ und y eine der Zahlen

$$ld,\ ld+1,\ ld+2, \ldots ld+d-1,$$

so ist

$$E\frac{d\sqrt{s-y^2}}{P} \leqq E\frac{d\sqrt{s-l^2d^2}}{P}$$

$$\xi \geqq \frac{P}{d} E\frac{d}{P}\sqrt{s-(l+1)^2d^2}$$

und man kann

$$k = E\frac{d}{P}\sqrt{s-(l+1)^2d^2}$$

setzen. Es wird dann

$$S_y = c_{h,iy}+c_{h,1+iy}+\ldots+c_{h,\frac{kP}{d}-1+iy}+$$

$$+\frac{P}{d}\left[1+E\frac{d\sqrt{s-l^2d^2}}{P}-E\frac{d}{P}\sqrt{s-(l+1)^2d^2}\right].$$

Setzt man daher

$$y = ld,\ ld+1, \ldots ld+d-1$$

und summirt, so ergibt sich der Gleichung

$$c_{h,ild}+c_{h,1+ild}+\ldots+c_{h,\frac{kP}{d}-1+ild}$$

$$+c_{h,ild+i}+c_{h,1+ild+i}+\ldots+c_{h,\frac{kP}{d}-1+ild+i}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+c_{h,ild+id-i}+c_{h,1+ild+id-i}+\ldots+c_{h,\frac{kP}{d}-1+ild+id-i}$$

$$=0$$

zufolge

$$S_{ld}+S_{ld+1}+\ldots+S_{ld+d-1}=$$

$$=P\left[1+E\frac{d}{P}\sqrt{s-l^2d^2}-E\frac{d}{P}\sqrt{s-(l+1)^2d^2}\right].$$

Ist dagegen $ld \leqq \eta$, $(l+1)d > \eta$ und y eine der Zahlen

$$ld,\ ld+1, \ldots \eta,$$

so kann $k=0$ gesetzt werden, und es wird

$$S_\nu = \frac{P}{d}\left[1+E\frac{d}{P}\sqrt{s-l^2d^2}\right]$$

also

$$S_{ld}+S_{ld+1}+\dots+S_\eta = \frac{P}{d}\left[1+E\frac{d}{P}\sqrt{s^2-l^2d^2}\right](\eta-ld+1).$$

Da Bd das grösste in η enthaltene Vielfache von d ist, so folgt

$$S_0+S_1+S_2+\dots+S_\eta = P\left[B+E\frac{d\sqrt{s}}{P}-E\frac{d}{P}\sqrt{s-B^2d^2}\right]$$

$$+\frac{P}{d}(\eta-Bd+1)\left[1+E\frac{d}{P}\sqrt{s-B^2d^2}\right]$$

$$=P\left[A+B+1-\left(B+1-\frac{\eta+1}{d}\right)\left(E\frac{d}{P}\sqrt{s-B^2d^2}+1\right)\right]$$

$$=P[A+B+1].$$

In derselben Weise erhellt unmittelbar

$$S_0+S_{-1}+S_{-2}+\dots+S_{-\eta} = P[A+B+1]$$

und, wenn

$$S'_\nu = c_{h,i\nu}+c_{h,i\nu-1}+\dots+c_{h,i\nu-\xi}$$

gesetzt wird,

$$S'_0+S'_1+S'_2+\dots+S'_\eta = P[A+B+1]$$
$$S'_0+S'_{-1}+S'_{-2}+\dots+S'_{-\eta} = P[A+B+1]$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\Theta(s) = {} & S_0+S_1+S_2+\dots+S_\eta \\ & +S_0+S_{-1}+S_{-2}+\dots+S_{-\eta} \\ & +S'_0+S'_1+S'_2+\dots+S'_\eta \\ & +S'_0+S'_{-1}+S'_{-2}+\dots+S'_{-\eta} \\ & -S_0-S'_0 \\ & -c_{h,i}-c_{h,2i}-\dots-c_{h,\eta i} \\ & -c_{h,-i}-c_{h,-2i}-\dots-c_{h,-\eta i}\end{aligned}$$

und demzufolge

$$\Theta(s) = 4P[A+B+1]+4[\sqrt{s}]$$
$$= 4\left[d\sqrt{s}+\frac{P}{d}\sqrt{s}+P\sqrt{s}+\sqrt{s}\right].$$

Wird also zur Abkürzung

$$4(1+d)\left(1+\frac{P}{d}\right) = C$$

gesetzt, so ist für jedes positive s

$$\Theta(s) = [C\sqrt{s}].$$

7.

Es sei, wenn die ganze positive Zahl n als Norm einer ganzen complexen Zahl oder als Summe zweier Quadrate darstellbar ist,

$$\mathfrak{a}_n = \Sigma c_{h,m},$$

wo die Summation über alle der Gleichung

$$N(m) = n$$

genügende ganze complexe Zahlen m zu erstrecken ist. Dagegen sei

$$\mathfrak{a}_n = 0,$$

wenn n nicht als Norm einer ganzen complexen Zahl darstellbar ist.

Ist $h > 0$, so convergirt die Reihe

$$L_h(\lambda) = \frac{\mathfrak{a}_1}{1^\lambda}+\frac{\mathfrak{a}_2}{2^\lambda}+\frac{\mathfrak{a}_3}{3^\lambda}+\dots$$

für jeden über $\frac{1}{2}$ liegenden reellen Werth von λ.

Um dies darzuthun, sei

$$S = \frac{\mathfrak{a}_{1+n}}{(1+n)^\lambda}+\frac{\mathfrak{a}_{2+n}}{(2+n)^\lambda}+\dots+\frac{\mathfrak{a}_{n'+n}}{(n'+n)^\lambda}.$$

Man hat

$$\mathfrak{a}_{n+k} = \Theta(n+k) - \Theta(n+k-1)$$

und demnach

$$S = \frac{\Theta(n+1) - \Theta(n)}{(n+1)^{\lambda}} + \\ + \frac{\Theta(n+2) - \Theta(n+1)}{(n+2)^{\lambda}} + \ldots + \frac{\Theta(n+n') - \Theta(n+n'-1)}{(n+n')^{\lambda}}$$

$$= -\frac{\Theta(n)}{(n+1)^{\lambda}} + \Theta(n+1)\left(\frac{1}{(n+1)^{\lambda}} - \frac{1}{(n+2)^{\lambda}}\right) + \\ + \Theta(n+2)\left(\frac{1}{(n+2)^{\lambda}} - \frac{1}{(n+3)^{\lambda}}\right) \\ + \ldots + \Theta(n+n'-1)\left(\frac{1}{(n+n'-1)^{\lambda}} - \frac{1}{(n+n')^{\lambda}}\right) + \frac{\Theta(n+n')}{(n+n')^{\lambda}}.$$

Hieraus folgt

$$S = \frac{[C\sqrt{n}]}{(n+1)^{\lambda}} + [C\sqrt{n+1}]\left(\frac{1}{(n+1)^{\lambda}} - \frac{1}{(n+2)^{\lambda}}\right) + \\ + [C\sqrt{n+2}]\left(\frac{1}{(n+2)^{\lambda}} - \frac{1}{(n+3)^{\lambda}}\right) \\ + \ldots + [C\sqrt{n+n'-1}]\left(\frac{1}{(n+n'-1)^{\lambda}} - \frac{1}{(n+n')^{\lambda}}\right) + \\ + \frac{[C\sqrt{n+n'}]}{(n+n')^{\lambda}}$$

$$= \left[C\,\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{(n+1)^{\lambda}}\right] + \\ + \left[C\,\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(n+2)^{\lambda}}\right] + \ldots + \left[C\,\frac{\sqrt{n+n'} - \sqrt{n+n'-1}}{(n+n')^{\lambda}}\right].$$

Es ist aber

$$\frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n+k-1}}{(n+k)^{\lambda}} = \frac{1}{(\sqrt{n+k} + \sqrt{n+k-1})\,(n+k)^{\lambda}}$$

$$< \frac{1}{(n+k)^{\lambda+\frac{1}{2}}}$$

$$< \frac{1}{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(n+k-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(n+k)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\right)$$

und demzufolge

$$S = C\left[\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{(n+1)^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\lambda-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(n+2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(n+2)^{\lambda-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(n+3)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\right) + \ldots\right]$$

$$= C\left[\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^{\lambda}} + \frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\right].$$

S kann also durch passende Wahl von n beliebig klein gemacht werden.

Insbesondere ist

$$L_h(\lambda) = \left[C\,\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}\right]$$

$$\frac{\mathfrak{a}_{n+1}}{n+1} + \frac{\mathfrak{a}_{n+2}}{n+2} + \ldots + \frac{\mathfrak{a}_{n+n'}}{n+n'} = \left[\frac{4C}{\sqrt{n+1}}\right].$$

Ähnlich ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{a}_2 \log 2}{2} + \frac{\mathfrak{a}_3 \log 3}{3} + \ldots + \frac{\mathfrak{a}_n \log n}{n}$$

$$= \frac{\Theta 3 - \Theta 2}{3}\log 3 + \frac{\Theta 4 - \Theta 3}{4}\log 4 + \ldots + \frac{\Theta n - \Theta(n-1)}{n}\log n$$

$$= -\frac{\Theta 2}{3}\log 3 + \Theta_3\left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \Theta(n-1)\left(\frac{\log(n-1)}{n-1} - \frac{\log n}{n}\right) + \frac{\Theta(n)\log n}{n}$$

$$= C\left[\frac{\sqrt{2}\log 3}{3} + \sqrt{3}\left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4}\right) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \sqrt{n-1}\left(\frac{\log(n-1)}{n-1} - \frac{\log n}{n}\right) + \frac{\sqrt{n}\log n}{n}\right]$$

$$= C\left[\frac{\sqrt{2}\log 3}{3} + \frac{\log 3}{4\sqrt{3}} + \frac{\log 4}{5\sqrt{4}} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{\log(n-1)}{n\sqrt{n-1}} + \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right].$$

Bezeichnet daher ω die Summe der Reihe

$$\frac{\log 3}{4\sqrt{3}} + \frac{\log 4}{5\sqrt{4}} + \frac{\log 5}{6\sqrt{5}} + \dots,$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{a}_2\log 2}{2} + \frac{\mathfrak{a}_3\log 3}{3} + \dots + \frac{\mathfrak{a}_n\log n}{n} = C\left[1 + \omega + \frac{\sqrt{2}}{3}\log 3\right].$$

Ist ρ eine die Einheit nicht übersteigende positive Grösse und setzt man

$$\frac{\mathfrak{a}_k}{k} + \frac{\mathfrak{a}_{k+1}}{k+1} + \dots + \frac{\mathfrak{a}_n}{n} = \vartheta(k)$$

$$\Delta = \frac{\mathfrak{a}_1}{1} + \frac{\mathfrak{a}_2}{2} + \frac{\mathfrak{a}_3}{3} + \dots + \frac{\mathfrak{a}_n}{n} - \frac{\mathfrak{a}_1}{1^{1+\rho}} - \frac{\mathfrak{a}_2}{2^{1+\rho}} - \dots - \frac{\mathfrak{a}_n}{n^{1+\rho}},$$

so wird

$$\Delta = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_2\left(1 - \frac{1}{2^\rho}\right) + \frac{1}{3}\mathfrak{a}_3\left(1 - \frac{1}{3^\rho}\right) + \dots + \frac{1}{n}\mathfrak{a}_n\left(1 - \frac{1}{n^\rho}\right)$$

$$= (\vartheta_2 - \vartheta_3)\left(1 - \frac{1}{2^\rho}\right) + (\vartheta_3 - \vartheta_4)\left(1 - \frac{1}{3^\rho}\right) + \dots + \vartheta n\left(1 - \frac{1}{n^\rho}\right)$$

$$= \vartheta(2)\left(1 - \frac{1}{2^\rho}\right) + \vartheta_3\left(\frac{1}{2^\rho} - \frac{1}{3^\rho}\right) + \dots + \vartheta n\left(\frac{1}{(n-1)^\rho} - \frac{1}{n^\rho}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{1}{(k-1)^\rho} - \frac{1}{k^\rho} = \frac{\rho}{k^{1+\rho}} + \frac{\rho(1+\rho)}{2!\,k^{2+\rho}} + \dots$$

$$\leqq \frac{\rho}{k^{1+\rho}} + \frac{\rho}{k^{2+\rho}} + \dots$$

$$< \frac{\rho}{k-1}$$

und demzufolge

$$\Delta = 4C\rho\left[\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots\right].$$

Da ferner

$$\frac{1}{1\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots < 3$$

ist, so folgt für $n = \infty$

$$L_h(1) - L_h(1+\rho) = [12C\rho]$$

und man hat

$$L_h(1+\rho) = L_h(1) + [12C\rho]$$

$$|L_h(1+\rho)| < |L_h(1)| + 12C\rho.$$

8.

Die Summe

$$c_{0,m} + c_{1,m} + c_{2,m} + \dots + c_{r-1,m}$$

hat den Werth r oder Null, je nachdem $m \equiv 1 \pmod{M}$ ist oder nicht.

Ist m nicht theilerfremd zu M oder nicht primär, so verschwindet jedes einzelne Glied der genannten Summe.

Ist m theilerfremd zu M, primär und nicht $\equiv 1 \pmod{M}$, so muss mindestens eine der Zahlen

$$\text{ind}_1 m, \text{ind}_2 m, \dots \text{ind}_\nu m$$

von Null verschieden sein, etwa $\text{ind}_\mu m$. Setzt man

$$c_{h,m} = c'_m\,\omega_\mu^{\text{ind}_\mu m},$$

so ergibt die Summation nach allen τ_μ^{ten} Einheitswurzeln ω_μ, wobei die etwaigen übrigen Wurzeln fest bleiben, ein Aggregat von Ausdrücken

$$c'_m(1+\omega^{\text{ind}_\mu m}+\omega^{2\,\text{ind}_\mu m}+\dots)$$
$$= c'_m\,\frac{\omega^{\tau_\mu\,\text{ind}_\mu m}-1}{\omega^{\text{ind}_\mu m}-1},$$

wo ω eine primitive τ_μ^{te} Einheitswurzel bedeutet. Alle diese Ausdrücke sind aber $=0$.

Ist dagegen

$$m \equiv 1 \pmod{M},$$

so ist

$$\text{ind}_1 m = \text{ind}_2 m = \dots = \text{ind}_\nu m = 0$$
$$c_{h,m} = 1$$

also

$$c_{0,m}+c_{1,m}+\dots+c_{r-1,m} = r.$$

Ist m zu M theilerfremd und primär und gehört m nach dem Modul M zum Exponenten t, so ist identisch in z

$$\prod_h (1-c_{h,m}z) = (1-z^t)^{\frac{r}{t}}.$$

Denn man hat, wenn $z<1$ gedacht wird,

$$\log \prod_h (1-c_{h,m}z) =$$
$$= -z\sum_h c_{h,m} - \frac{1}{2}z^2\sum_h c_{h,m}^2 - \frac{1}{3}z^3\sum_h c_{h,m}^3 - \dots$$

Da aber

$$\sum_h (c_{h,m})^\pi = \sum_h c_{h,m^\pi}$$

nach der obigen Formel den Werth r oder 0 hat, je nachdem π durch t theilbar ist oder nicht, so wird

$$\log \prod_h (1 - c_{h,m} z) = -r\left(\frac{z^t}{t} + \frac{z^{2t}}{2t} + \frac{z^{3t}}{3t} + \dots\right)$$

$$= \frac{r}{t} \log(1 - z^t)$$

$$\prod_h (1 - c_{h,m} z) = (1 - z^t)^{\frac{r}{t}}.$$

9.

Bezeichnet ρ eine beliebige positive Grösse, so ist

$$L_h(1+\rho) = \prod \frac{1}{1 - \frac{c_{h,\varphi}}{(N\varphi)^{1+\rho}}},$$

wo das Product über alle nicht in M aufgehenden ungeraden primären complexen Primzahlen φ zu erstrecken ist. Nach der Formel des vorigen Artikels folgt hieraus

$$\prod_h L_h(1+\rho) = \prod \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(N\varphi)^{\rho t + t}}\right)^{\frac{r}{t}}},$$

wo t den jeweiligen Exponenten bezeichnet, zu welchem φ nach dem Modul M gehört. Man hat daher

$$\prod_h L_h(1+\rho) > 1.$$

Enthält die k^{te} Wurzelverbindung $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\nu$ mindestens eine imaginäre Wurzel und ist die aus den zu $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\nu$ conjugirten Wurzeln bestehende Verbindung die k'^{te}, so sind $L_k(1+\rho)$, $L_{k'}(1+\rho)$ conjugirte Grössen und man hat

$$|L_k(1+\rho)|^2 = L_k(1+\rho) L_{k'}(1+\rho)$$

$$\prod_h L_h(1+\rho) = |L_k(1+\rho)|^2 \prod_{h'} L_{h'}(1+\rho),$$

wo h' nur noch die Werthe $0, 1, \ldots r-1$ ausser k und k' zu durchlaufen hat. Da aber, wenn $h'>0$ ist,

$$|L_{h'}(1+\rho)| \leqq C\frac{2(1+\rho)+1}{2(1+\rho)-1} < 3C$$

ist, so ergibt sich

$$\prod_h L_h(1+\rho) < (3C)^{r-3} L_0(1+\rho)\,|L_k(1+\rho)|^2.$$

Ferner ist

$$L_0(1+\rho) < \frac{1}{1-\frac{1}{2^{1+\rho}}}\prod\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^{1+\rho}}\right)^2}\prod\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2+2\rho}}},$$

wo p alle reellen ungeraden Primzahlen $4n+1$, q alle ungeraden reellen Primzahlen $4n+3$ durchlaufen. Daher ist auch, wenn p_1 alle möglichen, p_2 alle ungeraden reellen Primzahlen durchlaufen,

$$L_0(1+\rho) < \prod\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^{1+\rho}}}\prod\frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}}{p_2^{1+\rho}}}$$

$$< \left(1+\frac{1}{2^{1+\rho}}+\frac{1}{3^{1+\rho}}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{3^{1+\rho}}+\frac{1}{5^{1+\rho}}-\ldots\right);$$

es ist aber

$$1+\frac{1}{2^{1+\rho}}+\frac{1}{3^{1+\rho}}+\ldots < 1+\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{1}{2^\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2^\rho}-\frac{1}{3^\rho}\right)+\ldots$$

$$< \frac{1+\rho}{\rho},$$

$$1-\frac{1}{3^{1+\rho}}+\frac{1}{5^{1+\rho}}-\frac{1}{7^{1+\rho}}+\ldots < 1$$

und demzufolge

$$L_0(1+\rho) < \frac{1+\rho}{\rho}.$$

Man hat also

$$L_k(1+\rho)^2 \frac{1+\rho}{\rho}(3C)^{r-3} > \prod_h L_h(1+\rho) > 1,$$

woraus sich

$$|L_k(1+\rho)| > \sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}} \frac{1}{(3C)^{\frac{r-3}{2}}}$$

ergibt. Aus Artikel 7 folgt dann

$$|L_k(1)| + 12C\rho > \sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}} \frac{1}{(3C)^{\frac{r-3}{2}}}$$

oder

$$|L_k(1)| > \sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}} \frac{1}{(3C)^{\frac{r-3}{2}}} - 12C\rho.$$

Nimmt man

$$\rho = \frac{1}{128} \frac{1}{(3C)^{r-1}},$$

so ergibt sich

$$|L_k(1)| > \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{(3C)^{r-2}}.$$

10.

Die Zahl r ist immer gerade. Denn $4r$ ist die Anzahl aller Zahlen des vollständigen Restsystems $\mathfrak{R}$, welche zu M theilerfremd sind. Diese Zahl ist durch 8 theilbar, wenn M durch $(1+i)^4$ theilbar ist. Ist die Zahl M hingegen nur durch $(1+i)^3$ theilbar, so enthält sie mindestens noch einen ungeraden Primfactor φ und $4r$ ist durch $4(N\varphi-1)$, also mindestens durch 16 theilbar.

Die Gleichung

$$\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_\nu = r$$

zeigt dann, dass einer oder mehrere der Exponenten $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu$ gerade sein müssen. Da aber in der Zahlenreihe $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\nu$ jede

Zahl durch alle etwaigen späteren theilbar ist, so gehen die geraden Zahlen derselben den etwaigen ungeraden voran. Es seien also

$$\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\lambda$$

gerade und, wofern $\lambda < \nu$ ist,

$$\tau_{\lambda+1}, \tau_{\lambda+2}, \ldots \tau_\nu$$

ungerade, und es handle sich um die Bestimmung der Zahl λ.

Ist ζ irgend ein in Ω enthaltener quadratischer Rest von M, so hat die Congruenz

$$v^2 \equiv \zeta \pmod{M}$$

immer eine primäre oder in Ω vorkommende Wurzel. Ist nämlich v irgend eine Wurzel dieser Congruenz, so hat man, da ζ primär ist,

$$v^2 - 1 = (v-1)(v+1) \equiv 0 \pmod{(1+i)^3},$$

und es muss eine der Zahlen $v+1$, $v-1$ durch 2 theilbar sein. Wenn aber $\frac{v \pm 1}{2}$ ganz ist, so ist auch $\frac{v \mp 1}{2}$ ganz und eine dieser Zahlen muss der Gleichung

$$\frac{v \pm 1}{2} - \frac{v \mp 1}{2} = \pm 1$$

zufolge durch $1+i$ theilbar sein. Man hat also

$$v \equiv \pm 1 \pmod{(1+i)^3}$$

und es erhellt, dass eine der Wurzeln v, $-v$ primär ist.

Ist nun v eine primäre Wurzel der obigen Congruenz, so ist

$$\begin{aligned} \text{ind}_1 \zeta &\equiv 2 \,\text{ind}_1 v \pmod{\tau_1} \\ \text{ind}_2 \zeta &\equiv 2 \,\text{ind}_2 v \pmod{\tau_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{ind}_\lambda \zeta &\equiv 2 \,\text{ind}_\lambda v \pmod{\tau_\lambda} \end{aligned}$$

Damit also ζ quadratischer Rest von M sei, ist es nothwendig, dass

$$\text{ind}_1 \zeta, \text{ind}_2 \zeta, \ldots \text{ind}_\lambda \zeta$$

gerade sind. Diese Bedingung reicht aber auch hin. Ist nämlich

$$\text{ind}_1 \zeta = 2\alpha_1,\ \text{ind}_2 \zeta = 2\alpha_2, \ldots \text{ind}_\lambda \zeta = 2\alpha_\lambda$$

und setzt man in dem Falle $\nu > \lambda$

$$\frac{1}{2}(1+\tau_{\lambda+1})\ \text{ind}_{\lambda+1} \zeta = \alpha_{\lambda+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}(1+\tau_\nu)\ \text{ind}_\nu \zeta = \alpha_\nu,$$

so hat man

$$\zeta \equiv (g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \ldots g_\lambda^{\alpha_\lambda} Q)^2 \pmod{M},$$

wo Q in dem Falle $\lambda = \nu$ die Einheit und in dem Falle $\lambda < \nu$ das Product

$$g_{\lambda+1}^{\alpha_{\lambda+1}} \ldots g_\nu^{\alpha_\nu}$$

bezeichnet. Es ergeben sich also alle in Ω enthaltenen quadratischen Reste ζ von M, wenn man für $\text{ind}_1 \zeta$ die $\frac{\tau_1}{2}$ Zahlen

$$0, 2, 4, \ldots \tau_1 - 2,$$

für $\text{ind}_2 \zeta$ die $\frac{\tau_2}{2}$ Zahlen

$$0, 2, 4, \ldots \tau_2 - 2$$

u. s. f. für $\text{ind}_\lambda \zeta$ die $\frac{1}{2}\tau_\lambda$ Zahlen

$$0, 2, 4, \ldots \tau_\lambda - 2$$

und in dem Falle $\nu > \lambda$ für $\text{ind}_{\lambda+1} \zeta, \ldots \text{ind}_\nu \zeta$ beziehungsweise alle Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots \tau_{\lambda+1} - 1$$

$$0, 1, 2 \ldots \tau_\nu - 1$$

setzt. Die Anzahl aller in Ω enthaltenen quadratischen Reste von M ist demnach

$$\frac{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_\nu}{2^\lambda} = \frac{r}{2^\lambda}.$$

Man kann diese Anzahl noch auf eine andere Art bestimmen.

Bildet man die Quadrate aller in Ω enthaltenen Zahlen und sucht die ihnen in Ω nach dem Modul M congruenten Zahlen auf, so ergibt sich ein Inbegriff J von r Zahlen, welcher lauter quadratische Reste von M enthält und jeden in Ω vorkommenden quadratischen Rest von M enthalten muss.

Um daher die Anzahl aller in Ω enthaltenen quadratischen Reste von M zu finden, braucht man nur zu ermitteln, wie oft ein und dieselbe Zahl ζ in J vorkommt.

Es sei zu diesem Ende v_0 eine bestimmte und v jede Zahl aus Ω, deren Quadraten ζ nach dem Modul M congruent ist. Setzt man

$$v \equiv v_0 w \pmod{M},$$

so ist w primär und genügt der Congruenz

$$w^2 \equiv 1 \pmod{M}.$$

Ist umgekehrt w irgend eine primäre Wurzel dieser Congruenz und v die dem Producte $v_0 w$ in Ω nach M congruente Zahl, so ist

$$v^2 \equiv v_0^2 w^2 \equiv v_0^2 \equiv \zeta \pmod{M}.$$

Man erhält also alle Zahlen von Ω, deren Quadraten ζ nach dem Modul M congruent ist, wenn man v_0 mit allen primären Wurzeln der Congruenz

$$w^2 \equiv 1 \pmod{M}$$

multiplicirt und die den Producten nach dem Modul M congruenten Zahlen in Ω aufsucht. Bezeichnet daher $\varkappa$ die Anzahl der primären Wurzeln der genannten Congruenz, so fallen in dem Inbegriffe J genau je $\varkappa$ Zahlen zusammen und die $\frac{r}{\varkappa}$ verschiedenen Zahlen desselben bilden alle in Ω vorkommenden quadratischen Reste von M.

Es ist also

$$2^\nu = \varkappa,$$

und es erübrigt nur noch die Bestimmung von $\varkappa$.

Ist

$$M = (1+i)^{\lambda}\mathfrak{p}^{a}\mathfrak{q}^{b}\ldots,$$

wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q},\ldots$ ungerade complexe Primzahlen bezeichnen, so muss die Congruenz

$$w^2 - 1 \equiv 0$$

in Bezug auf jeden der Module

$$(1+i)^{\lambda},\ \mathfrak{p}^{a},\ \mathfrak{q}^{b},\ldots$$

stattfinden und w ist daher in Bezug auf diese Module, beziehungsweise Wurzeln

$$\alpha, \beta, \gamma,\ldots$$

der Congruenzen

$$z^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } (1+i)^{\lambda})$$
$$z^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{a})$$
$$z^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } \mathfrak{q}^{b})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

congruent, von welchen überdies α primär sein muss, wenn w primär ist. Wenn umgekehrt für α irgend eine primäre Wurzel der ersten Congruenz, für $\beta, \gamma,\ldots$ beliebige Wurzeln der übrigen Congruenzen genommen werden und hierauf w so bestimmt wird, dass es

$$\equiv \alpha \quad (\text{mod. } (1+i)^{\lambda})$$
$$\equiv \beta \quad (\text{mod. } \mathfrak{p}^{a})$$
$$\equiv \gamma \quad (\text{mod. } \mathfrak{q}^{b})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wird, so ist w eine primäre Wurzel der Congruenz

$$z^2 \equiv 1 \quad (\text{mod. } M).$$

Sind also $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C},\ldots$ die Anzahlen der primären Wurzeln α und der Wurzeln $\beta, \gamma,\ldots$, so ist

$$\varkappa = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots.$$

Setzt man

$$\alpha = 1 + (1+i)^3\xi,$$

so geht die Congruenz

$$\alpha^2 - 1 = (\alpha-1)(\alpha+1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } (1+i)^{\lambda})$$

nach Forthebung des Factors $(1+i)^3$ in

$$2(1+i(1+i)\xi) \equiv 0 \pmod{(1+i)^{\sigma-3}}$$

über. ξ ist demnach keiner Bedingung unterworfen, wenn $\sigma = 3, 4$ ist, und α hat in dem Falle $\sigma = 3$ nur den einen Werth 1, in dem Falle $\sigma = 4$ die zwei Werthe 1, $1+(1+i)^3$. Von $\sigma = 5$ an aber hat man

$$(1+i(1+i)\xi)\xi \equiv 0 \pmod{(1+i)^{\sigma-5}}$$

und ξ muss durch $(1+i)^{\sigma-5}$ theilbar sein. Setzt man

$$\xi = (1+i)^{\sigma-5}\eta,$$

so wird

$$\alpha = 1+(1+i)^{\sigma-2}\eta,$$

und η kann nur die vier Werthe 0, i, 1, $1+i$ annehmen, wenn die Werthe von α nach dem Modul $(1+i)^\sigma$ incongruent ausfallen sollen. α hat also vier Werthe.

Sind in M aufgehende Potenzen $\mathfrak{p}^a, \mathfrak{q}^b, \ldots$ ungerader complexer Primzahlen vorhanden, so kann die Congruenz

$$\beta^2-1 = (\beta-1)(\beta+1) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^a}$$

nur so stattfinden, dass einer der Factoren $\beta-1$, $\beta+1$ durch $\mathfrak{p}^a$ theilbar ist, da ihre Differenz 2 zu $\mathfrak{p}$ theilerfremd ist. Es gibt also nur die zwei Wurzeln $\beta = 1$, $\beta = -1$. Ebenso kann γ nur die zwei Werthe 1, -1 haben u. s. f.

Man hat daher

$$\mathfrak{A} = 1, 2, 4$$

für $\sigma = 3, 4, > 4$ und

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \ldots = 2.$$

Bezeichnet also π die Anzahl der ungeraden Primfactoren von M, so ist

$$\varkappa = 2^\pi, 2^{\pi+1}, 2^{\pi+2},$$

je nachdem $\sigma = 3, 4$ oder > 4 ist.

Hieraus folgt

$$\lambda = \pi \qquad \text{für } \sigma = 3$$
$$\lambda = \pi+1 \qquad \text{für } \sigma = 4$$
$$\lambda = \pi+2 \qquad \text{für } \sigma > 4.$$

11.

Es sei $m = \xi + i\eta$ eine ungerade primäre Zahl, ϑ ein ungerader primärer Theiler von M, welcher keinen quadratischen Theiler ausser ± 1 besitzt, und $\left[\frac{m}{\vartheta}\right]$ das dem Legendre-Jacobi'schen Zeichen analog gebildete Symbol in der Theorie der complexen Zahlen. Die Anzahl der verschiedenen Theiler ϑ und daher auch der verschiedenen Ausdrücke $\left[\frac{m}{\vartheta}\right]$ ist $2^{\varkappa}$.

Es sei ferner $\chi(m)$ in dem Falle $\sigma = 3$ irgend einer der Ausdrücke

$$\left[\frac{m}{\vartheta}\right],$$

in dem Falle $\sigma = 4$ irgend einer der Ausdrücke

$$\left[\frac{m}{\vartheta}\right],\ (-1)^{\frac{\xi^2+\eta^2-1}{4}}\left[\frac{m}{\vartheta}\right]$$

und in dem Falle $\sigma > 4$ irgend einer der Ausdrücke

$$\left[\frac{m}{\vartheta}\right],\ (-1)^{\frac{\xi^2+\eta^2-1}{4}}\left[\frac{m}{\vartheta}\right],\ (-1)^{\frac{(\xi+\eta)^2-1}{8}}\left[\frac{m}{\vartheta}\right],$$

$$(-1)^{\frac{\xi^2+\eta^2-1}{4}}.(-1)^{\frac{(\xi+\eta)^2-1}{8}}\left[\frac{m}{\vartheta}\right].$$

Die Anzahl der verschiedenen Ausdrücke $\chi(m)$ ist 2^{λ} und jeder derselben hat die Eigenschaft

$$\chi(mm') = \chi(m)\chi(m'),$$

wenn m, m' primäre ungerade Zahlen sind.

Für jeden der Ausdrücke $\chi(m)$ mit Ausnahme von $\left[\frac{m}{1}\right]$ kann man primäre Zahlen $m = \xi + i\eta$ angeben, welche der Bedingung

$$\chi(m) = -1$$

genügen.

Enthält $\chi(m)$ den Factor $(-1)^{\frac{\xi^2+\eta^2-1}{4}}$, so suche man eine Zahl m, welche den Congruenzen

$$m \equiv 1+(1+i)^3 \quad (\text{mod. } (1+i)^5)$$
$$m \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{M}{(1+i)^5}\right)$$

genügt. Dieselbe ist primär, und es wird, da hier $\tau > 3$ ist,

$$\xi^2+\eta^2 = N(m) \equiv N(-1+2i) \equiv 5 \quad (\text{mod. } 8)$$

und daher

$$(-1)^{\frac{\xi^2+\eta^2-1}{4}} = -1.$$

Alle etwaigen übrigen Factoren von $\chi(m)$ haben den Werth 1. Für den Factor $(-1)^{\frac{\xi+\eta^2-1}{8}}$, wenn er vorkommt, folgt dies insbesondere daraus, dass dann $\tau > 4$ ist, also ξ, η die Gestalt $-1+4(x-y)$, $2+4(x+y)$ haben und

$$\xi+\eta \equiv 1 \quad (\text{mod. } 8)$$

ist.

Kommt der Factor $(-1)^{\frac{(\xi+\eta)^2-1}{8}}$ vor, der Factor $(-1)^{\frac{\xi^2+\eta^2-1}{4}}$ aber nicht, so ist $\tau > 4$ und man setze

$$m \equiv 1+i(1+i)^3 \quad (\text{mod. } (1+i)^5)$$
$$m \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{M}{(1+i)^5}\right).$$

m ist primär und es wird

$$\xi+\eta \equiv -3 \quad (\text{mod. } 8),$$

also

$$(-1)^{\frac{(\xi+\eta)^2-1}{8}} = -1,$$

während alle etwaigen übrigen Factoren von $\chi(m)$ den Werth 1 haben.

Ist endlich $\chi(m)$ ein Ausdruck $\left[\frac{m}{\vartheta}\right]$, $\mathfrak{p}$ ein Primfactor von ϑ, welcher in M in der $\mathfrak{a}^{\text{ten}}$ Potenz aufgeht, so sei $\vartheta = \mathfrak{p}\vartheta'$, m_1 ein quadratischer Nichtrest von $\mathfrak{p}$ und man setze

$$m \equiv m_1 \pmod{\mathfrak{p}^a}$$

$$m \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{M}{\mathfrak{p}^a}\right).$$

m ist primär und man hat

$$\left[\frac{m}{\vartheta}\right] = \left[\frac{m}{\mathfrak{p}}\right]\left[\frac{m}{\vartheta'}\right] = \left[\frac{m_1}{\mathfrak{p}}\right]\left[\frac{1}{\vartheta'}\right] = \left[\frac{m_1}{\mathfrak{p}}\right]$$
$$= -1.$$

Da jede zu M theilerfremde primäre Zahl m der Congruenz

$$m \equiv g_1^{\text{ind}_1 m} g_2^{\text{ind}_2 m} \ldots g_\nu^{\text{ind}_\nu m} \pmod{M}$$

genügt, so ist

$$\chi(m) = \chi(g_1^{\text{ind}_1 m} g_2^{\text{ind}_2 m} \ldots g_\nu^{\text{ind}_\nu m})$$
$$= \chi(g_1)^{\text{ind}_1 m} \chi(g_2)^{\text{ind}_2 m} \ldots \chi(g_\nu)^{\text{ind}_\nu m}.$$

Hierin haben, wofern $\nu > \lambda$ ist, die Factoren

$$\chi(g_{\lambda+1})^{\text{ind}_{\lambda+1} m}, \ldots \chi(g_\nu)^{\text{ind}_\nu m}$$

alle den Werth 1, wie aus den Gleichungen

$$\chi(g_{\lambda+1}) = \chi(g_{\lambda+1}^{1+\varepsilon_{\lambda+1}}) = \chi(g_{\lambda+1})^{1+\varepsilon_{\lambda+1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\chi(g_\nu) = \chi(g_\nu^{1+\varepsilon_\nu}) = \chi(g_\nu)^{1+\varepsilon_\nu}$$

hervorgeht, und es wird

$$\chi(m) = \chi(g_1)^{\text{ind}_1 m} \chi(g_2)^{\text{ind}_2 m} \ldots \chi(g_\lambda)^{\text{ind}_\lambda m}.$$

Ist also $\chi(m)$ von $\left[\frac{m}{1}\right]$ verschieden, so muss mindestens eine der Zahlen

$$\chi(g_1), \chi(g_2), \ldots \chi(g_\lambda)$$

negativ sein und die Zahlen

$$\chi(g_1), \chi(g_2), \ldots \chi(g_\lambda)$$

bilden eine Wurzelverbindung $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\lambda$, in welcher alle Wurzeln einen der Werthe $1, -1$, aber nicht alle den Werth 1

haben. Ist diese Wurzelverbindung die h^{te}, so ist demnach $h > 0$ und

$$c_{h,m} = \chi(m).$$

Verschiedenen Ausdrücken $\chi(m)$ entsprechen verschiedene Zahlen h. Denn das Product zweier verschiedener Ausdrücke $\chi(m)$, etwa $\chi_1(m)$ und $\chi_2(m)$, ist wieder ein von $\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}$ verschiedener Ausdruck $\chi(m)$, und man kann demzufolge eine zu M theilerfremde primäre Zahl m angeben, welche der Gleichung

$$\chi_1(m)\chi_2(m) = -1$$

genügt, so dass nicht für jedes m

$$\chi_1(m) = \chi_2(m)$$

sein kann.

Da nun sowohl die Anzahl aller aus lauter reellen Wurzeln ± 1 bestehenden Wurzelverbindungen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$ mit Ausnahme der 0ten, als auch die Anzahl aller von $\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}$ verschiedenen Ausdrücke $\chi(m)$ $2^\lambda - 1$ beträgt, so leuchtet ein, dass jeder einer der genannten Wurzelverbindungen entsprechende Ausdruck $c_{h,m}$ mit einem der Ausdrücke $\chi(m)$ für alle zu M theilerfremden primären Zahlen m zusammenfällt.

12.

Ist q eine reelle Primzahl $4n+3$ und $m = \xi + i\eta$ eine zu q theilerfremde Zahl, so wird

$$(\xi + i\eta)^q \equiv \xi^q + i^q\eta^q = \xi - i\eta \quad (\text{mod. } q)$$

und daher nach Multiplication mit $\xi + i\eta$

$$(\xi + i\eta)^{q+1} \equiv \xi^2 + \eta^2 \quad (\text{mod. } q).$$

Erhebt man beide Seiten zur Potenz $\frac{q-1}{2}$, so folgt

$$(\xi + i\eta)^{\frac{1}{2}(q^2-1)} \equiv (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}(q-1)} \quad (\text{mod. } q)$$

und hieraus

$$\left[\frac{\xi+i\eta}{q}\right]=\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{q}\right),$$

wo $\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{q}\right)$ das gewöhnliche Legendre'sche Zeichen ist.

Ist $\mathfrak{p}$ eine zweigliedrige complexe Primzahl, $\mathfrak{p}'$ die conjugirte, $m=\xi+i\eta$ eine zu $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'=p$ theilerfremde Zahl, so hat man

$$(\xi+i\eta)^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv\left[\frac{m}{\mathfrak{p}}\right]\quad(\text{mod. } \mathfrak{p}).$$

Multiplicirt man beiderseits mit $(\xi-i\eta)^{\frac{1}{2}(p-1)}$, so folgt

$$(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv\left[\frac{m}{\mathfrak{p}}\right](\xi-i\eta)^{\frac{1}{2}(p-1)}\quad(\text{mod. } \mathfrak{p});$$

da aber

$$(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{p}\right)\quad(\text{mod. } \mathfrak{p})$$

ist, so wird

$$\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{p}\right)\equiv\left[\frac{m}{\mathfrak{p}}\right](\xi-i\eta)^{\frac{1}{2}(p-1)}\quad(\text{mod. } \mathfrak{p}).$$

Es ist daher auch, wenn i durch $-i$ ersetzt wird,

$$\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{p}\right)\equiv\left[\frac{m}{\mathfrak{p}}\right]m^{\frac{1}{2}(p-1)}\quad(\text{mod. } \mathfrak{p}')$$

und der Congruenz

$$m^{\frac{1}{2}(p-1)}\equiv\left[\frac{m}{\mathfrak{p}'}\right]\quad(\text{mod. } \mathfrak{p}')$$

zufolge

$$\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{p}\right)\equiv\left[\frac{m}{\mathfrak{p}}\right]\left[\frac{m}{\mathfrak{p}'}\right]\quad(\text{mod. } \mathfrak{p}')$$

$$=\left[\frac{m}{\mathfrak{p}}\right]\left[\frac{m}{\mathfrak{p}'}\right]=\left[\frac{m}{p}\right].$$

Für jede reelle ungerade Zahl k ist daher[1]

$$\left[\frac{\xi+i\eta}{k}\right] = \left(\frac{\xi^2+\eta^2}{k}\right).$$

13.

Man kann nun auch darthun, dass jede der Reihen $L_h(1)$, welche einer aus lauter reellen Wurzeln ± 1 bestehenden Wurzelverbindung $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu$ ausser der 0ten entsprechen, eine von Null verschiedene Summe hat.

Das mit $c_{h,m}$ für alle zu M theilerfremden primären Zahlen m zusammenfallende Zeichen $\chi(m)$ kann entweder eine Function von Nm sein oder nicht.

Ist $\chi(m)$ einer der Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{Nm-1}{4}}, \quad \left[\frac{m}{k}\right], \quad (-1)^{\frac{Nm-1}{4}}\left[\frac{m}{k}\right],$$

wo k einen reellen eingliedrigen ungeraden Theiler von M bezeichnet, und setzt man beziehungsweise

$$\vartheta(n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

$$\vartheta(n) = \left(\frac{n}{k}\right)$$

$$\vartheta(n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{k}\right),$$

so wird

$$\chi(m) = \vartheta(Nm).$$

Wird noch, über alle Theiler δ der ungeraden Zahl n erstreckt,

$$f(n) = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\delta-1)}$$

und über alle in M aufgehenden ungeraden complexen Primfactoren $\mathfrak{p}$ erstreckt,

---

[1] Lejeune Dirichlet, l. c.

$$\Pi\left(1-\frac{\vartheta(N\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)=Q$$

gesetzt, so ist $f(n)$ die Anzahl aller Darstellungen der Zahl n als Norm einer primären complexen Zahl und man hat

$$L_h(1)=Q\Sigma\frac{f(n)\vartheta(n)}{n},$$

wo n alle positiven ungeraden Zahlen zu durchlaufen hat. Es ist aber[1]

$$\sum\frac{\vartheta(n)f(n)}{n}=\sum\frac{\vartheta(n)}{n}\cdot\sum\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\vartheta(n)}{n}$$

und daher

$$L_h(1)=Q\sum\frac{\vartheta(n)}{n}\cdot\sum(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\vartheta(n)}{n}.$$

Aus dem Beweise über das Vorkommen unendlich vieler Primzahlen in einer reellen arithmetischen Reihe ist aber bekannt,[2] dass die Reihen

$$\frac{\vartheta(1)}{1}+\frac{\vartheta(3)}{3}+\frac{\vartheta(5)}{5}+\frac{\vartheta(7)}{7}+\ldots$$

$$\frac{\vartheta(1)}{1}-\frac{\vartheta(3)}{3}+\frac{\vartheta(5)}{5}-\frac{\vartheta(7)}{7}+\ldots$$

von Null verschiedene Summen haben.

Ist $\chi(m)$ einer der Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{(\xi+\eta)^2-1}{8}},\quad\left[\frac{m}{\alpha+i\beta}\right],\quad(-1)^{\frac{(\xi+\eta)^2-1}{8}}\left[\frac{m}{\alpha+i\beta}\right],$$

wo $\xi+i\eta=m$ ist und $\alpha+i\beta$ einen zweigliedrigen complexen Theiler von M bezeichnet, so ist $\chi(m)$ keine Function von $N(m)$.

---

[1] Mertens, Über Dirichlet'sche Reihen. Diese Sitzungsber., Bd. CIV. — Über Multiplication und Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen. Crelle's Journal, Bd. 117.

[2] Mertens, Eine asymptotische Aufgabe. Diese Sitzungsber., Bd. CVIII.

Es sei in diesem Falle

$$H = \frac{N(M)}{2^{\sigma}},$$

m' die zu m conjugirte Zahl und beziehungsweise

$$\vartheta(n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{H^2}\right)$$

$$\vartheta(n) = \left(\frac{n}{k}\right)\left(\frac{n}{H^2}\right)$$

$$\vartheta(n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{k}\right)\left(\frac{n}{H^2}\right),$$

wo

$$k = N\left(\frac{\alpha + i\beta}{\gamma}\right)$$

ist und γ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von α und β bezeichnet. Man hat dann allgemein

$$c_{h,m} \cdot c_{h,m'} = c_{h,mm'} = \vartheta(Nm).$$

Setzt man

$$L(1+\rho) = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p})^{1+\rho}}},$$

wo das Product über alle ungeraden primären complexen Primzahlen $\mathfrak{p}$ zu erstrecken ist, so wird

$$\log L_h(1+\rho) + \frac{1}{2} \log L(1+\rho) =$$

$$= \sum \frac{\frac{1}{2} + c_{h,\mathfrak{p}}}{(N\mathfrak{p})^{1+\rho}} + \frac{1}{2} \sum \frac{\frac{1}{2} + c_{h,\mathfrak{p}}^2}{(N\mathfrak{p})^{2+2\rho}} + \dots,$$

wo die Summen sich auf dieselben genannten Primzahlen beziehen. Für jedes Paar conjugirter zweigliedriger primärer Primzahlen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ ist aber

$$\frac{1}{2}+c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}}+\frac{1}{2}+c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}'}=(1+c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}})(1+c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}'})-c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$$
$$\geqq -c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}\mathfrak{p}'}$$
$$\geqq -\vartheta(N\mathfrak{p})^{\mu}$$

und für jede primäre eingliedrige complexe Primzahl $\mathfrak{p}$

$$\frac{1}{2}+c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}}=\frac{1}{2}(1+c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}})^2-\frac{1}{2}(c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}})^2$$
$$\geqq -\frac{1}{2}c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$$
$$\geqq -\frac{1}{2}\vartheta(N\mathfrak{p})^{\mu}.$$

Denkt man sich daher je zwei Glieder zusammengezogen, welche zwei conjugirten zweigliedrigen Primzahlen entsprechen, so ergibt sich

$$\sum\frac{\frac{1}{2}+c^{\mu}_{h,\mathfrak{p}}}{(N\mathfrak{p})^{\mu+\mu\rho}}\geqq-\frac{1}{2}\sum\frac{\vartheta(N\mathfrak{p})^{\mu}}{(N\mathfrak{p})^{\mu+\rho\mu}},$$

wo $\mathfrak{p}$ in beiden Summen alle primären complexen ungeraden Primzahlen zu durchlaufen hat, und es ist

$$\log L_h(1+\rho)+\frac{1}{2}\log L(1+\rho)\geqq-\frac{1}{2}\log\prod\frac{1}{1-\frac{\vartheta(N\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^{1+\rho}}}$$

und somit auch

$$L_h(1+\rho)L(1+\rho)^{\frac{1}{2}}\left(\prod\frac{1}{1-\frac{\vartheta N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{1+\rho}}}\right)^{\frac{1}{2}}\geqq 1.$$

Es ist aber, wenn n alle ungeraden positiven Zahlen durchläuft,

$$\prod\frac{1}{1-\frac{\vartheta N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^{1+\rho}}}=\sum\frac{\vartheta(n)f(n)}{n^{1+\rho}}$$
$$=\sum\frac{\vartheta(n)}{n^{1+\rho}}\cdot\sum\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta(n)}{n^{1+\rho}}.$$

Da die Summen

$$\vartheta(1)+\vartheta(3)+\vartheta(5)+\ldots+\vartheta(2s-1)$$
$$\vartheta(1)-\vartheta(3)+\vartheta(5)-\ldots\pm\vartheta(2s-1)$$

für keinen Werth von s eine gewisse angebbare Zahl C_1 übersteigen, so findet man in bekannter Weise

$$\left|\sum \frac{\vartheta(n)}{n^{1+\rho}}\right| < C_1$$

$$\left|\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta(n)}{n^{1+\rho}}\right| < C_1,$$

und es ist demzufolge

$$\prod \frac{1}{1-\frac{\vartheta \mathrm{N}\mathfrak{p}}{(\mathrm{N}\mathfrak{p})^{1+\rho}}} < C_1^2.$$

Da ferner

$$L(1+\rho) = \sum \frac{1}{n^{1+\rho}} \cdot \sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1+\rho}}$$
$$< \frac{1+\rho}{\rho}$$

und nach Artikel 7

$$L_\vartheta(1+\rho) < L_\vartheta(1) + 12\,C\rho$$

ist, so ergibt sich

$$(L_\vartheta(1) + 12\,C\rho)\sqrt{\frac{1+\rho}{\rho}}\; C_1 > 1$$

und hieraus

$$L_\vartheta(1) > \sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}}\;\frac{1}{C_1} - 12\,C\rho.$$

Für $\rho = \dfrac{1}{2 \cdot 24^2 C^2 C_1^2}$ insbesondere ergibt sich

$$L_\vartheta(1) > \frac{1}{96\,CC_1}.$$

14.

Es sei

$$\Lambda_h(s) = \sum_1^s \frac{c_{h,\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}$$

$$H_h(s) = \sum_1^s \frac{c_{h,m} \log Nm}{Nm}$$

$$K_h(s) = \sum_1^s \frac{c_{h,m}}{Nm},$$

wo $\mathfrak{p}$ alle ungeraden primären complexen Primzahlen, m alle primären complexen Zahlen durchlaufen sollen, deren Normen die Zahl s nicht übersteigen. Durch Zerlegung jeder Zahl m in ihre primären Primfactoren findet man in bekannter Weise

$$H_h(s) = \sum \frac{c_{h,\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} K_h\left(\frac{s}{N\mathfrak{p}}\right)$$

$$+ \sum \frac{c^2_{h,\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^2} K_h\left(\frac{s}{N^2\mathfrak{p}}\right)$$

$$+ \sum \frac{c^3_{h,\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^3} K_h\left(\frac{s}{N^3\mathfrak{p}}\right)$$

$$+ \ldots,$$

wo die erste, zweite, dritte,... Summe alle primären Primzahlen $\mathfrak{p}$ umfassen, deren Normen in der 1ten, 2ten, 3ten,... Potenz die Zahl s nicht übersteigen. Es ist aber

$$K_h\left(\frac{s}{N\mathfrak{p}}\right) = L_h(1) + [4C]\sqrt{\frac{N\mathfrak{p}}{s}}$$

und daher

$$\sum \frac{c_{h,\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} K_h\left(\frac{s}{N\mathfrak{p}}\right) = L_h(1)\Lambda_h(s) + \frac{4C}{\sqrt{s}}\left[\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right].$$

Da $N\mathfrak{p}$ entweder eine reelle Primzahl $4n+1$ oder das Quadrat p^2 einer reellen Primzahl $4n+3$ und in letzterem Falle

$$\frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{p}}} < \frac{1}{\sqrt{p}}$$

ist, so ergibt sich

$$\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{\sqrt{N\mathfrak{p}}} \leqq 2 \sum \frac{\log p}{\sqrt{p}},$$

wo p alle Primzahlen bis zur Grenze s zu durchlaufen hat.

Setzt man

$$\sum_{1}^{z} \log p = F(z),$$

so wird

$$\sum \frac{\log p}{\sqrt{p}} = \frac{F(2)}{\sqrt{2}} + \frac{F(3)-F(2)}{\sqrt{3}} + \frac{F(4)-F(3)}{\sqrt{4}} + \dots$$
$$+ \dots \frac{F(s)-F(s-1)}{\sqrt{s}}$$
$$= F(2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F(3)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) +$$
$$\dots + F(s-1)\left(\frac{1}{\sqrt{s-1}} - \frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$
$$+ \frac{F(s)}{\sqrt{s}};$$

da aber[1]

$$F(z) < 2z,$$

also

$$F(k)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) < \frac{2k}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\,(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$$
$$< \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$< 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$$

[1] Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 78.

ist, so folgt

$$\sum_1^s \frac{\log p}{\sqrt{p}} < 4\sqrt{s}$$

$$\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{\sqrt{N\mathfrak{p}}} < 8\sqrt{s}.$$

Daher ist

$$\sum \frac{c_{h,\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} K_h\left(\frac{s}{N\mathfrak{p}}\right) = L_h(1)\Lambda_h(s) + [32\,C].$$

Bezeichnet ferner p jede Primzahl $4n+1$, q jede Primzahl $4n+3$, so ist

$$\sum \frac{c_{h,\mathfrak{p}}^2}{(N\mathfrak{p})^2} \log N\mathfrak{p} K_h\left(\frac{s}{N\mathfrak{p}^2}\right) = \left[\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^2} \cdot 3\,C\right]$$

$$= 6\,C\left[\sum_2^\infty \frac{\log p}{p^2} + \sum_2^\infty \frac{\log q}{q^4}\right]$$

$$\sum \frac{c_{h,\mathfrak{p}}^3}{(N\mathfrak{p})^3} \log N\mathfrak{p} K_h\left(\frac{s}{N^3\mathfrak{p}}\right) = \left[\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^3} \cdot 3C\right]$$

$$= 6\,C\left[\sum_2^\infty \frac{\log p}{p^3} + \sum_2^\infty \frac{\log q}{q^6}\right]$$

. . . .

Hienach ergibt sich

$$H_h(s) = L_h(1)\Lambda_h(s) + \left[32C + 6C\sum_2^\infty \frac{\log p}{p(p-1)} + 6C\sum_2^\infty \frac{\log q}{q^2(q^2-1)}\right]$$

und man kann, da $L_h(1)$ von Null verschieden ist, eine Grenze G von der Art angeben, dass

$$\Lambda_h(s) = [G]$$

ist.

15.

Bestimmt man l durch die Congruenz

$$L \equiv 1 \pmod{M},$$

so wird

$$\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \frac{1}{r}(c_{0,l}\Lambda_0(s)+c_{1,l}\Lambda_1(s)+\ldots+c_{r-1,l}\Lambda_{r-1}(s)),$$

wo die Summe alle primären ungeraden Primzahlen $\mathfrak{p}$ umfasst. welche durch die Form $L+Mz$ darstellbar sind und deren Norm die Grenze s nicht übersteigt.

Nun ist, wenn p jede reelle Primzahl $4n+1$, q jede reelle Primzahl $4n+3$ und $\mathfrak{p}_0$ jede durch $L+Mz$ darstellbare primäre zweigliedrige complexe Primzahl bezeichnen,

$$\sum \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \sum_1^s \frac{\log N\mathfrak{p}_0}{N\mathfrak{p}_0} + \left[2\sum_2^\infty \frac{\log q}{q^2}\right],$$

$$\Lambda_0(s) = 2\sum_1^s \frac{\log p}{p} + 2\sum_1^s \frac{\log q}{q^2} - \sum_1^s \frac{\log N\varphi_1}{N\varphi_1},$$

wo φ_1 alle in M aufgehenden complexen Primzahlen durchläuft, deren Normen s nicht übersteigen. Man kann daher[1] eine Grenze G_0 von der Art angeben, dass

$$\Lambda_0(s) - \log s = [G_0]$$

ist.

Hienach wird dann

$$\sum_1^s \frac{\log N\mathfrak{p}_0}{N\mathfrak{p}_0} = \frac{1}{r}\log s + \left[\frac{1}{r}G_0 + \frac{r-1}{r}G + 2\sum_1^\infty \frac{\log q}{q^2}\right].$$

[1] Mertens, l. c.

Magnetische Orientirung einer Anzahl einaxiger Krystalle

von

Viktor v. Lang,

w. M. k. Akad.

Ein Theil der vorliegenden Beobachtungen wurde schon gleichzeitig ausgeführt mit den Messungen, die ich seinerzeit über die Wärmeleitungsfähigkeit einaxiger Krystalle veröffentlichte. Beiderlei Messungen waren in der Hoffnung unternommen worden, eine Beziehung zwischen der magnetischen Induction und der Wärmeleitung zu finden. In der That schien manches für eine solche Beziehung zu sprechen. Durch Compression z. B. soll in ihrer Richtung die magnetische Induction vergrössert, die Wärmeleitung verringert werden. Allein die Untersuchung einaxiger Krystalle gab keine einfache Beziehung.

Im Einklange hiemit ist ja auch das verschiedene Verhalten isomorpher Körper gegen die Wärmeleitung und die magnetische Induction. Während letztere, was ihre Stärke nach verschiedenen Richtungen betrifft, für isomorphe Substanzen gleich orientirt ist, gilt dies für die Wärmeleitung im Allgemeinen nicht. Allerdings gibt es bis jetzt, wenn ich nicht irre, nur zwei Beispiele, wo isomorphe Körper verschiedene Orientirung der Wärmeleitungsfähigkeit aufweisen. Das erste ist Baryt und Cölestin, welche von Jannetaz untersucht wurden, das zweite die unterschwefelsauren Salze von Blei und Calcium, für welche nach meinen Beobachtungen ein entgegengesetztes Verhalten mit Bezug auf Wärmeleitung wahrscheinlich ist.

Die ursprünglichen Beobachtungen der magnetischen Induction einaxiger Krystalle wurden dann später zu verschiedenen Zeiten theils controlirt, theils vermehrt. Diese späteren Versuche sind mit einem sehr kräftigen Elektromagnet ausgeführt, dessen Wickelung in neuerer Zeit, so geändert wurde dass sie direct an das Netz der hiesigen Gleichstromcentrale (110 Volt) angeschlossen werden kann. Auf diese Weise erreicht man grössere magnetische Felder bis zu einer Stärke von 10.000 praktischen Einheiten.

Auf die Enden des verticalen Elektromagneten können verschiedene Polschuhe aufgesetzt werden. Häufig wurde das Feld zwischen den Endflächen zweier Eisencylinder von 25 *mm* Durchmesser benützt, welches aber doch noch nicht homogen ist. Ein kleines Wismuthstäbchen (Durchmesser 2·3 *mm*, Länge 11 *mm*) stellt sich wenigstens in demselben noch immer mit seiner Längsaxe äquatorial. Das Stäbchen zeigte erst dann eine Neigung, die Längsaxe im Sinne der Kraftlinien zu stellen, als es zwischen zwei eisernen Parallelopipeden von quadratischem Querschnitte (66 *mm* Seitenlänge) untersucht wurde und diese Polschuhe so nahe als möglich genähert worden waren.

Ich bemerke noch, dass die Krystalle immer in Schleifen aus wenigen Coconfäden aufgehängt wurden.

Nach dem Vorgange von Plücker und Beer sind im Folgenden diejenigen Krystalle als positiv bezeichnet, bei denen die Axe (a) der grössten magnetischen Induction mit der morphologischen Axe zusammenfällt: sie erhalten die Bezeichnung $\underset{+}{\delta}$ oder $\underset{+}{\pi}$, je nachdem ihre Substanz dia- oder paramagnetisch ist. Im Gegensatze ist $\underset{-}{\delta}$ und $\underset{-}{\pi}$ das Zeichen dafür, dass die Axe (c) der kleinsten Induction mit der ausgezeichneten Krystallaxe zusammenfällt.

Die krystallographischen Axenlängen sind im Nachfolgenden mit a und c bezeichnet, und zwar bezieht sich a auf die Nebenaxe, c aber auf die ausgezeichnete Hauptaxe.[1]

[1] Will man die rhomboëdrischen und hexagonalen Krystalle auf ein Axensystem beziehen, dessen Längen gleich sind und dessen Richtungen

A. Tetragonale Krystalle.

1. Quecksilberchlorür (Calomel) Hg_2Cl.

$a:c = 1:1\cdot7414.$

Untersucht wurden natürliche Krystalle. Dieselben sind stark diamagnetisch und stellen sich mit ihrer Längsrichtung axial, da diese Richtung mit der Hauptaxe zusammenfällt, letztere also die Richtung der schwächeren magnetischen Induction ist, so wird das Schema der magnetischen Orientirung $\underline{\delta}$.

2. Ammoniumkupferchlorid $2(NH_4)CuCl_4+2H_2O$.

$a:c = 1:0\cdot7395.$

Dieses Salz findet sich in der Aufzählung Plücker's als negativ paramagnetisch angegeben.[1] Hiemit stimmen meine Beobachtungen. Die Substanz ist paramagnetisch, und die Hauptaxe stellt sich äquatorial, selbst wenn ihre Dimension die der Nebenaxe übertrifft. Das Schema der magnetischen Orientirung ist daher $\underline{\pi}$.

3. Magnesium-Platincyanür $MgPtCy_4+7H_2O$.

$a:c = 1:0\cdot5863.$

Die Substanz ist diamagnetisch, die optische Axe stellt sich axial. Es wurden vier Krystalle untersucht, welche die Gestalt von rechtwinkligen Parallelopipeden hatten und parallel

---

(x, y, z) durch die Kanten des Grundrhomboëders (100) gegeben sind, so dienen dazu die bekannten Formeln:

$$\tan(100.111) = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\cos 30^\circ}$$

$$\sin\frac{1}{2}(100.010) = \sin(100.111)\cos 30^\circ$$

$$\cos(xy) = -\cos(100.010)\tan\frac{1}{2}(100.010).$$

[1] Tr. R. Soc. 1858, p. 582.

einer Kante aufgehängt wurden. Die Dimensionen derselben waren in Millimetern

∥ Axe	⊥ Axe	Höhe
7	8	9
12	8	9
7·5	4·5	4
8	3·5	5·5

Die Schlinge erwies sich als paramagnetisch, wurde aber so angebracht, dass sie dem gefundenen Resultate, Hauptaxe kleinste Induction, entgegenwirkte. Das Schema wird $\underset{-}{\delta}$.

4. Zinnstein SnO_2.

$a : c = 1 : 0·6724.$

Es wurden zwei natürliche Krystalle untersucht, deren Substanz ziemlich stark paramagnetisch war. Die Hauptaxe stellte sich axial bei überwiegender Dimension der Nebenaxe. Da somit die Hauptaxe die Axe stärkster magnetischer Induction ist, wird das Zeichen für die Orientirung $\underset{+}{\pi}$.

5. Rutil TiO_2.

$a : c = 1 : 0·644.$

Untersucht wurden verschiedene natürliche Krystalle, 1 bis 2 *mm* lang. Die Erscheinungen sind dieselben wie bei dem vorhergehenden isomorphen Körper. Die Substanz ist paramagnetisch und die Hauptaxe stellt sich axial bei etwas überwiegender Dimension der Nebenaxe. Das Zeichen ist daher ebenfalls $\underset{+}{\pi}$.

6. Phosphorsaures Ammoniak $H_2NH_4PO_4$.

$a : c = 1 : 0·7124.$

Die Substanz ist stark diamagnetisch. Eine der Hauptaxe parallele Platte, bei welcher die Dimension nach dieser Axe nahezu ebenso lang war als senkrecht dazu, hatte die Neigung, sich mit der Hauptaxe axial zu stellen. Die Hauptaxe wäre

also die Richtung der schwächeren magnetischen Induction und die magnetische Bezeichnung $\underline{\delta}$.

7. Phosphorsaures Kali H_2KPO_4.

$a : c = 1 : 0 \cdot 664$.

Meine älteren Beobachtungen an diesem Salze zeigten, dass dasselbe ziemlich diamagnetisch ist, gaben aber keine deutliche Axenwirkung. Ich habe nun in neuester Zeit diesen Körper nochmals in einem sehr starken, nahezu parallelen Felde (ungefähr 8000 E.) untersucht und dabei unzweifelhaft eine axiale Einstellung der Hauptaxe beobachtet. Es ist also auch dieses dem vorhergehenden isomorphe Salz magnetisch negativ und sein Schema daher ebenfalls $\underline{\delta}$.

8. Arsensaures Ammoniak $H_2NH_4AsO_4$.

$a : c = 1 : 0 \cdot 715$.

Meine Beobachtungen an diesem Salze sind in Übereinstimmung mit der Angabe Plücker's, dass dasselbe negativ diamagnetisch ist.[1] Eine Platte, die ungefähr 6 *mm* lang und breit war und bei der die Dimension parallel der Hauptaxe unbedeutend überwog, hatte die Neigung, sich mit der Hauptaxe axial zu stellen. Da die Substanz negativ ist, so wird das Schema wie bei dem isomorphen phosphorsauren Salze $\underline{\delta}$.

9. Arsensaures Kali H_2KAsO_4.

$a : c = 1 : 0 \cdot 666$.

Substanz deutlich diamagnetisch. Eine Platte, bei der die Längen der Nebenaxe und Hauptaxe sich wie 3 : 4 verhielten, stellte sich mit der Hauptaxe axial. Das Schema der magnetischen Induction wird daher, sowie bei den drei vorhergehenden isomorphen Substanzen $\underline{\delta}$. Plücker und Beer[2] fanden keine deutliche Axenwirkung.

---

[1] J. Plücker, Tr. R. Soc., 1858, p. 583.

[2] Pogg. Ann., Bd. 81, S. 138.

10. Essigsaurer Kupferkalk $CaCu2(C_4H_6O_6)+8H_2O$.

$a : c = 1 : 1·032$.

Auch dieses Salz wurde schon von Plücker und Beer[1] untersucht, deren Resultate durch meine Beobachtungen bestätigt werden. Die Substanz ist ziemlich stark paramagnetisch, an dem untersuchten Parallelopiped, das sich mit der Hauptaxe axial stellte, war die Dimension nach derselben nur $^3/_5$ von der senkrecht dazu. Die Hauptaxe ist also die Richtung stärkster Induction und das Schema $\underset{+}{\pi}$.

11. Harnstoff CH_4N_2O.

$a : c = 1 : 0·813$.

Krystalle verschiedener Provenienz erwiesen sich theils dia-, theils paramagnetisch, Krystalle jedoch, die ich von Prof. Weidel als chemisch rein erhalten hatte, waren unzweifelhaft diamagnetisch. Alle Krystalle stellten sich aber energisch mit ihrer Längsrichtung, die parallel der Hauptaxe ist, axial; die diamagnetische Induction senkrecht zur Hauptaxe ist also viel stärker, und die Krystalle sind mit $\underset{-}{\delta}$ zu bezeichnen.

12. Erythrit $C_4H_{10}O_4$.

$a : c = 1 : 0·3762$.

Aus einem grösseren Krystalle wurde durch Anschleifen zweier Flächen 001 senkrecht zur optischen Axe ein rechtwinkliges Parallelopiped hergestellt, dessen Seiten durch die natürlichen Flächen 100 und 010 gebildet waren. Die Drehungsaxe wurde senkrecht zu einer Seitenfläche 010 gewählt; die Dimensionen nach den drei Richtungen waren in Millimetern

c	*a*	Höhe
7	7	8

Die Grösse der Nebenaxe wurde dann successive auf 6 und $5^1/_2$ *mm* verkürzt, immer aber stellte sich die Hauptaxe

[1] Pogg. Ann., Bd. 81, S. 139.

axial. Da die Substanz diamagnetisch, so ist die Richtung stärkster Induction senkrecht zur Hauptaxe, und das magnetische Schema wird $\underset{-}{\delta}$.

An derselben Platte wurde dann noch die Wärmeleitung nach der von mir schon früher befolgten Methode[1] beobachtet. Für das Verhältniss der Ellipsenaxe des geschmolzenen Wachses parallel und senkrecht zur Hauptaxe wurde 12 : 13 gefunden, so dass das Schema der Orientirung der Wärmeleitung $\underset{-}{\tau}$ ist.

B. Rhomboëdrische und hexagonale Krystalle.

13. Nickelsiliciumfluorid $NiSiFl_6+6H_2O$.

$a : c = 1 : 0 \cdot 5135.$

Die Substanz ist stark paramagnetisch, die Hauptaxe stellt sich axial bei überwiegender Dimension der Nebenaxe (3 : 5); das Zeichen für die magnetische Orientirung ist daher $\underset{+}{\pi}$.

14. Cobaltsiliciumfluorid $CoSiFl_6+6H_2O$.

$a : c = 1 : 0 \cdot 521.$

Wie das vorhergehende Salz stark paramagnetisch. Ebenso stellt sich die Hauptaxe sehr entschieden axial, selbst bei weit entfernten Polen. Bei den untersuchten Platten verhielten sich die Dimensionen von Hauptaxe und Nebenaxe wie 3 : 5. Das Zeichen wird daher ebenfalls $\underset{+}{\pi}$.

15. Kaliumcadmiumchlorid K_4CdCl_6.

$a : c = 1 : 0 \cdot 615.$

Diamagnetisch. Aus einem grösseren Krystalle wurde eine zur Hauptaxe parallele Platte hergestellt, deren ziemlich gleich lange Seitenflächen beziehungsweise parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. Parallel ihrer Normale aufgehängt, stellt sich die Platte im parallelen Felde und zwischen runden Polen

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 54, II (1866), S. 163.

mit der Hauptaxe äquatorial. Wurden die runden Pole bis zur Berührung gebracht, so suchte die darüber befindliche Platte sich mit einer Diagonale, die etwas grösser war, äquatorial zu stellen, wodurch die vorher angegebene Einstellung etwas markirt wurde. Nach Verkürzung der Dimension der Platte nach jener Diagonale zeigte sich das Bestreben des Magneten, die Hauptaxe äquatorial zu stellen, wieder deutlicher. Das Zeichen für die magnetische Induction ist nach dem Vorhergehenden $\underset{-}{\delta}$.

16. Ammoniumcadmiumchlorid $4(NH_4)CdCl_3$.

Auch hier wurde aus einem Krystalle ein Prisma geschnitten, dessen Seitenflächen parallel und senkrecht zur optischen Axe waren. Mit der Längsaxe aufgehängt, hatte dasselbe die Neigung, die optische Axe äquatorial zu stellen. Es wäre also die Hauptaxe die Axe grösster Induction, da die Substanz diamagnetisch ist, und das Schema der magnetischen Orientirung wird $\underset{-}{\delta}$. Das etwas zweifelhafte Versuchsresultat stimmt übrigens mit der Beobachtung an dem vorhergehenden, isomorphen Salze.

17. Kaliumeisencyanür, salpetersaures Kalinatron

$$K_4FeCy_6+2(KNa\,2NO_3).$$

$$a:c = 1:0\cdot8585.$$

Die Krystalle sind deutlich diamagnetisch, die Hauptaxe stellt sich äquatorial und das Schema ist $\underset{+}{\delta}$.

18. Korund Al_2O_3.

$$a:c = 1:1\cdot3629.$$

Es wurden drei kleine natürliche Krystalle untersucht, von denen sich zwei, wenig gefärbte als diamagnetisch, das dritte, roth gefärbte aber paramagnetisch erwies. Bei allen stellte sich, wenn die Krystalle senkrecht zur Hauptaxe aufgehängt wurden, diese Axe äquatorial. Es dürfte also wohl das Schema der magnetischen Induction durch $\underset{+}{\delta}$ gegeben sein.

indem die Einstellung bei dem paramagnetischen Krystall wohl durch die überwiegende Längendimension der Hauptaxe veranlasst worden sein dürfte. Das angegebene Zeichen würde mit den Angaben von Knoblauch und Tyndall[1] für den isomorphen Eisenglanz (Fe_2O_3) stimmen. Ich habe versucht, diese Angaben zu controliren, konnte aber zu keinem Endresultat kommen, da die Krystalle von Eisenglanz im magnetischen Felde permanent magnetisch werden, wodurch sie sich ganz arbiträr einstellen. Nach den früheren Forschern würde das Schema für Eisenglanz $\underset{+}{\pi}$ sein.

19. Beryll $Be_3Al_2Si_6O_{18}$.

$$a : c = 1 : 0\cdot49886.$$

Die Untersuchung zweier kleiner Krystalle gab Resultate, welche mit denen von Plücker und Beer[2] stimmen. Die Substanz ist paramagnetisch, die Hauptaxe stellte sich äquatorial, trotzdem ihre Länge zu der der Nebenaxe sich bei dem einen, lichtgrünen Krystalle wie 5 : 3 verhielt. Die magnetische Bezeichnung ist daher $\underset{-}{\pi}$.

20. Unterschwefelsaurer Kalk $CaS_2O_6 + 4H_2O$.

$$a : c = 1 : 1\cdot4976.$$

Dieses Salz zeigt bei diamagnetischem Charakter starke Axenwirkung. Kleine Parallelopipede, deren Seitenflächen beziehungsweise parallel und senkrecht zur Hauptaxe waren, wurden, senkrecht zu ihrer Längsrichtung und zur Hauptaxe aufgehängt, schon von einem Pol so abgestossen, dass die Längsrichtung sich axial stellt.

Da diese Richtung senkrecht zur Hauptaxe war, so ist letztere die Richtung stärkster Induction, und das Zeichen für dieses Salz wird $\underset{+}{\delta}$.

---

[1] Pogg. Ann. (1850), Bd. 81, S. 490.

[2] Pogg. Ann., Bd. 81, S. 133.

21. Unterschwefelsaurer Strontian $SrS_2O_6+4H_2O$.

$$a:c = 1:1\cdot5024.$$

Die Axenwirkung ist hier weniger stark als bei dem vorhergehenden isomorphen Salze, doch stellte sich die Hauptaxe deutlich äquatorial. Wegen des ebenfalls diamagnetischen Charakters ergibt sich wieder das Zeichen $\underset{+}{\tilde{c}}$.

22. Unterschwefelsaures Blei $SrS_2O_6+4H_2O$.

$$a:c = 1:1\cdot516.$$

Auch hier ist die Axenwirkung schwach, doch stellt sich bei quadratischen Platten deutlich die zur Hauptaxe parallele Seite äquatorial. Sowie die zwei früheren isomorphen Verbindungen erhielt auch dieses die Bezeichnung $\underset{+}{\tilde{c}}$.

C. Anhang.

23. Chromsaure Magnesia $MgCrO_4+7H_2O$.

$$a:b:c = 1:0\cdot9901:0\cdot5735.$$

In den Beobachtungen, die seinerzeit von Grailich und mir[1] über die Orientirung der magnetischen Induction an Krystallen des rhombischen Systems veröffentlicht wurden, ist für chromsaures Magnesia ein anderes Schema angegeben, als wie für das isomorphe schwefelsaure Salz, aber auf Grund von sehr unsicheren Versuchen. Die Richtigkeit dieser Beobachtungen würde beweisen, dass isomorphe Körper sich in magnetischer Hinsicht verschieden verhalten könnten, wofür freilich bis jetzt kein anderes Beispiel bekannt ist. Obwohl es also von vornherein wahrscheinlich ist, dass die von Grailich und mir gegebene Orientirung der magnetischen Induction der chromsauren Magnesia falsch ist, wollte ich doch die Sache klarstellen und habe zu verschiedenen Zeiten die Beobachtungen wiederholt. Diese Beobachtungen sind schwierig, weil

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 32, (1858), S. 43.

ja eben das Salz eine schwache Axenwirkung zeigt. Ich glaube aber nun behaupten zu können, dass auch für chromsaures Magnesia dasselbe gilt wie für die ganze isomorphe Reihe, der es angehört.

Ich hatte unter anderen sehr schöne Krystalle aus der Fabrik von Schuchart in Görlitz zur Untersuchung, deren Verhalten noch angegeben werden soll.

Ein Krystall, bei dem beide Prismenflächen gleich entwickelt waren, wurde parallel der Längsrichtung (Axe *c*) aufgehängt: es stellte sich die zur ausgezeichneten Spaltungsfläche senkrechte Axe *(a)* axial. Danach ist die magnetische Induction nach der mittleren Krystallaxe *(b)* stärker als nach der grössten *(a)*, da die Substanz diamagnetisch ist.

Aus dem Krystalle wurde nun durch Spalten nach der Spaltungsfläche eine Platte hergestellt und deren Dimensionen nach den Axen *b* und *c* ziemlich gleich gemacht. Diese Platte parallel ihrer Normale (Axe *a*) aufgehängt, zeigte axiale Einstellung der Axe *b*. Der mittleren Axe *b* entspricht also eine kleinere Induction als der kleinsten Krystallaxe *c*, und das Schema der magnetischen Orientirung wird

$$\delta(\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}).$$

Über die Wärmeentwicklung durch Foucault'sche Ströme bei sehr schnellen Schwingungen

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 1 Textfigur.)

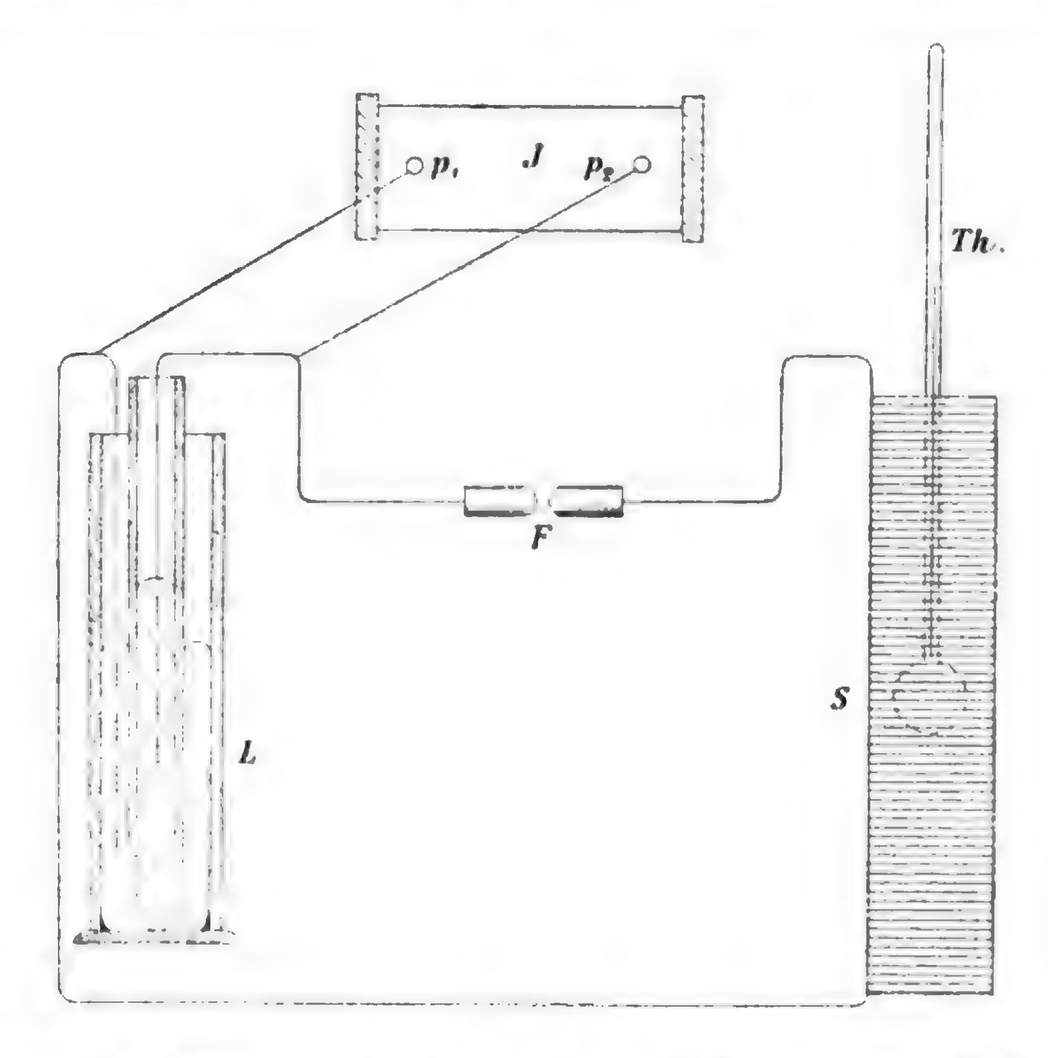
Entladet man eine Leydnerflasche durch ein Solenoid, so erhält man bekanntlich unter Umständen im Inneren des Solenoids ein rasch wechselndes magnetisches Feld, dessen Maxima je nach den Verhältnissen des Entladungskreises schneller oder langsamer abnehmen. Die Häufigkeit des Wechsels hängt von der Capacität der Leydnerflasche und vom Selbstinductionscoëfficienten des Schliessungskreises ab. Man kann diese Grössen leicht so wählen, dass eine Schwingungsperiode von circa 10^{-6} Sec. auftritt. Bringt man einen Leiter in ein solches Feld, so werden in demselben Ströme inducirt, durch welche eine Wärmeentwicklung bedingt ist. Eine einzige Entladung der Leydnerflasche ist allerdings nicht genügend, um eine gut beobachtbare Wärmewirkung hervorzubringen; man muss deren mehrere aufeinanderfolgen lassen, wie dies mittelst eines zur Ladung der Leydnerflasche verwendeten Inductoriums leicht geschehen kann. Insbesondere aber eignet sich hiezu ein Inductorium, welches im Primärkreise einen elektrolytischen Unterbrecher nach Wehnelt enthält, da in diesem Falle viele hundert Entladungen der Leydnerflasche pro Secunde erzielt werden können. Nimmt man ein solches Inductorium und verbindet mit den Secundär-

polen eine Leydnerflasche von der Grösse der Maassflaschen und leitet deren Entladung durch ein Solenoid von 10 bis 15 *cm* Länge und 3—5 Windungen pro Längeneinheit, so bekommt man ganz bemerkenswerthe Wirkungen, wenn man in das Innere des Solenoids einen Leiter bringt. Eine Quecksilber-Thermometerkugel zeigt z. B. unter dem Einflusse dieses Magnetfeldes in 10 bis 20 Secunden einen Temperaturanstieg von mehreren Graden. Auch Kupferdrähte zeigen in kurzer Zeit eine Temperaturzunahme. Besonders stark ist aber die Erwärmung bei Eisendrähten, und zwar auch bei sehr dünnen, die unter dem Einflusse gewöhnlicher Wechselfelder kaum eine nennenswerthe Temperaturerhöhung aufweisen würden. Eine solche Anordnung scheint geeignet zu sein, über den Verlauf und die Ausbreitung schnell wechselnder inducirter Ströme in Leitern von verschiedenen Dimensionen Aufschlüsse zu geben, eine Frage, die bisher zum Theile theoretisch und nur sehr wenig experimentell behandelt wurde. Insbesondere können wir vielleicht auf diese Weise hinsichtlich der Frage über die Magnetisirbarkeit des Eisens bei sehr schnellen elektrischen Schwingungen einen Schritt weiter thun. Im Nachfolgenden beschreibe ich einige Versuche nach dieser Methode, die jedoch nur einen qualitativen Werth besitzen und hauptsächlich die Methode charakterisiren sollen. Bevor auf exactere Messungen nach dieser Methode eingegangen wird, müssen noch manche Schwierigkeiten, die zum Theil auch in der Anwendnng des elektrolytischen Unterbrechers liegen, überwunden werden.

Die Anordnung der Apparate ist aus Fig. 1 ersichtlich. In die Primärleitung eines Inductoriums *J* wurde ein elektrolytischer Unterbrecher nach Wehnelt und eine Anzahl von Accumulatoren (gewöhnlich 20, in maximo 30) eingeschaltet. Das Inductorium gibt bei gewöhnlicher Unterbrechung unter Anwendung von 6 Accumulatoren eine Schlagweite von 10 bis 15 *cm*. Der elektrolytische Unterbrecher war ganz so hergestellt, wie ihn Wehnelt[1] zuerst beschrieb; es waren jedoch gleichzeitig 4 Glasröhren mit eingeschmolzenen Platinspitzen

[1] Elektrotechnische Zeitschrift, 1899, Heft 4.

von verschiedener Dicke und Länge in die Säure eingetaucht, um die Anode rasch wechseln zu können. Die Pole p_1 und p_2 waren mit den beiden Belegungen der Leydnerflasche *L* verbunden. Die Leydnerflasche bestand aus einer Eprouvette von 29 *mm* äusserer Weite und 1·9 *mm* Glasdicke, welche in einen dicken Messcylinder gesteckt war. Eingegossenes Quecksilber



bildete die Belegungen; es stand aussen 12 und innen 14·5 *cm* hoch. Von der inneren Belegung führte ein 2 *mm* dicker und 42 *cm* langer Kupferdraht zur Funkenstrecke *F*, von da ein 1·2 *mm* dicker und 14 *cm* langer Kupferdraht zum Solenoid *S* und von da wieder ein 2 *mm* dicker und 70 *cm* langer Draht zur äusseren Belegung. Das Solenoid war auf ein 24 *mm* weites Glasrohr gewickelt, hatte eine Länge von 21·5 *cm* und 5·4 Windungen pro Längeneinheit. Der zur Bewicklung verwendete Draht ist doppelt übersponnen und mit Wachs getränkt und hat einen Durchmesser von 1·2 *mm* ohne und von 1·7 *mm* mit Überspinnung.

Um die Schwingungsdauer des Entladungskreises wenigstens schätzungsweise angeben zu können, habe ich die Capacität dieser Leydnerflasche durch Vergleich mit einem 0·1 Mikrofarad-Condensator zu bestimmen gesucht, indem ich den Condensator mit einem Clark-Element, die Leydnerflasche jedoch mit 60 Acc. lud und die Ladung mit einem Galvanometer untersuchte. Auf diese Weise fand ich die Capacität $C = 0 \cdot 00044$ Mikrofarad. Den Selbstinductionscoëfficienten S des Solenoids rechnete ich nach der Formel

$$S = \frac{4\pi N^2 q}{l},$$

wo N die Gesammtzahl der Windungen des Solenoids ($= 117$) und q den Querschnitt einer Windung bezeichnet. Diese Rechnung ergibt $S = 42000$ *cm*. Daraus ergibt sich eine Schwingungsdauer $\tau = 0 \cdot 43 \times 10^{-7}$ (einfach). In Wirklichkeit dürfte die Schwingungsdauer wohl grösser sein, da ich z. B. den Selbstinductionscoëfficienten der linearen Theile des Entladungskreises vernachlässigte; doch ist dies von keiner Bedeutung, da ja bei den weiteren Messungen der absolute Werth von τ nicht weiter in Betracht kommt.

Bei dieser Anordnung habe ich zunächst einige Versuche über die Erwärmung verschieden grosser Quecksilberkugeln gemacht. Zu diesem Zwecke bediente ich mich gewöhnlicher Quecksilberthermometerkugeln, welche ich im Inneren des Solenoids befestigte und bei denen ich den Gang der Quecksilberkuppe in der aus dem Solenoid herausragenden capillaren Röhre mittelst eines Mikroskops mit Ocularmikrometer beobachtete. Der Werth eines Mikrometertheilstriches war leicht zu bestimmen, da das Mikroskop mit Hilfe einer Schraube längs einer Millimeterscala verschoben werden konnte; dieser Werth war $= 0 \cdot 088$ *mm*. Ebenso war es leicht, die Verschiebung der Quecksilberkuppe in Millimetern pro 1° Temperatursteigerung festzustellen.

Für diese Versuche benützte ich eine Accumulatorenbatterie von 20 Elementen und eine Platinspitze von $5 \cdot 5$ *mm* Länge und $0 \cdot 4$ *mm* Dicke. Die Funkenstrecke war $1 \cdot 7$ *mm*,

und ein Kohlrausch'sches Federgalvanometer zeigte eine Stromstärke von 8 A. an.

Die Dauer der Schliessung des Primärkreises betrug in allen Fällen 5 Secunden.

Tabelle I gibt die Resultate. Darin ist in der ersten Rubrik die Nummer der Kugel eingetragen.

D bezeichnet den äusseren Durchmesser der Thermometerkugel;

g bedeutet den Gradwerth für eine Verschiebung der Quecksilberkuppe um 1 *mm*;

m die Verschiebung der Kuppe in Mikrometertheilen;

t° ist der Temperaturanstieg in 5 Secunden.

Tabelle I.

Nr.	*D cm*	*g*	*m*	*t*°
1	1·85	0·42	25	0·92
2	1·71	0·57	18	0·90
3	1·54	0·41	27	0·97
4	1·49	0·55	19	0·94
5	1·19	0·65	25	1·43
6	1·18	0·62	22	1·23
7	1·00	0·53	33	1·56
8	0·98	0·74	26	1·70
C I	0·50	2·3	5·6	1·15
C II	0·50	2·1	5·6	1·03

Unter *C* I und *C* II sind Beobachtungen mit zwei Thermometern mit cylindrischem Quecksilbergefäss eingetragen. Bei diesen bezieht sich *D* auf die Dicke der Quecksilbersäule. Das Gewicht des im Thermometergefäss enthaltenen Quecksilbers war bei *C* I = 13·8 und bei *C* II = 14·4 *g*.

Wie man aus den Daten der Tabelle ersieht, nimmt die Erwärmung mit abnehmendem *D* zu, und die Cylinder verhalten sich so wie Kugeln von 1·2 bis 1·3 *cm* Durchmesser. Diese Thatsachen sind wohl so zu erklären, dass sich bei

diesen schnellen Schwingungen die inducirten Ströme nicht gleichmässig über die ganze Leitermasse ausbreiten, sondern dass sie hauptsächlich an der Oberfläche verlaufen. Bekanntlich spielt bei dieser ungleichmässigen Vertheilung der Strömungslinien der specifische Widerstand eine grosse Rolle, und es dürfte interessant sein, die Erwärmung von gleich dicken Drähten aus verschiedenem Material zu untersuchen, was mit Hilfe einer ähnlichen Calorimetervorrichtung, wie sie weiter unten beschrieben wird, durchzuführen wäre.

Um das Verhältniss des Temperaturanstieges bei verschiedenen Durchmessern etwas genauer zu bestimmen, habe ich dann mit drei Kugeln eine Reihe von je 10 Beobachtungen, die mit einander abwechselten, gemacht. Bei diesen Kugeln habe ich sodann auch das Gewicht des Quecksilbers und den Durchmesser der Quecksilberkugel bestimmt. Es wurden benützt:

Nr. 1 (von früher). Für diese Kugel habe ich die Glasdicke zu 0·2 *mm* angenommen, so dass der Quecksilberkugel ein Durchmesser von 1·8 *cm* und ein Gewicht von 41·4 *g* entsprechen würde.

Nr. 8 (wie früher). Gewicht des Quecksilbers = 4·84 *g*. Durchmesser der Quecksilberkugel = 0·88 *cm*.

Nr. 10. Gewicht des Quecksilbers = 1·83 *g*. Durchmesser der Quecksilberkugel = 0·64 *cm*.

Die beiden letzten Kugeln wurden behufs Bestimmung des Quecksilbergewichtes entleert.

Die Bedingungen im Primärkreise, sowie die Dauer der Schliessung waren dieselben wie vorher.

Es wurden folgende Verhältnisse für den Temperaturanstieg gefunden:

$$\frac{\text{Nr. 1}}{\text{Nr. 8}} = 0·66; \quad \frac{\text{Nr. 1}}{\text{Nr. 10}} = 0·71; \quad \frac{\text{Nr. 8}}{\text{Nr. 10}} = 1·08$$

und bei einer zweiten Versuchsreihe, nachdem vorher die Kugeln der Funkenstrecke geputzt wurden:

$$\frac{\text{Nr. 1}}{\text{Nr. 8}} = 0·65; \quad \frac{\text{Nr. 1}}{\text{Nr. 10}} = 0·70; \quad \frac{\text{Nr. 8}}{\text{Nr. 10}} = 1·08.$$

Darnach würde also der Temperaturanstieg mit abnehmendem Durchmesser zuerst zu und von einer gewissen Grenze an abnehmen, was ja theoretisch erklärt werden kann.

Ferner untersuchte ich die Erwärmung verschieden dicker Eisendrähte. Zu diesem Zwecke verfertigte ich mir drei nahezu gleiche Alkoholthermometer mit cylindrischem Gefäss. Für die Anfertigung eines solchen Thermometers wurde eine cylindrische Glasröhre von 4 *mm* innerer Weite benützt, an welche eine Capillare angeschmolzen war. Das andere Ende der cylindrischen Röhre war ein wenig ausgezogen und zunächst offen. Hier wurden die Eisendrähte in das Thermometergefäss gebracht, hierauf das ausgezogene Ende zugeschmolzen und das Thermometer mit Alkohol gefüllt.

Thermometer *A* enthielt einen 98 *mm* langen und 0·58 *mm* dicken weichen Eisendraht vom Gewichte 0·18 *g*. Das Thermometergefäss hatte eine beiläufige Länge von 10 *cm* und enthielt 1·07 *g* Alkohol. Der Gradwerth von 1 *mm* Verschiebung der Kuppe war 0°14. Dieses Thermometer zeigte als Mittel aus sechs Beobachtungen bei 5 Sec. Schliessungsdauer und Anwendung von 20 Acc. und gleicher Funkenstrecke und Platinspitze wie vorher einen Temperaturanstieg von 0°48.

Thermometer *B* enthielt 10 weiche Eisendrähte von 0·205 *g* Gesammtgewicht. Dicke eines Drahtes = 0·2 *mm*, Länge = 90 *mm*. Länge des Thermometergefässes circa 11 *cm*, Gewicht des Alkohols = 1·26 *g*. Gradwerth für ein Millimeter = 0·12.

Die Erwärmung betrug unter gleichen Umständen wie oben 1°14.

Thermometer *C* enthielt keinen Draht; es hatte ein Thermometergefäss von 13 *cm* Länge und ein Alkoholgewicht von 1·49 *g*. Gradwerth für ein Millimeter = 0·11.

Thermometer *C* diente nur dazu, um zu constatiren, dass die Erwärmung bei den beiden vorhergehenden Thermometern durch das Vorhandensein der Eisendrähte bedingt ist, nicht aber etwa daher rührt, dass sich das Solenoid erwärmt und das Thermometer durch Bestrahlung erhitzt. Thatsächlich konnte mit diesem Thermometer, wenn es im Inneren des Solenoids

befestigt war, selbst bei länger andauerndem Funkenstrom kein Temperaturanstieg bemerkt werden.

Wir wollen nun annehmen, dass in der kurzen Zeit von fünf Secunden kein nennenswerther Theil der Wärme vom Alkoholthermometer durch Strahlung nach aussen abgegeben wird; ferner wollen wir auch voraussetzen, dass die Glaswände des Thermometergefässes an der Erwärmung in der kurzen Zeit nicht theilnehmen, was zum grössten Theile zutreffen wird, da ja die Wärme vom Eisendraht zuerst auf den Alkohol übergehen muss. Unter diesen Umständen berechnet sich die bei Thermometer *A* entwickelte Wärmemenge zu 0·31 Calorien, wenn man die specifische Wärme des Alkohols zu 0·58 und die des Eisens zu 0·113 annimmt. Das gibt für die Secunde eine Wärmeentwicklung von 0·06 Cal. Beziehen wir weiter die Wärmeentwicklung auf die Gewichtseinheit oder auf die Volumeneinheit des Eisens und auf die Secunde, so bekommen wir 0·33, respective 2·6 Cal. Drückt man letztere Zahl in Erg aus, so gibt das 109×10^6 Erg. In gleicher Weise bekommt man für das Thermometer *B* eine Wärmeentwicklung von 0·85 Cal. pro fünf und von 0·17 Cal. pro eine Secunde. Das gibt, bezogen auf die Volumeneinheit und die Secunde, 6·6 Cal. oder 277×10^6 Erg.

Diese Versuche ergeben nun das bemerkenswerthe Resultat, dass die Wärmeentwicklung pro Volumeneinheit beim dicken Draht kleiner ist als beim dünnen. Bei Wechselströmen, wie sie in der Praxis vorkommen, wächst die Wärmeentwicklung mit dem Durchmesser des Drahtes ausserordentlich rasch an. Auch bei elektrischen Oscillationen, deren Dauer weniger als ein Tausendstel einer Secunde beträgt, ist der Energieverbrauch bei dicken Drähten viel grösser als bei dünnen, wie dies aus Versuchen hervorgeht, welche ich über die Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen gemacht habe.[1]

Bei den angeführten Messungen ist der Einfluss der Rückwirkung des Leiters auf das Feld nicht berücksichtigt worden; es kann daher auch aus diesem Grunde den mitgetheilten Daten nur ein qualitativer Werth beigelegt werden.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 104 und Wied. Ann., Bd. 58.

Zum Schlusse habe ich noch mehrere Beobachtungen mit anderen Platinspitzen und mit 30 Acc. gemacht. Die Zahl der Unterbrechungen ändert sich mit der Beschaffenheit der Platinspitze und mit der Zahl der Accumulatoren, was ja bekannt ist. Da bei schnellerer Unterbrechung auch der Anstieg der Stromstärke geringer wird, so gibt es für jede Spitze eine gewisse Anzahl Accumulatoren, für welche die Erwärmung ein Maximum wird.

Über die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkt

von

Dr. **M. Radaković,**

Privatdocent an der Universität in Innsbruck.

(Mit 7 Textfiguren.)

Den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet die Untersuchung einer gespannten Saite, welche entweder durch eine Reihe von Impulsen, die an regelmässig angeordneten Stellen in regelmässigen Intervallen erfolgen, oder durch eine Kraft von gegebener Grösse, deren Angriffspunkt in vorgegebener Weise die Saite durchwandert, zu Schwingungen angeregt wird. Diese Aufgabe ist ein specieller Fall des allgemeineren Problems der Bewegung eines materiellen Systems, welche durch eine Reihe regelmässig angeordneter Impulse oder durch die Wirkung eines das System durchstreichenden Erregers veranlasst wird. Die beiden Arten der Anregung finden sich bei der Bewegung eines Zuges über eine Brücke verwirklicht einerseits in dem Drucke der die Brücke durchwandernden Last des Zuges, anderseits in den Stössen, welche durch die Gegengewichte der Locomotive oder durch das Überspringen einer Schienenlücke hervorgerufen werden. In der That schliessen sich auch die Untersuchungen jener besonderen Fälle des allgemeinen Schwingungsproblems, welche eine näherungsweise Lösung gefunden haben, an diese technische Aufgabe an.

Die Einwirkung einer bewegten Kraft hat Stokes in seiner Arbeit: »Discussion of a Differential Equation relating to the breaking of Railway bridges« (Trans. of the Cambridge

Philos. Soc. Vol. VIII, p. 707) untersucht, indem er, anknüpfend an experimentelle Untersuchungen von Willis, die Bewegung eines an beiden Enden unterstützten wagrechten Stabes, welchen ein schwerer Massenpunkt mit horizontaler Geschwindigkeit betritt, in jenen zwei extremen Fällen entwickelt, in welchen die Masse der bewegten Last verglichen mit der Masse des Stabes entweder als überwiegend gross oder als verschwindend klein angesehen wird. Die erste Annahme führt zu einer Lösung, welche nur für den Anfang der Bewegung gilt und aufhört, eine Annäherung an den thatsächlichen Vorgang zu sein, bevor noch der bewegte Punkt das zweite Ende des Stabes erreicht. Die zweite Annahme entwickelt Stokes unter der Voraussetzung, dass jede auf den Stab wirkende Kraft durch eine über die ganze Länge desselben gleichmässig vertheilte Kraft ersetzt wird, welche dieselbe mittlere Ausbiegung wie jene erzeugt, und dass der Unterschied zwischen dem Drucke der bewegten Last auf den Stab und dem Gewichte derselben vernachlässigt wird. Der mathematische Theil dieser Arbeit wurde von Boussinesq (Compt. rend., Bd. 97, p. 897) vereinfacht. Dieser specielle Fall hat nach Stokes noch mehrfache, den Bedürfnissen der Technik entsprechende Bearbeitungen gefunden.

Die zweite Erregungsart hat, anschliessend an dieselbe technische Aufgabe, Steiner (Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereines, Jahrg. 44, S. 113) betrachtet, indem er die Wirkung der regelmässigen, vom Zuge ausgeübten Impulse in Rechnung zog und untersuchte, wann die Periode dieser Impulse mit der Schwingungsdauer der Brücke in ein rationales Verhältniss tritt, in welchen Fällen eine Vermehrung, beziehungsweise eine Verminderung der Schwingungen erwartet werden kann.

Im Hinblick auf diese näherungsweisen Lösungen, welche das allgemeine Schwingungsproblem in besonderen Fällen gefunden hat, ist es vielleicht nicht ohne Interesse, die gespannte Saite zu betrachten, da deren auf die beiden Arten der Erregung hin erfolgende Bewegung sich vollständig entwickeln lässt. Es kommt dieser Untersuchung auch ein gewisses mathematisches Interesse insoferne zu, als sie die Aufsuchung eines

Integrals der Differentialgleichung der schwingenden Saite unter etwas anderen als den üblichen Bedingungen erfordert.

Den vorwiegend mechanischen Tendenzen entsprechend wird im Folgenden in erster Linie das d'Alembert'sche Integral verwendet werden, welches sich ja in hervorragender Weise dazu eignet, die Form und Geschwindigkeitsvertheilung der Saite erkennen zu lassen. Das Bernoulli'sche Integral wird nur insoweit herangezogen, als es sich um die Angabe eines Lösungsweges handelt, welcher sich leicht auf andere schwingende Systeme zunächst auf den transversal schwingenden Stab verallgemeinern lässt.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle für die Anregung zu den folgenden Untersuchungen Herrn Prof. Dr. W. Wirtinger aufrichtig zu danken.

Bewegung einer Saite, welche durch eine Reihe von Impulsen angeregt wird.

Die Saite, deren Bewegung bei dieser besonderen Art der Erregung untersucht werden soll, besitze die Länge l, die überall gleiche Längendichte ρ und sei der constanten Spannung T_1 unterworfen. Die Impulse, welche die Saite anregen, seien alle von gleicher Stärke, so dass jeder derselben den Antrieb A auf die Saite ausübt, und regelmässig in der Art angeordnet, dass an der Stelle $x_1 = \frac{l}{k}$ der Saite im Augenblicke τ, an der Stelle $x_2 = 2\frac{l}{k}$ im Augenblicke 2τ u. s. f., an der Stelle $x_{k-1} = (k-1)\frac{l}{k}$ im Augenblicke $(k-1)\tau$ je ein Impuls erfolgt. Es bedeutet hiebei k eine ganze Zahl, und es sind die Entfernungen x in der Ruhelage der Saite von einem Endpunkte an gezählt. Die Geschwindigkeit c, mit welcher die Impulse die Saite durchwandern, ist durch das Zeitintervall τ zwischen zwei Stössen gegeben. Es ist $c = \frac{l}{k\tau}\cdot$

Die Bewegung der Saite ergibt sich durch die Superposition jener Bewegungen, zu welchen sie durch jeden einzelnen der Impulse für sich angeregt wird. Es empfiehlt sich daher, zunächst die Bewegung der Saite zu untersuchen,

welche auf einen in einem Punkte $x = b$ ausgeübten Impulse von der Stärke A hin erfolgt.

Bezeichnet man mit $a = \sqrt{\frac{T_1}{\rho}}$ die der gegebenen Saite eigenthümliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so liefert bekanntlich die d'Alembert'sche Lösung für die unendlich lange Saite jenes Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

welches zur Zeit $t = 0$ die vorgegebene Gestalt $y = \varphi(x)$ und die vorgegebene Geschwindigkeitsvertheilung $\frac{dy}{dt} = \psi(x)$ ergibt, in der Form

$$y = \frac{1}{2}\{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Wird die Saite durch einen Impuls in Bewegung gesetzt, so befinden sich zur Zeit $t = 0$ alle Saitenpunkte in der Ruhelage, also ist $\varphi(x) = 0$ zu setzen; die Geschwindigkeit aller Saitenpunkte $\psi(x)$ ist ebenfalls an allen Stellen, bis auf die getroffene Stelle selbst, gleich Null. An dieser, welche die kleine Ausdehnung ε besitzen möge, ist die Geschwindigkeit $\psi(b)$ durch die Beziehung bestimmt, dass der Antrieb A des Impulses gleich der Bewegungsgrösse $\rho.\varepsilon.\psi(b)$ der getroffenen Stelle sein muss. Es ist also

$$\psi(b).\varepsilon = \frac{A}{\rho},$$

und das d'Alembert'sche Integral liefert

$$y = \frac{A}{2a\rho}.$$

Denkt man sich in der xt-Ebene von der Stossstelle $(b, 0)$ an die beiden Charakteristiken $x+at = b$ und $x-at = b$ gezogen und in jedem Punkte des Winkelraumes zwischen

diesen Geraden die Strecke $\frac{A}{2a\rho}$ senkrecht nach aufwärts aufgetragen, so liefert jeder Schnitt dieser Figur, in einem beliebigen Punkte $(0, t)$ senkrecht zur Zeichenebene geführt, die Gestalt der unendlich langen Saite in dem beliebig gewählten Zeitmomente t. Es entsteht, wie man sieht, an der getroffenen Stelle eine Ausbiegung $\frac{A}{2a\rho}$ der Saitenpunkte, welche zu beiden Seiten hin mit der gleichen Geschwindigkeit a sich ausbreitet.

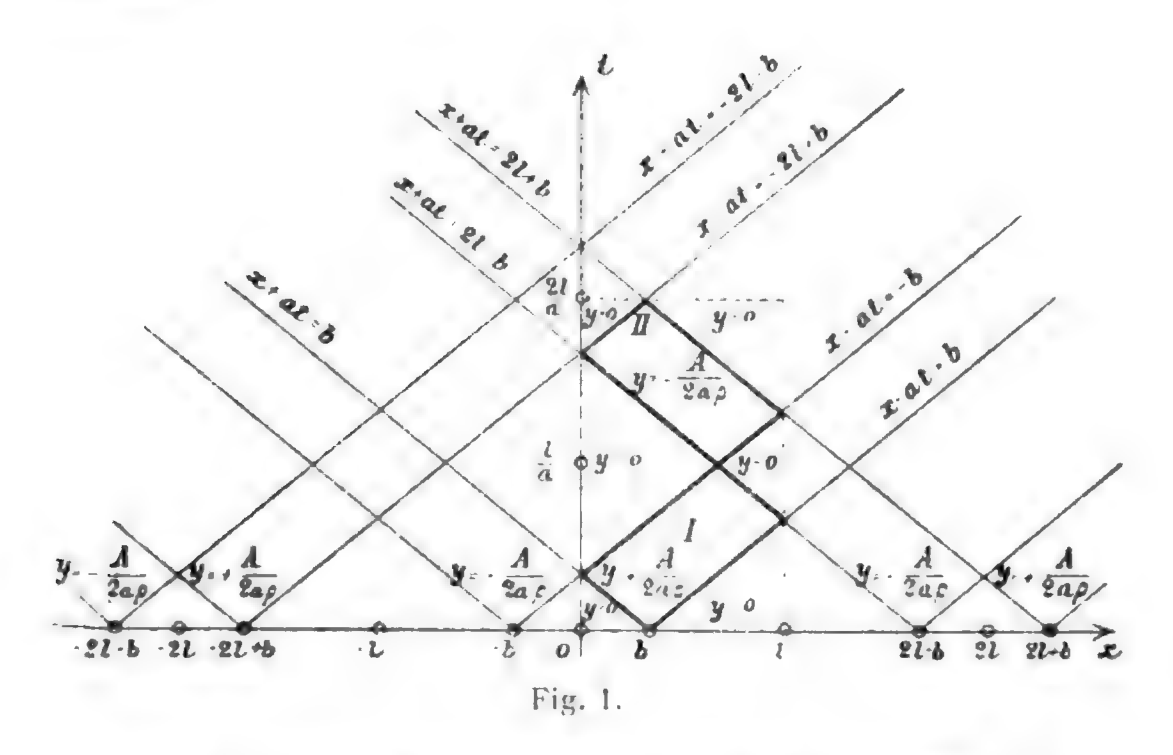


Fig. 1.

Aus der Gestalt der unendlich langen Saite erhält man die einer Saite von der endlichen Länge l, indem man die Zeichnung bezüglich der t-Axe spiegelt oder, anders ausgedrückt, im Punkte $x = -b$ die Geraden $x + at = -b$, $x - at = -b$ zieht und in jedem Punkte ihres Winkelraumes die Strecke $\frac{A}{2a\rho}$ nach abwärts aufträgt. Die ganze Figur ist sodann mit der Periode $2l$ längs der x-Axe zu wiederholen, so dass die vorstehende Zeichnung entsteht. Aus dieser möge der Streifen mit den Endpunkten $(0, 0)$, $(l, 0)$, $\left(0, \frac{2l}{a}\right)$, $\left(l, \frac{2l}{a}\right)$ herausgenommen werden. Die Superposition der in denselben fallenden Wellen liefert das Ergebniss, dass über dem Parallelogramm I

die Strecke $\frac{A}{2\rho a}$ senkrecht nach oben, über dem Parallelogramm II dieselbe Strecke senkrecht nach abwärts aufgetragen ist, alle übrigen Punkte jedoch die Erhebung $y = 0$ haben. Die aufeinander folgenden senkrechten Schnitte dieser Figur parallel der x-Axe von $t = 0$ bis $t = \frac{2l}{a}$ hin ergeben die sich zeitlich folgenden Formen der endlich langen Saite für das Intervall einer vollen Schwingungsdauer $T = \frac{2l}{a}$ derselben. Da sich die Saitenformen mit der Schwingungsdauer der Saite als Periode zeitlich wiederholen, wiederholen sich auch diese rechteckigen Streifen längs der t-Axe, und man ist in der Lage, die Gestalt der Saite in jedem beliebigen Augenblicke nach erfolgter Erregung angeben zu können. Man hat hiezu diesen Streifen mit der Periode $\frac{2l}{a}$ längs der t-Axe wiederholt zu zeichnen.

Mit Hilfe der Schwingungsform einer Saite von endlicher Länge, welche auf einen einzelnen Impuls hin erfolgt, kann man die Gestalt der Saite angeben, welche durch eine Reihe regelmässig angeordneter Impulse in jedem Augenblick entsteht. Von Interesse ist hiebei die Kenntniss der Bewegung während des Erfolgens der Impulse, also in der Zeit zwischen irgend zwei, etwa dem r^{ten} und dem $(r+1)^{\text{ten}}$ Impulse. Hiezu kann man für jede der r Bewegungen, deren Superposition die Bewegung der Saite in der Zeit zwischen dem r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Impulse bestimmt, eine Zeichnung entwerfen. Um die Saitenform in einem Momente nach Erfolgen des r^{ten} Impulses zu finden, hat man diese r Zeichnungen derart über einander zu legen, dass die Stelle $t = 0$ der Zeitaxe der dem r^{ten} Impulse entsprechenden Zeichnung mit der Stelle $t = \tau$ der Zeitaxe der dem $(r-1)^{\text{ten}}$ Impulse entsprechenden Zeichnung und so fort mit der Stelle $\nu\tau$ der Zeitaxe der dem $(r-\nu)^{\text{ten}}$ Stosse entsprechenden Zeichnung zusammenfällt. Ein Schnitt senkrecht zur Zeichenebene schneidet dann alle Zeichnungen in jenen Formen, welche in diesem Momente sich zur Form der Saite superponiren. Man sieht unmittelbar, dass die Aus-

weichung der Saite aus der Ruhelage ein ganzzahliges Vielfaches der Grösse $\frac{A}{2\rho a}$ sein wird, welches jedenfalls den Werth $(k-1)\frac{A}{2\rho a}$ nicht übersteigt.

Die grösste Ausweichung aus der Ruhelage ist proportional dem Antriebe eines Impulses und verkehrt proportional der Wurzel aus der Spannung und der Wurzel aus der Dichte der Saite. Sie ist weiters noch abhängig von dem Zeitintervalle τ zwischen zwei Impulsen oder von der Geschwindigkeit c der Impulse, denn von diesen Grössen wird es abhängen, welches Vielfache von $\frac{A}{2\rho a}$ die grösste Ausweichung in der Zeit zwischen dem r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Stosse sein wird.

In einigen einfachen Fällen kann man die grösste Ausweichung ohne Ausführung der erwähnten Zeichnungen durch blosse Überlegung finden und hiedurch ein beiläufiges Bild gewinnen, in welcher Weise sich diese Grösse mit der Geschwindigkeit c verändert. Man erhält dann das folgende Resultat:

Ist die Geschwindigkeit c grösser als a und liegt sie insbesondere in dem Gebiete $\frac{2k-4-\nu}{\nu}.a \leqq c \leqq \frac{2k-3-\nu}{\nu-1}.a$, wobei ν eine ganze Zahl kleiner oder gleich $(k-2)$ ist, so ist die grösste Ausweichung der Saite während der Zeitdauer der Impulse, also zwischen der Zeit τ, dem Momente des ersten, und der Zeit $(k-1)\tau$, dem Momente des letzten Stosses, gleich $\nu.\frac{A}{2\rho a}$. Nach der Zeit $(k-1)\tau$ nimmt die Ausweichung sprungweise zu, bis sie ihren grössten Werth $(k-1)\frac{A}{2\rho a}$ erreicht. Es wächst also die grösste Ausweichung während der Zeit des Verlaufes aller Impulse, wenn die Geschwindigkeit c derselben abnimmt. Sie ist $\frac{A}{2\rho a}$ für $c \geqq (2k-5)a$, sie ist $2\frac{A}{2\rho a}$ für $(k-3)a \leqq c \leqq (2k-5)a$ und so fort.

Ist die Geschwindigkeit c kleiner als a, so kann man zwei Fälle herausgreifen. Erstens: Es ist die Geschwindigkeit

$c=\frac{a}{2nk}$, wo n eine ganze Zahl ist. Dann ist in der Zeit zwischen dem ersten und letzten Stosse die grösste Ausweichung $(k-2)\frac{A}{2\rho a}$. Genauer steigt sie zu diesem Werthe derart an, dass sie in der Zeit zwischen dem r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Stosse den Werth $r\frac{A}{2\rho a}$ besitzt. Nach Erfolgen aller Stösse ist die grösste Ausweichung $(k-1)\frac{A}{2\rho a}$. Zweitens: Es ist die Geschwindigkeit $c=\frac{a}{(2n+1)k}$. Dann ist in der Zeit zwischen zwei Stössen und nach Erfolgen aller Stösse die grösste Ausweichung aus der Ruhelage $\frac{A}{2\rho a}$. Dieser letztere Fall ist demnach der günstigste, wenn man nur kleine Excursionen der Saite eintreten sehen will.

Es ist selbstverständlich, dass die entwickelten Formen der Saite in derselben Weise nur Annäherungen an die wirklich eintretenden Gestalten sind, wie die Annahmen, unter denen sie abgeleitet wurden, nur Annäherungen an thatsächlich herstellbare Verhältnisse bedeuten.

Die Auflösung der Saitenschwingung in die einzelnen Normalschwingungen gewinnt man durch die Angabe des Bernoulli'schen Integrals, welches man zunächst für die auf einen Impuls hin erfolgende Bewegung aufstellt, woraus durch Superposition die Bewegung der Saite unter der Einwirkung aller Impulse sich ergibt. Man kann, um dies auszuführen, entweder die an einer bestimmten Stelle x während der Schwingungsdauer der Saite erfolgende Bewegung als periodische Function der Zeit oder die für einen bestimmten Zeitmoment eintretende Gestalt der Saite als periodische Function von x in eine Fourier'sche Reihe entwickeln. In dem zweiten Falle hat man für einen bestimmten Moment t die Erhebung $\frac{A}{2a\rho}$ von der Stossstelle b an zu beiden Seiten bis zu der Stelle $b-at$ und $b+at$ ausgebreitet und für die negativen Werthe der Abscissen zwischen 0 und $-l$ ist zwischen den Stellen $-(b-at)$ und $-(b+at)$ die gleiche Erhebung mit entgegengesetztem Vor-

zeichen vorhanden. Diese ganze ungerade Function ist sodann mit der Periode $2l$ zu wiederholen. Man wird sie daher in eine Reihe fortschreitend nach den Sinus der ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi x}{l}$ entwickeln und erhält

$$y = \frac{2A}{pa\pi} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \sin\left(\frac{s\pi}{l} . b\right) \sin\left(\frac{s\pi a}{l} t\right) \sin\left(\frac{s\pi}{l} x\right).$$

Setzt man für die Stossstelle b den Werth $\nu . \frac{l}{k}$ und berücksichtigt, dass der ν^{te} Impuls zur Zeit $\nu\tau$ erfolgt, so erhält man durch die Superposition jener Bewegungen, welche in Folge der ersten r Impulse eintreten, die Bewegung der Saite in der Zeit zwischen dem r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Impulse durch die Formel

$$y = \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2A}{pa\pi} \cdot \frac{1}{s} \sin\left[\frac{s\pi}{l} \cdot \frac{\nu l}{k}\right] \sin\left[\frac{s\pi a}{l} (t-\nu\tau)\right] \sin\left[\frac{s\pi}{l} x\right]$$

ausgedrückt.

Die betrachtete Art der Anregung entspricht dem Falle der Erregung einer Brücke durch die regelmässigen Stösse einer Locomotive. Die Anregung der Brücke, welche in Folge des Überspringens einer Schienenlücke durch die Räder eines Zuges entsteht, würde der Einwirkung einer Reihe regelmässig, aber an derselben Stelle wiederholter Impulse entsprechen; auch dieser Fall liesse sich in derselben Weise wie jener behandeln.

Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer wandernden Kraft.

A. Die unendlich lange Saite.

Die Untersuchung der Saitenbewegung auf dem Wege des d'Alembert'schen Integrals schliesst sich am besten an die Betrachtung der Saite von unbegrenzter Länge an. In dem Punkte $x = 0$ derselben möge die gegebene Kraft von der

Grösse P im Augenblicke $t = 0$ ihre Einwirkung beginnen und von da an mit der unveränderlichen Geschwindigkeit c in positiver Richtung die Saite durchwandern. In jedem Zeitelemente dt übt sie den Antrieb Pdt auf die Saite aus und erregt daher auf dieser zwei Wellen, eine vor- und eine rücklaufende Welle, die sich mit der Geschwindigkeit a über die Saite verbreiten. Aus der Superposition aller dieser erzeugten Wellen in einem Augenblicke t setzt sich die Gestalt der Saite zusammen. Man erkennt sofort, dass das Ergebniss dieser Superposition ein verschiedenes sein wird, je nach der Grösse der Geschwindigkeit c. Ist diese

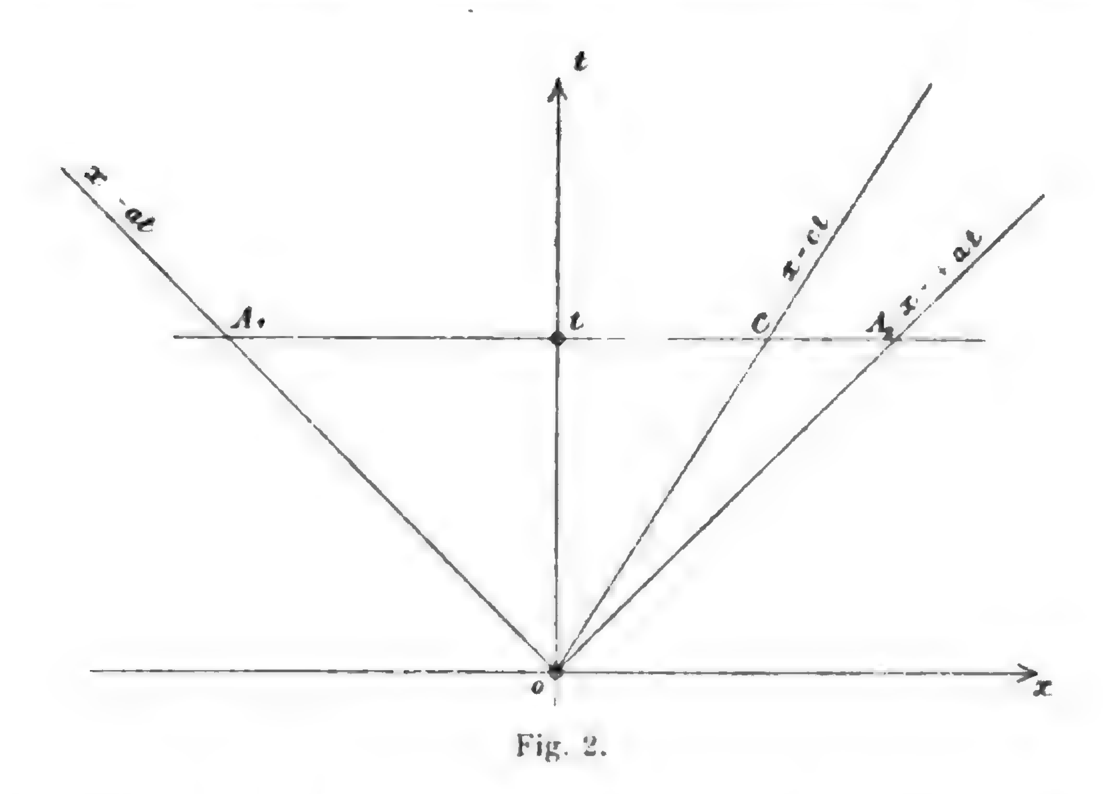


Fig. 2.

kleiner als a, so bleibt der Erreger hinter den vorlaufenden Wellen zurück, welche er hingegen überholt, wenn c grösser als a ist. Es empfiehlt sich daher, diese verschiedenen Fälle zu trennen.

I. $c < a$.

Die Bewegung der Kraft kann man in der xt-Ebene durch die Gerade $x = ct$ versinnlichen. Von jedem Punkte derselben verbreiten sich in dem Winkelraume der durch ihn gezogenen Charakteristiken die beiden Wellen, welche der Antrieb der Kraft erregt. Da aber die Geschwindigkeit c kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist, begrenzen die beiden durch den Anfangspunkt gezogenen Charakteristiken

$x+at=0$ und $x-at=0$ die gesammte Bewegung der Saite und bestimmen in jedem Zeitmomente die äussersten Punkte, bis zu welchen die Saite überhaupt in Bewegung gesetzt worden ist. Fixirt man den Zustand der Saite in einem Zeitmomente t, indem man eine Gerade durch den Punkt $(0t)$ parallel zur x-Axe zieht, so ist der ganze in diesem Augenblicke in Bewegung versetzte Theil der Saite durch die Punkte A_1 und A_2 eingeschlossen. Auf dem Gebiete $\overline{CA_2}$ sammeln sich alle vorlaufenden, auf dem Gebiete $\overline{A_1C}$ alle rücklaufenden Wellen der vorangegangenen Erregungen an. Daher kann man in dem d'Alembert'schen Integrale

$$y=f(x+at)+g(x-at)$$

die Function $f(x+at)$ auf das Gebiet $\overline{A_1C}$, die Function $g(x-at)$ hingegen auf das Gebiet $\overline{CA_2}$ beschränken. Vorausgesetzt ist hiebei der einfacheren Behandlung wegen, dass man nur die durch die wandernde Kraft allein erzeugte Bewegung sucht und die anfänglichen Ausweichungen und Geschwindigkeiten aller Saitenpunkte gleich Null setzt. Zur Bestimmung der beiden unbekannten Functionen f und g hat man die folgenden Bedingungen:

1. Es muss der Anfangspunkt $x=0$ zur Zeit $t=0$ die Ausweichung Null aus der Ruhelage haben. Es ist also

$$f(0)+g(0)=0.$$

2. Es darf an der Stelle $x=ct$ keine Unterbrechung der Stetigkeit eintreten. Daher ist

$$f((c+a)t)=g((c-a)t).$$

3. Der Antrieb der Kraft bewirkt in jedem Zeitelemente die Zunahme der Bewegungsgrösse um den Betrag Pdt; es ist daher die Bewegungsgrösse eine Function der Zeit und erreicht im Augenblicke t den Werth Pt. Diese Bedingung liefert die Gleichung

$$\int_{-at}^{ct} a\rho f'(x+at)\,dx-\int_{ct}^{at} a\rho\,.\,g'(x-at)\,dx=Pt$$

oder

$$f((c+a)t)+g((c-a)t)-f(0)-g(0) = \frac{P.t}{a.\rho}.$$

Unter Zuziehung der Bedingungen 1 und 2 erhält man

$$f(x+at) = \frac{P.(x+at)}{2a\rho(a+c)}$$

und

$$g(x-at) = \frac{P.(at-x)}{2a\rho(a-c)}.$$

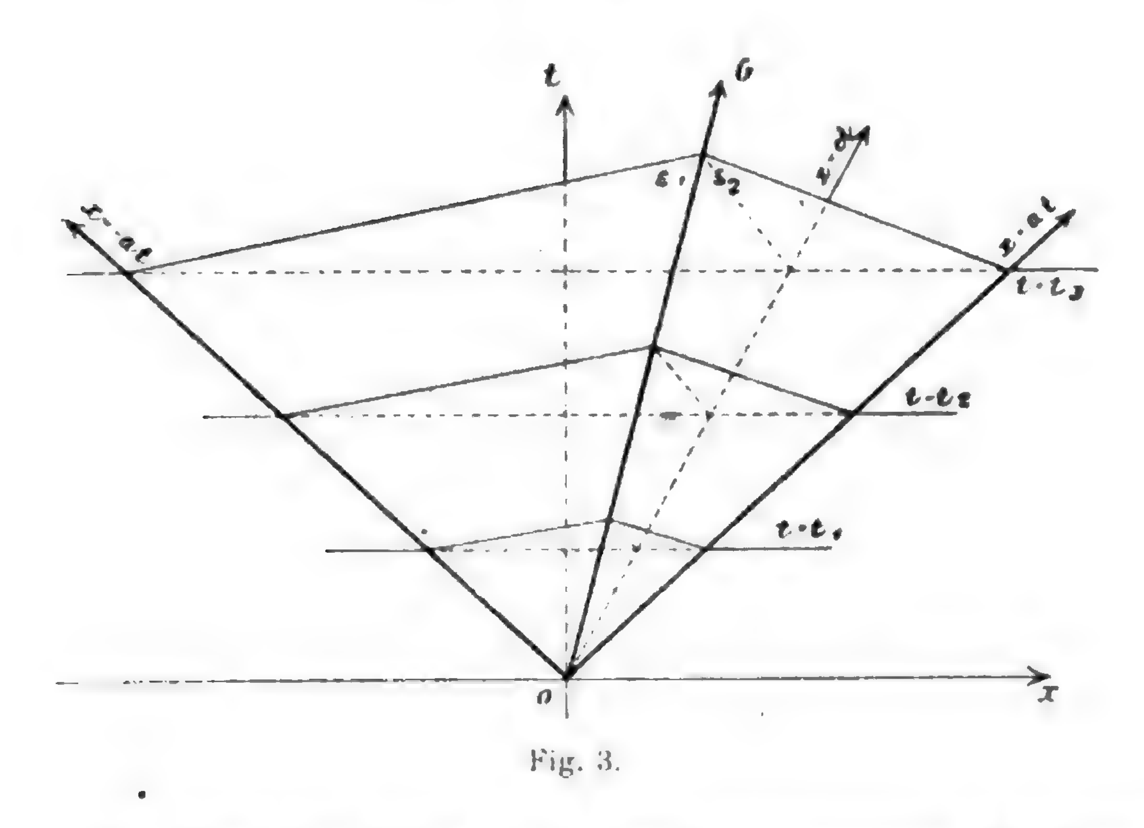


Fig. 3.

Die Form der Saite ist in jedem Zeitmomente die eines Dreieckes über der Basis A_1A_2 mit dem Scheitel im Punkte C. Die Höhe dieses Punktes beträgt $\frac{Pt}{2a\rho}$. Trägt man daher über jedem Punkte der Geraden $x = ct$ die Strecke $y = \frac{Pt}{2a\rho}$ senkrecht nach aufwärts auf, legt man durch die so entstehende gerade Linie G und die Geraden $x+at = 0$, sowie $x-at = 0$ die beiden Ebenen ε_1 und ε_2, so entsteht eine dachförmige Figur über der xt-Ebene, deren Schnitt mit einer zur xy-Ebene parallelen Ebene $t = t_1$ die Form der Saite in dem beliebigen Augenblicke t_1 angibt.

II. $c > a$.

In diesem Falle sind die Bedingungen, welche zu der Ermittlung der unbekannten Functionen $f(x+at)$ und $g(x-at)$ des d'Alembert'schen Integrales dienen, von etwas anderer Form. Nachdem die Gerade $x = ct$ ausserhalb des Winkelraumes der beiden durch den Nullpunkt gezogenen Charakteristiken liegt, ist das zu einer Zeit t in Bewegung gesetzte Gebiet der Saite durch die Geraden $x+at = 0$ und $x = ct$ begrenzt und zwischen den Punkten A_1 und C enthalten. Die rücklaufenden Wellen erfüllen jetzt das ganze in Bewegung gesetzte Gebiet A_1C der Saite, während die vorlaufenden Wellen auf den Theil A_2C beschränkt sind; dementsprechend erhält die Function $f(x+at)$ von A_1 bis C, die Function $g(x-at)$ aber nur zwischen A_2 und C von Null verschiedene Werthe. Die Bedingungen, welche diese Functionen erfüllen müssen, sind:

1. Es muss der Anfangspunkt $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ sich in Ruhe befinden. Es ist daher

$$f(0) = 0 \text{ und } g(0) = 0.$$

2. In dem Punkte $x = at$ darf keine Unterbrechung der Stetigkeit eintreten. Die Elongation dieses Punktes ist jedoch, wenn man von A_1 nach A_2 geht, gleich $f(2at)$ und, wenn man von C nach A_2 geht, gleich $f(2at)+g(0)$. Zufolge der Bedingung 1 ist daher diese Bedingung bereits erfüllt.

3. Der Punkt $x = ct$ muss zur Zeit t die Ausweichung Null besitzen. Es ist daher

$$f((c+a)t)+g((c-a)t) = 0.$$

4. Die Bewegungsgrösse der Saite ist gleich dem Antriebe $P.t$. Dies liefert die Gleichung

$$\int_{-at}^{+at} a\rho . f'(x+at)\,dx + \int_{+at}^{ct} a\rho \{ f'(x+at) - g'(x-at) \} dx = Pt,$$

welche in die Form

$$-f(0)+f((c+a)t)-g((c-a)t)+g(0) = \frac{P.t}{a\rho}$$

übergeht. Im Zusammenhang mit den früheren Bedingungen erhält man

$$f(x+at) = \frac{P.(x+at)}{2a\rho(a+c)}$$

und

$$g(x-at) = \frac{P.(at-x)}{2a\rho(c-a)}.$$

Die Form der Saite ist daher zwischen den Punkten $-at$ und $+at$

$$y = f(x+at) = \frac{P(x+at)}{2a\rho(a+c)},$$

zwischen den Punkten $+at$ und ct hingegen

$$y = f(x+at)+g(x-at) = \frac{P.(ct-x)}{\rho.(c^2-a^2)}.$$

Die Saite nimmt wieder die Gestalt eines Dreieckes an, und ihre aufeinander folgenden Lagen können mit Hilfe der Construction einer dachförmigen Fläche über der xt-Ebene, mit sofort zu überblickenden Veränderungen gegen den früheren Fall, ersichtlich gemacht werden. Den Fall $c = a$ kann man als Grenzfall des einen oder des anderen Falles ansehen.

Man erkennt, dass die Überlegung sich auf allgemeinere Fälle ausdehnen lässt. Man könnte die Grösse der Kraft als zeitlich veränderlich ansehen, dann hätte man die Bewegungsgrösse der Saite statt durch $P.t$ durch eine andere Function der Zeit $\Phi(t)$ darzustellen; oder man könnte die Geschwindigkeit der Bewegung des Erregers als variabel voraussetzen, dann wäre nicht mehr die Gerade $x = ct$, sondern eine Curve in der xt-Ebene das Bild der Bewegung des Angriffspunktes. Die Untersuchung beider Fälle schliesst sich den früheren Betrachtungen mit geringen Veränderungen an.

B. Die Saite von endlicher Länge.

Aus der bekannten Bewegung der unendlich langen Saite kann man die einer Saite von endlicher Länge entwickeln. Man hat hiezu im Punkte $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ zwei Kräfte, $+P$ und $-P$, ihre Einwirkung beginnen und ihre Angriffs-

punkte mit der Geschwindigkeit c, den einen nach der positiven, den anderen nach der negativen Richtung hin wandern zu lassen. Dieser ganze Vorgang ist nach x mit der Periode $2l$ zu wiederholen. Aus der Superposition der Wellen, welche bei diesem Zustande der unendlich langen Saite das endliche Stück zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = l$ durchlaufen, ergibt sich die Bewegung der Saite von endlicher Länge. Die Untersuchung zerfällt wieder je nach dem Werthe der Geschwindigkeit c in zwei Theile.

I. $c < a$.

Es empfiehlt sich zunächst die beiden vom Punkte $x = 0$ ausgehenden Wellenzüge zu superponiren. Die positive Kraft

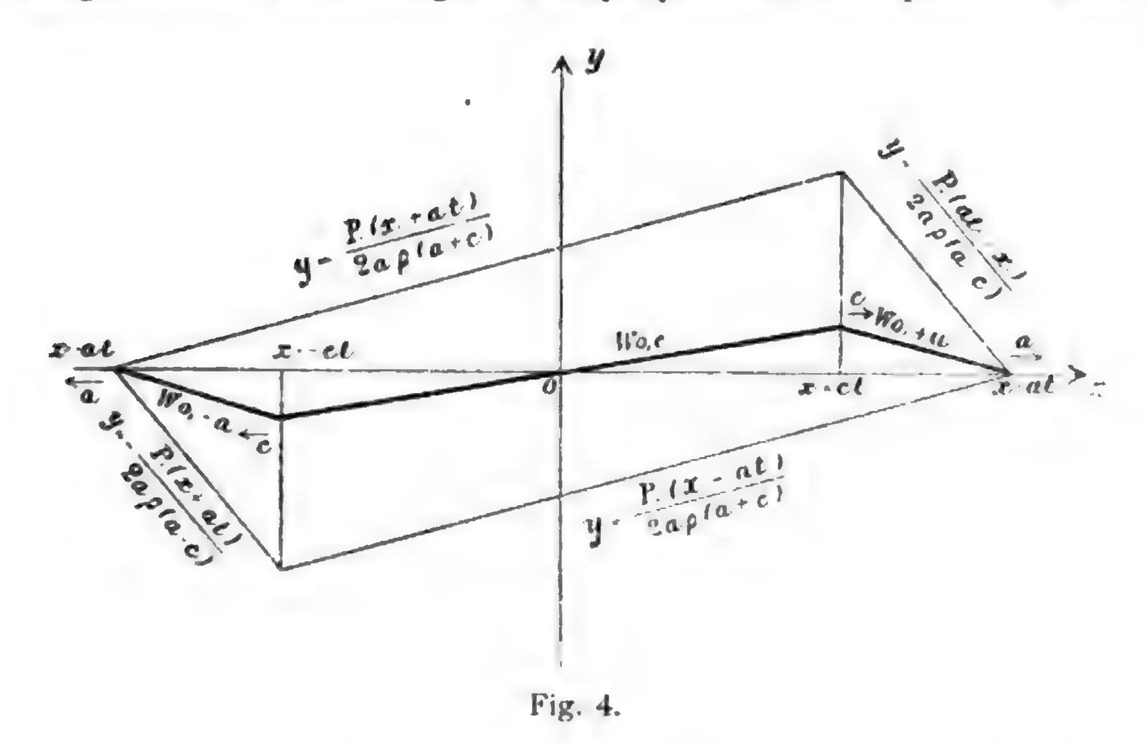


Fig. 4.

erzeugt zwischen den Punkten $x = -at$ bis $x = ct$ die Erhebung $y = \frac{P.(x+at)}{2ap(a+c)}$, zwischen den Punkten $x = ct$ und $x = +at$ hingegen die Erhebung $y = \frac{P.(at-x)}{2ap.(a-c)}$; die in entgegengesetzter Richtung wandernde negative Kraft erzeugt zwischen den Punkten $x = -at$ und $x = -ct$ die Erhebung $y = -\frac{P.(x+at)}{2ap.(a-c)}$, zwischen den Punkten $x = -ct$ und $x = +at$ die Erhebung $y = \frac{P.(x-at)}{2ap.(a+c)}$.

Die Superposition ergibt zwischen den Punkten:

$x = -at$ und $x = -ct$ die Welle $W_{0,-a}$ mit der Erhebung

$$y = -\frac{P.c.(x+at)}{a\rho.(a^2-c^2)},$$

$x = -ct$ und $x = +ct$ die Welle $W_{0,c}$ mit der Erhebung

$$y = \frac{P.x}{a\rho.(a+c)},$$

$x = +ct$ und $x = +at$ die Welle $W_{0,+a}$ mit der Erhebung

$$y = \frac{P.c.(at-x)}{a\rho.(a^2-c^2)}.$$

Die analogen Wellen gehen von jedem Punkte $x = \pm 2nl$ aus; doch erkennt man, dass nur die vorlaufenden Wellen der negativen Erregungsstellen, also die Wellen $W_{-2nl,+a}$, und die rücklaufenden Wellen der positiven Erregungsstellen, die Wellen $W_{+2nl,-a}$, mit den Wellen $W_{0,c}$ und $W_{0,+a}$ zur Superposition gelangen, wenn man die Bewegung der Saite nur in jenem Zeitintervalle betrachtet, in welchem der Erreger ihre Länge durchwandert. Der Vorgang verläuft in der folgenden Weise: Im Augenblicke $t = \frac{l}{a}$ betritt die Welle $W_{2l,-a}$ die Saite und superponirt sich zunächst mit der Welle $W_{0,+a}$; zur Zeit $t = \frac{2l}{a+c}$ begegnet sie der Welle $W_{0,c}$ und setzt sich mit dieser zusammen; endlich erreicht sie im Momente $t = \frac{2l}{a}$ den Anfangspunkt. In demselben Augenblicke betritt die Welle $W_{-2l,+a}$ den abgegrenzten Bereich der Saite und superponirt sich ihrerseits zunächst mit den Wellen $W_{0,c}$ und $W_{2l,-a}$, bis sie die erstere im Augenblicke $t = \frac{2l}{a-c}$ überholt und dann auch noch mit der Welle $W_{0,+a}$ sich zusammensetzt. So durchlaufen immer abwechselnd von rechts und links kommend vor- und rücklaufende Wellen das endliche Stück der Saite zwischen $x = 0$ und $x = l$. Es empfiehlt sich daher, die Zeit $\frac{l}{c}$, in welcher der Erreger die ganze Länge der Saite durchwandert, in Intervalle einzutheilen und in jedem derselben für sich das Resultat der auf die Saite entfallenden Wellen aufzusuchen.

Vier aufeinander folgende dieser Intervalle seien eingeschlossen durch die Zeitmomente

$$\mathfrak{t}_{n,0} = \frac{2nl}{a}, \quad \mathfrak{t}_{n,1} = \frac{2nl}{a-c}; \quad \mathfrak{t}_{n,2} = \frac{(2n+1)l}{a};$$

$$\mathfrak{t}_{n,3} = \frac{2(n+1)l}{a+c}; \quad \mathfrak{t}_{n+1,0} = \frac{2(n+1)l}{a},$$

wobei n eine ganze Zahl ist.

$$\frac{2nl}{a} \leqq t \leqq \frac{2nl}{a-c}.$$

In das Gebiet der Saite entfallen in diesem Zeitintervalle die Wellen $W_{0,c}$ und $W_{0,+a}$, alle Wellen $W_{2\nu l,-a}$ von $\nu = 1$ bis

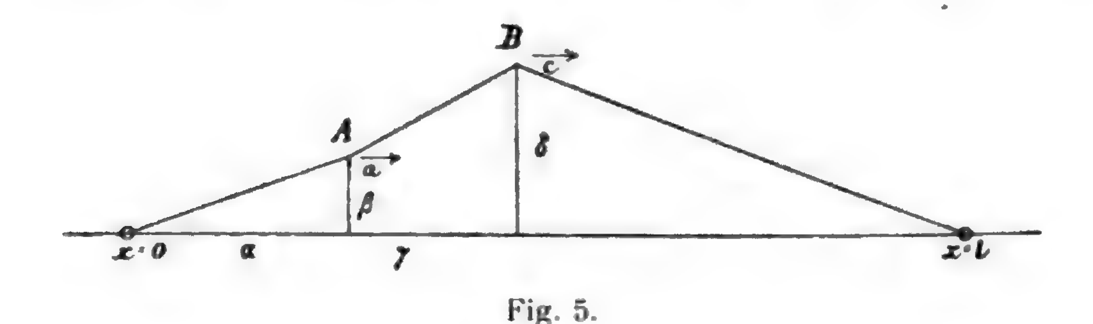


Fig. 5.

einschliesslich $\nu = n$ und alle Wellen $W_{-2\varkappa l,+a}$ von $\varkappa = 1$ bis einschliesslich $\varkappa = n-1$. Die Welle $W_{-2nl,+a}$ betritt die Saite im Beginne des Intervalles und durchläuft sie während desselben bis zum Punkte $x = ct$. Die Superposition aller dieser Wellen gibt der Saite eine aus geraden Linien zusammengesetzte Gestalt. Die Punkte $x = 0$ und $x = l$ müssen hiebei dauernd in Ruhe bleiben und man erkennt, dass nur zwei Ecken auf der Saite entstehen können, die eine A in dem Punkte $x = at - 2nl$, bis zu welchem die Welle $W_{-2nl,+a}$ gerade gelangt ist, die andere B in dem Punkte $x = ct$, in welchem die Wellen $W_{0,c}$ und $W_{0,+a}$ sich treffen. Gibt man A die Coordinaten α und β, B die Coordinaten γ und δ, so genügt die Angabe dieser vier Abmessungen zur völligen Bestimmung der Saitengestalt.

Man beschränkt sich zunächst, um die Erhebung A zu ermitteln, auf das Gebiet zwischen den Punkten $x = 0$ und

$\alpha = at - 2nl$. Es superponiren sich auf dieser Strecke die Wellen $W_{0,c}$ und die Wellen $W_{+2\nu l,-a}$ und $W_{-2\nu l,+a}$ für $\nu = 1$ bis $\nu = n$. Die Erhebung an einer Stelle x ist daher

$$y = W_{0,c} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{W_{2\nu l,-a} + W_{-2\nu l,+a}\}.$$

Es ist aber die Welle

$$W_{2\nu l,-a} = -\frac{P.c[x-2\nu l+at]}{a\rho.(a^2-c^2)}$$

und

$$W_{-2\nu l,+a} = \frac{P.c.[at-x-2\nu l]}{a.\rho.(a^2-c^2)}.$$

Daher ist

$$y = \frac{P.x}{a\rho.(a+c)} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{-\frac{P.c.[x+at-2\nu l]}{a\rho.(a^2-c^2)} + \frac{P.c.[at-2\nu l-x]}{a\rho.(a^2-c^2)}\right\}.$$

Ein Theil der Summanden tilgt sich, und man erhält nach einfachen Reductionen

$$y = \frac{P.\{a-(2n+1)c\}.x}{a\rho.(a^2-c^2)}.$$

Auf dieser Geraden G_n liegt der Punkt A, und zwar sind seine Coordinaten

$$A\left\{\alpha = at-2nl;\quad \beta = \frac{P.\{a-(2n+1)c\}}{a\rho.(a^2-c^2)}.(at-2nl)\right\}.$$

Die Coordinaten des Punktes B erhält man durch die Betrachtung der in das Gebiet zwischen $x = ct$ und $x = l$ entfallenden Wellen. Es liefern diese

$$y = W_{0,+a} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} W_{2\nu l,-a} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} W_{-2\nu l,+a}.$$

Dies geht über in

$$y = \frac{2nP.c}{ap(a^2-c^2)} \cdot (l-x).$$

Auf dieser Geraden G_n' liegt der Punkt B, dessen Coordinaten

$$B \left\{ \gamma = ct; \quad \delta = \frac{2nPc}{ap(a^2-c^2)} \cdot (l-ct) \right\}$$

sind. Die Saitengestalt besteht also aus den Stücken der Geraden G_n und G_n' zwischen $x=0$ und $x=at-2nl$, beziehungsweise $x=ct$ und $x=l$, und der geraden Verbindung der Punkte A und B. Es bewegt sich ferner der Punkt A mit der Geschwindigkeit a und der Punkt B mit der Geschwindigkeit c in derselben Richtung längs der Saite.

$$\frac{2nl}{a-c} \leqq t \leqq \frac{(2n+1)l}{a}.$$

In diesem Intervalle wandert die Ecke A vor der Ecke B, mit welcher sie zu Beginn des Zeitabschnittes zusammenfällt, bis zum Ende der Saite. Es superponiren sich zunächst in dem ersten Gebiete der Saite zwischen $x=0$ und $x=ct$ die Welle $W_{0,c}$ und die $2n$ Wellen $W_{2\nu l,-a}$, sowie $W_{-2\nu l,+a}$ für $\nu=1$ bis $\nu=n$. Diese liefern zusammen die Gerade G_n, auf welcher der Eckpunkt B liegen muss. Es hat demnach B die Coordinaten

$$B \left\{ \gamma = ct, \quad \delta = \frac{P.[a-(2n+1)c]}{ap.(a^2-c^2)} \cdot c.t \right\}.$$

In das Gebiet zwischen den Punkten $\alpha = at-2nl$ und $x=l$ entfallen dieselben Wellen wie in dem früher behandelten Falle; man erkennt, dass der Punkt A auf der Geraden G_n' liegt und seine Coordinaten

$$A \left\{ \alpha = at-2nl, \quad \beta = \frac{2Pnc[(2n+1)l-at]}{ap.(a^2-c^2)} \right\}$$

sind. Es wandert der Punkt B mit der Geschwindigkeit c auf jener Geraden G_n, welche früher der geometrische Ort von A

war, wohingegen jetzt A auf der Geraden G'_n, auf welcher in dem vorangegangenen Zeitintervalle die Ecke B gelegen war, mit der Geschwindigkeit a bis zum Ende der Saite hin sich bewegt.

$$\frac{(2n+1)l}{a} \leqq t \leqq \frac{2(n+1)l}{a+c}.$$

Mit Beginn dieses Intervalles betritt eine neue rücklaufende Welle $W_{2(n+1)l,\,-a}$ das Gebiet der Saite. Es entsteht daher auf derselben ausser der Ecke B wieder eine Ecke A, welche in entgegengesetzter Richtung, wie früher, mit der Geschwindigkeit a wandert. Zunächst wird die Lage des Punktes B durch die Superposition derselben Wellen, wie in dem früheren Falle, bestimmt; er liegt daher wieder auf derselben Geraden G_n, und seine Coordinaten haben die früheren Werthe. Die Erhebung des Punktes A hingegen ist erzeugt durch die Superposition der Wellen $W_{0,\,+a}$, $W_{-2\nu l,\,+a}$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ und $W_{2\nu l,\,-a}$ $(\nu = 1, 2 \ldots (n+1))$. Diese liefert die Gerade G'_{n+1}

$$y = \frac{2Pc(n+1)}{a\rho \cdot (a^2 - c^2)} \cdot (l - x)$$

und ergibt daher für die Coordinaten von A

$$A. \left\{ \alpha = 2(n+1)l - at; \quad \beta = \frac{2P.c.(n+1)}{a\rho.(a^2-c^2)} \cdot (at - (2n+1)l) \right\}.$$

Mit dem Ende des Intervalles fallen beide Punkte zusammen.

$$\frac{2(n+1)l}{a+c} \leqq t \leqq \frac{2(n+1)l}{a}.$$

Die beiden Eckpunkte A und B wandern mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten auseinander. Man erkennt, dass jetzt die Erhebung von B durch die Superposition derselben Wellen erzeugt wird, welche früher die Lage von A bestimmten, so dass B sich auf der Geraden G'_{n+1} bewegt und seine Coordinaten die Werthe

$$B. \left\{ \gamma = ct, \quad \delta = \frac{2Pc(n+1)}{a\rho.(a^2-c^2)} \cdot (l - ct) \right\}$$

annehmen. Die Lage von A ist gegeben durch die Zusammensetzung der Welle $W_{0,c}$ mit den $2n$ Wellen $W_{2\nu l,-a}$ und $W'_{-2\nu l,+a}$; es liegt daher A auf der Geraden G_n und seine Coordinaten sind

$$A\left\{\alpha = 2(n+1)l - at;\ \beta = \frac{P.[a-(2n+1)c]}{ap.(a^2-c^2)}\cdot[2(n+1)l-at]\right\}.$$

Am Ende des Zeitabschnittes ist A gerade im Anfangspunkte $x = 0$ angelangt, und eine neue vorlaufende Welle $W'_{-2(n+1)l,+a}$ betritt die Saite. Sodann wiederholen sich dieselben Verhältnisse wie in den betrachteten vier Intervallen.

Die verschiedenen Abscissen des Eckpunktes B in den Zeitmomenten, welche die vier betrachteten Intervalle begrenzen, sind

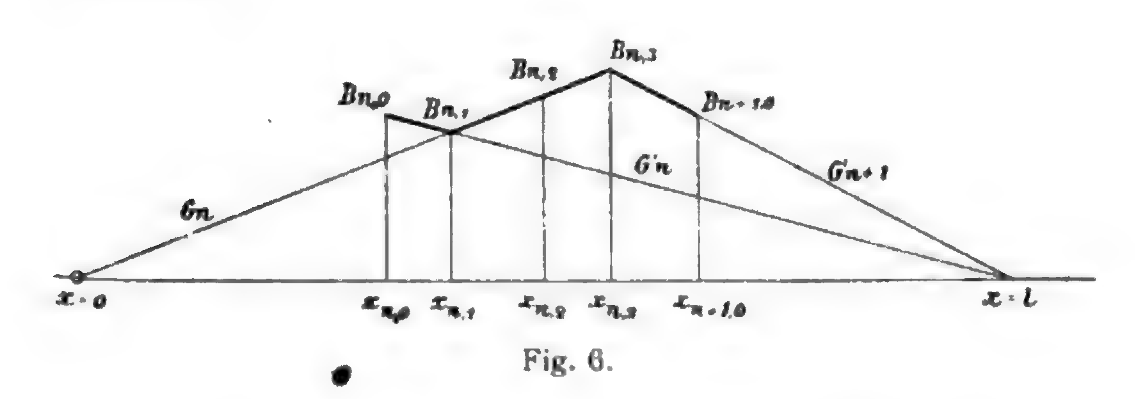


Fig. 6.

$$x_{n,0} = \frac{2nlc}{a};\quad x_{n,1} = \frac{2nlc}{a-c};\quad x_{n,2} = \frac{(2n+1)lc}{a};$$

$$x_{n,3} = \frac{2(n+1)lc}{a+c};\quad x_{n+1,0} = \frac{2(n+1)lc}{a}.$$

Zeichnet man die Stücke der Geraden G_n, G'_n und G'_{n+1}, soweit sie geometrische Orte der Spitzen A und B in diesen vier aufeinander folgenden Intervallen sind, so erhält man das vorstehende Bild. Es bewegt sich

in dem ersten Intervalle A von 0 bis $B_{n,1}$ und B von $B_{n,0}$ bis $B_{n,1}$;

in dem zweiten Intervalle A von $B_{n,1}$ bis l und B von $B_{n,1}$ bis $B_{n,2}$;

in dem dritten Intervalle A von l bis $B_{n,3}$ und B von $B_{n,2}$ bis $B_{n,3}$;

in dem vierten Intervalle A von $B_{n,3}$ bis 0 und B von $B_{n,3}$ bis $B_{n+1,0}$.

Die grösste Ausweichung aus der Ruhelage während der vier betrachteten Zeitintervalle tritt demnach ein für den Punkt $x_{n,3}$ in dem Schnittpunkte der beiden Geraden G_n und G'_{n+1}. Die grösste Ausweichung während der Zeit, in welcher der Erreger die ganze Länge der Saite durchwandert, ist unter jenen Erhebungen zu suchen, welche an den Stellen $x_{n,3}$ zu den Zeiten $t_{n,3} = \frac{2(n+1)l}{a+c}$ eintreten; sie ist also in der Form

$$y_{n,3} = \frac{2clP.(n+1)\{a-(2n+1)c\}}{ap(a^2-c^2)(a+c)}$$

ausgedrückt.

Jene Werthe von n, für welche die grösste unter diesen Ausweichungen eintritt, findet man aus der Bedingung, dass für diese besonderen Werthe $y_{n,3}$ grösser oder gleich seinen beiden Nachbarn $y_{n-1,3}$ und $y_{n+1,3}$ wird. Die gesuchten Werthe sind jene ganzen Zahlen n, welche den beiden Ungleichungen

$$(n+1)[a-(2n+1)c] \geqq n.[a-(2n-1)c]$$

und

$$(n+1)[a-(2n+1)c] \geqq (n+2)[a-(2n+3)c]$$

genügen. Es muss also n die Ungleichungen

$$\frac{a-c}{4c} - 1 \leqq n \leqq \frac{a-c}{4c}$$

erfüllen. Im Allgemeinen gibt es nur eine ganze Zahl n, welche diesen Bedingungen gerecht wird, nämlich

$$n = \left| \frac{a-c}{4c} \right|;$$

nur in dem einen Falle, dass $\frac{a-c}{4c}$ selbst eine ganze Zahl k wird, oder $c = \frac{a}{4k+1}$ ist, gibt es zwei ganze Zahlen $n = k$ und $n = k-1$, welche die angesetzte Bedingung erfüllen. Die grösste Ausweichung aus der Ruhelage hat demnach den Betrag

$$y_{\max} = \frac{2P.c.l}{ap.(a+c).(a^2-c^2)} \cdot \left\{\left[\frac{a-c}{4c}\right]+1\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{a - \left(2\left[\frac{a-c}{4c}\right]+1\right)c\right\} \cdot$$

Sie wird erreicht in dem Punkte $x = \frac{2lc}{a+c} \cdot \left\{\left[\frac{a-c}{4c}\right]+1\right\}$
in dem Zeitmomente

$$t_{n,3} = \frac{2l}{a+c} \cdot \left\{\left[\frac{a-c}{4c}\right]+1\right\} \cdot$$

Nur wenn $c = \frac{a}{4k+1}$ ist, tritt sie an zwei Stellen $x = \frac{k+1}{2k+1} \cdot l$ und $x = \frac{k}{2k+1} \cdot l$ auf.

Man erkennt zunächst, dass die grösste Ausweichung der Grösse der Kraft und der Länge der Saite proportional geht und abnimmt, wenn die Spannung der Saite wächst. Um eine Vorstellung darüber zu gewinnen, in welcher Weise $y_{\max}$ von dem Werthe der Geschwindigkeit c abhänge, ist es vortheilhaft, das Gebiet für die letztere Grösse, also das Gebiet von Null bis a, in Intervalle einzutheilen, deren Eckpunkte die Zahlen $\frac{a}{4k+1}$ sind; k durchläuft hiebei alle ganzen positiven Zahlen. In einem jeden dieser Intervalle, beispielsweise in dem Intervalle

$$\frac{a}{4k+5} < c \leqq \frac{a}{4k+1},$$

hat der Ausdruck $\left[\frac{a-c}{4c}\right]$ einen bestimmten Werth, in dem gewählten Beispiele den Werth k. Es wird daher die grösste Ausweichung in diesem Gebiete durch die Formel

$$y_{\max} = \frac{2P.l.c.(k+1).(a-(2k+1)c)}{ap.(a+c)(a^2-c^2)}.$$

dargestellt. Lässt man nun die Geschwindigkeit c das vorgegebene Intervall durchlaufen, so kann man die Veränderung.

welche die grösste Ausweichung y_{max} hiebei erfährt, leicht angeben. Man gelangt zu dem folgenden Ergebniss: Wenn man zunächst das Intervall $k = 0$ ausschliesst, kann man sagen, dass in jedem Intervalle die grösste Ausweichung für wachsende Werthe von c bis zu einem Maximum zunimmt und dann gegen das Ende des Gebietes hin wieder abnimmt. Der Werth des c, für welchen dieses Maximum eintritt, liegt zwischen den Zahlen $\frac{a}{4k+2\cdot5}$ und $\frac{a}{4k+2\cdot25}$, also nahe an der Stelle $\frac{a}{4k+2}$. Da ferner in den Eckpunkten der Intervalle immer eine absteigende Curve der grössten Ausweichung mit einer aufsteigenden Curve derselben Grösse in dem rechts folgenden Gebiete zusammentrifft, sind die Stellen $\frac{a}{4k+1}$ in Beziehung auf ihre Umgebung Stellen kleinster Werthe von y_{max}. Man erkennt somit das folgende Verhalten der grössten Ausweichung y_{max} mit wachsenden Werthen des c:

Wenn die Geschwindigkeit c von Null an wächst, treten abwechselnd Minima und Maxima der grössten Ausweichung auf. Es sind an den Stellen $\ldots \frac{a}{4k+5}, \frac{a}{4k+1}, \frac{a}{4k-3} \ldots$ kleinste Werthe der grössten Ausweichung und in den dazwischen liegenden Gebieten

$$\ldots \frac{a}{4k+2\cdot5} < c < \frac{a}{4k+2\cdot25}; \quad \frac{a}{4k-1\cdot5} < c < \frac{a}{4k-1\cdot75} \ldots$$

sind Maximalwerthe dieser Grösse vorhanden. Die Minimawerthe selbst sind durch die Formel

$$(y_{max})_{c=\frac{a}{4k+1}} = \frac{P.l}{4a^2\rho} \cdot \frac{(k+1)(4k+1)}{(2k+1)^2}$$

gegeben. Man erkennt, dass diese Minimawerthe mit abnehmenden Werthen des k, also zunehmenden Werthen des c, zunehmen. In dem Intervalle $k = 0$ nimmt die grösste Ausweichung für wachsende Werthe des c nur zu.

Wünscht man möglichst kleine Ausweichungen der Saite zu erhalten, so wird es demnach vortheilhaft sein, für die

Geschwindigkeit c einen Werth von der Form $\frac{a}{4k+1}$ zu wählen und, wenn mehrere solche Werthe zulässig sind, den kleinsten unter ihnen auszusuchen.

Die Zerlegung der Saitenbewegung in die Normalschwingungen erhält man durch die Entwicklung des Bernoulli'schen Integrales. Man gewinnt dasselbe, indem man die untersuchte periodische Function durch eine Fourier'sche Reihe ausdrückt. Zu diesem Zwecke hat man zwischen den Punkten $x = 0$ und $x = ct$ die Gerade $y = \frac{P.x}{a\rho.(a+c)}$, zwischen $x = ct$ und $x = at$ die Gerade $y = \frac{Pc.(at-x)}{a\rho.(a^2-c^2)}$ gegeben, sodann setzt man diese Figur als ungerade Function von x im Intervalle $x = 0$ bis $x = -l$ fort und wiederholt diese Zeichnung periodisch nach x mit der Periode $2l$. Zur Darstellung wählt man eine Sinusreihe mit der Periode $2l$ und erhält

$$y = \frac{2Pl}{\rho\pi^2.(a^2-c^2)} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^2} \cdot \sin\left(\frac{s\pi}{l}ct\right) \sin\left(\frac{s\pi}{l}x\right) -$$

$$-\frac{2P.l.c}{a\rho\pi^2.(a^2-c^2)} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^2} \sin\left(\frac{s\pi}{l}at\right) \sin\left(\frac{s\pi}{l}x\right)$$

als die Form des Bernoulli'schen Integrales.

II. $c > a$.

Die beiden von dem Punkte $x = 0$ aus mit entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten die Saite durchwandernden Erreger erzeugen auf derselben die folgende Welle: Die positive Kraft P erregt in dem Gebiete $x = -at$ bis $x = +at$ die Welle $y = \frac{P.(x+at)}{2a\rho.(a+c)}$, zwischen $x = +at$ und $x = +ct$ die Welle $y = \frac{P.(ct-x)}{\rho.(c^2-a^2)}$; die negative Kraft $-P$ hingegen erzeugt zwischen $x = -ct$ und $x = -at$ die Welle $y = -\frac{P.(ct+x)}{\rho.(c^2-a^2)}$ und zwischen $x = -at$ und $x = +at$ die

Welle $y = \frac{P.(x-at)}{2a\rho.(a+c)}$. Die Superposition dieser Wellen liefert in dem Gebiete $-ct \leqq x \leqq -at$ die Erhebung $y = -\frac{P.(ct+x)}{\rho.(c^2-a^2)}$;

in dem Gebiete $-at \leqq x \leqq +at$ die Erhebung $y = \frac{Px}{\rho a(a+c)}$

und in dem Gebiete $+at \leqq x \leqq ct$ die Erhebung $y = \frac{P.(ct-x)}{\rho.(c^2-a^2)}$.

Diese Wellen sind sodann periodisch nach x mit der Periode $2l$ zu wiederholen. Nachdem jedoch der Erreger den auf der Saite erzeugten Wellen voranlauft, gelangen in jener Zeit, in welcher er die endlich lange Saite durchwandert, keine anderen Wellen in das abgegrenzte Gebiet zwischen $x = 0$ und $x = l$. In dieser Zeit ist demnach die Form der Saite stets die eines Dreieckes.

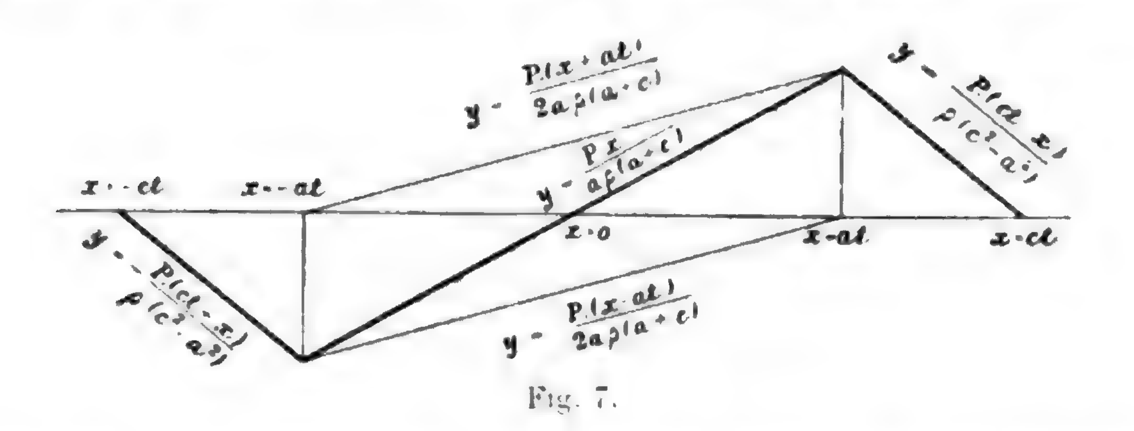


Fig. 7.

Ihre grösste Ausweichung aus der Ruhelage ist im Augenblicke t

$$y = \frac{P.t}{\rho.(a+c)},$$

und der grösste Werth dieser Grösse in der Zeit, in welcher der Erreger die Saite durchwandert, ist

$$y_{\max} = \frac{P.l}{\rho(a+c).c}.$$

Die grösste Ausweichung nimmt mit abnehmenden Werthen der Geschwindigkeit zu und ist bei derselben Geschwindigkeit der Grösse der Kraft und der Länge der Saite proportional. Von der Spannung und der Dichte der Saite ist sie in der Art abhängig, dass sie dem Ausdrucke $\{\sqrt{T_1.\rho}+c\rho\}$ verkehrt proportional geht.

Die Entwicklung des Bernoulli'schen Integrales lässt sich in derselben Weise wie in dem früheren Falle gewinnen und liefert

$$y = \frac{2P.l.c}{pa\pi^2.(c^2-a^2)} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \sin\left(\frac{s\pi}{l} at\right) \sin\left(\frac{s\pi}{l} x\right) -$$

$$- \frac{2P.l}{p\pi^2.(c^2-a^2)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \sin\left(\frac{s\pi}{l} ct\right) \sin\left(\frac{s\pi}{l} x\right).$$

Es ist dies dieselbe Formel wie oben.

Entwicklung der Lösung mittelst Normalfunctionen.

Die durchgeführte Untersuchung der Saitenbewegungen, welche entweder durch eine Reihe von Impulsen oder durch eine die Länge der Saite durchstreichende Kraft angeregt werden, beruht völlig auf jenen Vorstellungen, welchen das d'Alembert'sche Integral entspringt. Es ist jedoch nicht ohne Interesse, die Lösung der beiden betrachteten Aufgaben auch unter Benützung der Normalfunctionen zu entwickeln und hiedurch einen Weg kennen zu lernen, welcher dieselben Aufgaben für andere schwingende Systeme in ähnlicher Weise wie für die Saite zu erledigen gestattet. Die Betrachtungen mögen hiebei derart geführt werden, dass sie nicht nur für die gespannte Saite, sondern in gleicher Weise auch für den transversal schwingenden Stab verwendet werden können.

Das schwingende System, welches entweder die Saite oder den Stab darstellen soll, besitze die Normalfunctionen $u_s(x)$ und die zugehörenden Normalcoordinaten φ_s $(s = 1, 2, \ldots)$. Die Ausweichung y eines Punktes mit der Abscisse x aus der Ruhelage ist dann gegeben durch die Formel

$$y = \sum_{s=1}^{s=\infty} u_s.\varphi_s.$$

Die lebendige Kraft T und die potentielle Energie V seien durch

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \cdot \left(\frac{d\varphi_s}{dt}\right)^2$$

und

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s . n_s^2 . \varphi_s^2$$

ausgedrückt, wobei die Grössen a_s und n_s dem System eigenthümliche Constanten sind, welche für die Saite und den Stab verschiedene bestimmte Werthe annehmen. Den Übergang von diesem schwingenden System zur Saite gewinnt man, indem man für die Normalfunctionen $u_s(x)$ den Ausdruck

$$u_s(x) = \sin\left(\frac{s\pi}{l}x\right)$$

setzt und für die Constanten a_s und n_s die Werthe

$$a_s = \frac{\rho l}{2}, \quad n_s^2 = \frac{a^2 s^2 \pi^2}{l^2}$$

wählt.

Die Normalfunctionen des transversal schwingenden Stabes nehmen eine verschiedene Form an je nach der Wahl der Bedingungen, welche für die beiden Enden des Stabes vorgegeben sind. Nimmt man, um die Vorstellung zu fixiren, beispielsweise den beiderseits festgeklemmten Stab, so ist dessen s^{te} Normalfunction

$$u_s(x) = (\sin(m_s) - \sin h(m_s)).\left(\cos\left(\frac{m_s x}{l}\right) - \cos h\left(\frac{m_s x}{l}\right)\right) -$$
$$- \left(\cos(m_s) - \cos h(m_s)\right)\left(\sin\left(\frac{m_s x}{l}\right) - \sin h\left(\frac{m_s x}{l}\right)\right),$$

wobei m_s die s^{te} unter den der Grösse nach aufsteigend geordneten Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$\cos(m).\cos h(m) = 1$$

und l die Länge des Stabes bedeutet. Die lebendige Kraft und die potentielle Energie des Stabes sind für jede Art der Endbedingungen durch die Ausdrücke

$$T = \frac{1}{2} . \sum_{s=1}^{s=\infty} \rho\omega . \int_0^l (u_s(x))^2 dx . \left(\frac{d\varphi_s}{dt}\right)^2$$

und

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q\varkappa^2 \omega m_s^4}{l^4} \cdot \int_0^l (u_s(x))^2 dx \cdot \varphi_s^2$$

gegeben. Es bezeichnet in diesen Formeln ρ die constante Volumdichte, ω den Flächeninhalt des überall als gleich angenommenen Querschnittes, q den Elasticitätsmodul und $\varkappa$ den Gyrationsradius des Querschnittes. Den Constanten a_s und n_s hat man daher für den Stab die Werthe

$$a_s = \rho \cdot \omega \cdot \int_0^l (u_s(x))^2 dx$$

und

$$n_s^2 = \frac{q\varkappa^2 m_s^4}{\rho l^4} = \frac{b^2 \varkappa^2 m_s^4}{l^4}$$

zu geben, wobei die Abkürzung $b^2 = \frac{q}{\rho}$ benützt ist. In dem gewählten Beispiele des beiderseits festgeklemmten Stabes ist

$$\int_0^l (u_s(x))^2 dx = \frac{l^5}{4 m_s^4} \cdot \left(\frac{d^2 u_s(x)}{dx^2}\right)^2_{x=l}$$

zu setzen.[1]

Die Differentialgleichung der s^{ten} Normalcoordinate des schwingenden Systems ergibt sich aus den Ausdrücken für die lebendige Kraft und potentielle Energie des Systems. Sie ist

$$\frac{d^2 \varphi_s}{dt^2} + n_s^2 \cdot \varphi_s = \frac{1}{a_s} \cdot \Phi_s .$$

Die allgemeine Kraftcomponente Φ_s ist dadurch definirt, dass $\Phi_s \cdot d\varphi_s$ die bei Änderung der s^{ten} Normalcoordinate geleistete Arbeit bedeutet. Bezeichnet Y die in der Richtung der y-Coordinate an der Stelle x pro Längeneinheit entfallende äussere Kraft, so ist

[1] Die Formeln, sowie die Bezeichnungsweisen der auftretenden Grössen sind Rayleigh's »Theorie des Schalles«, übersetzt von Neesen, Cap. 8, entnommen.

$$\Phi_s = \int_0^l Y.\, u_s(x).\, dx.$$

Die Integration der Differentialgleichung liefert

$$\varphi_s = \left(\frac{d\varphi_s}{dt}\right)_{t=0} \cdot \frac{\sin(n_s t)}{n_s} + (\varphi_s)_{t=0} . \cos(n_s t) + \\ + \frac{1}{a_s . n_s} \cdot \int_{t'=0}^{t} \Phi_s . \sin[n_s(t-t')]\, dt'$$

oder für den Fall, welcher in der Folge allein betrachtet werden möge, dass das schwingende System im Anfange in der Ruhelage und ohne Geschwindigkeit sich befindet

$$\varphi_s = \frac{1}{a_s . n_s} \cdot \int_{t'=0}^{t} \int_{x=0}^{l} Y.\, u_s(x) \sin[n_s(t-t')]\, dt'\, dx. \qquad 1)$$

Hiebei sind die gegebenen äusseren Kräfte an Stelle der allgemeinen Kraftcomponente eingeführt.

1. Bewegung unter der Einwirkung von Impulsen.

Die Untersuchung dieses Falles schliesst sich am besten an die Betrachtung jener Bewegung an, zu welcher das schwingende System durch eine Reihe von regelmässig angeordneten und regelmässig sich folgenden Schlägen angeregt wird. Es mögen in den Punkten $x_1 = \frac{l}{k}$, $x_2 = 2\frac{l}{k} \ldots x_{k-1} = (k-1)\frac{l}{k}$ je in den Zeitmomenten $\tau, 2\tau \ldots (k-1)\tau$ auf das schwingende System Schläge ausgeübt werden. Jeder dieser Schläge treffe das kleine Gebiet ε in der Umgebung des getroffenen Punktes x_ν und möge in derselben Weise, wie dies für den Schlag eines Hammers auf die Klaviersaite angenommen wird, durch die Einwirkung einer Kraft Y pro Längeneinheit dargestellt werden, deren Intensität sich nach einer Sinusfunction der Zeit ändert. Es ist demnach

$$Y = \sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} F_\nu . \sin[p(t-\nu\tau)].$$

Hiebei ist $F_\nu = 0$ für alle Zeiten $\nu\tau + \frac{\pi}{p} < t < \nu\tau$; hingegen für das Intervall $\nu\tau \leqq t \leqq \nu\tau + \frac{\pi}{p}$ nimmt F_ν in der Umgebung ε der Stossstelle $\nu\frac{l}{k}$ einen für alle Schläge gleichen, also von ν unabhängigen Werth $\frac{F}{\varepsilon}$ an. Die Zahl p sei so gross gewählt, dass die Dauer der Einwirkung $\frac{\pi}{p}$ klein, jedenfalls aber kleiner als τ wird.

Führt man diesen Ausdruck der gegebenen Kraft in die Formel I ein, so erhält das nach x genommene Integral nur für die kleinen Umgebungen der Stossstellen $\nu\frac{l}{k}$ und das nach der Zeit genommene Integral nur für die Intervalle der Stösse einen von Null verschiedenen Werth. Will man jedoch die Bewegung in der Zeit zwischen zwei Schlägen, etwa zwischen dem Ende des r^{ten} Schlages und dem Beginne des $(r+1)^{\text{ten}}$ Schlages kennen lernen, so hat man nur die ersten r Schläge zu berücksichtigen und erhält für die s^{te} Normalcoordinate

$$\varphi_s = \frac{1}{a_s \cdot n_s} \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=r} F \cdot u_s\left(\nu\frac{l}{k}\right) \cdot$$
$$\cdot \int_{t'=\nu\tau}^{t'=\nu\tau+\frac{\pi}{p}} \sin\,[n_s(t-t')]\,\sin\,[p(t'-\nu\tau)]\,dt'.$$

Der Werth des bestimmten Integrales ist

$$\int_{t'=\nu\tau}^{t'=\nu\tau+\frac{\pi}{p}} \sin\,[n_s(t-t')]\,\sin\,[p(t'-\nu\tau)]\,dt' =$$
$$= \frac{2p}{p^2-n_s^2} \cdot \cos\left[n_s\frac{\pi}{2p}\right] \sin\left[n_s\left(t-\frac{\pi}{2p}\right) - n_s\nu\tau\right].$$

Man erhält somit für die Ausweichung eines Punktes aus der Ruhelage

$$y = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{2pF\cos\left(n_s\frac{\pi}{2p}\right)}{(p^2-n_s^2) \cdot a_s \cdot n_s} \cdot u_s(x) \cdot$$
$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=r} u_s\left(\nu\frac{l}{k}\right) \cdot \sin\left[n_s\left(t-\frac{\pi}{2p}\right) - n_s\nu\tau\right].$$

Diese Formel gilt für die Zeit zwischen dem r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Schlage, daher ist t auf das Gebiet

$$r\tau + \frac{\pi}{p} \leqq t \leqq (r+1)\tau$$

zu beschränken. Die Wahl $r = k-1$ liefert die Bewegung nach Erfolgen aller Schläge, also für Zeiten $t > (k-1)\tau + \frac{\pi}{p}$.

Die Bewegung des schwingenden Systems unter der Einwirkung einer Reihe von Impulsen erscheint als Grenzfall dieser Bewegung. Man hat zunächst den Antrieb A der Kraft an Stelle von F als gegebene Grösse einzuführen. Es ist

$$A = \int_{\nu\tau}^{\nu\tau + \frac{\pi}{p}} F.\sin[p(t-\nu\tau)]\,dt = \frac{2F}{p}.$$

Sodann hat man die Dauer eines Schlages $\frac{\pi}{p}$ gegen die Null hin abnehmen oder p über alle Beträge hinaus wachsen zu lassen, wobei der Antrieb A einen bestimmten endlichen Werth behalten soll. Für die Bewegung zwischen dem r^{ten} und $(r+1)^{\text{ten}}$ Impulse erhält man den Ausdruck

$$y = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A}{a_s . n_s} \cdot u_s(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=r} u_s\left(\nu\frac{l}{k}\right) \sin[n_s(t-\nu\tau)]. \qquad \text{II)}$$

Es ist hiebei t auf das Gebiet $r\tau \leqq t < (r+1)\tau$ zu beschränken. Für $r = k-1$ liefert die Formel die Bewegung nach Ablauf aller Impulse.

2. Bewegung unter der Einwirkung einer wandernden Kraft.

Die Bewegung des schwingenden Systems unter der Einwirkung einer Kraft P, deren Angriffspunkt mit der Geschwindigkeit c wandert, kann als Grenzfall der auf einer Reihe von Impulsen hin erfolgenden Bewegung aufgefasst werden.

Man denkt sich hiezu die Länge l in Intervalle von der beliebig gewählten Grösse ε und die Zeit $\frac{l}{c}$, in welcher die

Kraft das ganze System durchstreicht, in Intervalle τ eingetheilt, wobei $\varepsilon = c.\tau$ sein möge. Sodann nimmt man an, dass in jedem Längenintervalle $\nu\varepsilon$ zur Zeit $\nu\tau$ die Kraft P während eines Zeitintervalles τ hindurch wirke. Es ist dann die pro Längeneinheit entfallende Kraft, $Y = \frac{P}{\varepsilon}$, eine derartige Function von x und t, dass sie an einer Stelle x immer nur zur Zeit $\frac{x}{c}$ während eines Zeitabschnittes τ hindurch einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Unter dieser Voraussetzung ergibt die Formel I die s^{te} Normalcoordinate

$$\varphi_s = \frac{1}{a_s . n_s} \cdot \int_0^l \frac{P}{\varepsilon} \tau u_s(x) \sin\left[n_s\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] dx$$

oder, wenn man die Bewegung in einer Zeit $t < \frac{l}{c}$ untersuchen will, in welcher die Kraft P nur bis zu dem Punkte $x = ct$ gelangt und für alle grösseren Werthe von x gleich Null zu setzen ist,

$$\varphi_s = \frac{1}{a_s . n_s} \cdot \int_0^{ct} \frac{P}{c} \cdot u_s(x) \sin\left[n_s\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] dx.$$

Dieser Ausdruck gilt für jeden beliebig kleinen Werth von ε, also auch für den Grenzwerth für $\varepsilon = 0$ und stellt daher den Werth der s^{ten} Normalcoordinate für die gesuchte Erregung des Systems durch eine mit constanter Geschwindigkeit wandernde Kraft dar. Die Ausweichung y aus der Ruhelage wird

$$y = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{a_s . n_s} \cdot u_s(x) \cdot \int_0^{ct} \frac{P}{c} u_s(x) \sin\left[n_s\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] dx. \quad \text{III)}$$

Diese Formel gilt für alle Zeiten $t \leqq \frac{l}{c}$. Für Zeiten, welche grösser als die Dauer der Kraftwirkung sind, ist die obere Grenze des bestimmten Integrales durch den unveränderlichen Werth l zu ersetzen.

Anwendung auf den transversal schwingenden Stab.

Führt man für die Normalfunctionen $u_s(x)$, sowie für die Constanten a_s und n_s die der Saite eigenthümlichen Werthe in die Formeln II und III ein, so gehen sie unmittelbar in die Bernoulli'schen Integrale über, welche bereits aus dem d'Alembert'schen Integrale heraus entwickelt worden sind. Es sei daher, um ein anderes Beispiel der Anwendung zu geben, gestattet, noch auf die Bewegung des transversal schwingenden Stabes mit festgeklemmten Enden kurz einzugehen.

Es empfiehlt sich hiebei, den Normalfunctionen $u_s(x)$ eine etwas andere Form zu geben, wobei man in derselben Weise vorgehen kann, welche Rayleigh für die Normalfunctionen des frei-freien Stabes entwickelt hat. Bekanntlich kann man die Wurzeln m_s der transcendenten Gleichung $\cos m . \cos hm = 1$ in die Form

$$m_s = \frac{2s+1}{2} \cdot \pi - (-1)^s \beta_s$$

setzen; hiebei sind β_s abnehmende Zahlen, deren grösste $\beta_1 = 1° 0' 40 \cdot 94''$ beträgt. Unter Benützung dieser Umformung erhält man

$$u_s(x) = \operatorname{cotg} \beta_s . \{\sin \beta_s - \cos (s\pi)\} . v_s(x)$$

und

$$v_s(x) = \frac{\cos (s\pi)}{\sqrt{2} . \cos \left[\frac{\pi}{4} + (-1)^s \frac{\beta_s}{2}\right]} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sqrt{2} . \cos \left[\frac{m_s x}{l} + \frac{\pi}{4} + (-1)^s \frac{\beta_s}{2}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{m_s x}{l}} . \sin \left[(-1)^s \frac{\beta_s}{2}\right] - e^{-\frac{m_s x}{l}} . \cos \left[(-1)^s \frac{\beta_s}{2}\right] \right\}.$$

Da man einen constanten Factor der Normalfunctionen unterdrücken kann, der, wie man sieht, in beiden Formeln im Zähler und im Nenner, in letzterem in a_s, zweimal auftreten muss, kann man überall statt $u_s(x)$ auch $v_s(x)$ einführen. Da aber

$$\left(\frac{d^2 v_s(x)}{dx^2}\right)_{x=l} = \frac{2 m_s^2}{l^2}$$

ist, erhält man

$$a_s = \frac{\rho\omega l^5}{4 m_s^4} \cdot \left(\frac{d^2 v_s(x)}{dx^2}\right)^2_{x=l} = \rho\omega l.$$

Für den transversal schwingenden Stab gelangt man für den Fall der Anregung durch Impulse aus der Formel II zu dem Ausdrucke

$$y = \frac{A.l}{\omega\varkappa\sqrt{q\rho}} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{m_s^2} \cdot v_s(x) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=r} v_s\left(\nu\frac{l}{k}\right) \sin\left[\frac{b\varkappa m_s^2}{l^2}(t-\nu\tau)\right].$$

und für den Fall der Erregung durch eine wandernde Kraft aus der Formel III zu der Gleichung

$$y = \frac{P.l}{\omega\varkappa\sqrt{q\rho}} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{m_s^2} \cdot v_s(x) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{c}\int_0^{ct} v_s(x).\sin\left[\frac{b\varkappa m_s^2}{l^2}\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] dx.$$

Die absoluten Werthe der Normalfunctionen $v_s(x)$ werden, wie man aus ihrer Form ersehen kann, nie grösser als eine bestimmte, von s und x unabhängige Zahl, als welche nach einem einfachen Überschlag $\frac{7}{2}$ genommen werden kann. Hieraus und aus der Bemerkung, dass die m_s Zahlen sind, welche nahezu wie die aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen zunehmen, erkennt man: erstens die Convergenz dieser Reihen, sodann, dass die Reihen, wenn man sie bei einem Gliede abbricht, eine von x unabhängige obere Schranke für den eintretenden Fehler besitzen, wodurch die Verwendung der ersten Glieder als Näherungsformel ermöglicht wird, und endlich, dass der grösste Werth des absoluten Betrages der Ausweichung y in dem ersten Falle der Anregung kleiner ist als das Product einer Constanten in dem Ausdruck $\frac{kAl}{\omega\varkappa\sqrt{q\rho}}$, in dem zweiten Falle kleiner als das Product einer Constanten in

$\frac{Pl}{c\omega\varkappa\sqrt{q\rho}}$. In beiden Fällen erscheint daher die Ausweichung klein, wenn die Länge des Stabes klein, sein Querschnitt, dessen Gyrationsradius und die Wurzel aus dem Producte der Dichte in den Elasticitätsmodul jedoch gross sind. In dem ersten Falle ist die obere Schranke der grössten Ausweichung der Anzahl k der Impulse proportional, in dem zweiten Falle nimmt sie unter sonst gleichen Umständen im Allgemeinen mit grösserer Geschwindigkeit ab.

Die Formeln ergeben eine obere Schranke und nicht eine obere Grenze für die grösste Ausweichung y. Man kann daher nur schliessen: Wenn in einem gegebenen Falle die obere Schranke unter einem als zulässig vorgegebenen Werthe bleibt, dann liegt auch die thatsächlich eintretende grösste Ausweichung unter diesem Werthe. Hingegen kann man eine Vergleichung der grössten Ausweichungen in zwei verschiedenen Fällen im Allgemeinen nicht durch Vergleichung der oberen Schranken durchführen, wie ja z. B. der Einfluss der Geschwindigkeit in dem zweiten Falle ganz verdeckt ist. Nur in jenen Fällen, in denen die thatsächlich eintretenden grössten Ausweichungen den oberen Schranken proportional werden, kann man durch Vergleichen der letzteren auf die Beziehung der ersteren schliessen. Dies tritt ein für Stäbe gleicher Länge und gleicher Werthe von $b\varkappa = \sqrt{\frac{q}{\rho}} \cdot \varkappa$, wenn in dem Falle der Erregung durch Impulse, deren Gesammtzahl $(k-1)$, in dem Falle der Erregung durch eine wandernde Kraft deren Geschwindigkeit dieselben Werthe haben. In diesen besonderen Fällen nehmen nämlich die unendlichen Reihen für jedes x und t gleiche Werthe an, so dass die Ausweichungen sich stets wie die oberen Schranken verhalten.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XV. SITZUNG VOM 8. JUNI 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte: Bd. 108, Abth. II. a, Heft I und II (Jänner und Februar 1899); Abth. II. b, Heft I—III (Jänner bis März 1899). — Monatshefte für Chemie, Bd. 20, Heft IV (April 1899).

Der Vorsitzende, Herr Präsident E. Suess, gibt der tiefen Trauer Ausdruck über das am 4. Juni d. J. erfolgte Ableben des Vicepräsidenten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften,

des Herrn k. k. Hofrathes

DR. HEINRICH SIEGEL.

Die anwesenden Mitglieder geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Ferner gedenkt der Vorsitzende des neuerlichen Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 7. Juni l. J. erfolgte plötzliche Ableben ihres wirklichen Mitgliedes, Herrn Professor Dr. Hugo Weidel, erlitten hat.

Die Anwesenden erheben sich zum Zeichen ihres Beileides von den Sitzen.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Victor Carus in Leipzig dankt für die ihm zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum dargebrachten Glückwünsche seitens der Mitglieder der mathem.-naturw. Classe.

Herr Dr. Ludwig Unger in Wien dankt für die ihm bewilligte Subvention behufs Anschaffung von Material für seine Untersuchungen über die Morphologie und Faserung des Reptiliengehirns.

Der prov. Secretär legt eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von Prof. Dr. Ernst Lecher vor, betitelt: »Einige Versuche mit dem Wehnelt'schen Interruptor«.

Herr Dr. H. Rudolph in St. Goarshausen a. Rhein übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Über die Ursache der Sonnenflecken«.

Ferner legt der prov. Secretär eine Abhandlung von Herrn k. u. k. Militär-Ober-Verpflegs-Verwalter Karl Worel in Prag vor, welche den Titel führt: »Studie über die Photographie in natürlichen Farben nach Dr. Lippmann's Verfahren«.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Herr Eduard Mazelle, übersendet einen Bericht über die in Triest am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Monate Mai 1899 beobachteten Erdbebenstörungen.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Sigm. Exner überreicht eine Abhandlung von Dr. C. Storch, a. o. Professor am k. u. k. Militär-Thierarznei-Institute und der thierärztlichen Hochschule

in Wien, betitelt: »Über die Kenntniss der Eiweisskörper der Kuhmilch. Zweite Mittheilung.«

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine im physikalischen Institute der k. k. Universität Wien ausgeführte Arbeit von Dr. Stefan Meyer, betitelt: »Volumenometrische Bestimmung des specifischen Gewichtes von Yttrium, Zirkonium und Erbium«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Arbeit von Herrn Dr. Ludwig Merk in Graz, betitelt: »Experimentelles zur Biologie der menschlichen Haut (I. Mittheilung. Die Beziehungen der Hornschicht zum Gewebesafte)«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Über den Wassergehalt der Calcium- und Baryumsalze der Methyl-2-Pentansäure-5«, von Fritz Ornstein.

II. »Über ein Condensationsproduct aus Isobutyraldehyd und Benzaldehyd«, von Milan Josef Stritar.

XVI. SITZUNG VOM 15. JUNI 1899.

Herr H. Friese in Innsbruck übersendet die beiden Pflichtexemplare des V. Bandes seines von der kaiserlichen Akademie subventionirten Werkes: »Die Bienen Europas«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang überreicht eine Arbeit aus dem physikalischen Cabinet der Universität in Wien von Dr. G. Lampa, betitelt: »Über einen Beugungsversuch mit elektrischen Wellen«.

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag von Dr. H. Meyer: »Zur Kenntniss des Anemonins« (II. Mittheilung über Anemonin).

Der prov. Secretär legt eine Mittheilung von E. Friedrich Knopstück-Rowel in Dresden vor, betitelt: »Ein neues, zweitheiliges Heilverfahren gegen Tuberculose«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. G. Ritter v. Escherich überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Über Systeme von Differentialgleichungen der I. Ordnung«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt vor die XV. und XVI. Mittheilung der von ihm gemeinsam mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführten Untersuchung über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente.

Derselbe legt ferner eine Arbeit des Herrn Dr. E. v. Schweidler, Assistenten am physikalisch-chemischen Institute

der Wiener Universität vor, betitelt: »Zur Theorie unipolarer Gasentladungen«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Haeckel E., Kunstformen der Natur. I. und II. Lieferung. Leipzig und Wien, 1899; 4°.

Lycortas C., Le mouvement universel. Théorie nouvelle sur le mouvement des corps célestes. Traduction du Grec. Athènes-Paris, 1899; 8°.

Über Systeme von Differentialgleichungen der I. Ordnung

von

G. v. Escherich,

w. M. k. Akad.

Ich nehme in den folgenden Blättern die Frage wieder auf, die ich schon in Mittheilung I der Abhandlungen über die zweite Variation[1] der einfachen Integrale berührte: die Frage über die Abhängigkeit der Integrale eines kanonischen Differentialgleichungssystems von ihren Anfangswerthen und etwaigen Parametern. Es zeigt sich, dass die dort angegebenen hinreichenden Bedingungen, damit ein solches Integralsystem sich nach den Anfangswerthen oder Parametern differentiiren lasse, einer Erweiterung fähig sind. Dieselbe fliesst unmittelbar aus einem, wie ich glaube, neuen Satze (§. 2), der eine allgemeinere hinreichende Bedingung aufstellt, unter der eine unendliche Reihe sich gliedweise differentiiren lässt, als der gewöhnlich angewandte, der die Differentiation von der gleichmässigen Convergenz der Reihe aus den Differentialquotienten der Glieder abhängig macht und in ihm als specieller Fall enthalten ist. Im Anschlusse hieran werden die Fälle behandelt, in denen die rechten Seiten der Differentialgleichungen sich in Potenzreihen mit ganzen positiven Exponenten entwickeln lassen und hiebei auch der von Poincaré zuerst hervorgehobene Fall betrachtet, wo diese Potenzreihen ohne absolutes Glied sind.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CVII, Abth. II.a, 1898.

§. 1.

In I der Mittheilung I habe ich die Integrale eines kanonischen Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \ldots x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1 \ldots x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n)$$

als Functionen ihrer Anfangswerthe untersucht. Dabei handelte es sich mir in erster Linie nicht darum, die Ableitung eines Integralelementes unter möglichst allgemeinen Bedingungen über die $f_1, f_2 \ldots f_n$ zu erhalten, sondern nur unter solchen, die in ihren Anwendungen auf die Differentialgleichungen der ersten Variation keine neuen Beschränkungen einführen. Aus diesem Grunde habe ich bei Anwendung des Verfahrens der successiven Integrationen, wie es Peano[1] nennt, das ich der Darstellung Picard's[2] entnahm, nicht die von diesem gemachten weiteren Annahmen verwendet, sondern mich auf folgende beschränkt:

Die n Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ sollen in einer Umgebung (oder Nachbarschaft) der Stelle $t_0, x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ vom Radius ρ nach t und r nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ sammt ihren ersten Differentialquotienten nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ eindeutig, stetig und endlich sein, wobei unter endlich zu verstehen ist, dass sie eine endliche obere und untere Grenze besitzen.

Ist M eine positive Zahl, die von den absoluten Beträgen der Functionen und ihrer ersten Derivirten nicht überschritten wird, so ergibt sich aus

[1] Den Antheil, den Peano an den Existenzbeweisen für die Integrale eines kanonischen Systems von Differentialgleichungen hat, setzt er in einer mir erst jüngst bekannt gewordenen Note in den Atti di Torino, Vol. XXXIII, disp. 1ª auseinander.

[2] Traité d'Analyse, t. II und III

$$x_k^m - x_k^0 = \int_{t_0}^{t} f_k(t; x_1^{m-1}; \ldots x_n^{m-1})\, dt,$$

wenn man t so wählt, dass $|t-t_0|$ kleiner als die kleinere δ der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M}$ wird, indem man m die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen lässt, ein Näherungsverfahren zur Berechnung eines Integralsystems, dessen Glieder $x_1, x_2 \ldots x_n$ in t_0 bezüglich die gegebenen Werthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen. Setzt man nämlich

$$x_k^m - x_k^{m-1} = X_k^m,$$

so findet man, wie ich seit 1891 in meinen Vorlesungen zeige, dass

$$|X_k^m| < \frac{[nM|t-t_0|]^m}{m!} < \frac{(nM\delta)^m}{m!}$$

ist, und es convergirt also die Reihe

$$x_k = x_k^0 + X_k^1 + X_k^2 + \ldots \tag{2}$$

in einer Umgebung der Stelle t_0 vom Radius δ gleichförmig. Aus

$$x_k^m = x_k^0 + X_k^1 + X_k^2 + \ldots + X_k^m =$$

$$= x_k^0 + \int_{t_0}^{t} f_k(t; x_1^{m-1}; \ldots x_n^{m-1})\, dt \tag{3}$$

folgt dann leicht

$$x_k - x_k^0 = \int_{t_0}^{t} f_k(t; x_1; \ldots x_n)\, dt.$$

Das so erhaltene Element

$$E(t|t_0, x_1^0 \ldots x_n^0)$$

ist offenbar das einzige, das sich aus den gegebenen Anfangswerthen bilden lässt.[1] Es folgt dies unmittelbar aus der Annahme des Gegentheils vermöge des bekannten Satzes, der in Mittheilung I und II wiederholt angewendet wurde:

[1] Peano, Nouvelles annales, t. XI, 1892, hat diese Bemerkung wohl zuerst ausgesprochen. Siehe auch Picard, Traité d'Analyse, t. 2.

Die Determinante von n Integralsystemen eines kanonischen Systems von n linearen Differentialgleichungen verschwindet an einer regulären Stelle des letzteren dann und nur dann, wenn die Integralsysteme nicht linear unabhängig sind.

In derselben Weise erkennt man, dass, wenn zwei Integralelemente

$$E(t|t_0, a_1 \ldots a_n) \quad \text{und} \quad E(t|t'_0, a'_1 \ldots a'_n)$$

an derselben Stelle τ für $x_1, x_2 \ldots x_n$ gleiche Werthe $b_1, b_2 \ldots b_n$ ergeben, sie auch in jeder Umgebung, die ganz in dem gemeinsamen Bereiche beider Elemente liegt, unter einander und mit dem Elemente

$$E(t|\tau, b_1, b_2 \ldots b_n)$$

identisch gleich werden.

Aus diesen Bemerkungen erhellt, dass ohneweiters der Begriff der Fortsetzung aus der Functionentheorie sich hieher übertragen und auch hier sich aus einem Elemente, ähnlich wie dort die monogene Function, ein System von Integralfunctionen ableiten lässt.

§. 2.

Aus der gleichmässigen Convergenz der Reihe (1) und der Stetigkeit ihrer Glieder bezüglich der Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ folgt zunächst, dass auch die Glieder $x_1, x_2 \ldots x_n$ des Integralelementes stetige Functionen dieser Grössen sind. Von entscheidender Wichtigkeit für die Untersuchung der zweiten Variation ist nun die weitere anknüpfende Frage, unter welchen Bedingungen die Glieder des Integralelementes nach den Anfangswerthen differentiirbar sind. Am nächsten lag wohl, zu dem Behufe den bekannten Satz heranzuziehen, dass eine Reihe gliedweise differentiirbar ist, wenn die Reihe aus den Differentialquotienten der Glieder gleichmässig convergirt. Indem man den früheren noch weitere Annahmen über die $f_1, f_2 \ldots f_n$ hinzufügt, die aber bei den Differentialgleichungen der ersten Variation zutreffen, erlangt man, wie aus Mittheilung I hervorgeht, für den vorliegenden Zweck ganz taugliche hinreichende Bedingungen für die Differentiation der Integrale nach den Anfangswerthen. Da aber hier x_k^{m}, wie (3) lehrt, die

m^{te} Theilsumme der Reihe (2) und also $\frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0}$ die m^{te} Theilsumme aus der Reihe der Differentialquotienten ihrer Glieder ist, so drängt sich der Gedanke auf, diesen Umstand für die Beantwortung der Frage zu verwerthen. In der That ergab sich der folgende Satz, der sich gewiss auch leicht aus den allgemeinen Sätzen Dini's[1] über die Differentiation unendlicher Reihen dürfte ableiten lassen.

Convergirt die Reihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, deren Glieder Functionen von x sind, in a und einer Umgebung dieser Stelle, ist ferner daselbst überall jedes Glied der Reihe stetig nach x und besitzt es eine endliche Derivirte, so hat auch die Summe der Reihe in a eine Derivirte, welche zugleich die Summe aus den Ableitungen der Glieder in a ist, wenn die Theilsummen $s_m(x)$ der letzteren Reihe in einer Umgebung von a in der Weise stetig sind, dass zu jeder vorgegebenen positiven Zahl ε zwei andere positive Zahlen μ und ρ sich vorfinden, für welche stets

$$|s_n(a+h)-s_n(a)| < \varepsilon \tag{1}$$

ist, sobald zugleich $n > \mu$ und $|h| < \rho$ sind, wo ρ kleiner als der Radius der letztgenannten Umgebung zu nehmen ist.[2]

Bezeichnet $a+h'$ eine andere Stelle in dieser Umgebung und ist auch $|h'| < \rho$, so ist auch

$$|s_n(a+h')-s_n(a)| < \varepsilon$$

und daher

$$|s_n(a+h)-s_n(a+h')| < 2\varepsilon \tag{2}$$

für alle $n > \mu$, $|h|$ und $|h'| < \rho$. Ebenso wie (2) eine Folge von (1) war, kann man auch aus (2) den Inhalt der Bedingung (1) ableiten. Setzt man den Differenzenquotient

[1] Dini, Fondamenti.

[2] Hier, sowie in allen späteren Entwickelungen dieser Abhandlung kann überall statt »Umgebung« auch »Nachbarschaft« gesetzt werden.

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=Q(h),$$

so ist für $h>0$

$$Q(h)=\lim_{n=\infty}\frac{1}{h}\left[\sum_{m=0}^{n}u_m(a+h)-\sum_{m=0}^{n}u_m(a)\right]$$

$$=\lim_{n=\infty}s_n(a+\theta_n h), \tag{3}$$

wo θ_n ein echter Bruch ist, der von n und h abhängt. Ebenso ist

$$Q(h')=\lim_{n=\infty}s_n(a+\theta'_n h')$$

und daher

$$|Q(h)-Q(h')|=\lim_{n=\infty}|s_n(a+\theta_n h)-s_n(a+\theta'_n h')|.$$

Bezeichnet nun $\frac{\varepsilon}{2}$ eine beliebige positive Zahl und sind wieder μ und ρ die nach der Voraussetzung des Satzes zugehörigen beiden positiven Zahlen, so wird nach (2)

$$|Q(h)-Q(h')|\leqq\varepsilon$$

für alle h und h', die dem absoluten Betrage nach kleiner als ρ sind. Also convergirt

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

für $\lim h=0$ gegen eine endliche Grenze, d. h. die Reihe $F(x)$ hat in a eine endliche Derivirte $F(a)$.

Ist $\frac{\varepsilon}{2}$ eine beliebige positive Zahl und sind wieder μ und ρ die nach Voraussetzung zugehörigen positiven Zahlen, so ist

$$|s_n(a+h)-s_n(a)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

sobald $n>\mu$ und zugleich $|h|<\rho$ ist. Daher ist auch, wenn θ_n einen echten Bruch bedeutet,

$$|s_n(a+\theta_n h)-s_n(a)|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Nimmt man ein festes derartiges h an, so besteht nach (3) zu diesem h und der beliebigen positiven Zahl $\frac{\varepsilon'}{2}$ eine positive Zahl als untere Grenze derart, dass

$$|Q(h) - s_n(a+\theta_n h)| < \frac{\varepsilon'}{2}$$

für alle n, die diese Grenze überschreiten. Bezeichnet daher ν eine Zahl grösser als diese Grenze und die obige Zahl μ, so gilt diese Ungleichung auch für alle $n > \nu > \mu$.

Also ist

$$|Q(h) - s_n(a) - [s_n(a+\theta_n h) - s_n(a)]| < \frac{\varepsilon'}{2} \quad \text{für } n > \nu$$

und daher wegen (4)

$$|Q(h) - s_n(a)| < \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \quad \text{für } n > \nu,$$

woraus für jede natürliche Zahl m folgt:

$$|s_{n+m}(a) - s_n(a)| < \varepsilon + \varepsilon' \quad \text{für } n > \nu,$$

d. h. die Reihe aus den Derivirten in a der Glieder von $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ convergirt.

Bezeichnet man mit $s(a)$ die Summe dieser Reihe, so ergibt sich aus (3)

$$Q(h) - s(a) = \lim_{n=\infty} [s_n(a+\theta_n h) - s_n(a)].$$

Ist daher wieder ε eine beliebige positive Zahl und sind μ und ρ die der Voraussetzung nach zugehörigen Zahlen, so ist nach (1)

$$|Q(h) - s(a)| \leqq \varepsilon \quad \text{für } |h| < \rho,$$

daher

$$s(a) = \lim_{h=0} Q(h) = F'(a),$$

w. z. b. w.

Corollar 1. Convergirt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$$

auch in einer Umgebung der Stelle a, so ist sie in a stetig. Denn aus

$$|s_n(a+h)-s_n(a)| < \varepsilon$$

für $n > \mu$ und $|h| < \delta$ folgt

$$\left|\lim_{n=\infty} s_n(a+h) - \lim_{n=\infty} s_n(a)\right| \leqq \varepsilon$$

für alle $|h| < \delta$.

Corollar 2. Ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(a+h)$$

in einer Umgebung (oder Nachbarschaft) der Stelle a vom Radius δ gleichmässig convergent, so sind die Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt.

Denn ist ε irgend eine positive Zahl, so besteht wegen der vorausgesetzten gleichmässigen Convergenz zu $\frac{\varepsilon}{3}$ eine positive Zahl μ, so dass

$$|s(a+h)-s_n(a+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$|s(a)-s_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für jedes $|h| < \delta$, wenn zugleich $n > \mu$ genommen wird.

Da in Folge der Voraussetzung

$$s(a) = \lim_{h=0} s(a+h),$$

so wird, wenn h genügend klein, kleiner als $\delta' > 0$, wird, auch

$$|s(a+h)-s(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für alle $n > \mu$ wird also

$$|s_n(a+h)-s_n(a)| =$$
$$= |s(a+h)-s_n(a+h)+s_n(a)-s(a)+s(a)-s(a+h)| < \varepsilon$$

für alle h, die dem absoluten Betrage nach kleiner als δ und δ' sind, womit die Behauptung bewiesen ist.

§. 3.

Um diesen Satz auf den vorliegenden Fall (§. 1) anzuwenden, ändere man die ursprünglichen Anfangswerthe

$$x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0$$

so ab, dass die neuen Werthe

$$y_1^0 = x_1^0+\delta x_1^0,\; y_2^0 = x_2^0+\delta x_2^0 \dots y_n^0 = x_n^0+\delta x_n^0$$

wieder in der Umgebung (§. 1) von

$$t_0, x_1^0 \dots x_n^0$$

liegen.

Die hiedurch bestimmten Integrale seien

$$y_1, y_2 \dots y_n$$

und die durch das Verfahren im §. 1 erhaltenen m^{ten} Näherungswerthe

$$y_1^m, y_2^m \dots y_n^m.$$

Bezeichnet man der Kürze halber eine Umgebung der Stelle $t_0, x_1^0 \dots x_n^0$ vom Radius ρ nach t, ρ_1 nach $x_1 \dots \rho_n$ nach x_n mit $(\rho, \rho_1 \dots \rho_n)$, so liegt die Umgebung $(\rho, r-|\delta x_1^0|, \dots r-|\delta x_n^0|)$ von $t_0, y_1^0, y_2^0 \dots y_n^0$ ganz in der ursprünglichen $(\rho, r, r, \dots r)$ oder kürzer (ρ, r), wenn $r-|\delta x_1^0| \dots r-|\delta x_n^0|$ positiv sind. Es werden also auch in dieser die Functionen und ihre Derivirten die in §. 1 gemachten Voraussetzungen erfüllen und dem absoluten Betrage nach kleiner als M bleiben. Nimmt man ferner sowohl in

$$x_k^m = x_k^0 + \int_{t_0}^{t} f_k(t, x_1^{m-1}, \dots x_n^{m-1})\,dt \qquad (k = 1, 2 \dots n),$$

als auch in

$$y_k^m = y_k^0 + \int_{t_0}^{t} f_k(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1})dt \qquad (k = 1, 2 \ldots n) \qquad (1)$$

t so, dass $|t-t_0|$ kleiner als die kleinste δ' unter den Grössen

$$\rho, \frac{r-|\delta x_1^0|}{M}; \frac{r-|\delta x_2^0|}{M} \cdots \frac{r-|\delta x_n^0|}{M}$$

ist, so sind für alle natürlichen Zahlen m die

$$x_1^m-x_1^0, x_2^m-x_2^0 \ldots x_n^m-x_n^0 \text{ und } y_1^m-x_1^0, y_2^m-x_2^0 \ldots y_n^m-x_n^0$$

kleiner als r.

Für die Differenz $(y_k^m-x_k^m)$ ergibt sich

$$|y_k^m-x_k^m| < |\delta x_k^0| + M \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{m-1}-x_\lambda^{m-1}| dt \right|, \qquad (2)$$

sobald $m > 1$. Für $m = 1$ erhält man direct

$$|y_k^1-x_k^1| < |\delta x_k^0| + M \sum_{\lambda=1}^{n} |\delta x_\lambda^0| |t-t_0|.$$

Setzt man

$$M \sum_{\lambda=1}^{n} |\delta x_\lambda^0| = S,$$

so gelangt man vermöge (2) zur Ungleichung

$$|y_k^m-x_k^m| < |\delta x_k^0| + S|t-t_0| +$$
$$+ \frac{nMS|t-t_0|^2}{2!} + \ldots + \frac{S(nM)^{m-1}|t-t_0|^m}{m!}$$
$$< |\delta x_k^0| + \frac{S}{nM}(e^{nM|t-t_0|}-1) < |\delta x_k^0| + \frac{S}{nM}(e^{nM\delta'}-1),$$

also

$$|y_k^m-x_k^m| < |\delta x_k^0| + \frac{1}{n}(e^{nM\delta'}-1) \sum_{\lambda=1}^{n} |\delta x_\lambda^0|$$
$$< |\delta x_k^0| + \frac{1}{n} e^{nM\delta'} \sum_{\lambda=1}^{n} |\delta x_\lambda^0|.$$

wo δ die in §. 1 angegebene Bedeutung hat und grösser als δ' ist.

Ist daher σ eine beliebige positive Zahl, so wird für alle

$$|\delta x_i^0| \leqq \frac{\sigma}{2} e^{-nM\delta} \tag{3}$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

und jede natürliche Zahl m der absolute Betrag der Differenzen

$$|y_k^m - x_k^m| < \sigma \tag{4}$$
$$(k = 1, 2 \ldots n).$$

Da die y_k^m und x_k^m die $m$ten Theilsummen der Reihen sind, die bezüglich y_k und x_k darstellen, so folgt aus dieser Ungleichung:

Unter den in §. 1 gemachten Voraussetzungen sind die Integrale des Systems der Differentialgleichungen (§. 1, 1) stetige Functionen ihrer Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$.

Die Differenz der $m$ten Theilsummen der aus den Derivirten der Glieder von x_k nach x_i^0 und von y_k nach y_i^0 gebildeten Reihen wird dargestellt durch:

$$\frac{\partial y_k^m}{\partial y_i^0} - \frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0} =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f_k(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1})}{\partial y_i^0} - \frac{\partial f_k(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})}{\partial x_i^0} \right] dt$$

oder wenn die Derivirte von $f_k(t, x_1, \ldots x_n)$ nach x_λ mit

$$f_{k\lambda}(t, x_1, \ldots x_n)$$

bezeichnet wird, durch

$$\frac{\partial y_k^m}{\partial y_i^0} - \frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0} =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} \left[f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) \frac{\partial y_\lambda^{m-1}}{\partial y_i^0} - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}) \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \right] dt.$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial y_\lambda^m}{\partial y_i^0} - \frac{\partial x_\lambda^m}{\partial x_i^0} = \Delta_\lambda^m,$$

so geht die obige Gleichung in

$$\Delta_k^m = \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} [f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})] \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) \Delta_\lambda^{m-1} dt$$

über. Somit ist

$$\Delta_k^m \leqq \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} \left| f_{k\lambda}(y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}) \right| \left| \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \right| dt \right.$$
$$\left. + \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1})| \, |\Delta_\lambda^{m-1}| dt \right| . \qquad (5)$$

Nach den Voraussetzungen in §. 1 sind aber die absoluten Beträge der Functionen und ihrer Derivirten in der Umgebung der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ kleiner als M, und hieraus folgt von $m = 1$ beginnend durch stufenweise Berechnung aus

$$x_k^m - x_k^0 = \int_{t_0}^{t} f_k(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}) dt$$

für alle natürlichen Zahlen m die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0} \right| < e^{nM|t-t_0|} < e^{nM\delta}.$$

Nimmt man nun in (5) $|t-t_0|$ kleiner als die früher festgesetzte Zahl δ', so ergibt diese Ungleichung, wenn

$$e^{nM\delta} = M'$$

gesetzt wird,

$$\Delta_k^m < M' \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})| dt \right|$$
$$+ M \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_\lambda^{m-1}| dt \right| . \qquad (6)$$

Die Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

sind der Voraussetzung nach sammt ihren ersten Derivirten in der Umgebung (ρ, r) der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ stetig. Wird nun bei dem schwankenden Gebrauche des Wortes Umgebung ausdrücklich angenommen, dass dieselbe auch an den Grenzen der Umgebung erfüllt sei, so besitzen die Functionen und ihre Derivirten die Eigenschaft in (ρ, r) und somit auch in

$$(\rho, r - |\delta x_1^0|, \ldots r - |\delta x_n^0|)$$

gleichmässig stetig zu sein. Nimmt man daher eine beliebige positive Zahl ε an, so ist ihr eine andere $\sigma > 0$ derart zugeordnet, dass

$$|f_{k\lambda}(t', x_1', \ldots x_n') - f_{k\lambda}(t, x_1 \ldots x_n)| < \varepsilon$$

ist für je zwei Stellen des Bereiches (ρ, r)

$$t, x_1 \ldots x_n \quad \text{und} \quad t', x_1' \ldots x_n',$$

die der Bedingung

$$|t' - t| < \sigma, \ |x_1' - x_1| < \sigma \ldots |x_n' - x_n| < \sigma$$

genügen.

Wählt man daher

$$|\delta x_i^0| \leqq \frac{1}{2} \sigma e^{-nM\varepsilon} \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

so werden nach (3) und (4)

$$|y_k^m - x_k^m| < \sigma$$
$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

für alle natürlichen Zahlen m, und daher wird

$$|f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})| < \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen m.

Die Ungleichung (6) ergibt dann

$$|\Delta_k^m| < M \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_\lambda^{m-1}| \, dt \right| + nM'\varepsilon |t - t_0|$$

für alle natürlichen Zahlen m. Da nun $\Delta_k^0 = 0$ ist, so erhält man zunächst

$$|\Delta_k^1| < nM'\varepsilon\,|t-t_0|$$

und schliesslich, wenn man berücksichtigt, dass

$$M|t-t_0| < M\delta < e^{M\delta} < M'$$

ist, für alle

$$|\delta x_i^0| \leqq \frac{1}{2}\,\sigma e^{-nM\delta} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

die Ungleichung

$$|\Delta_k^m| < \varepsilon|t-t_0|(e^{nM'}-1) < \varepsilon e^{nM'}\delta$$
$$< \varepsilon Q, \tag{7}$$

wo

$$\delta e^{nM'} = Q$$

gesetzt wurde.

Nimmt man also eine beliebige positive Zahl ε an, so ergibt die Stetigkeit der Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

und ihrer ersten Derivirten in der Umgebung (ρ, r) von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ zu $\frac{\varepsilon}{Q}$ eine zweite positive Zahl σ von der Beschaffenheit, dass für alle natürlichen Zahlen m die

$$\left|\frac{\partial y_k^m}{\partial y_i^0} - \frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0}\right|$$
$$i, k = 1, 2, \ldots n$$

kleiner werden als die vorgegebene Zahl ε, sobald sämmtliche

$$\delta x_1^0, \delta x_2^0 \ldots \delta x_n^0$$

dem absoluten Betrage nach unter der Zahl

$$\tau = \frac{1}{2}\,\sigma e^{-nM\delta}$$

liegen.

Hieraus folgt zunächst wegen der Bedeutung von $\frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0}$:

Bildet man aus der Reihe, die ein Integral des Integralsystems darstellt, die Reihe der nach irgend einem der Anfangswerthe derivirten Glieder, so sind die Theilsummen dieser Reihe stetig nach sämmtlichen Anfangswerthen.

Ändert man bloss einen der Anfangswerthe x_i^0 um δx_i^0, so dass also

$$\delta x_1^0 = \ldots = \delta x_{i-1}^0 = \delta x_{i+1}^0 = \ldots \delta x_n^0 = 0$$

sind, so ergibt weiters die obige Bemerkung:

Zu jeder positiven Zahl ε findet sich eine zweite positive Zahl τ vor, so dass

$$\left| \frac{\partial y_k^m}{\partial y_i^0} - \frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0} \right| < \varepsilon$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

für alle natürlichen Zahlen m, wenn

$$|\delta x_i^0| < \tau$$

genommen wird.

Es sind sonach im vorliegenden Falle die im Satze des §. 2 gestellten Bedingungen erfüllt, und man gelangt zu dem Ergebnisse:

Sind in dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \ldots x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1 \ldots x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n)$$

die Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

sammt ihren ersten Derivirten nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ in der Umgebung (ρ, r) von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ (mit Einschluss der

Grenzen) eindeutig, endlich und stetig hinsichtlich sämmtlicher Veränderlichen, so gibt es ein und nur ein Integralsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$, dessen Glieder in t_0 bezüglich die Werthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ besitzen. Die Glieder desselben lassen sich durch Reihen darstellen, welche in der Umgebung von t_0 absolut und gleichmässig convergiren und nach den Anfangswerthen $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ Differentialquotienten besitzen, die durch gliedweises Differentiiren erhalten werden. Ist M die obere Grenze für die absoluten Beträge der Functionen und ihrer ersten Derivirten in der Umgebung (ρ, r), so ist der Radius dieser Umgebung von t_0 die kleinere der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M}$.

§. 4.

Man kann diese Überlegungen fortsetzen, indem man auch die Existenz der zweiten Differentialquotienten der

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ annimmt und über sie dieselben Voraussetzungen macht, wie in §. 3 über die Functionen und ihre ersten Derivirten nach $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Behält man die Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen bei, so sieht man zunächst, dass die Theilsummen der x_k darstellenden Reihe zweite Derivirte nach den Anfangswerthen besitzen, und zwar ist

$$\frac{\partial^2 x_k^m}{\partial x_i^0 \partial x_h^0}$$

die m^{te} Theilsumme der Reihe, die aus den zweiten Derivirten der Glieder in x_k nach x_i^0 und x_h^0 gebildet wird.

Bezeichnet man die Differenz

$$\frac{\partial^2 y_k^m}{\partial y_i^0 \partial y_h^0} - \frac{\partial^2 x_k^m}{\partial x_i^0 \partial x_h^0}$$

mit $\Delta_k'^m$ und

$$\frac{\partial^2 f_k(t, x_1 \ldots x_n)}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}$$

mit $f_{k\lambda\mu}$, so ist

$$\Delta_k'^m = \int_{t_0}^t \sum_{\lambda, \mu = 0}^n \Big[f_{k\lambda\mu}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) \frac{\partial y_\lambda^{m-1}}{\partial y_i^0} \frac{\partial y_\mu^{m-1}}{\partial y_h^0} - $$

$$- f_{k\lambda\mu}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}) \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_\mu^{m-1}}{\partial x_h^0} \Big] dt$$

$$+ \int_{t_0}^t \sum_{\lambda=1}^n \Big[f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) \frac{\partial^2 y_\lambda^{m-1}}{\partial y_i^0 \partial y_h^0} - $$

$$- f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}) \frac{\partial^2 x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0 \partial x_h^0} \Big] dt.$$

Ändert man die in §. 3 gebrauchte Bezeichnung Δ_k^m für

$$\frac{\partial y_k^m}{\partial y_i^0} - \frac{\partial x_k^m}{\partial x_i^0}$$

in $\Delta_{k,i}^m$ ab, so lässt sich obiger Ausdruck in der Form schreiben

$$\Delta_k'^m = \int_{t_0}^t \sum_{\lambda\mu} \Big[f_{k\lambda\mu}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) \left(\frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} + \Delta_{\lambda,i}^{m-1} \right) \left(\frac{\partial x_\mu^{m-1}}{\partial x_h^0} + \Delta_{\mu,h}^{m-1} \right)$$

$$- f_{k\lambda\mu}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}) \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_\mu^{m-1}}{\partial x_h^0} \Big] dt$$

$$+ \int_{t_0}^t \sum_{\lambda=1}^n [f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})] \frac{\partial^2 x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0 \partial x_h^0} dt$$

$$+ \int_{t_0}^t \sum_{\lambda=1}^n f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) \Delta_\lambda'^{m-1} dt$$

oder

$$\Delta_k'^m = \int_{t_0}^t \sum_{\lambda\mu} [f_{k\lambda\mu}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda\mu}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})] \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_\mu^{m-1}}{\partial x_h^0}$$

$$+ \int_{t_0}^t \sum_{\lambda\mu} [f_{k\lambda\mu}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) \left(\frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0} \Delta_{\mu,h}^{m-1} + \frac{\partial x_\mu^{m-1}}{\partial x_h^0} \Delta_{\lambda,i}^{m-1} + \Delta_{\lambda,i}^{m-1} \Delta_{\mu,h}^{m-1} \right) dt$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{\lambda=1}^{n}[f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1},\ldots y_n^{m-1})-f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1},\ldots x_n^{m-1})]\frac{\partial^2 x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0 \partial x_h^0}\,dt$$

$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{\lambda=1}^{n} f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1},\ldots y_n^{m-1})\Delta_\lambda'^{m-1}\,dt. \qquad (1)$$

Hierin ist, wie schon in §. 3 bemerkt wurde, $\left|\frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0}\right| < e^{nM\tau}$ $(\lambda, i = 1, 2\ldots n)$ und in derselben Weise ergibt sich auch, dass

$$\left|\frac{\partial^2 x_\lambda^{m-1}}{\partial x_i^0 \partial x_h^0}\right| \qquad (\lambda = 1, 2\ldots n)$$

für alle m kleiner als eine endliche Zahl $M' > e^{nM\tau}$ bleibt.

Bezeichnet ε, wie in §. 3, eine beliebige positive Zahl, so gehört ihr wegen der gleichmässigen Stetigkeit der ersten und zweiten Derivirten der Functionen

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

in der Umgebung

$$(\rho, r)$$

der Stelle $t_0, x_1^0\ldots x_n^0$ eine positive Zahl σ zu, so dass für je zwei Stellen

$$t', x_1', x_2'\ldots x_n'$$

und

$$t, x_1, x_2\ldots x_n$$

dieser Umgebung, die den Bedingungen

$$|t'-t| < \sigma, \ |x_1'-x_1| < \sigma\ldots|x_n'-x_n| < \sigma$$

genügen, sowohl

$$|f_{k\lambda\mu}(t', x_1'\ldots x_n')-f_{k\lambda\mu}(t, x_1\ldots x_n)| < \varepsilon,$$

als auch

$$|f_{k\lambda}(t', x_1'\ldots x_n')-f_{k\lambda}(t, x_1\ldots x_n)| < \varepsilon$$

ist.

Nimmt man statt ε die Grösse $\frac{\varepsilon}{Q}$ (§. 3) und bezeichnet nunmehr σ die zu dieser Grösse gehörige Zahl, so wird nach §. 3, wenn sämmtliche

$$|\delta x_1^0|, |\delta x_2^0| \ldots |\delta x_n^0|$$

kleiner als

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma e^{-nM\delta} < \sigma$$

sind, für jede natürliche Zahl m

$$|\Delta^m| < \varepsilon$$

für je zwei beliebige untere Indices und

$$|y_k^m - x_k^m| < \sigma.$$

Wegen des letzteren Umstandes sind dann in (1) überdies die absoluten Beträge der Differenzen

$$|f_{k\lambda\mu}(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda\mu}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})| < \frac{\varepsilon}{Q}$$

und

$$|f_{\lambda\mu}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1})| < \frac{\varepsilon}{Q},$$

so dass man erhält

$$|\Delta_k'^m| < \frac{\varepsilon}{Q}[n^2 e^{2nM\delta} + nMM' + n^2 M(2e^{nM\delta} + \varepsilon)Q]|t - t_0| + M\left|\int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_\lambda'^{m-1}| dt\right|.$$

Beschränkt man sich, was statthaft ist, auf Grössen ε, die unter einer festen Grenze, z. B. 1 liegen, und bezeichnet

$$\frac{ne^{2nM\delta} + MM' + nM(2e^{nM\delta} + 1)Q}{Q}$$

mit M'', so erhält obige Ungleichung die Gestalt

$$|\Delta_k'^m| < M\left|\int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_\lambda'^{m-1}| dt\right| + nM''\varepsilon|t - t_0|.$$

Hieraus ergibt sich, da $M\partial < nM''$ ist,

$$|\Delta_k'^m| < \varepsilon|t-t_0|(e^{nM''}-1) < e^{nM''}\partial\varepsilon < \varepsilon Q', \tag{2}$$

wenn

$$\partial e^{nM''} = Q'$$

gesetzt wird. Also:

Zu jeder beliebigen positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{Q}$ ergibt die Stetigkeit der Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

ihrer ersten und zweiten Derivirten in der Umgebung (ρ, r) von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$, eine zweite positive Zahl σ, so dass für alle natürlichen Zahlen m die Differenzen

$$\left| \frac{\partial^2 y_k^m}{\partial y_i^0 \partial y_h^0} - \frac{\partial^2 x_k^m}{\partial x_i^0 \partial x_h^0} \right|$$
$$(i, h, k = 1, 2 \ldots n)$$

kleiner werden als die vorgegebene Zahl ε, wenn sämmtliche

$$\partial x_1^0, \partial x_2^0 \ldots \partial x_n^0$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma e^{-nM\delta}$$

sind.

Aus dieser Bemerkung folgt zunächst wegen der Bedeutung von $\frac{\partial^2 x_k^m}{\partial x_i^0 \partial x_h^0}$ als m^{te} Theilsumme:

Bildet man die zweiten Derivirten nach irgend welchen Anfangswerthen aus den Gliedern der Reihe, die ein Integral des Integralsystems darstellt, so sind die Theilsummen der neuen Reihe nach sämmtlichen Anfangswerthen stetig.

Ändert man bloss den Anfangswerth x_i^0 um ∂x_i^0, so dass also

$$\partial x_1^0 = \ldots = \partial x_{i-1}^0 = \partial x_{i+1}^0 = \ldots = \partial x_n^0 = 0$$

ist, so folgt aus obiger Bemerkung, dass zu jeder positiven Zahl ε sich zwei andere $\mu = 0$ und τ finden, derart, dass

$$\left| \frac{\partial^2 y_k^m}{\partial y_i^0 \partial y_h^0} - \frac{\partial^2 x_k^m}{\partial x_i^0 \partial x_h^0} \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

wird für alle $m > 0$, wenn zugleich

$$|\partial x_i^0| < \tau$$

ist. Nun ist

$$\frac{\partial^2 x_k^m}{\partial x_i^0 \partial x_h^0} = \frac{\partial}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_k^m}{\partial x_h^0}$$

die Derivirte nach x_i^0 der m^{ten} Theilsumme der Reihe $\frac{\partial x_k}{\partial x_h^0}$; also wird nach dem Hauptsatze in §. 2 der Differentialquotient dieser Reihe nach x_i^0 durch gliedweise Differentiation erhalten.

Man sieht, wie man diese Betrachtungen fortführen kann und gelangt auf diese Weise zu dem allgemeinen Satze:

Besitzen in dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \ldots x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \ldots x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n)$$

die Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

in einer Umgebung (ρ, r) der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ alle Differentialquotienten nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ bis einschliesslich der m^{ten} und sind sie daselbst (mit Einschluss der Grenzen) eindeutig, endlich und stetig hinsichtlich sämmtlicher Veränderlichen $t, x_1 \ldots x_n$, so besitzen die Reihen, welche durch das Verfahren in §. 1 das Element $E(t | t_0, x_1^0 \ldots x_n^0)$ liefern, nach den Anfangswerthen Differentialquotienten bis einschliesslich der m^{ten} Ordnung, welche durch gliedweise Differentiation erhalten werden. Ist M die obere Grenze für die absoluten Beträge dieser Functionen und ihrer

Derivirten in der Umgebung (ρ, r), so kommt den Integralen diese Eigenschaft gewiss für jedes t in der Umgebung von t_0 zu, die zum Radius die kleinere der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M}$ hat.

§. 5.

1. Es soll jetzt der speciellere bekannte Fall näher untersucht werden, in dem die Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

an der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ sich hinsichtlich sämmtlicher Veränderlichen $t, x_1 \ldots x_n$ regulär verhalten und die Potenzreihen

$$f_k(t, x_1 \ldots x_n) = G_k(t-t_0, x_1-x_1^0, \ldots x_n-x_n^0)$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

in der Umgebung (ρ, r) von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ mit Einschluss der Grenzen absolut convergiren.

Bildet man nach dem in §. 1 angegebenen Verfahren die Näherungswerthe nach der Formel

$$x_k^m = x_k^0 + \int_{t_0}^{t} G_k(t-t_0, x_1^{m-1}-x_1^0, \ldots x_n^{m-1}-x_n^0)\,dt,$$

wo $|t-t_0| < \delta$ zu nehmen ist, wenn δ die kleinere der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M}$ bedeutet, so sind für alle m

$$|x_k^m - x_k^0| < M|t-t_0| < r$$
$$k = 1, 2 \ldots n.$$

Wenn man daher $|t-t_0|$ kleiner als eine später zu präcisirende positive Zahl δ' nimmt, so lässt sich

$$G_k(t-t_0, x_1^m-x_1^0, \ldots x_n^m-x_n^0) = \mathfrak{P}_k^m(t-t_0)$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

für jedes m in eine Potenzreihe verwandeln, die in dieser Umgebung von t_0 convergirt. Man erhält also nach dieser Bezeichnungsweise

$$x_k = x_k^0 + \lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_k^m(t-t_0).$$

Berücksichtigt man nun, dass die Reihen

$$G_k(t-t_0, x_1-x_1^0, \ldots x_n-x_n^0)$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

sammt allen ihren Ableitungen in der Umgebung (ρ, r) von $t_0, x_1^0, \ldots x_n^0$ convergiren und darin endlich bleiben, so zeigt eine kurze Überlegung,[1] dass für jede natürliche Zahl λ

$$\frac{d^\lambda x_k}{dt^\lambda} = \lim_{m=\infty} \frac{d^\lambda x_k^m}{dt^\lambda}$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

ist für alle t in der Umgebung von t_0 und für t_0. Daher ist

$$\left(\frac{d^\lambda x_k}{dt^\lambda}\right)_{t_0} = \lim_{m=\infty} \left(\frac{d^\lambda x_k^m}{dt^\lambda}\right)_{t_0}.$$

Setzt man

$$\mathfrak{P}_k^m(t-t_0) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_k^m (t-t_0)^\lambda,$$

so ist daher

$$\lim_{m=\infty} a_\lambda^m = \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{d^\lambda x_k}{dt^\lambda}\right)_{t_0} = a_\lambda,$$

wenn der links stehende Ausdruck mit a_λ bezeichnet wird. Um nun zu zeigen, dass die Potenzreihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda (t-t_0)^\lambda = \mathfrak{P}_k(t-t_0)$$

[1] Man ersieht dies sowohl aus der Reihe (§. 1) für x_k, als auch aus folgender leicht (nach §. 2) beweisbaren Bemerkung: Besitzen die $\varphi_m(x)$ $(m = 1, 2 \ldots)$ für alle x des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ eine Grenze $\varphi(x)$ und die Ableitungen $\varphi_m'(x)$ $(m = 1, 2 \ldots)$, sind ferner diese stetig und lassen sich, für jedes x des Intervalls, zu jeder positiven Zahl ε zwei zugehörige positive Zahlen μ und δ so bestimmen, dass

$$|\varphi_m'(x+h) - \varphi_m'(x)| < \varepsilon \quad \text{für } m > \mu, \ |h| < \delta$$

wird, so ist immer

$$\varphi'(x) = \lim_{m=\infty} \varphi_m'(x).$$

Diese Voraussetzungen treffen aber hier zu.

convergirt, betrachte man das andere System von Differentialgleichungen

$$\frac{dX_k}{dt} = H_k(t-t_0, X_1-x_1^0, \ldots X_n-x_n^0)$$
$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

mit den unbekannten Functionen

$$X_1, X_2 \ldots X_n,$$

wo H_k aus dem früheren G_k erhalten wird, indem für die Coëfficienten in G_k ihre absoluten Beträge gesetzt werden. Dieses System erfüllt die in §. 1 gestellten Bedingungen in der Nachbarschaft

$$0 \leqq t-t_0 < \rho, \; 0 \leqq X_1-x_1^0 \leqq r, \ldots 0 \leqq X_n-x_n^0 \leqq r$$

der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$, und man kann daher nach dem dort angegebenen Verfahren ein Integralsystem

$$X_1, X_2 \ldots X_n$$

herstellen, dessen Glieder in t_0 bezüglich die Werthe

$$x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$$

annehmen. Die m^{ten} Näherungswerthe sind dann durch die Formel

$$X_k^m - x_k^0 = \int_{t_0}^{t} H_k(t-t_0, X_1^{m-1}-x_1^0, \ldots X_n^{m-1}-x_n^0)\,dt$$
$$= Q_k^m(t-t_0) = \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda^m (t-t_0)^\lambda$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

gegeben und die Potenzreihe convergirt für alle $0 \leqq t-t_0 < \delta'$, wo δ' die kleinere der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M'}$ ist, wenn M' die obere Grenze der $H_1, H_2 \ldots H_n$ in der Umgebung (ρ, r) bedeutet.

Aus der Entstehung der

$$H_1, H_2 \ldots H_n$$

aus den

$$G_1, G_2 \ldots G_n$$

und der Bildungsweise der Näherungswerthe geht nun hervor, dass für jede natürliche Zahl m

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda^m (t-t_0)^\lambda \right| \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_\lambda^m (t-t_0)^\lambda| \leqq \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda^m |t-t_0|^\lambda$$

und

$$|a_\lambda^m| \leqq A_\lambda^m$$

ist. Nun ist

$$X_k = x_k^0 + \lim_{m=\infty} Q_k^m (t-t_0)$$

und daher ist

$$|X_k - x_k^0 - Q_k^m (t-t_0)| < \varepsilon,$$

wo ε eine beliebig angenommene positive Zahl bedeutet, für alle m die über einer zu ε gehörigen positiven Grenze μ liegen und alle t des Intervalls $0 \leqq t-t_0 < \delta'$ ist. Denn $X_k - x_k^0 - Q_m(t-t_0)$ ist der Rest nach dem m^{ten} Gliede der in diesem Intervalle bezüglich t gleichmässig convergenten, $X_k - x_k^0$ darstellenden Reihe (§. 1).

Nimmt man daher eine bestimmte positive Zahl $\delta'' < \delta'$ und bezeichnet den Werth des X_k für $t-t_0 = \delta''$ mit $X_k(\delta'')$, so ist

$$X_k(\delta'') - x_k^0 - \varepsilon < Q_k^m(\delta'') < X_k(\delta'') - x_k^0 + \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen $m > \mu$. Es besteht also eine positive Zahl g so, dass

$$Q_k^m(\delta'') = \Sigma A_\lambda^m \delta''^\lambda < g$$

für alle $m > \mu$. Daher ist für alle natürlichen Zahlen λ:

$$A_\lambda^m \delta''^\lambda < g,$$

für alle $m > \mu$ und somit

$$|a_\lambda^m (t-t_0)^\lambda| \leqq A_\lambda^m |t-t_0|^\lambda \leqq g \frac{|t-t_0|^\lambda}{\delta''^\lambda}$$

für alle $m > \mu$, wenn zugleich $|t-t_0| < \delta'' < \delta'$ ist.

Bezeichnet man in $\mathfrak{P}_k^m(t-t_0)$ die νte Theilsumme der Glieder mit $S_\nu^m(t-t_0)$ und den zugehörigen Rest mit $\mathfrak{R}_\nu^m(t-t_0)$, so lehrt obige Ungleichung, dass zu jeder vorgegebenen positiven Zahl σ eine zweite τ besteht, so dass

$$|\mathfrak{R}_\nu^m(t-t_0)| \leqq g \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{|t-t_0|^{\nu+\lambda}}{\delta''^{\nu+\lambda}} < \sigma$$

für alle $m > \mu$ wird, wenn zugleich $\nu > \tau$ und $|t-t_0| < \delta'' < \delta'$ ist. Also ist auch

$$|\lim_{m=\infty} \mathfrak{R}_\nu^m(t-t_0)| \leqq \sigma$$

für alle $|t-t_0| < \delta'' < \delta'$, wenn $\nu > \tau$.

Sonach ergibt sich aus $x_k - x_k^0 = \lim_{m=\infty} \mathfrak{P}_k^m(t-t_0)$, wenn ε eine beliebige positive Zahl bedeutet und man $\sigma < \varepsilon$ wählt:

$$|x_k - x_k^0 - \lim_{m=\infty} S_\nu^m(t-t_0)| < \varepsilon$$

für alle $|t-t_0| < \delta'' < \delta'$, wenn $\nu > \tau$ ist, oder

$$|x_k - x_k^0 - S_\nu(t-t_0)| < \varepsilon; \qquad |t-t_0| < \delta' \leqq \delta, \qquad \nu > \tau,$$

wo $S_\nu(t-t_0)$ die νte Theilsumme von $\mathfrak{P}_k(t-t_0)$ bedeutet. Also ist

$$x_k - x_k^0 = \lim S_\nu(t-t_0) = \mathfrak{P}_k(t-t_0); \qquad |t-t_0| < \delta' \leqq \delta.$$

§. 6.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich auch die Abhängigkeit der Integrale von ihren Anfangswerthen untersuchen unter der Annahme, dass die Functionen $f_1, f_2 \dots f_n$ nach ganzen positiven Potenzen von $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0 \dots x_n - x_n^0$ sich entwickeln lassen, während eine solche Entwickelung nach $t-t_0$ nicht gefordert wird. Der Einfachheit halber mögen bei diesen Untersuchungen für die t eine Nachbarschaft von t_0, in der $t_0 \leqq t \leqq T$ ist, vorausgesetzt werden. Es wird dabei zweckmässig sein, diese Voraussetzungen über die $f_1, f_2 \dots f_n$ deutlicher zum Ausdrucke zu bringen, weshalb statt $f_k(t, x_1 \dots x_n)$:

$$G_k(t, x_1 - x_1^0, \dots x_n - x_n^0) = \Sigma a_{k, \lambda_1 \dots \lambda_n}(x_1 - x_1^0)^{\lambda_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\lambda_n} \quad (1)$$
$$k = 1, 2 \dots n$$

geschrieben werde, wo also die Coëfficienten a Functionen von t sind. Zu diesem Systeme von Functionen werde ein zweites

$$H_k(t, X_1 - x_1^0, \ldots X_n - x_n^0) = \Sigma |a_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n}| (X_1 - x_1^0)^{\lambda_1} \ldots (X_n - x_n^0)^{\lambda_n}$$

$$= \Sigma A_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n} (X_1 - x_1^0)^{\lambda_1} \ldots (X_n - x_n^0)^{\lambda_n} \qquad (2)$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

construirt, dessen einzelne Functionen in dem Bereiche

$$t_0 \leqq t \leqq T, \; 0 \leqq X_1 - x_1^0 \leqq r \ldots 0 \leqq X_n - x_n^0 \leqq r$$

der Veränderlichen als eindeutig und stetig vorausgesetzt werden. In diesem Bereiche (mit Einschluss der Grenzen) haben dann diese Functionen eine endliche obere Grenze M', und es sind sonach auch die Functionen (1) in dem Bereiche

$$t_0 \leqq t \leqq T, \; |x_1 - x_1^0| \leqq r, \ldots |x_n - x_n^0| \leqq r$$

eindeutig und stetig wie ihre absoluten Beträge und besitzen daselbst eine endliche obere Grenze $M \leqq M'$. (Umgekehrt folgt aus der Annahme eines endlichen M' die Stetigkeit der Functionen $H_1, H_2 \ldots H_n$; $G_1, G_2 \ldots G_n$ nach sämmtlichen Veränderlichen in den erwähnten Bereichen.) Da nunmehr die Functionen (1) nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ und die Functionen (2) nach den $X_1, X_2 \ldots X_n$ in ihrem Bereiche endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzen, so folgt aus dem früheren Satze, dass jedes der beiden Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = G_1(t, x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = G_2(t, x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = G_n(t, x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0)$$

und

$$\frac{dX_1}{dt} = H_1(t, X_1 - x_1^0, \ldots X_n - x_n^0)$$
$$\frac{dX_2}{dt} = H_2(t, X_1 - x_1^0, \ldots X_n - x_n^0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dX_n}{dt} = H_n(t, X_1 - x_1^0, \ldots X_n - x_n^0)$$

ein und nur ein Integralsystem zulässt, dessen Elemente für $t_0 \leqq t < \delta$, wo δ kleiner als T und $\frac{r}{M'} \leqq \frac{r}{M}$ ist, definirt sind, in t_0 der Reihe nach die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen und alle partiellen Ableitungen endlicher Ordnung nach diesen Anfangswerthen besitzen. Es erhebt sich nun die Frage, ob bei einer Änderung dieser Anfangswerthe die Integrale sich nicht in Potenzreihen nach diesen Änderungen entwickeln lassen.

Um diese zu lösen ändere man die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ bezüglich in

$$y_1^0 = x_1^0 + \delta x_1^0,\ y_2^0 = x_2^0 + \delta x_2^0 \ldots y_n^0 = x_n^0 + \delta x_n^0,$$

wo aber die $\delta x_1^0, \delta x_2^0 \ldots \delta x_n^0$ so klein genommen werden, dass die Stelle

$$Y_1^0 = x_1^0 + |\delta x_1^0|,\ Y_2^0 = x_2^0 + |\delta x_2^0| \ldots Y_n^0 = x_n^0 + |\delta x_n^0|$$

in den angegebenen Bereich der Functionen (2) fällt. Das Verfahren der successiven Integrationen ergibt dann für das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy_k}{dt} = G_k(t, y_1 - x_1^0, \ldots y_n - x_n^0) \qquad (k = 1, 2 \ldots n) \qquad (3)$$

ein und nur ein Integralsystem $y_1, y_2 \ldots y_n$, dessen Glieder der Reihe nach in t_0 die Anfangswerthe $y_1^0, y_2^0 \ldots y_n^0$ und ebenso für das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dY_k}{dt} = H_k(t, Y_1 - x_1^0, \ldots Y_n - x_n^0) \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ein und nur ein Integralsystem $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$, dessen Glieder in t_0 bezüglich die Anfangswerthe $Y_1^0, Y_2^0 \ldots Y_n^0$ annehmen. Ist r' eine positive Zahl kleiner als jede unter den positiven Grössen

$$r - |\delta x_1^0|,\ r - |\delta x_2^0| \ldots r - |\delta x_n^0|,$$

so ergibt das Integrationsverfahren für den m^{ten} Näherungswerth Y_k^m von Y_k $(k = 1, 2 \ldots n)$ den Ausdruck

$$Y_k^m = Y_k^0 + \int_{t_0}^{t} H_k(t, Y_1^{m-1} - x_1^0, \ldots Y_n^{m-1} - x_n^0)\, dt$$
$$k = 1, 2 \ldots n,$$

wenn $0 \leqq t - t_0 < \delta'$ genommen wird, wo δ' die kleinere der beiden Zahlen T und $\frac{r'}{M'}$ bedeutet. Für jede natürliche Zahl m ist dann

$$\begin{aligned} Y_k^m - x_k^0 &= |\delta x_k^0| + \int_{t_0}^{t} H_k(t, Y_1^{m-1} - x_1^0, \ldots Y_n^{m-1} - x_n^0)\, dt \\ &\leqq |\delta x_k^0| + M'(t - t_0) < |\delta x_k^0| + M'\delta' \\ &< r \qquad\qquad (k = 1, 2 \ldots n). \end{aligned}$$

Geht man von $m = 1$ aus, so ergibt sich aus dieser Bemerkung mittelst bekannter Sätze Cauchy's über die Darstellung einer unendlichen Summe reeller Potenzreihen durch eine einzige Potenzreihe, dass für alle natürlichen Zahlen

$$(Y_k^m - x_k^0) \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

sich für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \delta'$ durch Potenzreihen

$$Q_k^m(t, \Delta x_1^0, \ldots \Delta x_n^0) = \Sigma A^m_{k, \lambda_1 \ldots \lambda_n} (\Delta x_1^0)^{\lambda_1} \ldots (\Delta x_n^0)^{\lambda_n}$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

darstellen, die nach ganzen positiven Potenzen der $\Delta x_1^0, \Delta x_2^0 \ldots \Delta x_n^0$, der absoluten Beträge von $\delta x_1^0, \delta x_2^0 \ldots \delta x_n^0$ fortschreiten. Da diese Reihen aus lauter positiven Gliedern bestehen und für alle m

$$Y_k^m - x_k^0 = Q_k^m(t, \Delta x_1^0, \ldots \Delta x_n^0) < r$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

für alle $t_0 \leqq t < t_0+\delta'$ ist, so convergiren auch für alle t dieses Intervalls und alle $\Delta x_1^0, \Delta x_2^0 \ldots \Delta x_n^0$ kleiner als $r-r'$ die Reihen gleichmässig. Denn dieselben convergiren für $\Delta x_1^0 = \Delta x_2^0 = \ldots$ $\ldots = \Delta x_n^0 = r-r'$, und daher ist

$$A^m_{k, i_1 \ldots i_n} < \frac{r}{(r-r')^{i_1+\cdots+i_n}},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt und zugleich auch, dass die gleich vielten Reste der Reihen, von einem bestimmten ab, für alle m unter derselben angenommenen positiven Zahl bleiben.

Bezeichnet man analog die m^{ten}, durch das Verfahren der successiven Integrationen erhaltenen Näherungswerthe der Integrale

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

des Systems von Differentialgleichungen (3) bezüglich mit

$$y_1^m, y_2^m \ldots y_n^m,$$

so ist

$$y_k^m = y_k^0 + \int_{t_0}^{t} G_k(t, y_1^{m-1} - x_1^0, \ldots y_n^{m-1} - x_n^0)\, dt$$

$$k = 1, 2 \ldots n.$$

Für $m = 1$ ergibt sich unmittelbar aus dem Vergleiche von

$$y_k^1 - x_k^0 = \delta x_k^0 + \int_{t_0}^{t} G_k(t, \delta x_1^0, \delta x_2^0 \ldots \delta x_n^0)\, dt$$

$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

mit

$$Y_k^1 - x_k^0 = \Delta x_k^0 + \int_{t_0}^{t} H_k(t, \Delta x_1^0, \Delta x_2^0 \ldots \Delta x_n^0)\, dt$$

$$(k = 1, 2 \ldots n),$$

da

$$|G_k(t, \delta x_1^0, \delta x_2^0 \ldots \delta x_n^0)| \leqq H_k(t, \Delta x_1^0, \Delta x_2^0 \ldots \Delta x_n^0)$$

$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, dass

$$|y_k^1 - x_k^0| \leqq Y_k^1 - x_k^0 \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ist. Indem man diese Überlegungen schrittweise fortsetzt, gelangt man zu dem Resultate, dass für jede natürliche Zahl m

$$|y_k^m - x_k^0| \leqq Y_k^m - x_k^0 \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

für alle t des Intervalls $t_0 \leqq t < t_0 + \delta'$. Nach den bereits erwähnten Sätzen Cauchy's lassen sich daher für alle diese t die

$$y_1^m - x_1^0,\ y_2^m - x_2^0, \ldots y_n^m - x_n^0$$

in nach ganzen positiven Potenzen der $\delta x_1^0, \delta x_2^0 \ldots \delta x_n^0$ fortschreitende Potenzreihen entwickeln für alle $\delta x_1^0, \delta x_2^0 \ldots \delta x_n^0$, die dem absoluten Betrage nach kleiner als $r - r'$ sind. Wird

$$y_k^m - x_k^0 = \mathfrak{P}_k^m(\delta x_1^0, \ldots \delta x_n^0) = \Sigma\, a_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n}^m (\delta x_1^0)^{\lambda_1} \ldots (\delta x_n^0)^{\lambda_n}$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

gesetzt, so ist ferner für alle m

$$|a_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n}^m| < A_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n}^m$$

für die t des Intervalls $t_0 \leqq t < t_0 + \delta'$, und es sind daher ebenso wie die Reihen Q_k^m auch die Reihen $\mathfrak{P}_k^m$ in diesem Intervalle der t gleichmässig convergent, und die Reste aller dieser Reihen bleiben daselbst unabhängig von m, von einem bestimmten ab, absolut unter einer beliebig angenommenen positiven Zahl.

Nun ist stets

$$a_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n}^m = \frac{1}{\lambda_1! \ldots \lambda_n!} \left(\frac{d^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n} y_k^m}{d(\delta x_1^0)^{\lambda_1} \ldots d(\delta x_n^0)^{\lambda_n}} \right)_0,$$

wo die Klammer anzeigt, dass in dem Differentialquotienten

$$\delta x_1^0 = \delta x_2^0 = \ldots = \delta x_n^0 = 0$$

zu setzen ist. Aber anderseits ist, wie man leicht erkennt, für jedes endliche μ

$$\lim_{m=\infty} \frac{d^\mu y_k^m}{d(\delta x_1^0)^{\lambda_1} \ldots d(\delta x_n^0)^{\lambda_n}} = \frac{d^\mu y_k}{d(\delta x_1^0)^{\lambda_1} \ldots d(\delta x_n^0)^{\lambda_n}} \quad k = 1, 2 \ldots n$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mu$$

und daher besteht eine Grenze

$$\lim_{m=\infty} a_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n}^m = b_{k,\lambda_1 \ldots \lambda_n}.$$

Es zeigt sich nun, dass die Potenzreihen

$$\Sigma b_{k,\lambda_1\ldots\lambda_n}(\delta x_1^0)^{\lambda_1}\ldots(\delta x_n^0)^{\lambda_n} = \mathfrak{P}_k(\delta x_1^0,\ldots\delta x_n^0)$$
$$k = 1, 2\ldots n$$

die Ausdrücke

$$y_k - x_k^0 - \delta x_k^0 \qquad (k = 1, 2\ldots n)$$

für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \delta'$ darstellen.

Es ist nämlich in

$$y_k = \lim_{m=\infty} y_k^m \qquad k = 1, 2\ldots n$$

y_k^m die m^{te} Theilsumme der Reihe

$$y_k = y_k^0 + (y_k^1 - y_k^0) + (y_k^2 - y_k^1) + \ldots \qquad (k = 1, 2\ldots n)$$

und daher ist

$$y_k - y_k^m \qquad (k = 1, 2\ldots n)$$

der Rest der betreffenden Reihe, die nach §. 1 für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \delta'$ gleichmässig convergirt. Sonach gehört zu jeder beliebigen positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$ für alle t dieses Intervalls eine positive Zahl μ von der Art, dass

$$|y_k - y_k^m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad k = 1, 2\ldots n$$

wird, wenn m die Zahl μ überschreitet.

Bezeichnet man mit s_ν^m die ν^{te} Theilsumme der Reihe $\mathfrak{P}_k^m(\delta x_1^0\ldots\delta x_n^0)$ und mit r_ν^m den zugehörigen Rest, so ist

$$y_k - x_k^0 - (y_k^m - x_k^0) = y_k - x_k^0 - s_\nu^m - r_\nu^m$$

und daher

$$|y_k - x_k^0 - s_\nu^m| \leqq |y_k - y_k^m| + |r_\nu^m|.$$

Nun wird, wie früher bemerkt wurde, $|r_\nu^m|$ unabhängig von m für alle t des Intervalls $t_0 \leqq t < t + \delta'$, kleiner als eine beliebig angenommene positive Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$, wenn ν über einer gewissen Grenze τ liegt, und auch der erste Summand wird.

wie eben sich ergab, für alle t dieses Intervalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, wenn $m > \mu$ genommen wird. Also ist

$$|y_k - x_k^0 - s_\nu^m| < \varepsilon \text{ für } m > \mu \text{ und } \nu > \tau$$

und daher

$$|y_k - x_k^0 - \lim_{m=\infty} s_\nu^m| \leqq \varepsilon \text{ für } \nu > \tau.$$

Es ist aber

$$\lim_{m=\infty} s_\nu^m = s_\nu$$

die Theilsumme der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_k(\delta x_1^0, \ldots \delta x_n^0)$$

und daher folgt aus

$$|y_k - x_k^0 - s_\nu| \leqq \varepsilon \text{ für } \nu > \tau,$$

dass diese Potenzreihe convergirt und dass

$$y_k = x_k^0 + \mathfrak{P}_k(\delta x_1^0, \ldots \delta x_n^0) \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \delta'$ und $|\delta x_1^0|, |\delta x_2^0| \ldots |\delta x_n^0| < r - r'$.

Man hat somit den Satz:

Erfüllen in dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \ldots x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1 \ldots x_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n)$$

die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ an der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0$ die im §. 1 angegebenen Bedingungen und lassen sie sich an der Stelle $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ und für eine Umgebung derselben nach ganzen positiven Potenzen von $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0 \ldots x_n - x_n^0$ entwickeln, so sind auch die Glieder des Integralsystems, die in t_0 bezüglich die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen, an der Stelle $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ analytische Functionen.

Sind die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ in $t_0, x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ analytisch, so gilt das Gleiche auch für diese Integrale, wie man leicht erkennt.

Anmerkung. Es könnte vielleicht bei dem obigen Satze die Beziehung auf die Reihen (2) aus den absoluten Beträgen der Glieder überflüssig erscheinen und die Stetigkeit dieser Reihen nach t als eine Folge der für die ursprünglichen Reihen (1) angenommenen Stetigkeit aufgefasst werden. Dass diese Ansicht irrig wäre, mag an dem folgenden Beispiele illustrirt werden, das von Pringsheim,[1] offenbar anknüpfend an die bekannten Beispiele über die unendlich verzögerte Convergenz, zu dem Zwecke gebildet wurde, um zu zeigen, dass eine Potenzreihe von x, deren Coëfficienten stetige Functionen von y sind, noch nicht selbst stetige Function des y zu sein braucht.

Bilden die m_ν $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen, welche von $m_0 = 0$ mit ν monoton, und zwar so ins Unendliche wachsen, dass

$$\lim \frac{m_\nu}{m_{\nu+1}} = 0,$$

so sind die Functionen

$$f_\nu(y) = \frac{m_{\nu+1} y^2}{1 + m_{\nu+1} y^2} - \frac{m_\nu y^2}{1 + m_\nu y^2}$$

$$= \frac{(m_{\nu+1} - m_\nu) y^2}{m_{\nu+1} m_\nu y^4 + (m_{\nu+1} + m_\nu) y^2 + 1}$$

$$\nu = 0, 1, 2 \ldots$$

für jedes endliche ν stetig nach y im Intervalle $-\infty \leqq y \leqq \infty$.

Die Reihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(y) x^{2\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{m_\nu}{m_{\nu+1}}\right) y^2}{y^4 + \left(\frac{1}{m_{\nu+1}} + \frac{1}{m_\nu}\right) y^2 + \frac{1}{m_{\nu+1} m_\nu}} \frac{x^{2\nu}}{m_\nu}$$

[1] »Über zwei Abel'sche Sätze« (Berichte der k. bayr. Akad. der Wiss., Bd. XXVII, 1897).

convergirt dann für jedes reelle y und jedes endliche x; sie ist für jedes endliche x eine stetige Function aller y, deren absoluter Betrag grösser als 0 ist. Für jedes $x^2 < 1$ und alle endlichen y ist sie zwar, da die $f_\nu(y)$ für alle y kleiner als 1 sind und also die Reihe dann hinsichtlich der y gleichmässig convergirt, stetig nach y und daher auch an der Stelle $y = 0$, aber nicht mehr für $x^2 \gtreqless 1$. Denn es ist für jedes x:

$$S(x, 0) = 0,$$

jedoch

$$S(\pm 1, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{m_{\nu+1} y^2}{m_{\nu+1} y^2 + 1} - \frac{m_\nu y^2}{m_\nu y^2 + 1} \right]$$
$$= 1 \quad \text{für } |y| > 0.$$

Da nun sämmtliche f_ν positiv sind und die Reihe für x beständig convergirt, so ist für alle endlichen positiven x und alle endlichen y

$$S(1+x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu,$$

wo die a_ν positive Grössen sind. Die Reihe

$$S_1(x, y) = S(1-x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu x^\nu$$

wird also für $0 < x < 2$ und alle y stetig, hingegen die Reihe aus den absoluten Beträgen der Glieder

$$S_2(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu |x|^\nu = S(1 + |x|, y)$$

für jeden Werth des x an der Stelle $y = 0$ unstetig nach y sein. Es lässt sich also kein ρ finden, derart, dass für die x des Intervalls $0 < x < \rho$ die Reihe hinsichtlich y stetig wäre.

Der Grund für diese Erscheinung liegt aber keineswegs in dem Umstande, dass

$$S_1(0, y) = a_0 = S(1, y)$$

an der Stelle $y = 0$ unstetig wird. Denn die Reihe

$$S'(x, y) = -x + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu-1}(y) x^{2\nu}$$

$$= -x + x^2 S(x, y)$$

ist zwar auch für $x = 1$ an der Stelle $y = 0$ stetig, zeigt aber sonst ganz dasselbe Verhalten wie $S(x, y)$. Bildet man wieder

$$S(1+x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu x^\nu,$$

für $x > 0$, so ist $a'_0 = 0$ und die übrigen a'_ν sind positiv. Die Reihe

$$S'_1(x, y) = S(1-x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a'_\nu x^\nu$$

ist also stetig für alle $0 \leq x < 2$, hingegen die Reihe aus den absoluten Beträgen ihrer Glieder

$$S'_2(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu |x|^\nu = S'(1+|x|, y)$$

ist nur für $x = 0$ an der Stelle $y = 0$ stetig und sonst für keinen Werth des x. Es lässt sich also auch hier für die x keine Umgebung der Stelle $x = 0$ finden, in der die Reihe $S_2(x, y)$ für $y = 0$ stetig bezüglich y wäre. Daher haben auch in keiner noch so kleinen Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ die $S'_2(x, y)$ eine endliche Zahl zur oberen Grenze.

§. 6.

1. Es sollen nun in dem Systeme von Differentialgleichungen die Functionen (§. 1)

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

auch einen Parameter μ enthalten, sowohl in $t_0, x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0, \mu_0$, als auch in der Umgebung (ρ, r, r') der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0, \mu_0$ vom Radius ρ nach t; r nach $x_1, x_2 \ldots x_n$; und r' nach μ

sammt ihren ersten Differentialquotienten nach $x_1, x_2 \ldots x_n, \mu$ (mit Einschluss der Grenzen) eindeutig und stetig sein. Ist M die obere Grenze für die absoluten Beträge der Functionen und dieser ihrer Derivirten, so bezeichne wieder δ die kleinere unter den Zahlen ρ und $\frac{r}{M}$.

Bei der Bildung der Näherungswerthe für die Ausgangsstelle $t_0, x_1^0, \ldots x_n^0, \mu_0$ ist dann immer $|t-t_0| < \delta$ zu nehmen. Aus

$$x_k^m - x_k^0 = \int_{t_0}^{t} f_k(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}, \mu_0)\,dt$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

folgt aber

$$\left|\frac{\partial x_k^n}{\partial \mu_0}\right| \leqq M|t-t_0| + M\left|\int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} \left|\frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial \mu_0}\right| dt\right|$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

für $m > 1$. Für $m = 1$ ergibt sich

$$\left|\frac{\partial x_k^1}{\partial \mu_0}\right| \leqq M|t-t_0|$$

und daher vermöge obiger Ungleichung, wenn

$$e^{nM\delta} - 1 = M'$$

gesetzt wird,

$$\left|\frac{\partial x_k^m}{\partial \mu_0}\right| < M' \tag{1}$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

für alle natürlichen Zahlen m.

Geht man von $t_0, x_1^0, \ldots x_n^0, \mu_0$ zu einer anderen Stelle

$$t_0, x_1^0, \ldots x_n^0, \quad \mu = \mu_0 + \delta\mu_0$$

der Umgebung (ρ, r, r') über, so kann man nach dem Verfahren in §. 1 für das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1 \ldots y_n, \mu)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1 \ldots y_n, \mu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1 \ldots y_n, \mu)$$

das Integralsystem $y_1, y_2 \ldots y_n$ herstellen, dessen Glieder in t_0 bezüglich die Werthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen. Der m^{te} Näherungswerth ist dann durch

$$y_k^m - x_k^0 = \int_{t_0}^{t} f_k(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}, \mu)\, dt$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

gegeben.

Aus der Differenz

$$y_k^m - x_k^m = \int_{t_0}^{t} [f_k(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}, \mu) - f_k(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}, \mu_0]\, dt$$

folgt dann zunächst

$$|y_k^m - x_k^m| \leqq M |\delta\mu_0| |t - t_0| + M \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |y_\lambda^{m-1} - x_\lambda^{m-1}|\, dt \right|,$$

woraus durch successive Berechnung sich für alle natürlichen Zahlen m

$$|y_k^m - x_k^m| < |\delta\mu_0| (e^{nM|t-t_0|} - 1) < |\delta\mu_0| (e^{nM\tau} - 1)$$
$$< e^{nM\tau} |\delta\mu_0|$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

ergibt. Nimmt man daher, wenn σ eine beliebige positive Zahl bedeutet,

$$|\delta\mu_0| \leqq \sigma e^{-nM\tau},$$

so wird für alle natürlichen Zahlen m

$$|y_k^m - x_k^m| < \sigma \qquad (k = 1, 2 \ldots n). \tag{2}$$

Nun stellt

$$\frac{\partial y_k^m}{\partial \mu}$$

die m^{te} Theilsumme der Reihe aus den Differentialquotienten nach μ der Glieder dar, welche die Reihe (§. 1) für y_k bilden. Dasselbe bedeutet

$$\frac{\partial x_k^m}{\partial \mu_0}$$

für $\mu = \mu_0$.

Aus der Differenz

$$\frac{\partial y_k^m}{\partial \mu} - \frac{\partial x_k^m}{\partial \mu} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f_k(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}, \mu)}{\partial \mu} - \frac{\partial f_k(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}, \mu_0)}{\partial \mu_0} \right] dt$$

folgt

$$\frac{\partial y_k^m}{\partial \mu} - \frac{\partial x_k^m}{\partial \mu_0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f_k(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}, \mu)}{\partial \mu} - \frac{\partial f_k(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}, \mu_0)}{\partial \mu_0} \right.$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial f_k(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}, \mu)}{\partial y_\lambda^{m-1}} \frac{\partial y_\lambda^{m-1}}{\partial \mu} -$$

$$\left. - \frac{\partial f_k(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}, \mu_0)}{\partial x_\lambda^{m-1}} \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial \mu_0} \right] dt.$$

Setzt man der Kürze halber

$$\frac{\partial y_k^m}{\partial \mu} - \frac{\partial x_k^m}{\partial \mu_0} = \Delta_k^m,$$

so erhält obige Ungleichung die Gestalt

$$\Delta_k^m = \int_{t_0}^{t} \{ f_{k,\mu}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}) - f_{k,\mu}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}, \mu_0)$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{n} [(f_{k,\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}, \mu) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1}, \ldots x_n^{m-1}, \mu_0)) \frac{\partial x_\lambda^{m-1}}{\partial \mu_0}$$

$$+ f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1}, \ldots y_n^{m-1}, \mu) \Delta_\lambda^{m-1}] \} dt, \qquad (3)$$

wo $f_{k\mu}$ die Derivirte von f_k nach μ und $f_{k\lambda}$ die nach x_λ bedeutet. Wegen der gleichmässigen Stetigkeit dieser Derivirten in dem hier in Betracht kommenden Bereiche gehört zu jeder positiven Zahl ε eine zweite σ, so dass für je zwei Stellen

$$t, x_1, \ldots x_n, \mu$$
$$t', x'_1, \ldots x'_n, \mu'$$

des Bereiches, welche den Ungleichungen

$$|t'-t| < \sigma, \ |x'_1-x_1| < \sigma \ldots |x'_n-x_n| \sigma, \ |\mu'-\mu| < \sigma$$

genügen, der absolute Betrag der Differenz der Functionswerthe, welche jede dieser Derivirten an den beiden Stellen besitzt, unter ε liegt. Nimmt man daher

$$|\delta\mu_0| \leqq e^{-nM\tau}\sigma < \sigma,$$

so wird für alle natürlichen Zahlen m nach (2)

$$|y_k^m - x_k^m| < \sigma \qquad k = 1, 2 \ldots n.$$

Es sind dann in obiger Gleichung (3)

$$|f_{k\mu}(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}, \mu) - f_{k\mu}(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}, \mu_0)| < \varepsilon$$
$$|f_{k\lambda}(t, y_1^{m-1} \ldots y_n^{m-1}, \mu) - f_{k\lambda}(t, x_1^{m-1} \ldots x_n^{m-1}, \mu_1)| < \varepsilon,$$

wodurch man mit Rücksicht auf (1)

$$|\Delta_k^m| < \varepsilon(1+M'n)|t-t_0| + M \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{\lambda=1}^{n} |\Delta_\lambda^{m-1}| dt \right|$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

für alle natürlichen Zahlen m erhält. Durch stufenweise Anwendung dieser Formel, von $m = 1$ beginnend, gelangt man dann zu dem Resultate, dass für alle natürlichen Zahlen m

$$|\Delta_k^m| < \varepsilon Q \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

ist, wo Q eine bestimmte positive angebbare Zahl bedeutet.

Ist demnach ε eine beliebige positive Zahl, so gehört zur positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{Q}$ eine andere σ, so dass für alle natürlichen Zahlen m, wenn

$$|\delta\mu_0| \leqq \sigma e^{-nM\tau}$$

genommen wird,

$$|\Delta_k^m| < \varepsilon \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

ist.

Hieraus folgt aber nach dem Hauptsatze in §. 2:

Sind in dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$

die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ sammt ihren ersten Derivirten nach $t, x_1 \ldots x_n, \mu$ an und in der Umgebung der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0, \mu_0$ stetig, so sind die Integrale $x_1, x_2 \ldots x_n$, die dem Parameterwerthe μ_0 zugehören und in t_0 bezüglich die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen, nach μ_0 differentiirbar, und zwar wird dieser Differentialquotient erhalten, indem man die das Integral darstellende Reihe (§. 1) gliedweise differentiirt.

Anmerkung. Aus der obigen Ungleichung folgt:

Zu jeder positiven Zahl ε besteht eine zweite σ', so dass für alle natürlichen Zahlen m

$$|\Delta_k^m| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

wird, wenn $|\delta\mu_0| < \sigma'$ genommen wird. Somit besteht auch zu jeder positiven Zahl ε eine zweite σ', so dass

$$\left| \frac{\partial y_k}{\partial \mu} - \frac{\partial x_k}{\partial \mu_0} \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

wird für alle

$$|\delta\mu_0| < \sigma'.$$

Also ist auch

$$\frac{\partial x_k}{\partial \mu_0} \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

an der Stelle μ_0 stetig nach μ.

2. Die Voraussetzungen in (1) können dahin erweitert werden, dass in dieselben auch die zweiten Differentialquotienten der $f_1, f_2 \ldots f_n$ nach den $x_1, x_2 \ldots x_n$ und μ aufgenommen werden. Die Untersuchung dieses Falles kann auf dem in (1) vorgezeichneten Wege durchgeführt werden, noch einfacher aber in folgender Weise.

Da die Glieder

$$x_1, x_2 \ldots x_n$$

des Integralsystems, die dem Parameterwerthe μ_0 entsprechen und in t_0 bezüglich die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen, nach (1) differentiirbar sind, so genügen, wenn man

$$\frac{\partial x_k}{\partial \mu_0} = u_k \qquad k = 1, 2 \ldots n)$$

setzt, diese Differentialquotienten dem Systeme linearer Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} u_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} u_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial f_2}{\partial \mu} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du_n}{dt} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} u_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial f_n}{\partial \mu} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

nachdem man in den $f_1, f_2 \ldots f_n$ $\mu = \mu_0$ gesetzt und für die $x_1, x_2 \ldots x_n$ das obige Integralsystem substituirt hat. Die Differentialquotienten dieser Integrale nach μ sind dann jenes Lösungssystem dieses Systems linearer Differentialgleichungen, dessen sämmtliche Glieder in t_0 verschwinden.

Aus dem Satze in (1) und der Anmerkung folgt zunächst unmittelbar, dass in Folge der gemachten Voraussetzungen auch diese Integrale $u_1, u_2 \ldots u_n$ erste, also die $x_1, x_2 \ldots x_n$ zweite Derivirte nach μ besitzen, und es bleibt nur noch zu entscheiden, ob diese letzteren durch gliedweises Differentiiren der für $x_1, x_2 \ldots x_n$ gefundenen Reihen erhalten werden können. Dies lässt sich aber mittelst des Hauptsatzes in §. 2 zeigen.

Ändert man in

$$u_k = \frac{\partial x_k}{\partial \mu_0} = \lim_{m=\infty} \frac{\partial x_k^m}{\partial \mu_0} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

wieder, wie in (1), μ_0 in $\mu = \mu_0 + \delta\mu_0$, so ergibt das obige System linearer Differentialgleichungen (1) ein Integralsystem

$$v_1, v_2 \ldots v_n$$

von der Beschaffenheit, dass

$$v_k = \frac{\partial y_k}{\partial \mu} = \lim_{m=\infty} \frac{\partial y_k^m}{\partial \mu} \qquad (k = 1, 2 \ldots n),$$

und zwar geht v_k aus u_k hervor, indem man in letzterer statt μ_0 $\mu_0 + \delta\mu_0$ setzt.

Nach dem in (1) bewiesenen Satze existiren aber auch die ersten Differentialquotienten der

$$u_1, u_2 \ldots u_n$$

nach μ_0 und der

$$v_1, v_2 \ldots v_n$$

nach μ; somit ist (nach Fussnote S. 643):

$$\frac{\partial u_k}{\partial \mu_0} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial \mu_0^2} = \lim_{m=\infty} \frac{\partial^2 x_k^m}{\partial \mu_0^2} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

und

$$\frac{\partial v_k}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial \mu^2} = \lim_{m=\infty} \frac{\partial^2 y_k^m}{\partial \mu^2}.$$

Nach der Anmerkung in 1 besteht aber zur beliebigen positiven Zahl ε eine zweite σ' von der Beschaffenheit, dass

$$\left| \frac{\partial v_k}{\partial \mu} - \frac{\partial u_k}{\partial \mu_0} \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, für alle

$$|\delta\mu_0| < \sigma'$$

und alle t des Intervalls.

Es ist also in diesem Intervalle für alle

$$|\delta\mu_0| < \sigma$$

auch

$$\lim_{m=\infty} \left| \frac{\partial^2 x_k^m}{\partial\mu_0^2} - \frac{\partial^2 y_k^m}{\partial\mu^2} \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2 \ldots n).$$

Daher muss zu jedem t des Intervalls eine positive Zahl ν existiren, so dass für alle $|\delta\mu_0| < \sigma'$ auch

$$\left| \frac{\partial^2 y_k^m}{\partial\mu^2} - \frac{\partial^2 x_k^m}{\partial\mu_0^2} \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, wenn zugleich $m > \nu$ genommen wird.

Es ist aber

$$\frac{\partial^2 x_k^m}{\partial\mu_0^2} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

die m^{te} Theilsumme der Derivirten nach μ_0 aus den Gliedern der Reihe, welche $\frac{\partial x_k}{\partial\mu_0}$ an der Stelle t darstellt und

$$\frac{\partial^2 y_k^m}{\partial\mu^2} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ergibt sich daraus durch Änderung von μ_0 in $\mu = \mu_0 + \delta\mu_0$. Also ist der Hauptsatz in §. 2 auf den vorliegenden Fall anwendbar, und man gelangt zu dem Ergebnisse:

Unter den gemachten Voraussetzungen, dass die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ sammt ihren ersten und zweiten Derivirten nach $x_1, x_2 \ldots x_n, \mu$ an der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0, \mu_0$ und in ihrer Umgebung eindeutig und stetig sind, hat das Integralsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$, das dem Parameterwerthe μ_0 entspricht und dessen Glieder in t_0 bezüglich die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen, erste und zweite Derivirte nach μ_0, die durch gliedweise Differentiation der jedes Integral darstellenden Reihe erhalten werden.

Man überblickt aber leicht, wie sich diese Betrachtungen fortsetzen lassen und schliesslich zu dem Satze führen:

Enthalten in dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \dots x_n, \mu)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1 \dots x_n, \mu)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \dots x_n, \mu)$$

die Functionen $f_1, f_2 \dots f_n$ einen Parameter μ, sind sie sammt ihren m ersten Derivirten nach $x_1, x_2 \dots x_n, \mu$ an der Stelle $t_0, x_1^0 \dots x_n^0, \mu_0$ und in ihrer Umgebung eindeutig und stetig, so haben die Glieder des Integralsystems $x_1, x_2 \dots x_n$, die dem Parameterwerthe μ_0 zugehören und in t_0 bezüglich die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0$ besitzen, die ersten m Differentialquotienten nach μ_0, die aus den die Integrale (nach §. 1) darstellenden Reihen durch gliedweises Differentiiren erhalten werden.

Anmerkung. Aus der ganzen Beweisführung erhellt auch, dass man die obige Voraussetzung durch eine weitere ersetzen kann. Es genügt, wenn

1. die Functionen $f_1, f_2 \dots f_n$ sammt ihren ersten Derivirten nach $x_1, x_2 \dots x_n, \mu$ an der Stelle $t_0, x_1^0 \dots x_n^0, \mu_0$ und in der Umgebung (ρ, r, r') endlich und stetig sind, und

2. die $f_1, f_2 \dots f_n$ durch Substitution der erwähnten Integrale $x_1, x_2 \dots x_n$ in Functionen von t und μ übergehen, welche für $|t - t_0| < \delta$ stetige Differentialquotienten bis einschliesslich der m^{ten} Ordnung nach μ besitzen.

Es ist klar, dass, und wie der obige Satz sich für den Fall erweitern lässt, in dem die Functionen $f_1, f_2 \dots f_n$ eine endliche Anzahl Parameter enthalten.

§. 7.

Im engsten Zusammenhange mit den vorangehenden Untersuchungen steht der Fall, den schon Poincaré[1] behandelte, dass die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ an der Stelle $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0, \mu_0$ sich in Potenzreihen mit ganzen positiven Exponenten nach $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0 \ldots x_n - x_n^0, \mu - \mu_0$ für die Umgebung (ρ, r, r') der Stelle $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0, \mu_0$ entwickeln lassen. Es sei also in dieser Umgebung (mit Einschluss der Grenze)

$$f_k(t, x_1 \ldots x_n, \mu) =$$
$$= \Sigma a_{k, \nu_1 \ldots \nu_n, \nu} (x_1 - x_1^0)^{\nu_1} (x_2 - x_2^0)^{\nu_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{\nu_n} (\mu - \mu_0)^{\nu}$$
$$k = 1, 2 \ldots n,$$

wo die Coëfficienten $a_{k, \nu_1 \ldots \nu_n, \nu}$ Functionen von t bedeuten. Bezeichnet

$$A_{k, \nu_1 \ldots \nu_n, \nu} \text{ den abs. B. } |a_{k, \nu_1 \ldots \nu_n, \nu}|,$$

so ergeben sich hinreichende Bedingungen, unter denen auch die Integrale des Systems von Differentialgleichungen nach ganzen positiven Potenzen von $(\mu - \mu_0)$ entwickeln lassen aus den Functionen

$$F_k(t, x_1 \ldots x_n, \mu) =$$
$$= \Sigma A_{k, \nu_1 \ldots \nu_n, \nu} |x_1 - x_1^0|^{\nu_1} |x_2 - x_2^0|^{\nu_2} \ldots |x_n - x_n^0|^{\nu_n} |\mu - \mu_0|^{\nu}$$
$$k = 1, 2 \ldots n.$$

Wird vorausgesetzt, dass diese Functionen in der Umgebung (ρ, r, r') von $t_0, x_1^0 \ldots x_n^0, \mu_0$ mit Einschluss der Grenzen nach $t, x_1 \ldots x_n, \mu$ stetig sind, so haben sie daselbst eine endliche obere Grenze M', und es ist dann

$$A_{k, \nu_1 \ldots \nu_n, \nu} r^{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n} r'^{\nu} < M' \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

für alle $|t - t_0| < \rho$; wie denn auch umgekehrt aus der Annahme einer endlichen oberen Grenze M' die Stetigkeit der Functionen $F_k(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$ nach sämmtlichen Veränderlichen und dem

[1] Les Methodes Nouvelles de la mecanique celeste, t. I.

Parameter μ folgt. Es folgt hieraus aber auch weiters die Stetigkeit der Functionen

$$f_1(t, x_1 \dots x_n, \mu), f_2(t, x_1 \dots x_n, \mu) \dots f_n(t, x_1 \dots x_n, \mu)$$

nach sämmtlichen Veränderlichen $t, x_1 \dots x_n$ und dem Parameter μ. Die absoluten Beträge derselben haben dann ebenfalls in der Umgebung (ρ, r, r') von $t_0, x_1^0 \dots x_1^0, \mu_0$ eine endliche obere Grenze $M \leqq M'$.

Es lässt sich demnach das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1 \dots x_n, \mu) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1 \dots x_n, \mu) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1 \dots x_n, \mu) \end{aligned} \tag{1}$$

für die Umgebung (ρ, r, r') und

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= F_1(t, X_1 \dots X_n, M) \\ \frac{dX_2}{dt} &= F_2(t, X_1 \dots X_n, M) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dX_n}{dt} &= F_n(t, X_1 \dots X_n, M) \end{aligned} \tag{1*}$$

für

$$0 \leqq t - t_0 < \rho;\ 0 \leqq X_1 - x_1^0 \leqq r \dots 0 \leqq X_n - x_n^0 \leqq r;$$
$$0 \leqq M - \mu_0 \leqq r'$$

nach dem Verfahren der successiven Integrationen (§. 1) integriren.

Nimmt man nun bei der Bildung der Näherungswerthe des Systems (1*)

$$0 \leqq t - t_0 < \delta.$$

wo δ die kleinere unter den beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M'}$ bezeichnet, so wird im m^{ten} Näherungswerthe X_k^m von X_k:

$$X_k^m - x_k^0 = \int_{t_0}^{t} F_k(t, X_1^{m-1}, \ldots X_n^{m-1}, \mathrm{M})dt \qquad k = 1, 2 \ldots n)$$
$$0 < X_k^m - x_k^0 < r.$$

Geht man von $m = 1$ aus, so lehrt die Ungleichung

$$A_{k,\nu_1 \ldots \nu_n, \nu} < \frac{M'}{\rho^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} r'^{\nu}},$$

dass für $|t - t_0| < \delta$ die Functionen

$$F_k(t, 0 \ldots 0, \mathrm{M}) \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

nach t sich gliedweise integriren lassen, und es ist daher

$$X_k^1 - x_k^0 = \mathfrak{P}_k^1(\mathrm{M} - \mu_0) \qquad\qquad k = 1, 2 \ldots n$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{n} A_{k,\lambda}^1 (\mathrm{M} - \mu_0)^{\lambda}$$

für alle $0 \leqq t - t_0 < \delta$ und $0 \leqq \mathrm{M} - \mu_0 < r'$.

Da die sämmtlichen Glieder dieser Potenzreihe und der in $F_k(t, X_1 \ldots X_n, \mathrm{M})$ positiv sind, so lässt sich auch

$$F_k(t, X_1^1 \ldots X_n^1, \mathrm{M}) \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

in eine Potenzreihe nach $\mathrm{M} - \mu_0$ verwandeln, in der die Coëfficienten der Potenzen von $\mathrm{M} - \mu_0$ wieder Functionen von t sind. Aus dem Umstande aber, dass für alle $0 \leqq t - t_0 < \delta$ und $0 \leqq \mathrm{M} - \mu_0 < r'$ die $F_k(t, X_1^1 \ldots X_n^1, \mathrm{M})$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ kleiner als M' bleiben, folgt dann wieder, dass diese Potenzreihe sich zwischen t und t_0 gliedweise integriren lässt. Es wird also auch $X_k^2 - x_k^0$ für alle $0 \leqq t - t_0 < \delta$ und $0 \leqq \mathrm{M} - \mu_0 < r'$ sich durch eine Potenzreihe nach $\mathrm{M} - \mu_0$ darstellen lassen.

Man ersieht, so fortfahrend, dass für jede natürliche Zahl m sich $X_k^m - x_k^0$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von $\mathrm{M} - \mu_0$ fortschreitende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_k^m(\mathrm{M}-\mu_0) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{k\lambda}^m(\mathrm{M}-\mu_0)^\lambda$$

für alle $0 \leqq t-t_0 < \delta$ und $0 \leqq \mathrm{M}-\mu_0 < r'$ wird entwickeln lassen.

Bezeichnet man die m^{ten} Näherungswerthe der Integrale

$$x_1, x_2 \ldots x_n$$

des Systems von Differentialgleichungen (1), die in t_0 bezüglich die Anfangswerthe

$$x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$$

annehmen, der Reihe nach mit

$$x_1^m, x_2^m \ldots x_n^m,$$

so ergeben die wiederholt angewandten Cauchy'schen Sätze dass auch

$$x_1^m - x_1^0, x_2^m - x_2^0 \ldots x_n^m - x_n^0$$

sich in Potenzreihen nach $\mu-\mu_0$ für alle $0 \leqq t-t_0 < \delta$ und $|\mu-\mu_0| < r'$ entwickeln lassen. Setzt man

$$x_k^m - x_k^0 = \mathfrak{P}_k^m(\mu-\mu_0) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{k,\lambda}^m(\mu-\mu_0)^\lambda$$

$$k = 1, 2 \ldots n,$$

so ist

$$|a_{k\lambda}^m| \leqq A_{k\lambda}^m < \frac{M'}{r'^\lambda}$$

$$k = 1, 2 \ldots n.$$

Es convergirt daher jede Reihe

$$\mathfrak{P}_k^m(\mu-\mu_0)$$

$$k = 1, 2 \ldots n$$

für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \delta$ innerhalb der Umgebung $|\mu-\mu_0| < r'$ von μ gleichmässig, und für ein gegebenes positives ε bleiben die Reste aller dieser Reihen für jede natürliche Zahl m vom gleich vielten Gliede ab ihrem absoluten Betrage nach unter ε.

Es ist aber

$$a_{k\lambda}^m = \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{d^\lambda x_k^m}{d\mu^\lambda}\right)_{\mu=\mu_0} \qquad (k = 1, 2\ldots n),$$

und da wieder

$$\frac{d^\lambda x_k}{d\mu^\lambda} = \lim_{m=\infty} \frac{d^\lambda x_k^m}{d\mu^\lambda} \qquad (k = 1, 2\ldots n)$$

ist, so besteht für jedes endliche λ

$$\lim_{m=\infty} a_{k\lambda}^m \qquad (k = 1, 2\ldots n),$$

welche Grenze mit $a_{k\lambda}$ bezeichnet werde.

Aus

$$x_k = x_k^0 + (x_k - x_k^0) + \ldots + (x_k^m - x_k^{m-1})\ldots$$

ersieht man, dass

$$x_k - x_k^m \qquad (k = 1, 2\ldots n)$$

der Rest der obigen, für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \delta$ gleichmässig convergenten Reihen nach dem $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliede ist. Sonach gehört zu jeder positiven Zahl $\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \delta$ eine positive Zahl ν, so dass

$$x_k - x_k^m < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } m > \nu$$

$$(k = 1, 2\ldots n).$$

Hieraus ergibt sich wieder in derselben Weise wie S. 652 und 653

$$x_k - x_k^0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{k\lambda}(\mu - \mu_0)^\lambda \qquad (k = 1, 2\ldots n)$$

für alle t des Intervalls $t_0 \leqq t < t_0 + \delta$ und alle $|\mu - \mu_0| < r'$.

Man hat somit den Satz:

Lassen sich in dem Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$

die Functionen

$$f_1(t, x_1 \ldots x_n, \mu),\; f_2(t, x_1 \ldots x_n, \mu) \ldots f_n(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$

für den Bereich

$$0 \leqq t - t_0 < \rho,\; |x_1 - x_1^0| \leqq r \ldots |x_n - x_n^0| \leqq r,\; |\mu_0 - \mu_0| \leqq r'$$

in Potenzreihen

$$f_k(t, x_1 \ldots x_n, \mu) = \Sigma a_{k, \lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_n} (x_1 - x_1^0)^{\lambda_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\lambda_n} (\mu - \mu_0)^{\lambda}$$

entwickeln, so lassen sich auch die Integrale $x_1, x_2 \ldots x_n$, welche in t_0 beziehungsweise die Anfangswerthe $x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0$ annehmen, nach Potenzen mit ganzen positiven Exponenten von $(\mu - \mu_0)$ entwickeln, sobald die Functionen

$$F_k(t, x_1 \ldots x_n, \mu) = \Sigma |a_{k, \lambda, \lambda_1 \ldots \lambda_n}| |x_1 - x_1^0|^{\lambda_1} \ldots |x_n - x_n^0|^{\lambda_n} |\mu - \mu_0|^{\lambda}$$

im genannten Bereiche (mit Einschluss der Grenzen) nach $t, x_1 \ldots x, \mu$ eindeutig und stetig sind. Diese Entwickelung gilt, wenn M die obere Grenze der $F_1, F_2 \ldots F_n$ in dem genannten Bereiche bezeichnet, gewiss für alle

$$|\mu - \mu_0| < r' \text{ und } t_0 \leqq t < t_0 + \delta,$$

wo δ die kleinere der beiden Grössen ρ und $\frac{r}{M}$ ist.

§. 8.

Sind die Bedingungen des voranstehenden Satzes erfüllt und besitzen überdies die Potenzreihen $f_k(t, x_1 \ldots x_n)$ kein absolutes Glied, so lässt sich durch Wahl des μ stets erreichen,

dass $\delta = \rho$ genommen werden darf.[1] Nach dem vorangehenden §. 7 genügt es, diese Behauptung für das zweite System (1*) und den Anfangswerth $x = 0$ zu erweisen. Der Beweis mag zunächst für den Fall einer Gleichung durchgeführt werden.

Es sei also

$$\frac{dx}{dt} = \Sigma A_{ik} x^i \mu^k = F(x, t, \mu)$$

diese Gleichung. Haben dann r, r', ρ, M dieselbe Bedeutung wie früher, so folgt aus

$$A_{ik} \leqq \frac{M}{r^i r'^k},$$

dass

$$\int_{t_0}^{t} F(x, t, \mu)\, dt \leqq M \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{\mu}{r'}\right)} - 1\right] dt$$

$$(t_0 < t < t_0 + \rho)$$

ist. Daher

$$\int_{t_0}^{t} F(x, t, \mu)\, dt \leqq M \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\frac{\mu}{r'}}{1 - \frac{\mu}{r'}} + \frac{\frac{x}{r}}{\left(1 - \frac{\mu}{r'}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)}\right] dt$$

$$\leqq M \frac{\frac{\mu}{r'}}{1 - \frac{\mu}{r'}} (t - t_0) + \frac{M}{r\left(1 - \frac{\mu}{r'}\right)} \int_{t_0}^{t} \frac{x}{1 - \frac{x}{r}}\, dt.$$

Ist also

$$x < \varepsilon < r,$$

so ist

$$\int_{t_0}^{t} F(x, t, \mu)\, dt \leqq M \frac{\frac{\mu}{r'}}{1 - \frac{\mu}{r'}} (t - t_0) + \frac{M}{r\left(1 - \frac{\mu}{r'}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)} \int_{t_0}^{t} x\, dt.$$

[1] Siehe Poincaré, l. c. und Picard, l. c. t. III. Es genügt aber nicht die Voraussetzungen bloss auf die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ zu beschränken, wie die Anmerkung zu §. 5 lehrt.

Wendet man nun das Näherungsverfahren an, so erhält man, wenn man den Anfangswerth des x der Einfachheit halber gleich 0 annimmt,

$$x_1 = \int_{t_0}^{t} F(0, t, \mu)\, dt \leqq M \frac{\frac{\mu}{r'}}{1 - \frac{\mu}{r'}} (t - t_0)$$

$$\leqq M \frac{\frac{\mu}{r'}}{1 - \frac{\mu}{r'}} \rho$$

und wählt man daher μ so, dass

$$M\rho \frac{\frac{\mu}{r'}}{1 - \frac{\mu}{r'}} < \sigma$$

wird, wo σ eine hinreichend kleine Zahl, kleiner als ε, bedeutet, so ist

$$x_1 < \sigma \frac{t - t_0}{\rho} \tag{1}$$

und

$$M \frac{\frac{\mu}{r'}}{1 - \frac{\mu}{r'}} < \frac{\sigma}{\rho}; \quad \frac{1}{1 - \frac{\mu}{r'}} < \frac{\sigma + M\rho}{M\rho}.$$

Es ist also dann

$$\int_{t_0}^{t} F(x, t, \mu)\, dt < \sigma \frac{t - t_0}{\rho} + \frac{\sigma + M\rho}{(r - \varepsilon)\rho} \int_{t_0}^{t} x\, dt.$$

Da nun $x_1 < \sigma < \varepsilon$ ist, so ist nach dieser Formel wegen (1)

$$x_2 = \int_{t_0}^{t} F(x_1, t, \mu)\, dt < \sigma \frac{t - t_0}{\rho} + \frac{\sigma}{2!} \frac{\sigma + M\rho}{r - \varepsilon} \left(\frac{t - t_0}{\rho}\right)^2$$

$$< \sigma + \frac{\sigma}{2!} \frac{\sigma + M\rho}{r - \varepsilon}.$$

Wählt man daher σ so klein, dass auch $x_2 < \varepsilon$ wird, so ist

$$x_3 < \sigma \frac{t-t_0}{\rho} + \frac{\sigma}{2!} \frac{\sigma + M\rho}{r-\varepsilon} \left(\frac{t-t_0}{\rho}\right)^2 + \frac{\sigma}{3!} \left(\frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{t-t_0}{\rho}\right)^3$$

$$< \sigma + \frac{\sigma}{2!} \frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon} + \frac{\sigma}{3!} \left(\frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon}\right)^3.$$

Indem man in dieser Weise fortfährt, findet man

$$x_m < \sigma \frac{t-t_0}{\rho} + \frac{\sigma}{2!} \frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon} \left(\frac{t-t_0}{\rho}\right)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\sigma}{m!} \left(\frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon}\right)^{m-1} \left(\frac{t-t_0}{\rho}\right)^m$$

$$< \frac{r-\varepsilon}{\sigma+M\rho} \sigma \left[\frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon} \frac{t-t_0}{\rho} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon} \frac{t-t_0}{\rho}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon} \frac{t-t_0}{\rho}\right)^m \right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\sigma+M\rho}{r-\varepsilon} = A,$$

so ist also

$$x_m < \frac{\sigma}{A} \left| A \frac{t-t_0}{\rho} + \frac{1}{2!} \left(A \frac{t-t_0}{\rho}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left(A \frac{t-t_0}{\rho}\right)^m \right|$$

$$< \frac{\sigma}{A} \left| A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^m}{m!} \right|$$

$$< \frac{\sigma}{A} (e^A - 1) < \frac{\sigma e^A}{A}.$$

Da nun

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\sigma}{A} e^A = \lim_{\sigma=0} \sigma \frac{r-\varepsilon}{M\rho} e^{\frac{M\rho}{r-\varepsilon}} = 0$$

ist, so wird, wenn σ unter einer Grenze τ bleibt, auch

$$\frac{\sigma}{A} e^A < \varepsilon$$

sein. Es werden dann auch die sämmtlichen Näherungswerthe

$$x_1, x_2 \ldots x_m \ldots$$

kleiner als ε bleiben, und daher wird

$$x = \lim_{m=\infty} x_m \leqq \varepsilon < r$$

sein.

Hat man ein System (1*) von n Differentialgleichungen (§. 6):

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1 \ldots x_n, \mu)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_2 \ldots x_n, \mu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1 \ldots x_n, \mu),$$

wo also in

$$F_k(t, x_1 \ldots x_n, \mu) = \Sigma a_{k\lambda_1 \ldots \lambda_n, \lambda} x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \mu^{\lambda}$$

die $a_{k, \lambda_1 \ldots \lambda_n, \lambda}$ für alle $t_0 \leqq t < t_0 + \rho$ positiv sind und

$$a_{k, 0 \ldots 0, 0} = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ist, so sind, wenn man der Einfachheit halber

$$x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = 0$$

annimmt — was unbeschadet der Allgemeinheit gestattet ist — die $x_1, x_2 \ldots x_n$ positiv. Nach den Bezeichnungen in §. 6 ist dann

$$F_k(t, x_1 \ldots x_n, \mu) \leqq M \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{r}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_n}{r}\right)\left(1 - \frac{\mu}{r'}\right)} - 1 \right].$$

$$k = 1, 2 \ldots n.$$

Setzt man daher voraus, dass jedes der

$$x_1, x_2 \ldots x_n$$

kleiner als

$$\varepsilon < \frac{r}{n}$$

ist, so ist

$$F_k(t, x_1 \dots x_n, \mu) \leqq M\left[\frac{1}{\left(1-\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{r}\right)\left(1-\frac{\mu}{r'}\right)}-1\right].$$

$$k = 1, 2 \dots n.$$

Daher ist

$$\int_{t_0}^{t} F_k(t, x_1 \dots x_n, \mu)\, dt \leqq M \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{\mu}{r'}}{1-\frac{\mu}{r'}}\, dt$$

$$+\frac{M}{1-\frac{\mu}{r'}} \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{r}}{1-\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{r}}\, dt$$

oder

$$\int_{t_0}^{t} F_k(t, x_1 \dots x_n, \mu)\, dt \leqq M \frac{\frac{\mu}{r'}}{1-\frac{\mu}{r'}}(t-t_0)$$

$$+\frac{M}{(r-n\varepsilon)\left(1-\frac{\mu}{r'}\right)} \int_{t_0}^{t} (x_1+x_2+\dots+x_n)\, dt$$

$$t_0 < t < t_0+\rho \qquad k = 1, 2 \dots n.$$

Von dieser Ungleichung aus ergibt sich der Beweis in derselben Weise wie früher im Falle einer Gleichung. Es ist auch klar, dass und wie die Betrachtungen des vorangehenden und dieses Paragraphen sich auf den Fall mehrerer Parameter ausdehnen lassen.

Einige Versuche mit dem Wehnelt-Interruptor

von

Prof. Dr. **Ernst Lecher.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag

(Mit 5 Textfiguren.)

Der mit einem guten Wehnelt-Unterbrecher erzeugte Funke ähnelt in seinem äusseren Ansehen sehr einem elektrischen Lichtbogen; es liegt daher die Idee nahe, den Einfluss eines starken magnetischen Feldes auf diese Erscheinung zu untersuchen. Der Einfluss eines solchen Feldes auf gewöhnliche Funken ist ja bekannt,[1] hier aber liegen die Bedingungen günstiger, so dass die Wirkung eine überraschend auffallende ist.

Als Stromquelle dienten 30 Accumulatoren, als Inductorium ein grosser Apparat von Max Kohl mit 40 *cm* Schlagweite. Der Condensator war ausgeschaltet.

Alle Versuche ergaben nun eine bestimmte Richtung des Secundärstromes, und zwar entsprach dieselbe einer Unterbrechung des Primärstromes.

Lässt man den Funken zwischen zwei dünnen, in einer Linie liegenden Drahtelektroden (Durchmesser $^1/_2$ bis 1 *mm*) überschlagen, so erglüht die positive Elektrode bis zu einer Ausdehnung von ungefähr 3 *cm* und schmilzt vorne zu einer Metallperle zusammen: Die Ähnlichkeit mit dem Lichtbogen ist so ganz auffallend. Beim Commutiren springt die Erscheinung auf die andere Seite über. Auch Kugelelektroden zeigen ungleiche Erhitzung.

[1] Als letzte der einschlägigen Arbeiten sei die von J. Precht erwähnt. Wied. Ann., 66, S. 695; 1898.

Diese Einseitigkeit der Stromrichtung lässt diesen Funken als ein sehr bequemes und brillantes Demonstrationsmittel für die Bewegung eines stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Felde erscheinen.

Es ist aber dabei der Einfluss des aufsteigenden warmen Luftstromes und die richtende Kraft des Funkens selbst nicht zu übersehen. Zwischen zwei horizontal gegenüberstehenden Spitzen, welche durch konisches Zufeilen eines etwa 8 *mm* dicken Messingdrahtes hergestellt sind, ist der Funke fast gerade horizontal; nur in der Mitte bemerkt man eine ganz leichte Wölbung als Folge des durch die Wärme aufsteigenden

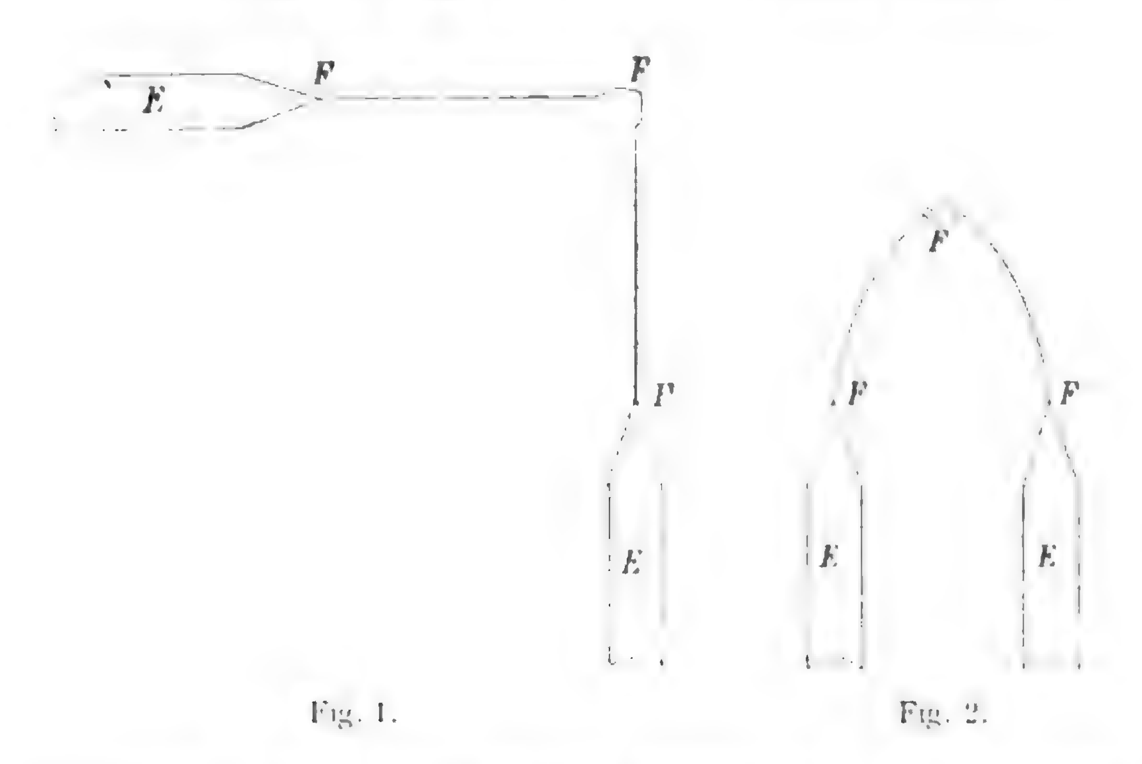


Fig. 1. Fig. 2.

Luftstromes. Viel kräftiger wird natürlich die Wirkung, wenn der Funke vertical ist. Fig. 1 gibt eine merkwürdige Funkenform, die Bahn ist vollständig rechteckig gebogen. *EE* stellt die Elektroden dar. *FFF* charakterisirt die Funkenbahn.

Von den vielen abenteuerlichen Formen dieses Funkens sei noch eine Art von gothischem Spitzbogen (Fig. 2) erwähnt, den zwei parallel nach aufwärts gerichtete Spitzen gewähren. Nach abwärts kann man die Spitzen nicht stellen, weil der warme Luftstrom den Funken immer von den Spitzen weg hinaufhebt.

Nimmt man zwei mässig gegen einander geneigte Drähte, die in einer Verticalebene liegen (*a* und *b* in Fig. 3), so setzt

der Funke unten, wo die Bahn am kürzesten ist, ein und läuft, durch den warmen Luftstrom getrieben, hinauf. Ist dieser Luftstrom sehr stark, so wird der Funke oben ausgeblasen, setzt unten wieder ein u. s. w. Diese Erscheinung ist ja ihrem Wesen nach, besonders mit Tesla-Entladungen, schon beobachtet worden, doch ist das Phänomen hier viel intensiver. Manchmal bleibt der Lichtbogen oben stehen, dann kann man denselben ausblasen, worauf er unten wieder einsetzt u. s. w.

Reizend aber wird diese Entladung, wenn man senkrecht zur Draht- und Funkenebene ein starkes magnetisches Feld M

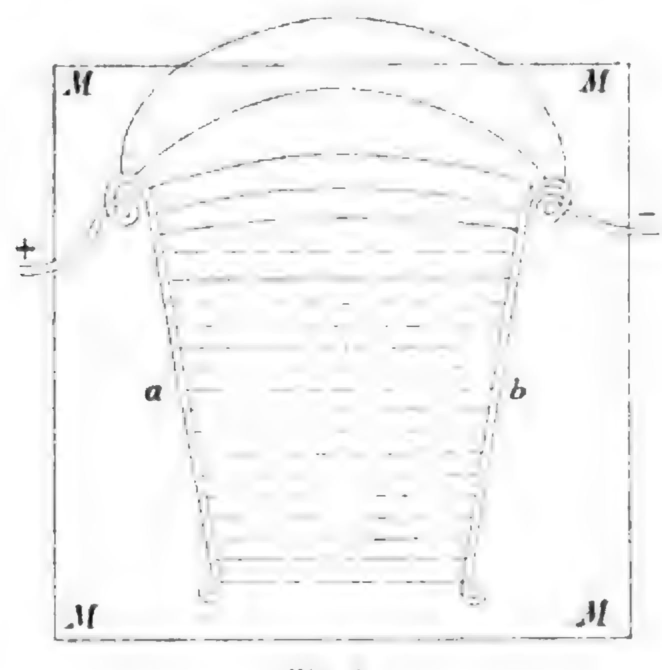


Fig. 3.

bringt. Ich nahm zur Felderzeugung einen sehr grossen Elektromagneten, der von einer Dynamomaschine gespeist wurde. Wird nun durch die Kraftlinien des Feldes die Funkenbahn hinaufgedrückt, so folgt auf das Einsetzen unten ein so rasches Hinaufwandern, Abreissen und neuerliches Einsetzen, dass das Ganze eine breite flammende Fläche darstellt. Durch allmäliges Schwächen des Funkens (Einschalten von Widerstand in die Primärleitung) löst sich diese Flamme in zarte, nach aufwärts wogende Streifen auf, wie dies Fig. 3 anzudeuten versucht. Kehrt man mit dem magnetisirenden Strome die Kraftlinienrichtung um, so bleibt der Funke unten. Bei schwächeren Funken ist die Ausbiegung nach unten sehr auffallend, weniger aber bei stärkeren Entladungen, weil hier der aufsteigende Luftstrom schon zu kräftig entgegenwirkt.

Folgender Versuch bildet eine Art Analogie zum Barlow-schen Rädchen.

Die eine Leitung des hochgespannten Secundärstromes geht isolirt durch eine Bohrung[1] des Magnet-Polschuhes hindurch und endet vorne im Centrum in einer kleinen Scheibe (Durchmesser 2·5 *cm*, Dicke 2 *mm*) mit abgerundeten Kanten,[2] *a* in Fig. 4; in derselben Ebene ist als zweite Elektrode ein concentrisch gestellter Drahtring *b* angebracht. Ist zunächst der Magnet nicht erregt, so geht der Funke von *a* vertical aufwärts nach dem Ringe *b*. Treten aber vom Polschuhe *M* zahlreiche Kraftlinien aus, so rotirt der Funke, wobei er sich

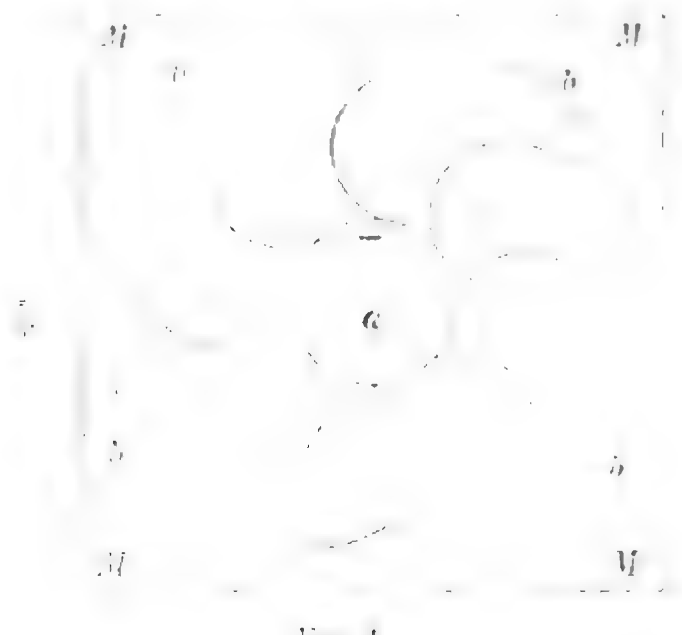


Fig. 4.

krümmt; der mittlere Theil eilt voraus, während die Ansatzstellen nachschleifen. Fig. 4 sucht die Erscheinung zu charakterisiren; man sieht nicht einzelne Funken, sondern es ist das ganze Rad mit den rotirenden, gekrümmten Lichtstreifen scheinbar auf einmal bedeckt. Es gleicht das Phänomen in seinem äusseren Anblicke den bekannten Feuerwerksrädern. Commutiren des magnetisirenden Stromes ändert den Sinn der Drehung, ebenso Commutiren des Primärstromes; doch scheint der Versuch besser zu gehen, wenn der äussere Ring den positiven

[1] Wie solche für die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes ja meistens vorhanden sind.

[2] Scharfe Kanten lassen die Erscheinung weniger deutlich werden.

Pol bildet. In der Zeichnung Fig. 4 ist die Funkenbahn nur charakterisirt, in Wirklichkeit stehen die leuchtenden Funkenstreifen viel näher.

Bemerkenswerth erscheint mir hier das Vorauseilen der Funkenmitte, ein Beweis, dass die richtende Kraft oder die Steifigkeit des Funkens in der Mitte am schwächsten ist, da ja sowohl die magnetische Feldstärke, als auch die Stromstärke längs der ganzen Funkenbahn überall gleich gross sind.

Nimmt man den äusseren Ring viel grösser und stellt ihn excentrisch, so sieht die Erscheinung wie in Fig. 5 aus, der Funke sucht zu rotiren, reisst, wenn er zu lang geworden ist,

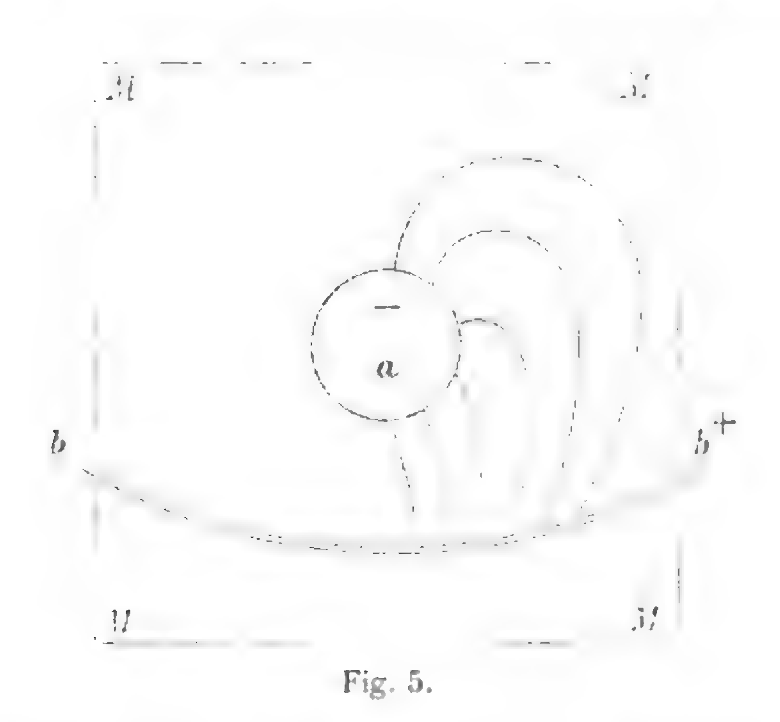


Fig. 5.

u. s. w. Auch hier sieht man alle Streifen gleichzeitig, und es haben alle gleichzeitig die entsprechende Bewegungsrichtung.

Das nun zu schildernde Experiment bildet eine Art Analogie zu Faraday's Pendel.

Man stelle auf den einen Magnetpol einen Eisencylinder (Durchmesser 3—6 *cm*, Höhe 10—20 *cm*). Über diesen Cylinder stürze man zur Isolirung ein verkehrtes, möglichst knapp anschliessendes Batterieglas oder eine oben rund zugeschmolzene Glasröhre. Um dieses Glas ist in $^1/_3$ seiner Höhe ein Drahtring als Elektrode gewickelt; die andere Elektrode ist eine horizontale Metallscheibe, die genau centrisch so oben auf dem Glascylinder liegt, dass der Metallrand allseitig etwas über das

Glas hervorragt. Die Funkenbahn ist dann vertical längs der Glasfläche. Sowie der Magnet erregt wird, beschreibt der Funke eine Cylinderfläche, im richtigen Sinne senkrecht zu dem Kraftfelde um Glascylinder und Magneten rotirend. Diesen Versuch machte bekanntlich im luftleeren Raume De la Rive; doch ist meine Anordnung viel bequemer und hat vor Allem den Vortheil, dass man sie sehr leicht variiren kann. Statt um den Glascylinder einen Draht zu wickeln, nähere man der Cylinderfläche eine kleine Kugel als Elektrode; die zweite Elektrode ist eine grössere Kugel, die man, an einer Glasstange befestigt, in der Hand hält. Dann biegt sich bei passender Lage der beiden Kugeln der Funkenfaden spiralig um den Magneten herum, wie dies ja für biegsame Leiter schon lange bekannt ist. Nur ist die Funkenbahn biegsamer als der weichste Kupferdraht und dreht sich den verschiedenen Stellungen der oberen Kugel entsprechend wie eine Schlange; oft schlüpft der Funke in seinem Bestreben des Aufwickelns oben über den Rand des Glases, um sich immer wieder von Neuem aufzuwinden.

Man kann auch den Polschuh selbst zu der einen Elektrode machen und erhält dann die bizarrsten Formen. Es habe der Elektromagnet z. B. eine grosse Durchbohrung von etwa 6 *cm* Durchmesser, und zwar sei die Achse dieser Durchbohrung den Kraftlinien parallel. In dieser Achse liege dann die zweite Elektrode, eine kleine Kugel. Solange diese Elektrode ausserhalb des Polschuhes ist, springt der Funke in spiraliger Windung gegen die Kante des Hohlraumes, da ja eine Componente der schief gegen die Kraftlinien liegenden Funkenbahn die Ablenkung verursacht. Schiebt man nun die Kugel langsam gegen den Magneten, so wird die Wirkung zuerst stärker, um dann, wenn die Kugel im Hohlraume ist, zu verschwinden; im Inneren sind ja keine Kraftlinien.

Stellt man zwei parallele Drahtelektroden einer Magnetfläche so gegenüber, dass der Funke von der einen Drahtspitze in den Magnet hineinspringt, um dann in einem zweiten Funken aus der Magnetfläche in die zweite Drahtspitze zurückzuschlagen, so beschreiben beide Funken Kegelmäntel mit ihren Spitzen an dem Drahtende, doch erfolgen die zwei Rotationen in entgegengesetztem Sinne.

Alle die geschilderten Versuche ergeben

1. eine starke Beweglichkeit des Wehnelt-Funkens im magnetischen Felde;

2. eine bestimmte Stromrichtung des Funkens, und zwar eine solche, wie sie einer Unterbrechung des Primärstromes entspricht. Der Wehnelt'sche Unterbrecher wirkt somit bei Unterbrechung, nicht aber beim Schliessen des Primärstromes.

Die Experimente sind — wie schon erwähnt — glänzende Vorlesungsversuche.

XVII. SITZUNG VOM 22. JUNI 1899.

Frau Prof. Weidel dankt für die anlässlich des Hinscheidens ihres Gemahles seitens der kaiserlichen Akademie bewiesene Theilnahme.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. F. Lippich in Prag übersendet eine Abhandlung von phil. cand. Josef Grünwald unter dem Titel: »Über die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art und die zu ihnen perspectiven ebenen Curven«.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien, betitelt: »Zur Kenntniss der Überwallungsharze« (IV. Abhandlung), von Max Bamberger und Anton Landsiedl.

Das c. M. Herr k. u. k. Oberst A. v. Obermayer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium des allgem. österr. Apotheker-Vereines in Wien von Dr. Rudolf Jahoda, betitelt: »Über eine Methode zur Bestimmung der Gasdichte mittelst angeblasener Pfeifen.«

Der prov. Secretär legt eine Abhandlung von Prof. Dr. L. Weinek in Prag vor, betitelt: »Über die beim Prager photographischen Mondatlas angewandte Vergrösserungsmethode«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirk in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (18. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer überreicht die dritte Folge der Bemerkungen zu den Originalexemplaren der von Bigot, Macquart und Robineau-Desvoidy beschriebenen *Muscaria schizometopa* aus der Sammlung des Herrn G. H. Verrall.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht als Geschenk für die akademische Bibliothek das II. Heft des XI. Bandes der »Arbeiten aus den zoologischen Instituten der Universität Wien und der zoologischen Station in Triest.«

Herr Franz Baron Nopcsa jun. legt eine Abhandlung: »Dinosaurierreste aus Siebenbürgen« vor, in welcher ein ziemlich vollständig erhaltener Schädel eines obercretaceischen Dinosauriers aus der Gruppe der Hadrosauriden beschrieben wird.

Herr Hugo Zukal, a. ö. Professor an der Hochschule für Bodencultur unterbreitet seinen, im Einvernehmen mit der Getreiderostcommission der Akademie ausgearbeiteten 1. Bericht über die Getreiderostverhältnisse in Österreich-Ungarn.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Klinckert W.: Licht, sein Ursprung und seine Function als Wärme, Elektricität, Magnetismus, Schwere und Gravitation. Leipzig; 8°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XVIII. SITZUNG VOM 6. JULI 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. I, Heft I—IV (Jänner—April 1899). — Abth. II.a, Heft III (März 1899). — Monatshefte für Chemie, Bd. 20, Heft V (Mai 1899).

Die Direction des botanischen Gartens und Museums der k. k. Universität in Wien macht Mittheilung, dass die Weihrauchbäume, welche aus den Ergebnissen der südarabischen Expedition dem Wiener botanischen Garten übergeben wurden, sich derzeit in vollstem Entwicklungszustande befinden, und dass die Direction die Besichtigung dieser Bäume zugleich mit einer kleinen Ausstellung von Objecten, die sich auf den Weihrauch beziehen, am 10. und 11. d. M. weiteren Kreisen zugänglich zu machen gedenkt.

Das w. M. Herr Hofrath Boltzmann übersendet eine Abhandlung: »Magnetisirungszahlen anorganischer Verbindungen«, von Dr. Stefan Meyer.

Der prov. Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt folgende eingelaufene Abhandlungen vor:

I. »Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes«, von Herrn Prof. Dr. O. Tumlirz in Czernowitz.

II. »A Basis for a Reliable System of Weather Forecasting«, von Herrn B. G. Jenkins in London.

III. »Über die unterschwefelige (hydroschwefelige) Säure«, Arbeit aus dem II. chemischen Universitätslaboratorium in Wien, von Arnold Nabl.

IV. »Über eine Bakteriose von *Dactylis glomerata* L.«, von Prof. Emerich Rathay in Klosterneuburg.

Herr Hofrath Prof. V. v. Lang legt ferner eine Arbeit vor über longitudinale Töne von Kautschukfäden.

Weiters überreicht derselbe eine Abhandlung von Herrn Regierungsrath Dr. J. M. Eder und Prof. Ed. Valenta, betitelt: »Das Spectrum des Broms«.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss der Condensationsproducte von *o*-Aldehydosäuren mit Ketonen«, von Hugo Ludwig Fulda.

Herr Prof. Dr. W. Láska übersendet einen Bericht über die Einrichtung der seismographischen Station der kais. Akademie der Wissenschaften in Lemberg und die bisher an derselben angestellten Beobachtungen.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Herr Eduard Mazelle, übersendet einen Bericht über die in Triest am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Monate Juni 1899 beobachteten Erdbebenstörungen.

Herr Karl Czerny in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Beitrag zu „Eine neue wissenschaftliche Idee auf dem Gebiete der Kraft und ihrer Gewinnung für praktische Zwecke"«.

Von Herrn Dr. Ernst Murmann in Wien ist gleichfalls ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Verfahren zur Bekämpfung der *Phylloxera vastatrix*« eingelangt.

Das w. M. Herr k. und k. Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine Abhandlung des Herrn Friedrich Siebenrock, Custos am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, betitelt: »Über den Kehlkopf und die Luftröhre der Schildkröten«.

Das w. M. Herr Prof. Friedrich Brauer spricht über die systematische Stellung der Muscarien-Gattung *Aulacocephala* Gerst.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Jean Billitzer: »Über die Affinitätsgrössen gesättigter Fettsäuren«.

Ferner überreicht derselbe eine im I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien ausgeführte Arbeit von Prof. R. Wegscheider: »Über die Veresterung der Camphersäure«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine »Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1845 II (de Vico)«, von Dr. Arthur Scheller, Assistent der Sternwarte in Hamburg.

Über longitudinale Töne von Kautschukfäden

von

Viktor v. Lang,

w. M. k. Akad.

Ich habe vor nicht langer Zeit Bestimmungen der Transversaltöne von Kautschukfäden mitgetheilt.[1] Es waren damals an diesen Fäden auch schon einzelne Bestimmungen ihrer longitudinalen Töne vorgenommen worden, dieselben erwiesen sich aber zu unvollständig, um veröffentlicht zu werden. Ich habe daher diese Versuche später noch fortgesetzt und bin, obwohl Anfangs die Sache Schwierigkeiten hatte, doch zu ziemlich übereinstimmenden Resultaten gelangt.

Als Material für diese Versuche dienten hauptsächlich Stücke von einem ähnlichen Faden mit quadratischem Querschnitte (1·5 *mm* Seitenlänge), wie er schon zur Bestimmung der Transversaltöne verwendet worden war. Auch war die Versuchsanordnung dieselbe wie früher, nur dass der Faden durch Streichen mit dem nassen Finger ins Tönen gebracht wurde. Während einer Versuchsreihe wurde wieder der Faden niemals entlastet und dann immer zu grösseren Belastungen fortgeschritten. Übereinstimmende Resultate wurden aber nur erhalten, wenn dem Faden nach jeder Erhöhung der Belastung viele Stunden Zeit zur Ausfadelung gelassen wurde. Je nach der Grösse der Belastung waren so 6–24 Stunden nöthig, damit die Beobachtungen keine wesentlichen Änderungen mehr zeigten.

Es wurde nun jedesmal der transversale Ton (n) und der longitudinale (n_1) am Monochord bestimmt. Die Bestimmung

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 107 (1898), II. a, S. 1041.

des letzteren war freilich bei niederer Spannung sehr schwierig, da dann kaum ein ordentlicher Ton zu hören ist. Auch sonst kann man leicht Täuschungen ausgesetzt sein über die richtige Octave und ob man es nicht mit einem Obertone zu thun hat. Das Verhältniss n_1/n der beiden Töne ist natürlich durch das Verhältniss der am Monochord bestimmten Längen gegeben und wenigstens von Fehlern, welche die Tonbestimmung der Monochordsaite betreffen, frei. Ich gebe nun die beobachteten Werthe dieses Verhältnisses für sechs Stücke des quadratischen Fadens, wie sie für verschiedene Belastungen S ermittelt wurden.

	Fadenlänge in Millimeter						
S	50	56	62	64	68	76	n_1/n Mittel
70 g	1·51	—	—	1·51	1·47	—	1·50
100	—	1·26	1·36	1·48	—	—	1·37
140	1·50	1·46	1·44	1·46	—	1·62	1·50
190	—	2·06	1·75	1·98	—	—	1·93
240	2·87	—	2·84	2·89	2·93	2·83	2·87
340	3·36	—	—	—	—	3·26	3·31
440	3·72	—	—	—	—	3·70	3·71
540	3·69	—	—	—	—	3·89	3·79
640	3·80	—	—	—	—	—	3·80
740	3·91	—	—	—	—	—	3·91

Aus dieser Tabelle geht wohl unzweifelhaft hervor, dass das Verhältniss n_1/n unabhängig von der Länge des Fadens ist, wenigstens innerhalb der Grenzen dieser Untersuchung. Bemerkenswerth ist das Minimum bei 100 g Belastung; es ist dies die Stelle, wo der Transversalton ein relatives Maximum hat, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht, welche die beobachteten Längen (l) und Transversaltöne (n) gleich in Mittelwerthen für eine anfängliche Länge von 100 *mm* gibt.

S	l	n	n'	$n-n'$
0 g	100 *mm*	—	—	—
70	177	75·5	76·6	—1·1
100	232	78·2	77·9	+0·3
140	327	76·5	76·7	—0·2

S	l	n	n'	$n-n'$
190	461	75·4	74·7	+0·7
240	563	75·2	75·1	+0·1
340	651	82·6	82·2	+0·4
440	697	89·3	89·5	—0·2
540	735	96·1	96·0	+0·1
640	764	102·5	102·1	+0·4
740	787	107·8	107·8	+0·0

Die vierte Columne dieser Tabelle gibt die nach der empirischen Formel

$$n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{G}\,\frac{S+41}{l+62}} = 112\cdot43\sqrt{\frac{S+41}{l+62}}$$

gerechneten Werthe der Transversaltöne. Das Gewicht des Fadens (0·194 g für 100 *mm* Länge) war zwar dasselbe wie das des ähnlichen Fadens, der zu den in der früheren Abhandlung angegebenen Beobachtungen gedient hatte, für die Constanten der empirischen Formel mussten aber doch andere Werthe gewählt werden, um die Differenzen $n-n'$ nicht zu sehr anwachsen zu lassen. Der Grund hievon mag darin liegen, dass die beiden Fäden zwar von derselben Quelle, aber zu verschiedenen Zeiten bezogen wurden. Auch war die Temperatur bei beiden Beobachtungsreihen nicht dieselbe.

Was nun den theoretischen Werth des Verhältnisses n_1/n betrifft, so hat man nach der Taylor'schen Formel für n und mit demselben Grade der Annäherung für n_1

$$n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{S}{\rho q}},$$

wo E der Elasticitätscoëfficient, ρ die Dichte und q der Querschnitt des Fadens ist. Hieraus würde

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{\frac{qE}{S}}$$

folgen. Versucht man nun, von der anfänglichen Länge (100 *mm*) ausgehend mit den Zahlen der letzten Tabelle die Grösse qE

zu ermitteln und hiemit aus der letzten Formel das Verhältniss n_1/n zu rechnen, so erhält man eine ganz ungenügende Darstellung der Beobachtungen.

Die Übereinstimmung wird dagegen recht gut, wenn man durch besondere Versuche die Grösse qE aus der Verlängerung (λ) ermittelt, die bei der gerade stattfindenden Belastung (S), ohne Rücksicht auf diese, durch ein kleines Zulagegewicht σ hervorgebracht wird. Setzt man also

$$l+\lambda = l\left(1+\frac{\sigma}{qE}\right), \quad qE = \left(\frac{l}{\lambda}\sigma\right),$$

so wird

$$\frac{n_1}{n} = \sqrt{\frac{l}{\lambda}\cdot\frac{\sigma}{S}}.$$

Zugleich mit den Beobachtungen von l, n, n' wurden daher immer auch solche ausgeführt, welche die Ermittelung von σ und λ betrafen. Hiezu wurde die Belastung G um $1-5\,g$ vermehrt und die bewirkte Verlängerung des Fadens mit dem Kathetometer gemessen. Das Zulagegewicht wurde so klein gewählt, dass nach dessen Entfernung der Faden genau auf die ursprüngliche Länge zurückging. Die so ermittelten Werthe von Eq nehmen nach Vermehrung der Gesammtbelastung Anfangs nicht unbeträchtlich zu, nähern sich aber einer bestimmten Grösse, die in der früher angegebenen Zeit wohl meist erreicht worden sein dürfte.

Da die an den verschiedenen Fäden beobachteten Werthe von λ hinreichend übereinstimmen, gebe ich in der folgenden Tabelle gleich die Mittel der auf die Länge von 100 *mm* und $\sigma = 1\,g$ reducirten Werthe von λ. Die letzte Spalte gibt dann die mit diesen Zahlen nach der letzten Formel berechneten Werthe von n_1/n.

	λ	n_1/n
70 *g*	1·492 *mm*	1·30
100	1·835	1·12
140	1·790	1·14

	λ	n_1/n
190 *g*	0·647 *mm*	1·94
240	0·289	2·85
340	0·161	3·45
440	0·109	3·81
540	0·092	3·35
640	0·076	3·96
740	0·066	4·00

Die Vergleichung der letzten Zahlenreihe mit den früher angegebenen, durch directe Beobachtung ermittelten Werthen des Verhältnisses n_1/n lehrt, dass, von der Belastung 190 *g* angefangen, die Übereinstimmung eine vollständige ist. Für kleinere Belastungen bleiben die gerechneten Werthe allerdings etwas hinter den beobachteten zurück, obwohl sie denselben Gang zeigen. Die Übereinstimmung ist am schlechtesten in der Gegend, wo der Transversalton sein relatives Maximum hat.

Die vollkommene Übereinstimmung bei höheren Belastungen ist jedenfalls nicht uninteressant, besonders da dies auch für andere Kautschukfäden zu gelten scheint, wie einige Versuche an einem Stücke des runden Fadens lehren, welchen ich auch schon in der früheren Mittheilung erwähnte. Ich fand nämlich an dem Stücke, dessen anfängliche Länge 104 *mm* betrug, bei 440 *g* Belastung nach 24 Stunden

$$l = 311\ mm, \quad n_1/n = 1\cdot 67.$$

Die Vermehrung der Belastung um 5 *g* brachte eine Verlängerung von 1·35 *mm* hervor, woraus für das letzte Verhältniss 1·62 folgt.

Nachdem die Belastung auf 640 *g* erhöht worden war, wurde nach 24 Stunden

$$l = 397\ mm, \quad n_1/n = 2\cdot 03.$$

Jetzt bewirkten 5 *g* Zulagegewicht eine Verlängerung von 0·77 *mm*, was den Werth 2·06 gibt.

Die Übereinstimmung ist also auch hier eine vollständige.

Untersuchungen über den Zusammenhang der Schwere unter der Erdoberfläche mit der Temperatur

von

Oberst **Robert v. Sterneck,**

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1899.)

Nach den Resultaten der bisherigen, nur in sehr geringer Anzahl ausgeführten Schwerebestimmungen unter der Erdoberfläche schien ein Zusammenhang der Schwerezunahme und Temperatur zu bestehen.

Es ergab sich nämlich aus den nur in drei Bergwerken ausgeführten Bestimmungen eine Schwerezunahme in

Harton[1]	in 383 *m*	Tiefe	bei 18°8	von 0·52 *mm*
Přibram[2]	» 543	»	» 18·5	» 0·41
Freiberg[3]	» 414	»	» 19·3	» 0·55

ferner in

Přibram	in 1000 *m*	Tiefe	bei 24°9	von 0·88 *mm*
Freiberg	» 534	»	» 23·8	» 0·79

demnach bei gleichen Temperaturen unter der Erde dieselben Schwerezunahmen, unabhängig von der Tiefe unter der Erde.

Bei der geringen Anzahl der Beobachtungen war man nicht im Stande, zu entscheiden, ob dieser Zusammenhang der Temperatur und Schwere thatsächlich bestehe, oder ob er nur dem Zufalle oder Beobachtungsfehlern, Unvollkommenheit der

[1] Phil. Trans., 1856.

[2] Mittheilungen des mil.-geogr. Institutes, Bd. III, 1883.

[3] Ebendaselbst, Bd. VI, 1886.

verwendeten Apparate und Beobachtungsmethoden etc. zuzuschreiben ist.

Der kaiserlichen Akademie in Wien erschien diese Erscheinung wichtig genug, um in ihrer Sitzung am 17. Februar 1898 den Wunsch auszusprechen, dass dieselbe durch Ausführung möglichst exacter Beobachtungen geklärt werde. Es erging an mich die ehrenvolle Einladung, derartige Beobachtungen auszuführen und wurde ein namhafter Betrag zur Bestreitung der Auslagen zur Verfügung gestellt.

Mit grösster Freude bin ich diesem mich sehr ehrenden Rufe gefolgt und habe im Laufe des Jahres 1898 in vier Bergwerken einschlägige Beobachtungen ausgeführt, um die gestellte Aufgabe, so gut ich es vermochte, ihrer Lösung zuzuführen.

Über Ersuchen der kaiserlichen Akademie hat das hohe k. k. Ackerbau-Ministerium in entgegenkommendster Weise die Benützung der zu diesen Untersuchungen ausgewählten vier Bergwerke genehmigt und die ausgiebigste Unterstützung des Unternehmens seitens der k. k. Bergverwaltungen gewährt.

Die nöthigen Apparate, Instrumente und Uhren hat, gleichfalls über Ersuchen der kaiserlichen Akademie, das Commando des k. u. k. militär-geographischen Institutes bereitwilligst zur Verfügung gestellt.

Da bei derartigen Untersuchungen nur aus gleichzeitigen Beobachtungen verlässliche Resultate erzielt werden können, so sind hiezu zwei Beobachter nothwendig. Ich verdanke die Erfüllung dieser unerlässlichen Bedingung der freundlichen Mitwirkung des Herrn k. u. k. Linienschiffs-Lieutenants Jakob Ritter v. Hirtl und nach dessen im September erfolgten Einschiffung jener des Herrn k. u. k. Linienschiffs-Lieutenants Theodor Scheimpflug, welche beide sich bereitwilligst an diesen mühsamen und anstrengenden Arbeiten mit Eifer und Verständniss betheiligten und mich hiedurch zu grossem Danke verpflichtet haben.

Wesentlich verdanke ich das Gelingen des Unternehmens dem überaus freundlichen Entgegenkommen der k. k. Bergbehörden und den Herren Bergbeamten, durch deren ausgiebige Unterstützung alle meine diesbezüglichen Wünsche erfüllt und alle Hindernisse beseitigt wurden.

Leider war es mir nicht möglich, diese Untersuchungen so rasch durchzuführen, als es wünschenswerth gewesen wäre; meine Dienstesgeschäfte nöthigten mich, die Arbeit öfters zu unterbrechen, und obwohl sie schon im Mai 1898 begonnen wurde, konnte sie doch erst im Februar 1899 zu einem Abschlusse gebracht werden.

Ich glaube die ausgeführten Beobachtungen insoferne als gelungen betrachten zu können, als im Falle einer Wiederholung derselben an denselben Orten und mit denselben Apparaten kaum wesentlich abweichende Resultate erzielt würden. Dessenungeachtet halte ich sie für noch nicht genügend, um die gestellte Aufgabe als endgiltig gelöst betrachten zu können; denn die Grössen, um die es sich dabei handelt, sind sehr klein und werden durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, welche sich bei den Beobachtungen unter den ungünstigen Verhältnissen in den Bergwerken noch vergrössern, häufig unkenntlich gemacht.

Bei einer allfälligen Fortsetzung dieser Untersuchungen wird man daher trachten müssen, durch geeignete Vorrichtungen an den Apparaten die zu erzielende Genauigkeit der Beobachtungen noch zu erhöhen; es ist Aussicht vorhanden, dies zu ermöglichen.

Die auszuführende Arbeit bestand im Wesentlichen in der genauen Bestimmung der kleinen Unterschiede der Schwere auf der Erdoberfläche und in verschiedenen Tiefen, sowie in der Ermittlung der daselbst herrschenden Temperaturen. Aus den Resultaten kann sowohl die Zunahme der Schwere, als auch jene der Temperatur beim Eindringen in die Erde abgeleitet und verglichen werden.

Bei der Auswahl der vier vorläufig zu untersuchenden Bergwerke wurde auf die Verschiedenheit ihrer Höhenlage und ihrer Tiefe, sowie der in ihnen vorhandenen Temperatur Rücksicht genommen, damit die Untersuchungen möglichst verschiedene Verhältnisse umfassen.

Dementsprechend wurden ausgewählt:

1. Der 416 *m* tiefe Wernerschacht des Uranbergbaues in Joachimsthal in Böhmen, welcher in 918 *m* Seehöhe

gelegen ist und eine grosse Zunahme der Temperatur aufweist;

2. der 1100 *m* tiefe Adalbertschacht des Silberbergwerkes in Příbram in Böhmen, welcher die Höhen von +535 *m* über dem Meere bis —565 *m* unter dem Meeresspiegel durchfährt und in welchem die Temperaturzunahme nur gering ist;

3. der 300 *m* tiefe Greiferschacht des Versuchsbergbaues in Kuttenberg in Böhmen, welcher bis zum Meereshorizonte reicht, und endlich

4. der 272 *m* tiefe Franzschacht des Quecksilberbergbaues in Idria in Krain, in welchem ganz abnorme Temperaturverhältnisse herrschen.

In jedem dieser Schächte wurden ober Tags und in verschiedenen Tiefen Schwerestationen errichtet. Die Stationen ober Tags befanden sich in Gebäuden, möglichst in gleicher Höhe mit dem Tagkranze des Schachtes und entsprechend weit ausserhalb des Erschütterungsgebietes der Fördermaschinen. Die Pendelpfeiler wurden auf diesen Stationen in einer Parterrelocalität derart in eine Ecke aufgemauert, dass sie mit dem Gebäude fest verbunden waren, wodurch sie eine grosse Stabilität erlangten.

Die unterirdischen Stationen befanden sich an den Enden der Strecken, Gänge oder Querschläge, von welchen ein kleiner Theil mittelst einer Bretterwand mit Eingangsthüre abgeschlossen wurde. Die Pendelpfeiler wurden gewöhnlich durch eine Ausmauerung des Stollenendes hergestellt und mit einer Steinplatte gedeckt. Die Pfeiler waren daher mit den Felswänden innig verbunden und sehr stabil.

Für die Temperaturbeobachtungen wurde in der Nähe des Pfeilers in der Seitenwand ein Bohrloch von 50 bis 60 *cm* Tiefe für das Gesteinsthermometer hergestellt.

Die Bergwerksschachte und Beobachtungsstationen.

1. Der Wernerschacht in Joachimsthal in Böhmen.

Derselbe befindet sich im böhmischen Erzgebirge, 1·5 *km* westlich der Stadt Joachimsthal auf dem sich von Nord gegen Süd hinziehenden, flachen, etwa 900 *m* hohen Bergrücken, die

Zimmerhöhe« genannt. Auf derselben sind zahlreiche Halden alter, längst aufgelassener Bergbaue vorhanden, da hier vor Zeiten Silbererze gewonnen wurden. Grosse Tiefen erreichten jedoch diese Baue nicht.

Das in der Umgebung des Wernerschachtes vorkommende Gestein ist Glimmerschiefer und verschiedene Arten von Porphyr; der Menge nach von ersterem $^2/_3$, von letzterem $^1/_3$. Aus den Abwägungen einer grossen Zahl von Steinproben ergab sich die Dichte des Glimmerschiefers 2·78, jene des Porphyrs 2·71, so dass die Dichte der Gesammtmasse der Gesteine

$$\Theta = 2 \cdot 73$$

angenommen werden kann.

Der Tagkranz des Schachtes liegt in einer Seehöhe von 917·7 *m*; der Schacht hat eine Tiefe von 415·7 *m*. Oben ist derselbe eingewölbt und zugeschüttet. Der Zugang erfolgt 82 *m* tiefer von der Westseite durch den 480 *m* langen k. k. Wassereinlass und Einfahrtsstollen; die Schalenförderung im Schachte erfolgt mittelst Wasserbetrieb.

Unter freundlicher Intervention des Herrn k. k. Bergverwalters Josef Step wurden nachfolgende Localitäten als Pendelstationen ausgewählt und in der oben beschriebenen Weise eingerichtet:

Ober Tags in der Höhe des Tagkranzes, Seehöhe 917·7 *m*, in dem steinernen, von einem Obersteiger bewohnten ebenerdigen Hause, welches einen Theil des ehemals bestandenen Schachtgebäudes bildet.

In der Nordwestecke des abgeschlossenen schmalen Vorhauses wurde der Pendelpfeiler erbaut.

In der Tiefe des Schachtes wurden drei unterirdische Stationen ausgewählt und daselbst Observatorien errichtet.

Die erste Station befand sich in dem sogenannten VI. Geisterlaufe, 182·4 *m* unter dem Tagkranze.

Die zweite Station in dem Danieli-Stollen, 302·6 *m* und die dritte Station in dem Wernerlaufe 415·7 *m* unter dem Tagkranze.

Das zur Verfügung stehende Locale am Tagkranze war sehr klein und feucht; es eignete sich nicht zur Aufstellung

der Pendeluhr, sowie zur Deponirung der Instrumente und Requisiten. Aus diesem Grunde musste noch eine zweite Station ober Tags errichtet werden, welche diesen Bedingungen besser entsprach. Hiezu eignete sich vorzüglich ein Local in dem geräumigen ehemaligen Zechenhause des derzeit aufgelassenen Eliasschachtes, welches 800 *m* nordwestlich des Wernerschachtes in einer Seehöhe von 798 *m*, demnach 120 *m* tiefer, gelegen ist.

Diese Station steht in keinem Zusammenhange mit den beabsichtigten Untersuchungen; sie diente nur als Vergleichsstation, indem die Schwereunterschiede zwischen ihr und den vier eigentlichen Stationen gemessen wurden, wodurch sich auch die gesuchten Unterschiede zwischen diesen selbst ergaben. Bei der Verwerthung der Resultate ist daher diese Station nicht zu berücksichtigen.

Die unterirdischen Stationen waren in diesem wasserreichen Bergwerke mit seinen engen Stollen sehr unbequem; es erforderte die Ausführung der Beobachtungen viele Vorsicht und grosse Erfahrung. Nachdem Linienschiffs-Lieutenant Ritter v. Hirtl zu jener Zeit mit den Pendelbeobachtungen noch wenig vertraut war und daher unter diesen ungünstigen Verhältnissen leicht ein Misserfolg hätte erzielt werden können, so wurde, wie aus den später folgenden Zusammenstellungen Tabelle III ersichtlich ist, ein von den übrigen Bergwerken abweichender Vorgang bei den Beobachtungen eingehalten. Auf die Resultate war diese Abweichung selbstverständlich ohne Einfluss.

In der am Schlusse dieses Abschnittes folgenden Tabelle I ist die Seehöhe und Lage dieser und aller folgenden Stationen gegen die betreffenden Schächte, sowie die Azimuthe der Schwingungsebenen der Pendel zusammengestellt. An der Hand der Grubenkarten ist man daher im Stande, den Ort, wo die Beobachtungen ausgeführt wurden, jederzeit wieder festzustellen und aufzufinden.

2. Der Adalbertschacht in Přibram in Böhmen.

Dieser Schacht befindet sich 1·5 *km* westlich der Stadt Přibram in Böhmen auf der 50 *m* hohen, flachen Anhöhe des

Birkenberges, in hügeliger Gegend. Das Terrain fällt gegen Norden längs des Litavaflusses sanft ab, erhebt sich hingegen im Westen in grösserer Entfernung um 150 bis 200 *m*.

Der Tagkranz des Schachtes liegt 534·6 *m* über dem Meere; der Schacht erreicht in seinem 32. Laufe eine Tiefe von 1100 *m*, er reicht daher bis 565 *m* unter das Niveau des Meeres. Das Bergwerk ist besonders in seinen tieferen Theilen ganz trocken und sehr gut ventilirt.

Bereits vor 15 Jahren habe ich hier versuchsweise mit einem provisorisch hergestellten Apparate Schwerebestimmungen ausgeführt.[1] Eine Wiederholung derselben mit den gegenwärtig vervollkommneten Hilfsmitteln war umsomehr erwünscht, als einerseits die damaligen Apparate mangelhaft waren und ein einwandfreier Vorgang bei den Beobachtungen wegen Mangel eines zweiten Beobachters nicht eingehalten werden konnte, anderseits der Schacht seither um 100 *m* vertieft wurde und daher die Gelegenheit zur Ausführung von Beobachtungen in selten grosser Tiefe darbietet.

Das Gestein in der Umgebung des Schachtes besteht aus gleichen Theilen Grauwacke und Schiefer, welche mit Grünstein durchsetzt sind; letzterer bildet nach Angabe des verstorbenen Bergrathes Pošepny den vierten Theil der Gesteinsmasse. Durch Abwägungen zahlreicher Proben habe ich die Dichte der Gesteinsmasse in diesem Bergwerke übereinstimmend mit den früheren Bestimmungen gefunden:

$$\Theta = 2\cdot75.$$

Von den im Jahre 1884 errichteten Pfeilern waren jene im 9., 26. und 30. Laufe noch vorhanden. Das frühere Observatorium im 20. Laufe war verschüttet, und musste daher statt seiner eine neue Station ausgewählt werden, ebenso auch eine in dem tiefsten, 32. Laufe.

Die Station ober Tags befand sich in gleicher Höhe mit dem Tagkranze in dem 80 *m* südwestlich des Schachtes gelegenen sogenannten »alten Kunstamte«, einem Gebäude, welches gegenwärtig zu Kanzleien und Wohnungen verwendet

[1] Mittheilungen des k. u. k. militär-geographischen Institutes, Bd. III.

wird. In der östlichen Ecke eines Parterrelocales wurde der mit einer Granitplatte gedeckte Pendelpfeiler errichtet. Derselbe war mit dem Mauerwerke des Gebäudes fest verbunden. Die Seehöhe dieser Station ist gleich jener des Tagkranzes des Schachtes, nämlich 534·6 *m*.

Die erste unterirdische Station befand sich im 9. Laufe in einer Tiefe von 286·1 *m*; der 1 *m* hohe Pfeiler war an die Seitenwand des Stollens angebaut.

Die zweite Station war im 20. Laufe in einer Tiefe von 543·1 *m* oder 8·5 *m* unter dem Meeresniveau. Der Pfeiler wurde durch Ausmauerung des Stollenendes hergestellt.

Die dritte Station befand sich im 26. Laufe in einer Tiefe von 774·6 *m*; der alte Pfeiler ist zwar freistehend, jedoch 1 *m* lang, daher stabil.

Die vierte Station befand sich im 30. Laufe in 999·3 *m* Tiefe, beziehungsweise 464·7 *m* unter dem Meeresniveau, in dem Raume, der 1882 über Anregung des Herrn Hofrathes Prof. Dr. Carl Ritter v. Kořistka durch die Munificenz des hohen k. k. Ackerbau-Ministeriums für wissenschaftliche Untersuchungen hergestellt worden ist. Der daselbst befindliche Pfeiler ist gleichfalls freistehend und 1 *m* lang.

Die fünfte Station befand sich im 32. Laufe in einer erst im vergangenen Jahre längs eines Erzganges getriebenen Strecke. Sie liegt 1099·3 *m* tief oder 564·7 *m* unter dem Meeresniveau. Der Pfeiler wurde durch Ausmauerung des Streckenendes hergestellt.

Auf den beiden letzten Stationen war die Temperatur ziemlich hoch, sie betrug 24°, beziehungsweise 27° C.

3. Der Greiferschacht in Kuttenberg in Böhmen.

Etwa 1 *km* nordwestlich der Stadt in nahezu ebener Gegend befindet sich dieser 300 *m* tiefe Schacht, der erst in der jüngsten Zeit angeschlagen wurde. Der Tagkranz liegt 305 *m* über dem Meere. Die in der Umgebung vorhandenen zahlreichen alten Berghalden zeigen deutlich, dass hier vor Jahrhunderten längs des sogenannten Greiferganges sehr viel Silberbergbau betrieben wurde, über dessen Ausdehnung gegenwärtig nichts bekannt ist. Für den jetzigen Bergbau ist

daher stets die Gefahr vorhanden, dass man auf die alten Baue, den sogenannten »alten Mann« stösst und sich das in demselben angesammelte Wasser in die neuen Anlagen ergiesst. Leider ist dieses Ereigniss einige Zeit nach meiner dortigen Anwesenheit eingetreten, und ist dieses Bergwerk gegenwärtig gänzlich ersäuft.

Das Gestein ist Gneis, welcher sich über die ganze Ausdehnung des Bergwerkes und die weite Umgebung desselben erstreckt. Die Dichte der an vielen Orten gesammelten Gesteinsproben schwankte zwischen 2·71 und 2·74; im Mittel habe ich angenommen:

$$\Theta = 2 \cdot 72.$$

Das Bergwerk hat nur drei Horizonte in je 100 *m* Abstand. In jedem derselben wurde eine unterirdische Station am Ende einer Strecke errichtet und die Pendelpfeiler durch Ausmauerung des Streckenendes hergestellt.

Die Station ober Tags befand sich in gleicher Höhe mit dem Tagkranze in einem kleinen alleinstehenden Nebengebäude der Aufbereitung, 20 *m* vom Schachte entfernt. Nachdem die von der Fördermaschine und Luftcompressionspumpe verursachten Erschütterungen im Observatorium merklich waren, so hatte der Herr Grubenleiter, Bergrath Josef Hozák, die Güte, die einzige Schicht, während welcher gearbeitet wurde, auf die Nacht zu verlegen, so dass bei Tage während der Pendelbeobachtungen die Maschinen stille standen.

4. Der Franzschacht zu Idria in Krain.

Derselbe befindet sich in der Stadt Idria, in einem Thalkessel an der Mündung des Nikovabaches in den Idrizafluss. Die umliegenden Berge des Karstes erheben sich bis zu einer Höhe von 900 *m*, während der Tagkranz des Schachtes 345·3 *m* hoch gelegen ist.

Die Lagerungsverhältnisse der in diesem Bergwerke zumeist vorkommenden Gesteine, Dolomit und Schiefer, sind äusserst mannigfaltig. Die geologischen Verhältnisse sind hier sehr verworren; denn ungeachtet des verschiedenen geologischen Alters dieser der Steinkohlen- und Triasformation

angehörenden Gesteine findet man dieselben vielfach durchdrungen, über und unter einander gelagert, gefaltet etc. Es müssen hier gewaltige Kräfte gewirkt haben, damit derartige Verhältnisse zu Stande kamen.

Die hier vorkommenden verschiedenen Arten von Schiefer haben meistens kein festes Gefüge, sie sind bröcklig, stellenweise lehmig. Die in ihnen getriebenen Schächte und Stollen müssen durch Betonverkleidungen oder Holzzimmerungen vor dem Einsturze gesichert werden.

Aus Abwägungen zahlreicher Proben ergab sich die Dichte des Dolomites 2·83; jene des Schiefers war verschieden, sie schwankte zwischen 2·61 und 2·79; als Dichte der gesammten Gesteinsmasse habe ich angenommen:

$$\Theta = 2\cdot77.$$

Das Bergwerk in Idria wurde ungeachtet seiner relativ geringen Tiefe von 272 *m* dennoch zu den beabsichtigten Untersuchungen ausgewählt, weil in demselben ganz abnorme Temperaturverhältnisse herrschen. In ein und derselben Tiefe findet man Temperaturen vor, die um 10—15° differiren, und stellenweise ist die Temperatur in den oberen Horizonten höher als in den tieferen.

Unter freundlicher Intervention des Herrn Bergrathes Josef Schmid wurden nachstehende Beobachtungsstationen ausgewählt und eingerichtet:

Ober Tags in dem Parterre eines Hauses in der Nähe des Schachtes, 7 *m* tiefer als der Tagkranz. Der Pfeiler war in die westliche Ecke des Locales eingebaut.

Die erste Station befand sich im sogenannten Wasserstollen nur 16·5 *m* tief unter dem Tagkranze, in dem ehemaligen Turbinenraume. Der Pfeiler war in die Ecke des ausgemauerten viereckigen Raumes eingebaut.

Die zweite Station war im III. Laufe in 122·1 *m* Tiefe im festen Dolomite.

Die dritte Station befand sich im VI. Laufe, 5. Etage, in einem Abbaue, 172·8 *m* unter dem Tagkranze. Die Temperatur betrug hier 25° C. Das Gestein, schwarzer Schiefer, ist sehr locker, brüchig und meistens in faustgrosse Stückchen zertheilt.

Durch Zimmerungen muss es vor dem Einsturze bewahrt werden.

Der Pfeiler war an die Abbaustelle angebaut; von derselben lösten sich jedoch häufig grössere Partien lockeren Gesteines ab und überdeckten zum Theile auch den Pfeiler, so dass er beim Betreten des Observatoriums meistens erst abgeräumt werden musste.

An diesen kleinen Einstürzen waren zum grossen Theile Ratten schuld, welche sich in dem umliegenden alten Versatze eingenistet haben und dem Observatorium, wegen der daselbst deponirten Stearinkerzen, Besuche abstatteten.

Die vierte Station befand sich gleichfalls im VI. Laufe, 140 *m* von der dritten Station entfernt und 174·8 *m* unter dem Tagkranze und einem bei 18 *m* langen Seitenstollen. Das Gestein war hier Dolomit und Schiefer geschichtet. Die Temperatur betrug 16° C.

Die fünfte Station befand sich im XI. Laufe, 271·6 *m* unter dem Tagkranze, in einem Seitenstollen, welcher mit Holz ausgezimmert war. An seinem Ende befand sich ein mehrere Meter tiefes Abteufen. Der Pendelpfeiler konnte daher weder an die Seitenwand, noch an das Stollenende angebaut werden, er stand frei. Das Gestein bestand aus lehmigem Schiefer, die Temperatur betrug 15°9 C.

Tabelle I.

Gegenseitige Lage der Observatorien.

Station	Seehöhe	Tiefe unter der Erd-oberfläche	Lage in Beziehung auf den Schacht		Azimuth der Schwingungs-ebene von N über E gezählt
Wernerschacht in Joachimsthal, $\varphi = 50° 22'4$, $\lambda = 30° 33'5$, $h = 917·7 m$, $\Theta = 2·73$					
Ober Tags	917·7 *m*	0·0 *m*	6 *m* W	10 *m* N	80°
1. Station	735·3	182·4	31 W	6 S	85
2. »	615·1	302·6	68 W	57 N	5
3. »	502·0	415·7	106 W	32 S	5
Adalbertschacht in Přibram, $\varphi = 49° 41'2$, $\lambda = 31° 39'3$, $h = 534·6 m$, $\Theta = 2·75$					
Ober Tags	534·6 *m*	0·0 *m*	40 *m* W	100 *m* S	50°
1. Station	248·5	286·1	12 W	8 N	175
2. »	− 8·5	543·1	1 E	191 N	0
3. »	−240·0	774·6	94 E	24 S	110
4. »	−464·7	999·3	53 W	30 N	80
5 »	−564·7	1099·3	43 W	180 S	0
Greiferschacht in Kuttenberg, $\varphi = 49° 47'4$, $\lambda = 32° 55'2$, $h = 350·0 m$, $\Theta = 2·78$					
Ober Tags	305·0 *m*	0·0 *m*	23 *m* W	4 *m* N	20°
1. Station	204·1	100·9	194 W	138 N	10
2. »	104·6	200·4	13 W	27 N	45
3. »	4·9	300·1	37 E	163 S	20
Franzschacht in Idria, $\varphi = 46° 0'3$, $\lambda = 31° 41'6$, $h = 345·3 m$, $\Theta = 2·77$					
Ober Tags	345·3 *m*	0·0 *m*	51 *m* E	10 *m* N	80°
1. Station	328·7	16·6	12 E	18 S	135
2. »	223·2	122·1	48 E	155 S	135
3. »	172·5	172·8	129 E	98 S	135
4. »	170·5	174·8	70 E	222 S	45
5. »	73·7	271·6	38 E	13 S	45

Die Stabilität der Pendelpfeiler.

Sämmtliche Pfeiler wurden auf ihre Stabilität mittelst der Federwage nach dem Helmert'schen Verfahren untersucht. Mit Ausnahme von zwei Pfeilern im Bergwerke zu Idria erwiesen sich alle als absolut fest, wie es bei der Art ihrer Construction nicht anders zu erwarten war. Ein sechsmaliger Stoss mit einer Kraft von 8 *kg* übte keine wahrnehmbare Wirkung auf das Pendel aus.

Nur bei den Pfeilern auf der dritten und fünften Station in Idria zeigte sich ein kleines Nachgeben. Wiederholtes Wippen ergab nämlich, dass durch einen Normalstoss mit der Kraft von 1 *kg* die Pendel in Schwingungen von 0'31, beziehungsweise 0'30 Amplitude versetzt wurden.

Nachdem ich auf empirischem Wege ermittelt habe, dass eine in dieser Art erzeugte Amplitude im Betrage von 1' eine Correction der Schwingungszeit wegen des Mitschwingens des Pfeilers im Betrage von —23 Einheiten der 7. Decimale erfordert, so sind die in Idria auf der dritten und fünften Station beobachteten Schwingungszeiten der Pendel um —7, beziehungsweise —8 Einheiten der 7. Decimale zu corrigiren.

Die Instrumente und Beobachtungen.

Zu den Beobachtungen wurde der von mir im Jahre 1886 construirte und gegenwärtig allgemein verwendete Pendelapparat benützt. Es gelangten die Pfeilerstative der Apparate Nr. 1 und 2 mit den Pendeln VIII und X, beziehungsweise IX und XI zur Verwendung.

Ich glaube eine Beschreibung des Apparates und seiner Verwendung hier übergehen zu können, da dieselbe schon vielfach in anderen Abhandlungen enthalten ist.[1]

Die Verwendung des Wandstatives, welches den Vortheil absoluter Stabilität bietet, hielt ich in den Bergwerken für ausgeschlossen; es zeigte sich jedoch, dass es, bei Ausführung einiger nöthiger Adaptirungen, doch hätte verwendet werden

[1] Mittheilungen des k. u. k. militär-geographischen Institutes, Bd. VII, 1887 und Zeitschrift für Instrumentenkunde, Bd. 1888.

können. Bei einer eventuellen Fortsetzung dieser Untersuchungen ist dies auch in Aussicht genommen.

Die Constanten der Pendel, welche bereits vielfach zur Reduction der Beobachtungen gedient haben, wurden nach Vollendung der Untersuchungen im Februar 1899 neu ermittelt und mit den bereits verwendeten vollkommen übereinstimmend gefunden.

Der Einfluss $\Delta\tau$ der Temperatur T auf die Schwingungszeit ist bei allen vier Pendeln gleich, er beträgt $48 \cdot 12\; T$ in Einheiten der 7. Decimale der Schwingungszeit.

Der Einfluss $\Delta\delta$ des Luftwiderstandes ist für die Pendel VIII und IX etwas verschieden von jenem für die Pendel X und XI, da bei ersteren die Pendelstangen etwas dünner sind. Er beträgt in Einheiten der 7. Decimale der Schwingungszeit 542 D für die Pendel VIII und IX und 575 D für X und XI, wo D die relative Dichte der Luft bezeichnet, jene bei 0° Temperatur und 760 *mm* Barometerstand als Einheit angenommen.

Bei der Lösung der gestellten Aufgabe handelte es sich nicht so sehr um absolute Werthe, als um die Unterschiede der Schwere, beziehungsweise der Schwingungszeiten der Pendel zwischen den Stationen eines Bergwerkes. Um dieselben möglichst frei von constanten Einflüssen zu erhalten, wurden die Beobachtungen stets gleichzeitig auf zwei Stationen, mit Benützung nur einer Uhr und Wiederholung der Beobachtungen mit vertauschten Apparaten ausgeführt. Hiedurch wurden die Resultate vom Einflusse des Uhrganges und anderer constanter Fehlerquellen befreit, da sich dieselben in den Unterschieden der Resultate aufheben.

Es war hiezu nothwendig, die Stationen eines Bergwerkes unter einander telegraphisch zu verbinden, zu welchem Zwecke etwa 5000 *m* isolirter Leitungsdraht verwendet wurden. Als elektrische Batterien wurden Trockenelemente verwendet, welche sich in jeder Hinsicht vorzüglich bewährt haben. Um zu verhüten, dass der Gang der verwendeten Pendeluhr von Tiede durch einen zeitweise eingeschalteten starken elektrischen Strom beeinflusst werde, wurde ein Relais in die Uhr eingeschaltet, welches durch die Uhr mittelst eines schwachen Stromes ununterbrochen in Bewegung erhalten wurde. In

dieses Relais wurde nach Bedarf während der Beobachtungen ein zweites Relais mit zweifachem Contacte eingeschaltet, wodurch es möglich war, gleichzeitig nach den beiden Beobachtungsstationen verschiedene Ströme zu entsenden.

Auf die Regulirung des Uhrganges wurde keine Sorgfalt verwendet, weil sich derselbe in den Unterschieden der Schwingungszeiten vollständig eliminirt. Es wäre daher auch nicht nothwendig gewesen, denselben zu bestimmen; dessenungeachtet wurden auf jeder Station Zeitbestimmungen mit einem 5" Universalinstrumente ausgeführt und der Uhrgang ermittelt, damit die Schwingungszeiten auch in absolutem Maasse ausgedrückt werden können. Die Zeitbestimmungen wurden in mehrtägigen Intervallen ausgeführt, um den Einfluss ihrer Ungenauigkeit zu vermindern.

Es ergaben sich die täglichen Gänge u der Beobachtungsuhr für die vier Bergwerke und dementsprechend die nebenstehenden Correctionen der Schwingungszeiten in Einheiten der 7. Decimale:

	Täglicher Uhrgang u gegen Sternzeit	Correction Δu der Schwingungszeit in Einheiten der 7. Decimale
Joachimsthal	+ 0·10 ret.	+ 6
Přibram	+ 2·60 ret.	+ 154
Kuttenberg.......	+10·80 ret.	+ 635
Idria	—21·30 av.	—1253

Auf jeder Station wurden die beiden Pendel, unmittelbar aufeinander folgend, schwingen gelassen; beobachtet wurde stets die 60fache Dauer c einer Coincidenz, indem zunächst 10 aufeinander folgende Coincidenzen und nach einer Pause, welche 50 c entspricht, wieder 10 aufeinander folgende Coincidenzen beobachtet wurden. Die Dauer einer Coincidenz ergibt sich hieraus sehr genau. Nachdem die Pendel langsamer schwingen als halbe Secunden, so ist die Dauer s einer Pendelschwingung:

$$s = \frac{c}{2c-1}.$$

Die so gefundene Schwingungszeit bedarf noch der Correctionen $\Delta\alpha$ wegen der Amplitude des Pendels zur Reduction auf unendlich kleine Schwingungsbögen, Δt wegen der Temperatur, $\Delta\delta$ wegen der Luftdichte und Δu wegen des Uhrganges. Auf der dritten und fünften Station in Idria überdies auch noch jene wegen des Mitschwingens des Pfeilers.

Die Pendel hatten bei den Schlussbeobachtungen in Wien im Monate December eine etwas kürzere Schwingungszeit als vor der Abreise im Mai; es hat demnach bei allen vier Pendeln eine kleine Contraction stattgefunden. Eine solche wurde bereits sehr häufig constatirt, ohne dass es bis jetzt gelungen wäre, für die Ursache derselben eine Erklärung zu finden. Es betrug diese Änderung bei:

Pendel VIII . . . . 59 Einheiten der 7. Decimale.
IX . . . . 121 » » » »
X . . . . 67 » » » »
XI . . . . 68 » » » »

Dieselbe wurde auf die Resultate der Beobachtungen in den vier Bergwerken als Correction wegen der Contraction der Pendel derart vertheilt, dass alle Resultate eines Bergwerkes in gleichem Maasse corrigirt erscheinen; auf die gesuchten Unterschiede ist daher diese Correction ganz ohne Einfluss. Sie betrug in Einheiten der 7. Decimale der Schwingungszeiten:

	Für Pendel			
	VIII	IX	X	XI
In Joachimsthal	−18	−36	−20	−21
» Přibram	− 6	−12	− 7	− 8
» Kuttenberg	+ 6	+12	+ 7	+ 8
» Idria	+18	+36	+20	+21

In der nachfolgenden Tabelle II sind die Beobachtungsresultate und ihre Reductionen übersichtlich zusammengestellt. Von der Wiedergabe der einzelnen Beobachtungen musste ihrer grossen Zahl und ihres Umfanges wegen abgesehen werden.

In die letzte Columne dieser Tabelle sind auch die auf den unterirdischen Stationen beobachteten Temperaturen in den Bohrlöchern als »Gesteinstemperatur« aufgenommen.

Der besseren Übersicht wegen sind in den unmittelbar anschliessenden Tabellen III, *A* die beobachteten Schwingungszeiten *s* der Pendel für jedes Bergwerk zusammengestellt. Dieselben sind noch von den Unregelmässigkeiten des Uhrganges beeinflusst. Vereinigen wir jedoch die gleichzeitig ober Tags und auf den unterirdischen Stationen beobachteten Schwingungszeiten der Pendel VIII und IX, beziehungsweise X und XI paarweise zu Mitteln, so ergeben sich die Schwingungszeiten mittlerer Pendel, deren Unterschiede nicht nur von den Unregelmässigkeiten des Uhrganges, sondern auch von diesem selbst und auch noch von anderen Einflüssen befreit sind. Diese Unterschiede sind für jedes Bergwerk in den Tabellen III, *B* zusammengestellt und ist daselbst auch ersichtlich gemacht, welche Beobachtungen zu Mitteln vereinigt wurden.

Durch Hinzufügung der ermittelten Unterschiede der Schwingungszeiten zum Mittel der ober Tags beobachteten Schwingungszeiten ergeben sich die beobachteten Schwingungszeiten $S = \frac{1}{4}(S_{VIII} + S_{IX} + S_{X} + S_{XI})$ eines mittleren Pendels auf den unterirdischen Stationen, welche in den Tabellen III, *C* zusammengestellt sind. Die beigesetzten mittleren Fehler derselben sind aus den Abweichungen der Einzelnwerthe in den Tabellen III, *B* von ihrem Mittel abgeleitet.

Die Station Elias-Zeche in Joachimsthal diente, wie schon früher erwähnt, nur als Vergleichsstation und wird daher später nicht weiter berücksichtigt werden.

Nachdem in Idria nicht nur die Unterschiede der Schwingungszeiten zwischen der Station ober Tags und den unterirdischen Stationen, sondern auch jene zwischen den letzteren beobachtet wurden, so war es nothwendig, die Ergebnisse in Tabelle III, *B* für diese Station auszugleichen.

Die Station ober Tags in Idria liegt 7 *m* tiefer als der Tagkranz des Schachtes. Damit sich die daselbst beobachteten Schwingungszeiten, analog wie bei den übrigen Bergwerken, auf den Tagkranz beziehen, müssen wir sie, der Höhe von 7 *m* entsprechend, um sechs Einheiten der 7. Decimale vergrössern.

Tabelle II.

Resultate der Pendelbeobachtungen.

Datum 1895	Station	Nummer des Pendels	Beobachtete: Dauer einer Coincidenz	Beobachtete: Amplitude	Beobachtete: Temperatur (Celsius)	Beobachtete: Luftdruck, reducirt auf 0°	Beobachtete: Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen (in Einheiten der 7. Decimale): Amplitude	Correction wegen: Temperatur	Correction wegen: Luftdichte	Correction wegen: Übergang	Correction wegen: Contraction	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
				Wien, militär-geographisches Institut, vor der Abreise										
9. Mai Nachm.		VIII	31·147	14·5	14·04°	744·2 mm	0·5081573	— 5	— 676	— 502	+ 30	— 30	0·5080390	
		X	34·198	14·2	14·48	743·7	0·5074188	— 3	— 697	— 537	+ 30	— 33	0·5072948	
		IX	30·258	13·9	14·12	744·2	0·5084012	— 5	— 679	— 502	+ 30	— 60	0·5082796	
		XI	31·734	14·3	14·51	743·7	0·5080041	— 5	— 698	— 537	+ 30	— 34	0·5078797	
10. Mai Vorm.		XI	31·746	13·9	13·74	741·4	0·5080010	— 5	— 664	— 537	+ 30	— 31	0·5078803	
		IX	30·267	13·9	13·95	741·4	0·5083986	— 5	— 671	— 500	+ 30	— 60	0·5082780	
		X	34·213	14·5	14·02	741·4	0·5074156	— 5	— 675	— 537	+ 30	— 33	0·5072936	
		VIII	31·154	14·5	13·92	741·5	0·5081556	— 5	— 670	— 501	+ 30	— 30	0·5080380	
10. Mai Nachm.		VIII	31·140	15·3	14·07	740·3	0·5081592	— 6	— 677	— 500	+ 30	— 30	0·5080409	
		X	34·205	13·7	14·22	740·3	0·5074173	— 5	— 684	— 536	+ 30	— 33	0·5072945	
		IX	30·266	14·3	13·99	740·3	0·5083988	— 5	— 673	— 500	+ 30	— 60	0·5082780	
		XI	31·742	14·3	14·23	740·3	0·5080021	— 5	— 685	— 536	+ 30	— 34	0·5078791	

11. Mai Vorm.		XI	31ˢ750	13°9	13·71°	740·5 *mm*	0ˢ5080000	— 5	— 660	— 537	+ 30	— 34	0ˢ5078794	
		IX	30·268	14·3	13·87	739·8	0·5083982	— 5	— 667	— 500	+ 30	— 60	0·5082780	
		X	34·213	12·4	13·67	740·5	0·5074156	— 4	— 658	— 537	+ 30	— 33	0·5072954	
		VIII	31·153	13·7	13·84	739·8	0·5081558	— 5	— 666	— 500	+ 30	— 30	0·5080387	
Wernerschacht in Joachimsthal														
19. Mai Nachm.	E	VIII	31ˢ232	14°1	10·51°	685·6 *mm*	0ˢ5081349	— 5	— 506	— 469	+ 6	— 18	0ˢ5080357	
		X	34·309	13·8	10·54	685·5	0·5073945	— 5	— 507	— 503	+ 6	— 20	0·5072916	
	3	IX	30·256	14·3	16·72	709·4	0·5084017	— 5	— 805	— 474	+ 6	— 36	0·5082703	16·3
		XI	31·729	14·0	16·81	709·0	0·5080054	— 5	— 809	— 508	+ 6	— 21	0·5078717	16·3
20. Mai Vorm.	E	VIII	31·237	14·1	10·22	684·5	0·5081335	— 5	— 492	— 469	+ 6	— 18	0·5080357	
		X	34·316	14·1	10·44	684·5	0·5073930	— 5	— 502	— 503	+ 6	— 20	0·5072906	
	2	IX	30·278	17·5	12·31	698·9	0·5083955	— 7	— 592	— 475	+ 6	— 36	0·5082851	11·6
		XI	31·766	15·7	12·24	699·1	0·5079959	— 7	— 589	— 510	+ 6	— 21	0·5078838	11·7
20. Mai Nachm.	E	VIII	31·239	14·1	10·50	684·4	0·5081330	— 5	— 505	— 468	+ 6	— 18	0·5080340	
		X	34·303	14·1	10·68	684·5	0·5073958	— 5	— 514	— 501	+ 6	— 20	0·5072924	
	1	IX	30·331	15·7	11·02	689·3	0·5083805	— 7	— 530	— 471	+ 6	— 36	0·5082767	10·0
		XI	31·824	14·1	10·67	689·2	0·5079812	— 5	— 513	— 505	+ 6	— 21	0·5078774	10·0
21. Mai Vorm.	E	VIII	31·234	14·1	10·47	689·0	0·5081343	— 5	— 504	— 472	+ 6	— 18	0·5080350	
		X	34·312	14·1	10·56	689·4	0·5073937	— 5	— 508	— 505	+ 6	— 20	0·5072905	
	1	IX	30·351	14·1	10·23	694·7	0·5083749	— 5	— 492	— 476	+ 6	— 36	0·5082746	10·0
		XI	31·831	18·2	10·35	695·0	0·5079793	— 9	— 498	— 510	+ 6	— 21	0·5078761	10·0

Datum 188[illegible]	Station	Name des Pendels	Beobachtete Dauer einer Coincidenz	Beobachtete Amplitude	Beobachtete Temperatur (Celsius)	Beobachtete Luftdruck, reducirt auf 0°	Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen Amplitude	Correction wegen Temperatur	Correction wegen Luftdichte	Correction wegen Uhrgang	Correction wegen Contraction	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
								in Einheiten der 7. Decimale						
21. Mai Nachm.	F	VIII	31ˢ225	14ᵐ1	11·01°	689·9 mm	0ˢ5081366	5	— 530	— 471	+ 6	— 18	0ˢ5080348	
		X	34·298	14·1	11·15	689·9	0·5073969	— 5	— 537	— 505	+ 6	— 20	0·5072908	
	2	IX	30·303	17·2	12·05	705·0	0·5083884	— 7	580	— 480	+ 6	— 36	0·5082787	11·7
		XI	31·787	16·0	12·17	705·1	0·5079905	7	— 586	515	+ 6	— 21	0·5078782	11·6
22. Mai Vorm.	F	VIII	31·236	14·1	10·66	689·4	0·5081338	5	— 513	— 472	+ 6	18	0·5080336	
		X	34·307	14·1	10·84	689·3	0·5073949	— 5	— 522	— 505	+ 6	— 20	0·5072903	
	3	IX	30·263	11·0	16·47	713·7	0·5083998	— 3	— 793	— 477	+ 6	— 36	0·5082695	16·3
		XI	31·734	12·8	16·57	713·7	0·5080041	— 4	— 796	— 512	+ 6	— 21	0·5078714	16·2
23. Mai Nachm.	3	VIII	31·137	11·0	16·45	710·4	0·5081601	— 3	— 792	476	+ 6	— 18	0·5080318	16·2
		X	34·196	10·8	16·54	710·3	0·5074193	— 3	— 796	— 510	+ 6	— 20	0·5072870	16·2
	E	IX	30·324	18·6	11·45	685·6	0·5083825	— 10	— 551	— 467	+ 6	— 36	0·5082767	
		XI	31·805	20·6	11·73	685·1	0·5079859	— 12	— 564	— 500	+ 6	— 21	0·5078768	
24. Mai Vorm.	2	VIII	31·179	13·2	11·97	700·5	0·5081489	— 4	— 576	— 476	+ 6	— 18	0·5080421	11·6
		X	34·241	11·9	12·10	700·7	0·5074094	— 4	— 582	— 511	+ 6	— 20	0·5072983	11·7
	E	IX	30·333	15·1	11·18	684·5	0·5083800	— 6	— 538	— 467	+ 6	— 36	0·5082759	
		XI	31·810	19·6	11·38	684·5	0·5079847	11	— 548	— 500	+ 6	— 21	0·5078773	

24. Mai Nachm.	I	VIII	31·232	12·4	10·34°	689·7 *mm*	0·5081349	— 4	— 498	— 472	+ 6	— 18	0·5080363	9·9
		X	34·304	14·2	10·35	689·6	0·5073956	— 5	— 499	— 506	+ 6	— 20	0·5072932	9·9
	E	IX	30·321	18·6	11·73	683·6	0·5083833	—10	— 564	— 466	+ 6	— 36	0·5082763	
		XI	31·803	18·2	11·82	683·3	0·5079864	— 9	— 569	— 498	+ 6	— 21	0·5078773	
25. Mai Vorm.	I	VIII	31·231	13·9	10·13	688·1	0·5081351	— 5	— 487	— 472	+ 6	— 18	0·5080375	9·9
		X	34·313	14·2	10·19	688·8	0·5073936	— 5	— 490	— 505	+ 6	— 20	0·5072922	9·9
	E	IX	30·329	18·6	11·22	682·1	0·5083810	—10	— 540	— 466	+ 6	— 36	0·5082764	
		XI	31·811	15·5	11·41	681·9	0·5079844	— 6	— 550	— 498	+ 6	— 21	0·5078775	
25. Mai Nachm.	2	VIII	31·183	10·3	11·91	698·0	0·5081479	— 3	— 573	— 475	+ 6	— 18	0·5080416	11·6
		X	34·253	8·5	12·01	697·8	0·5074067	— 2	— 578	— 509	+ 6	— 20	0·5072964	11·6
	E	IX	30·320	15·5	11·84	681·7	0·5083836	— 6	— 570	— 464	+ 6	— 36	0·5082766	
		XI	31·806	18·6	11·70	681·8	0·5079857	—10	— 563	— 495	+ 6	— 21	0·5078774	
26. Mai Vorm.	3	VIII	31·132	12·4	16·42	707·5	0·5081614	— 4	— 790	— 473	+ 6	— 18	0·5080335	16·3
		X	34·191	9·9	16·54	707·6	0·5074204	— 3	— 796	— 507	+ 6	— 20	0·5072884	16·2
	E	IX	30·331	15·5	11·13	682·5	0·5083805	— 6	— 536	— 466	+ 6	— 36	0·5082767	
		XI	31·812	18·2	11·32	682·7	0·5079842	— 9	— 545	— 499	+ 6	— 21	0·5078774	
26. Mai Nachm.	O	VIII	31·184	13·6	11·83	674·8	0·5081475	— 5	— 569	— 460	+ 6	— 18	0·5080429	
		X	34·258	13·9	12·17	675·4	0·5074056	— 5	— 586	— 493	+ 6	— 20	0·5072958	
	E	IX	30·311	18·9	11·73	683·0	0·5083862	—10	— 564	— 465	+ 6	— 36	0·5082793	
		XI	31·796	15·5	11·96	683·5	0·5079883	— 6	— 576	— 498	+ 6	— 21	0·5078788	
27. Mai Vorm.	O	VIII	31·192	13·6	11·40	678·0	0·5081454	— 5	— 549	— 462	+ 6	— 18	0·5080426	
		X	34·275	13·6	11·40	678·3	0·5074019	— 5	— 549	— 496	+ 6	— 20	0·5072955	
	E	IX	30·332	16·7	10·88	686·8	0·5083801	— 7	— 524	— 469	+ 6	— 36	0·5082771	
		XI	31·813	17·9	11·08	687·2	0·5079838	— 9	— 533	— 504	+ 6	— 21	0·5078777	

Datum	Stunde	Nummer der Pendel	Beobachtete: Dauer von Coincidenzen	Amplitude	Temperatur (Celsius)	Luftdruck, in Millim. reducirt auf 0°	Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen: Amplitude	Temperatur	Luftdichte	Mitschwingen	Gang der Uhr	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
								In Einheiten der 7. Decimale						
[illegible]	[illegible]	VIII	31.249	13.0	11.42°	688.3 mm	0.5081881	−0	−515	−470	+6	−18	0.5080161	
		X	34.200	13.6	11.50	688.0	0.5073967	−3	−511	−504	+6	−20	0.5072991	
[illegible]	[illegible]	IX	30.820	13.0	11.25	679.3	0.5083851	−3	−511	−409	+6	−30	0.5082798	
		XI	31.700	14.2	11.40	675.0	0.5079881	−3	−552	−406	+6	−21	0.5078822	
[illegible]	[illegible]	VIII	31.254	[illegible]	11.27	680.1	0.5081001	−3	−542	−470	+6	−14	0.5080063	
		X	34.202	[illegible]	11.36	680.3	0.5073081	−3	−513	−504	+6	−20	0.5072911	
[illegible]	[illegible]	IX	30.815	14.0	11.42	670.3	0.5083850	−3	−572	−403	+6	−30	0.5082709	
		XI	31.786	14.2	11.60	670.0	0.5079866	−3	−537	−407	+6	−21	0.5078433	
Adalbertschacht in Příbram														
6. Juni Vorm.	O	VIII	31.270	13.6	13.80°	755.7 mm	0.5081248	−4	−609	−484	+145	−0	0.5080255	
		X	34.364	12.6	13.96	755.4	0.5073847	−4	−671	−518	+145	−7	0.5072792	
	32	IX	30.240	13.2	26.19	816.9	0.5084067	−4	−1250	−527	+143	−12	0.5082404	26.2
		XI	31.710	13.0	26.48	817.1	0.5080101	−4	−1274	−584	+143	−8	0.5078396	26.2

6. Juni Nachm.	32	VIII	31ˢ110	10ᴵ8	26·75°	816·1 *mm*	0ˢ5081673	— 3	—1287	— 525	+145	— 6	0ˢ5079997	26·2
		X	34·148	10·3	26·88	816·2	0·5074299	— 3	—1293	— 563	+145	— 7	0·5072578	26·2
	0	IX	30·369	12·8	13·97	714·8	0·5083699	— 4	— 672	— 483	+145	— 12	0·5082673	
		XI	31·862	13·1	14·04	714·8	0·5079714	— 4	— 676	— 517	+145	— 8	0·5078654	
7. Juni. Vorm.	30	VIII	31·128	13·0	24·34	807·7	0·5081625	— 4	—1171	— 525	+145	— 6	0·5080064	23·9
		X	34·204	12·2	24·38	808·3	0·5074176	— 4	—1173	— 563	+145	— 7	0·5072574	23·9
	0	IX	30·383	12·8	13·80	716·0	0·5083660	— 4	— 664	— 484	+145	— 12	0·5082641	
		XI	31·868	12·8	14·04	716·3	0·5079699	— 4	— 676	— 518	+145	— 8	0·5078638	
7. Juni Nachm.	0	VIII	31·259	12·6	14·34	716·0	0·5081278	— 4	— 690	— 483	+145	— 6	0·5080240	
		X	34·346	12·6	14·48	716·0	0·5073865	— 4	— 697	— 517	+145	— 7	0·5072785	
	30	IX	30·274	12·8	24·34	807·7	0·5083966	— 4	—1171	— 525	+145	— 12	0·5082399	23·9
		XI	31·742	13·4	24·38	807·8	0·5080021	— 4	—1173	— 562	+145	— 8	0·5078419	23·9
8. Juni Vorm.	0	VIII	31·262	12·9	14·29	717·4	0·5081270	— 4	— 688	— 484	+145	— 6	0·5080233	
		X	34·346	12·9	14·45	717·6	0·5073865	— 4	— 695	— 519	+145	— 7	0·5072785	
	26	IX	30·324	11·5	20·53	788·5	0·5083825	— 3	— 988	— 519	+145	— 12	0·5082448	20·5
		XI	31·799	11·7	20·58	788·5	0·5079874	— 4	— 990	— 498	+145	— 8	0·5078519	20·4
8. Juni Nachm.	26	VIII	31·182	10·3	20·81	787·7	0·5081481	— 3	—1001	— 518	+145	— 6	0·5080098	20·3
		X	34·258	10·1	20·76	787·8	0·5074057	— 3	— 999	— 555	+145	— 7	0·5072638	20·3
	0	IX	30·372	12·9	14·72	717·3	0·5083690	— 4	— 708	— 483	+145	— 12	0·5082628	
		XI	31·858	13·2	14·80	717·1	0·5079724	— 4	— 712	— 518	+145	— 8	0·5078627	
9. Juni Vorm.	20	VIII	31·225	9·6	18·56	767·7	0·5081366	— 3	— 893	— 509	+145	— 6	0·5080100	17·7
		X	34·286	9·6	18·59	767·4	0·5073994	— 3	— 894	— 546	+145	— 7	0·5072689	17·7
	0	IX	30·376	12·9	14·67	718·1	0·5083680	— 4	— 706	— 484	+145	— 12	0·5082619	
		XI	31·863	14·3	14·77	718·1	0·5079712	— 5	— 711	— 519	+145	— 8	0·5078614	

Datum	Beobachter	Pendel	Beobachtet: Dauer einer Coincidenz	Amplitude	Temperatur (Celsius)	Luftdruck, in Millimeter	Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen: Amplitude	Temperatur	Luftdichte	Uhrgang	[illegible]	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
								in Einheiten der 7. Decimale						
[illegible]	[illegible]	VIII	[illegible]	[illegible]	[illegible]	759·1 mm	[illegible]	— 4	— 773	— 482	+142	— 6	0·5080253	
		X	34·926	[illegible]	15·25	759·1	[illegible]	— 4	— 784	— 517	+145	— 7	0·5072791	
	[illegible]	IX	[illegible]	[illegible]	15·45	759·9	0·5083765	— 3	— 800	— 508	+145	— 12	0·5082402	18·0
		XI	[illegible]	13·7	15·50	759·8	0·5079817	— 4	— 800	— 544	+145	— 8	0·5078501	18·0
[illegible]	[illegible]	VIII	31·247	10·6	15·04	716·6	[illegible]	— 3	— 726	— 482	+145	— 6	0·5080238	
		X	[illegible]	[illegible]	15·15	716·4	[illegible]	— 3	— 729	— 517	+145	— 7	0·5072781	
	[illegible]	IX	[illegible]	[illegible]	14·81	742·8	[illegible]	— 3	— 680	— 501	+145	— 12	0·5082350	13·9
		XI	[illegible]	[illegible]	14·96	742·7	0·5079658	— 2	— 680	— 537	+145	— 8	0·5078567	13·9
10. Juni Nachm.	[illegible]	VIII	[illegible]	[illegible]	14·09	740·7	0·5081238	— 2	— 702	— 499	+145	— 6	0·5080195	13·6
		X	34·591	10·3	14·11	740·5	0·5073801	— 3	— 698	— 535	+145	— 7	0·5072733	13·6
	[illegible]	IX	30·358	12·7	15·11	714·9	0·5083730	— 4	— 737	— 481	+145	— 12	0·5082641	
		XI	31·843	12·7	15·45	714·9	0·5079762	— 4	— 743	— 515	+145	— 8	0·5078637	
11. Juni Vorm.	[illegible]	VIII	31·272	10·3	14·24	741·1	0·5081244	— 3	— 686	— 500	+145	— 6	0·5080195	13·6
		X	34·795	10·8	14·33	741·0	0·5073822	— 3	— 690	— 536	+145	— 7	0·5072731	13·6
	[illegible]	IX	30·359	12·9	15·28	715·3	0·5083727	— 4	— 731	— 481	+145	— 12	0·5082641	
		XI	31·840	13·2	15·38	715·2	0·5079770	— 4	— 740	— 515	+145	— 8	0·5078648	

11. Juni Nachm.	0	VIII	31ᵗ230	12°9	15·64°	714·3 *mm*	0ᵗ5081354	— 4	— 753	— 480	+145	— 6	0ᵗ5080256	
		X	34·307	12·9	15·75	714·2	0·5073949	— 4	— 758	— 514	+145	— 7	0·5072811	
	9	IX	30·388	10·7	14·63	738·7	0·5083645	— 3	— 704	— 498	+145	— 12	0·5082573	13·9
		XI	31·880	10·9	14·41	738·6	0·5079669	— 3	— 693	— 534	+145	— 8	0·5078576	13·8
13. Juni Vorm.	0	VIII	31·225	13·6	15·73	717·0	0·5081366	— 5	— 757	— 481	+145	— 6	0·5080262	
		X	34·308	13·6	15·74	717·2	0·5073947	— 5	— 757	— 516	+145	— 7	0·5072807	
	20	IX	30·345	9·5	18·14	764·6	0·5083765	— 2	— 873	— 509	+145	— 12	0·5082514	17·9
		XI	31·819	11·4	18·24	764·7	0·5079823	— 3	— 878	— 545	+145	— 8	0·5078534	17·9
13. Juni Nachm.	20	VIII	31·210	9·9	18·51	763·3	0·5081407	— 3	— 891	— 507	+145	— 6	0·5080145	17·7
		X	34·286	9·9	18·54	763·6	0·5073994	— 3	— 892	— 544	+145	— 7	0·5072693	17·7
	0	IX	30·346	13·3	15·78	716·0	0·5083764	— 4	— 759	— 481	+145	— 12	0·5082653	
		XI	31·830	13·3	15·87	715·9	0·5079795	— 4	— 764	— 514	+145	— 8	0·5078650	
14. Juni Vorm.	26	VIII	31·184	10·8	20·58	785·7	0·5081475	— 3	— 990	— 518	+145	— 6	0·5080103	20·3
		X	34·254	10·6	20·63	785·8	0·5074066	— 3	— 993	— 555	+145	— 7	0·5072653	20·3
	0	IX	30·348	13·3	15·53	717·4	0·5083759	— 4	— 747	— 482	+145	— 12	0·5082659	
		XI	31·832	13·3	15·65	717·4	0·5079790	— 4	— 753	— 516	+145	— 8	0·5078654	
14. Juni Nachm.	0	VIII	31·228	13·3	15·86	715·8	0·5081360	— 4	— 763	— 481	+145	— 6	0·5080251	
		X	34·302	13·0	15·95	715·4	0·5073960	— 4	— 768	— 514	+145	— 7	0·5072812	
	26	IX	30·310	12·4	20·53	784·2	0·5083864	— 4	— 988	— 517	+145	— 12	0·5082488	20·5
		XI	31·779	12·1	20·55	783·8	0·5079925	— 4	— 989	— 552	+145	— 8	0·5078517	20·4
15. Juni Vorm.	0	VIII	31·232	13·3	15·64	714·5	0·5081349	— 4	— 753	— 480	+145	— 6	0·5080251	
		X	34·310	13·6	15·70	714·6	0·5073942	— 5	— 755	— 514	+145	— 7	0·5072806	
	30	IX	30·261	10·9	24·36	803·3	0·5084004	— 3	—1172	— 521	+145	— 12	0·5082441	23·9
		XI	31·735	12·6	24·34	803·4	0·5080038	— 4	—1171	— 559	+145	— 8	0·5078441	23·9

Datum, Zeit	Station	Nummer des Pendels	Beobachtete: Dauer einer Coincidenz	Beobachtete: Amplitude	Beobachtete: Temperatur (Celsius)	Beobachtete: Luftdruck, reducirt auf 0°	Beobachtete: Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen: Amplitude	Correction wegen: Temperatur	Correction wegen: Luftdichte	Correction wegen: Längen	Correction wegen: Contraction	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
								in Einheiten der 7. Decimale						
1[illegible]. Juni Nachm.	30	VIII	31·126	12·0	24·33	803·0 mm	0·5081632	−4	−1171	−522	+145	−6	0·5080581	25·7
		X	34·178	13·4	24·33	802·9	0·5074252	−4	−1171	−500	+145	−7	0·5072635	25·7
	0	IX	30·[illegible]	18·3	15·82	714·0	0·5083294	−1	−791	−479	+146	−12	0·5082684	
		XI	31·[illegible]	19·1	15·74	714·0	0·5079[illegible]	−4	−757	−514	+145	−8	0·507[illegible]062	
16. Juni Vorm.	30	VIII	31·[illegible]	11·9	26·83	810·6	0·50817[illegible]	−0	−1287	−521	+145	−6	0·5080062	26·2
		X	34·135	10·6	26·80	810·3	0·5074[illegible]	−0	−1290	−559	+145	−7	0·5072614	26·2
	0	IX	30·234	10·3	15·45	712·5	0·5083769	−4	−749	−479	+145	−12	0·5082676	
		XI	31·825	13·3	15·50	702·4	0·5079808	−5	−740	−510	+145	−8	0·5078685	
16. Juni Nachm.	0	VIII	31·217	14·5	15·38	712·4	0·5081368	−6	−739	−479	+145	−6	0·5080292	
		X	34·306	13·6	15·68	712·2	0·5073951	−3	−755	−512	+145	−7	0·5072817	
	32	IX	30·231	11·0	26·55	810·5	0·5084087	−4	−1278	−522	+145	−12	0·5082117	26·2
		XI	31·690	13·2	26·68	810·2	0·5080153	−1	−1284	−559	+145	−8	0·5078443	26·3

Greiferschacht in Kuttenberg

21. Juni Vorm.	0	VIII	31^{s}502	11·6	14·46°	736·1 mm	0^{s}5080640	— 4	— 696	— 497	+635	+ 6	0^{s}5080084	
		X	34·663	11·6	14·66	736·2	0·5073178	— 4	— 705	— 532	+635	+ 6	0·5072578	
	3	IX	30·592	12·6	16·52	763·3	0·5083079	— 4	— 795	— 511	+635	+ 12	0·5082416	15·6
		XI	32·097	12·8	16·59	763·5	0·5079121	— 4	— 798	— 547	+635	+ 8	0·5078415	15·8
21. Juni Nachm.	3	VIII	31·483	12·6	16·75	763·4	0·5080688	— 4	— 806	— 510	+635	+ 6	0·5080009	15·6
		X	34·619	12·8	16·76	762·9	0·5073273	— 4	— 806	— 547	+635	+ 6	0·5072557	15·6
	0	IX	30·562	11·6	17·27	736·1	0·5083161	— 4	— 831	— 492	+635	+ 12	0·5082481	
		XI	32·053	12·3	17·80	735·6	0·5079231	— 4	— 857	— 525	+635	+ 8	0·5078488	
22. Juni Vorm.	2	VIII	31·523	12·6	14·01	752·1	0·5080585	— 4	— 674	— 508	+635	+ 6	0·5080040	13·1
		X	34·670	12·6	14·05	752·0	0·5073163	— 4	— 676	— 545	+635	+ 6	0·5072579	13·1
	0	IX	30·568	11·3	18·02	734·0	0·5083145	— 3	— 867	— 488	+635	+ 12	0·5082434	
		XI	32·041	12·3	18·70	733·7	0·5079262	— 4	— 900	— 522	+635	+ 8	0·5078479	
22. Juni Nachm.	0	VIII	31·363	11·3	21·17	731·6	0·5081003	— 3	—1019	— 481	+635	+ 6	0·5080141	
		X	34·505	11·1	20·50	732·2	0·5073518	— 3	— 986	— 518	+635	+ 6	0·5072652	
	2	IX	30·621	11·1	13·64	750·0	0·5082999	— 5	— 681	— 507	+635	+ 12	0·5082453	13·2
		XI	32·119	12·2	14·07	750·8	0·5079066	— 4	— 677	— 544	+635	+ 8	0·5078484	13·2
23. Juni Vorm.	0	VIII	31·428	11·6	18·72	731·9	0·5080833	— 4	— 901	— 486	+635	+ 6	0·5080083	
		X	34·546	11·6	19·00	731·7	0·5073430	— 4	— 914	— 520	+635	+ 6	0·5072633	
	1	IX	30·667	10·0	12·19	741·3	0·5082872	— 3	— 587	— 504	+635	+ 12	0·5082425	11·7
		XI	32·160	9·9	12·37	741·0	0·5078964	— 3	— 595	— 540	+635	+ 8	0·5078469	11·6

[illegible]	[illegible]	[illegible]	Beobachtet.					Correction wegen					Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
			Dauer von ... Vorübergänge	Amplitude	Temperatur Celsius	Luftdruck, reducirt auf 0°	Dauer einer Pendelschwingung	Amplitude	Temperatur	Luftdichte	Uhrgang	Continuation		
								in Einheiten der 7. Decimale						
[illegible]	[illegible]	VIII	31·226	12·9	12·57	742·1 mm	0·5080178	−3	−619	−503	+635	+6	0·5080092	11·6
		X	34·086	12·7	12·95	742·0	0·5073129	−4	−623	−545	+635	+6	0·5072598	11·6
	[illegible]	IX	30·540	11·3	18·91	731·2	0·5083222	−6	−910	−487	+635	+12	0·5082469	
		XI	32·024	11·0	18·91	731·3	0·5079301	−4	−910	−522	+635	+8	0·5078508	
[illegible]	[illegible]	VIII	31·542	12·8	12·45	747·2	0·5080583	−5	−509	−508	+635	+6	0·5080062	11·6
		X	34·505	12·7	12·58	747·1	0·5073104	−4	−605	−544	+635	+6	0·5072592	11·6
	[illegible]	IX	30·608	11·8	15·11	738·2	0·5082035	−4	−727	−490	+635	+12	0·5082455	
		XI	32·099	11·0	15·23	738·2	0·5079116	−4	−733	−532	+635	+8	0·5078490	
24. Juni Nachm.	0	VIII	31·440	11·3	18·00	735·2	0·5080786	−3	−866	−459	+635	+6	0·5080069	
		X	34·566	9·8	18·58	734·8	0·5073387	−3	−894	−623	+635	+6	0·5072608	
	1	IX	30·653	9·7	12·60	744·5	0·5082910	−3	−606	−506	+635	+12	0·5082442	11·6
		XI	32·149	9·9	12·60	744·2	0·5078992	−3	−606	−541	+635	+8	0·5078485	11·5
25. Juni Vorm.	0	VIII	31·465	11·3	16·82	733·2	0·5080735	−3	−809	−491	+635	+6	0·5080073	
		X	34·595	11·8	17·06	733·1	0·5373321	−4	−821	−525	+635	+6	0·5072615	
	2	IX	30·637	12·2	13·75	751·5	0·5082954	−4	−662	−508	+635	+12	0·5082427	13·2
		XI	32·133	11·9	13·75	751·4	0·5079031	−4	−662	−545	+635	+8	0·5078463	13·2

25. Juni Nachm.	2	VIII	31ᵐ509	14°0	11·15°	749·1 *mm*	0ˢ5080621	— 5	— 681	— 506	+635	+ 6	0ˢ5080070	13·1
		X	34·658	15·4	14·14	749·0	0·5073199	— 6	— 680	— 542	+635	+ 6	0·5072603	13·1
	0	IX	30·530	11·3	20·30	731·2	0·5083251	— 3	— 977	— 482	+635	+ 12	0·5082436	
		XI	31·997	12·1	20·81	731·0	0·5079373	— 4	—1001	— 516	+635	+ 8	0·5078495	
26. Juni Vorm.	3	VIII	31·481	13·4	16·40	757·0	0·5080694	— 4	— 789	— 507	+635	+ 6	0·5080035	15·4
		X	34·618	13·2	16·40	757·0	0·5073275	— 4	— 789	— 543	+635	+ 6	0·5072580	15·4
	0	IX	30·535	11·3	19·12	730·2	0·5083237	— 3	— 920	— 485	+635	+ 12	0·5082476	
		XI	32·021	11·6	19·28	729·7	0·5079312	— 4	— 928	— 518	+635	+ 8	0·5078505	
26. Juni Nachm.	0	VIII	31·355	11·8	22·09	726·1	0·5081025	— 4	—1063	— 476	+635	+ 6	0·5080123	
		X	34·469	11·3	22·49	725·5	0·5073596	— 3	—1082	— 509	+635	+ 6	0·5072643	
	3	IX	30·502	12·3	16·38	754·2	0·5083080	— 4	— 788	— 506	+635	+ 12	0·5082429	15·6
		XI	32·092	12·3	16·25	753·1	0·5079134	— 4	— 781	— 540	+635	+ 8	0·5078452	15·6

Franzschacht in Idria

24. Octob. Vorm.	0	VIII	30ᵐ441	13°1	15·25°	741·8 *mm*	0ˢ5083498	— 5	— 734	— 499	—1253	+ 18	0ˢ5081025	
		X	33·358	14·3	15·30	742·0	0·5076085	— 5	— 736	— 535	—1253	+ 19	0·5073575	
	5	IX	29·599	10·8	16·66	765·8	0·5085914	— 3	— 801	— 512	—1253	+ 36	0·5083373*	15·6
		XI	30·986	11·5	16·83	766·1	0·5082005	— 4	— 810	— 548	—1253	+ 21	0·5079403*	15·6
[illegible] Octob. Nachm.	5	VIII	30·405	10·9	16·84	763·1	0·5083598	— 3	— 810	— 510	—1253	+ 18	0·5081032*	15·6
		X	33·320	10·9	16·89	763·4	0·5076174	— 3	— 813	— 546	—1253	+ 19	0·5073570*	15·6
	0	IX	29·621	11·6	15·07	739·1	0·5085849	— 4	— 725	— 497	—1253	+ 36	0·5083406	
		XI	31·010	14·1	15·19	739·2	0·5081940	— 5	— 731	— 533	—1253	+ 21	0·5079439	

* Die Correction wegen des Mitschwingens des Pfeilers im Betrage von —8 Einheiten der 7. Decimale ist bereits angebracht.

Datum 1888	Station	Nummer des Pendels	Beobachtete: Dauer einer Coincidenz	Beobachtete: Amplitude	Beobachtete: Temperatur (Celsius)	Beobachtete: Luftdruck, reducirt auf 0°	Beobachtete: Dauer einer Pendel-schwingung	Correction wegen (in Einheiten der 7. Decimale): Amplitude	Correction wegen: Temperatur	Correction wegen: Luftdichte	Correction wegen: Uhrgang	Correction wegen: Contraction	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
25. Octob. Vorm.	1	VIII	30ˢ413	10'3	16·45°	751·9 mm	0ˢ5083576	— 3	— 792	— 503	—1253	+ 18	0ˢ5081043	15·8
		X	33·331	12·3	16·53	752·3	0·5076148	— 4	— 795	— 540	—1253	+ 19	0·5073575	15·8
	0	IX	29·031	13·1	14·21	737·0	0·5085820	— 5	— 684	— 497	—1253	+ 36	0·5083417	
		XI	31·023	13·1	14·34	737·2	0·5081906	— 5	— 689	— 533	—1253	+ 21	0·5079447	
25. Octob. Nachm.	0	VIII	30·429	13·3	15·19	735·3	0·5083531	— 5	— 731	— 495	—1253	+ 18	0·5081065	
		X	33·348	14·2	15·23	735·7	0·5076109	— 5	— 733	— 530	—1253	+ 19	0·5073607	
	1	IX	29·586	10·0	16·45	750·2	0·5085952	— 3	— 791	— 502	—1253	+ 36	0·5083439	15·9
		XI	30·980	11·0	16·52	750·8	0·5082021	— 3	— 795	— 539	—1253	+ 21	0·5079452	15·8
26. Octob. Vorm.	0	VIII	30·444	14·2	14·66	739·0	0·5083489	— 5	— 705	— 497	—1253	+ 18	0·5081047	
		X	33·363	14·0	14·70	739·4	0·5076071	— 5	— 707	— 534	—1253	+ 19	0·5073594	
	3	IX	29·454	7·8	25·07	754·0	0·5086344	— 2	—1202	— 488	—1253	+ 36	0·5083428*	24·9
		XI	30·830	10·1	25·12	754·0	0·5082426	— 3	—1209	— 523	—1253	+ 21	0·5079452*	25·0

26. Octob. Nachm.	3	VIII	30ˢ268	11°9	25·01°	753·4 mm	0ˢ5083983	— 4	—1203	— 488	—1253	+ 18	0ˢ5081046*	24·9
		X	33·152	13·9	25·09	754·2	0·5076565	— 5	—1207	— 523	—1253	+ 19	0·5073589*	24·9
	0	IX	29·618	11·8	14·67	738·7	0·5085858	— 4	— 705	— 497	—1253	+ 36	0·5083435	
		XI	31·013	13·3	14·75	739·3	0·5081932	— 5	— 709	— 535	—1253	+ 21	0·5079451	
27. Octob. Vorm.	2	VIII	30·388	12·0	17·93	750·5	0·5083646	— 4	— 863	— 499	—1253	+ 18	0·5081045	17·1
		X	33·300	13·1	17·87	750·9	0·5076220	— 5	— 860	— 541	—1253	+ 19	0·5073580	17·0
	0	IX	29·627	13·2	13·99	739·8	0·5085831	— 5	— 673	— 500	1253	+ 36	0·5083436	
		XI	31·021	14·6	14·09	740·3	0·5081911	— 6	— 678	— 536	—1253	+ 21	0·5079459	
27. Octob. Nachm.	0	VIII	30·426	14·3	14·95	738·7	0·5083539	— 5	— 719	— 497	—1253	+ 18	0·5081083	
		X	33·350	13·9	14·92	739·2	0·5076104	— 5	— 718	— 533	—1253	+ 19	0·5073614	
	2	IX	29·566	12·0	17·80	749·3	0·5086012	— 4	— 856	— 498	—1253	+ 36	0·5083437	17·2
		XI	30·957	11·8	17·82	749·8	0·5082083	— 4	— 857	— 535	—1253	+ 21	0·5079455	17·1
29. Octob. Vorm.	0	VIII	30·444	13·6	14·01	737·8	0·5083489	— 5	— 674	— 498	—1253	+ 18	0·5081077	
		X	33·367	14·8	14·09	738·0	0·5076065	— 6	— 678	— 534	—1253	+ 19	0·5073613	
	1	IX	29·646	11·8	12·44	738·6	0·5085775	— 4	— 598	— 502	—1253	+ 36	0·5083454	11·2
		XI	31·042	13·0	12·54	738·9	0·5081855	— 5	— 603	— 538	—1253	+ 21	0·5079477	11·1

* Die Correction wegen des Mitschwingens des Pfeilers im Betrage von −7 Einheiten der 7. Decimale ist bereits angebracht.

Datum 1898	Station	Nummer des Pendels	Beobachtete: Dauer einer Coincidenz	Beobachtete: Amplitude	Beobachtete: Temperatur (Celsius)	Beobachtete: Luftdruck, reducirt auf 0°	Beobachtete: Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen (in Einheiten der 7. Decimale): Amplitude	Correction wegen: Temperatur	Correction wegen: Luftdichte	Correction wegen: Übergang	Correction wegen: Contraction	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
29. Octob. Nachm.	1	VIII	$30^{s}459$	13·9	12·95°	736·4 *mm*	$0^{s}5083447$	— 5	— 623	— 499	—1253	+ 18	$0^{s}5081085$	11·1
		X	33·388	15·1	12·95	736·4	0·5076016	— 6	— 623	— 535	—1253	+ 19	0·5073618	11·1
	0	IX	29·623	13·5	14·29	735·8	0·5085842	— 5	— 687	— 496	—1253	+ 36	0·5083437	
		XI	31·007	15·0	14·46	735·9	0·5081949	— 6	— 696	— 532	—1253	+ 21	0·5079483	
30. Octob. Vorm.	1	VIII	30·466	11·0	12·49	734·5	0·5083427	— 3	— 601	— 499	—1253	+ 18	0·5081089	11·1
		X	33·393	13·6	12·65	734·8	0·5076004	— 5	— 608	— 535	—1253	+ 19	0·5073622	11·2
	2	IX	29·562	12·0	17·61	744·2	0·5086023	— 4	— 847	— 496	—1253	+ 36	0·5083459	17·3
		XI	30·947	13·3	17·54	744·8	0·5082110	— 5	— 844	— 532	—1253	+ 21	0·5079407	17·1
30. Octob. Nachm.	2	VIII	30·365	17·1	18·14	744·1	0·5083710	— 7	— 873	— 495	—1253	+ 18	0·5081100	16·9
		X	33·281	12·6	18·04	744·2	0·5076266	— 5	— 868	— 530	—1253	+ 19	0·5073629	17·0
	1	IX	29·645	11·5	12·28	735·2	0·5085777	— 4	— 590	— 500	—1253	+ 36	0·5083466	11·3
		XI	31·041	12·0	12·40	735·3	0·5081857	— 4	— 596	— 536	—1253	+ 21	0·5079489	11·2

31. Octob. Vorm.	2	VIII	30·376	11·2	17·64°	743·3 mm	0·5083679	— 3	— 849	— 495	—1253	+ 18	0·5081097	17·0
		X	33·286	11·6	17·74	743·7	0·5076253	— 4	— 854	— 532	—1253	+ 19	0·5073620	17·0
	0	IX	29·613	13·2	14·43	733·3	0·5085872	— 5	— 694	— 495	—1253	+ 36	0·5083461	
		XI	31·006	14·0	14·31	733·8	0·5081951	— 5	— 688	— 532	—1253	+ 21	0·5079494	
31. Octob. Nachm.	0	VIII	30·425	14·6	14·75	733·5	0·5083542	— 6	— 710	— 494	—1253	+ 18	0·5081097	
		X	33·346	14·6	14·78	733·6	0·5076113	— 6	— 711	— 530	—1253	+ 19	0·5073632	
	2	IX	29·564	11·5	17·80	743·4	0·5086017	— 4	— 856	— 495	—1253	+ 36	0·5083445	17·2
		XI	30·952	13·5	17·78	743·9	0·5082096	— 5	— 855	— 530	—1253	+ 21	0·5079474	17·1
1. Novbr. Vorm.	2	VIII	30·380	15·6	17·87	741·9	0·5083668	— 7	— 860	— 494	—1253	+ 18	0·5081072	17·0
		X	33·287	11·6	17·82	742·2	0·5076249	— 4	— 857	— 530	—1253	+ 19	0·5073624	17·0
	3	IX	29·448	11·4	24·89	746·5	0·5086362	— 3	—1198	— 484	—1253	+ 36	0·5083453*	25·0
		XI	30·827	9·7	25·00	746·5	0·5082435	— 3	—1203	— 519	—1253	+ 21	0·5079471*	25·1
1. Novbr. Nachm.	3	VIII	30·261	14·3	24·88	744·5	0·5084002	— 5	—1196	— 482	—1253	+ 18	0·5081077*	24·9
		X	33·145	13·3	25·01	744·8	0·5076581	— 5	—1204	— 517	—1253	+ 19	0·5073614*	24·8
	2	IX	29·559	12·3	17·73	740·5	0·5086032	— 4	— 853	— 493	—1253	+ 36	0·5083465	17·4
		XI	30·950	13·3	17·78	740·7	0·5082101	— 5	— 855	— 529	—1253	+ 21	0·5079480	17·4

* Die Correction wegen des Mitschwingens des Pfeilers im Betrage von —7 Einheiten der 7. Decimale ist bereits angebracht.

Datum 1898	Station	Nummer des Pendels	Beobachtete: Dauer einer Coincidenz	Beobachtete: Amplitude	Beobachtete: Temperatur (Celsius)	Beobachtete: Luftdruck, reducirt auf 0°	Beobachtete: Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen (in Einheiten der 7. Decimale): Amplitude	Correction wegen: Temperatur	Correction wegen: Luftdichte	Correction wegen: Uhrgang	Correction wegen: Contraction	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
2. Novbr. Vorm.	3	VIII	30·266	10·1	25·00°	746·7 mm	0·5083988	−3	−1203	−485	−1253	+18	0·5081055*	24·8
		X	33·144	12·8	25·13	747·9	0·5076584	−5	−1209	−519	−1253	+19	0·5073610	24·9
	4	IX	29·587	10·3	16·35	746·9	0·5085949	−3	−786	−500	−1253	+36	0·5083443	15·9
		XI	30·982	13·0	16·42	748·4	0·5082016	−5	−790	−537	−1253	+21	0·5079452	16·0
2. Novbr. Nachm.	4	VIII	30·389	11·8	16·71	752·7	0·5083643	−4	−804	−504	−1253	+18	0·5081096	15·9
		X	33·311	10·5	16·65	753·2	0·5076194	−3	−801	−545	−1253	+19	0·5073611	15·9
	3	IX	29·432	10·8	25·50	752·4	0·5086410	−3	−1227	−487	−1253	+36	0·5083469*	25·0
		XI	30·816	12·1	25·55	753·3	0·5082465	−4	−1229	−522	−1253	+21	0·5079471*	25·0
3. Novbr. Vorm.	4	VIII	30·401	10·5	16·49	754·1	0·5083612	−3	−793	−505	−1253	+18	0·5081076	15·8
		X	33·315	10·3	16·54	754·3	0·5076185	−3	−796	−541	−1253	+19	0·5073611	15·9
	5	IX	29·575	11·3	16·57	762·2	0·5085984	−3	−797	−510	−1253	+36	0·5083449**	15·6
		XI	30·968	11·3	16·69	762·8	0·5082054	−3	−803	−547	−1253	+21	0·5079461**	15·6

3. Novbr. Nachm.	5	VIII	30·385	13·2	16·95°	761·0 mm	0·5083654	— 5	— 816	— 508	—1253	+ 18	0·5081082**	15·6
		X	33·291	11·9	16·89	761·0	0·5076240	— 4	— 813	— 545	—1253	+ 19	0·5073636**	15·6
	4	IX	29·587	11·2	16·40	752·1	0·5085949	— 3	— 789	— 504	—1253	+ 36	0·5083436	16·0
		XI	30·974	12·7	16·47	752·2	0·5082038	— 5	— 792	— 540	—1253	+ 21	0·5079469	16·0
4. Novbr. Vorm.	5	VIII	30·405	12·4	16·66	758·7	0·5083598	— 4	— 802	— 507	—1253	+ 18	0·5081042**	15·6
		X	33·302	11·6	16·71	759·0	0·5076215	— 4	— 804	— 544	—1253	+ 19	0·5073621**	15·6
	1	IX	29·649	11·5	11·96	736·2	0·5085766	— 4	— 575	— 501	—1253	+ 36	0·5083469	10·9
		XI	31·053	11·7	12·01	736·2	0·5081825	— 4	— 578	— 537	—1253	+ 21	0·5079474	11·0
[illegible] Novbr. Nachm.	1	VIII	30·456	11·2	12·75	734·8	0·5083455	— 3	— 613	— 500	—1253	+ 18	0·5081104	11·0
		X	33·381	9·6	12·44	735·1	0·5076032	— 3	— 598	— 536	—1253	+ 19	0·5073661	10·9
	1	IX	29·573	10·3	16·40	757·3	0·5085990	— 3	— 793	— 507	—1253	+ 36	0·5083462**	15·7
		XI	30·966	11·3	16·71	757·6	0·5082059	— 3	— 804	— 543	—1253	+ 21	0·5079469**	15·6

Wien, militär-geographisches Institut, nach der Rückkunft

[illegible] Dec. Nachm.		VIII	31·237	13·[illegible]	9·80°	756·0 mm	0·5081335	— 4	— 172	— 518	+ 3	+ 30	0·5080374	
		X	34·302	12·[illegible]	10·70	755·8	0·5073966	— 4	— 515	— 554	+ 3	+ 34	0·5072924	
[illegible] Dec. Nachm.		IX	30·368	14·0	10·00	746·8	0·5083702	— 5	— 481	— 542	+ 3	+ 61	0·5082768	
		XI	31·831	14·8	9·70	747·7	0·5079793	— 6	— 467	— 550	+ 3	+ 34	0·5078867	

* Die Correction wegen des Mitschwingens des Pfeilers im Betrage von —7 Einheiten der 7. Decimale ist bereits angebracht.

** Die Correction wegen des Mitschwingens des Pfeilers im Betrage von —8 Einheiten der 7. Decimale ist bereits angebracht.

Datum	Nummer des Pendels	Beobachtete: Dauer einer Coincidenz	Beobachtete: Amplitude	Beobachtete: Temperatur (Celsius)	Beobachtete: Luftdruck (reducirt auf 0°)	Beobachtete: Dauer einer Pendelschwingung	Correction wegen: Amplitude	Correction wegen: Temperatur	Correction wegen: Luftdichte	Correction wegen: Übergang	Correction wegen: Contraction	Schwingungsdauer in Sternzeit	Gesteinstemperatur
							in Einheiten der 7. Decimale						
[illegible] Nachm.	VIII	31·233	12·8	10·25°	740·3 mm	0·5081345	− 4	− 493	− 507	+ 7	+ 30	0·5080378	
[illegible] Nachm.	X	34·316	12·3	10·20	740·5	0·5073930	− 4	− 491	− 543	+ 7	+ 34	0·5072933	
[illegible] Nachm.	IX	30·373	15·1	9·70	726·1	0·5083688	− 6	− 467	− 499	+ 7	+ 61	0·5082784	
	XI	31·843	14·5	9·85	726·0	0·5079762	− 6	− 474	− 533	+ 7	+ 34	0·5078790	
4. Jann. Nachm.	VIII	31·220	13·1	10·70	749·1	0·5081380	− 4	− 515	− 512	+ 21	+ 30	0·5080400	
	X	34·313	13·4	10·20	750·1	0·5073936	− 4	− 491	− 550	+ 21	+ 34	0·5072946	
5. Jann. Nachm.	IX	30·373	21·8	9·25	755·9	0·5083688	− 13	− 445	− 519	+ 21	+ 61	0·5082793	
	XI	31·844	13·7	9·50	756·0	0·5079760	− 5	− 457	− 557	+ 21	+ 34	0·5078796	
7. Jann. Nachm.	VIII	31·226	12·8	9·85	754·0	0·5081365	− 4	− 474	− 517	+ 21	+ 30	0·5080421	
	X	34·304	10·0	9·80	754·0	0·5073956	− 3	− 472	− 554	+ 21	+ 34	0·5072982	
9. Jann. Nachm.	IX	30·371	10·3	9·70	752·1	0·5083693	− 3	− 467	− 516	+ 21	+ 61	0·5082789	
	XI	31·847	12·3	9·50	756·0	0·5079753	− 4	− 457	− 557	+ 21	+ 34	0·5078790	

Tabelle III. Ableitung der Resultate.

1. Wernerschacht in Joachimsthal.

A. Zusammenstellung der gleichzeitig beobachteten Schwingungszeiten (nur die 4 letzten Decimalen).

Datum 1898	Nr.	Elias		Ober Tags	1. Station		2. Station		3. Station	
19. Mai, Nachmittags	1	VIII	0357						IX	2703
	2	X	2916						XI	8717
20. » Vormittags	3	VIII	0357				IX	2851		
	4	X	2906				XI	8838		
20. » Nachmittags	5	VIII	0340		IX	2767				
	6	X	2924		XI	8774				
21. » Vormittags	7	VIII	0350		IX	2746				
	8	X	2905		XI	8761				
21. » Nachmittags	9	VIII	0348				IX	2787		
	10	X	2908				XI	8782		
22. » Vormittags	11	VIII	0336						IX	2695
	12	X	2903						XI	8714
23. » Nachmittags	13	IX	2767						VIII	0318
	14	XI	8768						X	2870

Datum 1898	Nr.	Elias		Ober Tags		1. Station		2. Station		3. Station	
24. Mai, Vormittags	15	IX	2759					VIII	0421		
	16	XI	8773					X	2983		
24. „ Nachmittags	17	IX	2763			VIII	0363				
	18	XI	8773			X	2932				
25. „ Vormittags	19	IX	2764			VIII	0375				
	20	XI	8775			X	2922				
25. „ Nachmittags	21	IX	2766					VIII	0416		
	22	XI	8774					X	2964		
26. „ Vormittags	23	IX	2767							VIII	0335
	24	XI	8774							X	2884
26. „ Nachmittags	25	IX	2793	VIII	0429						
	26	XI	8788	X	2958						
27. „ Vormittags	27	IX	2771	VIII	0426						
	28	XI	8777	X	2955						
	29	VIII	0361	IX	2798						
	30	X	2901	XI	8822						
27. „ Nachmittags	31	VIII	0365	IX	2799						
	32	X	2911	XI	8833						

B. **Unterschiede der paarweise vereinigten Beobachtungen in Einheiten der 7. Decimale der Schwingungszeit.**

Nummer der Beobachtungen, welche gemittelt wurden	Hilfsstation Elias	Ober Tags	1. Station	2. Station	3. Station
1 und 13	0				— 52
2 » 14	0				— 48
3 » 15	0			+ 78	
4 » 16	0			+ 70	
5 » 17	0		+ 13		
6 » 18	0		+ 4		
7 » 19	0		+ 4		
8 » 20	0		+ 2		
9 » 21	0			+ 45	
10 » 22	0			+ 32	
11 » 23	0				— 37
12 » 24	0				— 40
25 » 29	0	+ 37			
26 » 30	0	+ 45			
27 » 31	0	+ 45			
28 » 32	0	+ 48			
Mittel	0	+ 44 ± 2	+ 6 ± 2	+ 56 ± 11	— 44 ± 4

C. **Schwingungszeiten des mittleren Pendels $\frac{1}{4}$ (VIII + IX + X + XI):**

	0ˢ5078703	8747	8709	8759	8659

2. Adalbertschacht in Příbram.

A. Zusammenstellung der gleichzeitig beobachteten Schwingungszeiten (nur die 4 letzten Decimalen)

Datum 1898	Nr	Ober Tags	1. Station	2. Station	3. Station	4. Station	5. Station
6. Juni, Vormittags	1	VIII 0235					IX 2404
	2	X 2792					XI 8396
6. „ Nachmittags	3	IX 2673					VIII 9997
	4	XI 8654					X 2578
7. „ Vormittags	5	IX 2641				VIII 0064	
	6	XI 8638				X 2574	
7. „ Nachmittags	7	VIII 0240				IX 2399	
	8	X 2785				XI 8419	
8. „ Vormittags	9	VIII 0233			IX 2448		
	10	X 2785			XI 8519		
8. „ Nachmittags	11	IX 2628			VIII 0098		
	12	XI 8627			X 2638		
9. „ Vormittags	13	IX 2619		VIII 0100			
	14	XI 8614		X 2689			
9. „ Nachmittags	15	VIII 0253		IX 2492			
	16	X 2791		XI 8501			

10. » Vormittags.....	17	VIII	0236	IX	2550								
	18	X	2781	XI	8567								
10. » Nachmittags ...	19	IX	2641	VIII	0195								
	20	XI	8637	X	2733								
11. » Vormittags.....	21	IX	2641	VIII	0195								
	22	XI	8648	X	2731								
11. » Nachmittags ...	23	VIII	0256	IX	2573								
	24	X	2811	XI	8576								
13. » Vormittags.....	25	VIII	0262			IX	2514						
	26	X	2807			XI	8534						
13. » Nachmittags ...	27	IX	2654			VIII	0145						
	28	XI	8650			X	2693						
14. » Vormittags.....	29	IX	2659					VIII	0103				
	30	XI	8654					X	2653				
14. » Nachmittags ...	31	VIII	0251					IX	2488				
	32	X	2812					XI	8517				
15. » Vormittags.....	33	VIII	0251							IX	2441		
	34	X	2806							XI	8441		
15. » Nachmittags ...	35	IX	2683							VIII	0081		
	36	XI	8662							X	2635		
16. » Vormittags.....	37	IX	2676									VIII	0062
	38	XI	8685									X	2614
16. » Nachmittags ...	39	VIII	0292									IX	2417
	40	X	2817									XI	8443

B. **Unterschiede der paarweise vereinigten Beobachtungen in Einheiten der 7. Decimale der Schwingungszeit.**

Nummer der Beobachtungen, welche gemittelt wurden	Ober Tags	1. Station	2. Station	3. Station	4. Station	5. Station
1 und 3	0					—254
2 » 4	0					—236
5 » 7	0				—208	
6 » 8	0				—214	
9 » 11	0			—157		
10 » 12	0			—128		
13 » 15	0		—140			
14 » 16	0		—108			
17 » 19	0	— 66				
18 » 20	0	— 59				
21 » 23	0	— 65				
22 » 24	0	— 76				
25 » 27	0		—128			
26 » 28	0		—115			
29 » 31	0			—159		
30 » 32	0			—148		
33 » 35	0				—206	
34 » 36	0				—196	
37 » 39	0					—244
38 » 40	0					—222
Mittel	0	— 67 ± 3	—123 ± 7	—148 ± 7	—206 ± 4	—239 ± 7

C. **Schwingungszeiten des mittleren Pendels $\frac{1}{4}$ (VIII+IX+X+XI):**

0^{s}5078587	8520	8464	8439	8381	8348

3. Greiferschacht in Kuttenberg.

A. Zusammenstellung der gleichzeitig beobachteten Schwingungszeiten (aus den 4 letzten Decimalen).

Datum 1898	Nr.	Ober Tags		1. Station		2. Station		3. Station	
21. Juni, Vormittags	1	VIII	0084					IX	2416
	2	X	2578					XI	8415
21. » Nachmittags	3	IX	2481					VIII	0009
	4	XI	8488					X	2557
22. » Vormittags	5	IX	2434			VIII	0040		
	6	XI	8479			X	2579		
22. » Nachmittags	7	VIII	0141			IX	2453		
	8	X	2652			XI	8484		
23. » Vormittags	9	VIII	0083	IX	2425				
	10	X	2633	XI	8469				
23. » Nachmittags	11	IX	2469	VIII	0092				
	12	XI	8508	X	2598				
24. » Vormittags	13	IX	2455	VIII	0062				
	14	XI	8490	X	2592				
24. » Nachmittags	15	VIII	0069	IX	2442				
	16	X	2608	XI	8485				
25. » Vormittags	17	VIII	0073			IX	2427		
	18	X	2615			XI	8463		
25. » Nachmittags	19	IX	2436			VIII	0070		
	20	XI	8495			X	2603		
26. » Vormittags	21	IX	2476					VIII	0035
	22	XI	8505					X	2580
26. » Nachmittags	23	VIII	0123					IX	2429
	24	X	2643					XI	8452

B. **Unterschiede der paarweise vereinigten Beobachtungen in Einheiten der 7. Decimale der Schwingungszeit.**

Nummer der Beobachtungen, welche gemittelt werden	Ober Tags	1. Station	2. Station	3. Station
1 und 3	0			— 70
2 » 4	0			— 70
5 » 7	0		— 41	
6 » 8	0		— 34	
9 » 11	0	— 17		
10 » 12	0	— 37		
13 » 15	0	— 10		
14 » 16	0	— 10		
17 » 19	0		— 6	
18 » 20	0		— 22	
21 » 23	0			— 68
22 » 24	0			— 58
Mittel........	0	— 19 ± 6	— 26 ± 8	— 61 ± 5

C. **Schwingungszeiten des mittleren Pendels $\frac{1}{4}$ (VIII+IX+X+XI):**

	0s5078418	8399	8392	8357

4. Franzschacht in Idria.

A. **Zusammenstellung der gleichzeitig beobachteten Schwingungszeiten (nur die 4 letzten Decimalen).**

Datum 1898	Nr.	Observatorium ober Tags	1. Station	2. Station	3. Station	4. Station	5. Station
24. October, Vormittags . . .	1	VIII 1025					IX 3373
	2	X 3575					XI 9403
24. » Nachmittags .	3	IX 3406					VIII 1032
	4	XI 9439					X 3570
25. » Vormittags . . .	5	IX 3417				VIII 1043	
	6	XI 9447				X 3575	
25. » Nachmittags .	7	VIII 1065				IX 3439	
	8	X 3607				XI 9452	
26. » Vormittags . . .	9	VIII 1047			IX 3428		
	10	X 3594			XI 9452		
26. » Nachmittags .	11	IX 3435			VIII 1046		
	12	XI 9451			X 3589		
27. » Vormittags. . .	13	IX 3436		VIII 1045			
	14	XI 9459		X 3580			
27. » Nachmittags .	15	VIII 1083		IX 3437			
	16	X 3614		XI 9455			
29. » Vormittags . .	17	VIII 1077	IX 3454				
	18	X 3613	XI 9477				
29. » Nachmittags .	19	IX 3437	VIII 1085				
	20	XI 9483	X 3618				

Datum 1898	Nr.	Observatorium ober Tags	1. Station	2. Station	3. Station	4. Station	5. Station
30. October, Vormittags . . .	21		VIII 1089	IX 3459			
	22		X 3622	XI 9497			
30. » Nachmittags . .	23		IX 3466	VIII 1100			
	24		XI 9489	X 3629			
31. » Vormittags . . .	25	IX 3461		VIII 1097			
	26	XI 9494		X 3629			
31. » Nachmittags . .	27	VIII 1097		IX 3445			
	28	X 3632		XI 9474			
1. November, Vormittags .	29			VIII 1072	IX 3453		
	30			X 3624	XI 9471		
1. » Nachmittags	31			IX 3465	VIII 1077		
	32			XI 9480	X 3614		
2. » Vormittags .	33				VIII 1055	IX 3443	
	34				X 3610	XI 9452	
2. » Nachmittags	35				IX 3469	VIII 1096	
	36				XI 9471	X 3611	
3. » Vormittags .	37					VIII 1076	IX 3449
	38					X 3611	XI 9461
3. » Nachmittags	39					IX 3436	VIII 1082
	40					XI 9469	X 3636
4. » Vormittags .	41		IX 3469				VIII 1042
	42		XI 9474				X 3621
4. » Nachmittags	43		VIII 1104				IX 3462
	44		X 3661				XI 9469

B. **Unterschiede der paarweise vereinigten Beobachtungen in Einheiten der 7. Decimale der Schwingungszeit.**

Nummer der Beobachtungen, welche gemittelt wurden	Observatorium ober Tags	1. Station	2. Station	3. Station	4. Station	5. Station
1 und 3	0					—13
2 » 4	0					—20
5 » 7	0				0	
6 » 8	0				—13	
9 » 11	0			— 4		
10 » 12	0			— 2		
13 » 15	0		—19			
14 » 16	0		—19			
17 » 19	0	+13				
18 » 20	0	0				
21 » 23		0	+ 2			
22 » 24		0	+ 7			
25 » 27	0		— 8			
26 » 28	0		—11			
29 » 31			0	— 4		
30 » 32			0	— 9		
33 » 35				0	+ 8	
34 » 36				0	— 9	
37 » 39					0	+10
38 » 40					0	+ 9
41 » 43		0				—35
42 » 44		0				—23
Ausgeglichene Werthe	0	+ 3 ± 7	— 9 ± 4	— 8 ± 4	—12 ± 5	—16 ± 5

C. **Schwingungszeiten des mittleren Pendels $\frac{1}{4}$ (VIII+IX+X+XI):**

	0ˢ5079397*	9394	9382	9383	9379	9375

* Die Schwingungszeit ober Tags wurde entsprechend dem Höhenunterschiede von 7 *m* zwischen dem Observatorium und dem Tagkranze des Schachtes um 6 Einheiten der 7. Decimale vergrössert.

Temperaturbeobachtungen.

Auf jeder unterirdischen Station wurde sowohl die Temperatur des Gesteines, als auch jene der Luft sorgfältig ermittelt. Gelegentlich des Pfeilerbaues wurde, wie schon erwähnt, in die Seitenwand des Stollens, in der Nähe des Pfeilers, ein Loch von 0·5—0·6 *m* Tiefe ausgebohrt. Bei der Einrichtung des Observatoriums wurde ein Thermometer, welches durch einen Wachsüberzug der Kugel etwas träger gemacht war, an einem Drahte in das Bohrloch eingelassen und letzteres mit einem Pfropfen aus Wolle verstopft.

Bei jedesmaligem Betreten und Verlassen des Observatoriums wurde dieses Thermometer abgelesen.

Die Bestimmung der Lufttemperatur erfolgte gelegentlich der Pendelbeobachtungen.

Beide Temperaturangaben sind der Tabelle II zu entnehmen.

Die Gesteinstemperaturen zeigten sich sehr constant; die kleinen Abweichungen von etwa 0°1 dürften auf Ungenauigkeiten der Thermometerablesungen zurückzuführen sein, da es bei mangelhafter Beleuchtung nicht immer gelang, das Thermometer sofort nach dem Herausziehen aus dem Bohrloche abzulesen.

In der nachfolgenden Tabelle IV finden wir die Resultate der Temperaturbeobachtungen zusammengestellt; desgleichen auch die sich ergebenden geothermischen Tiefenstufen und des besseren Überblickes wegen auch die berechnete Zunahme der Temperatur für je 100 *m*.

Tabelle IV.

Beobachtete Temperaturen auf den unterirdischen Stationen.

Unterirdische Station	Seehöhe	Tiefe	Temperatur der Luft	Temperatur des Gesteins	Geothermische Stufe	Zunahme der Temperatur für 100 *m*
1. Wernerschacht in Joachimsthal						
1. Station..	735·3	182·4	10·4°	10·0°		
					75 *m*	1·33°
2. » ..	615·1	302·6	12·1	11·6		
					24	4·16
3. » ..	502·0	415·7	16·6	16·3		
					37 *m*	2·70°
2. Adalbertschacht in Přibram						
1. Station..	248·5	286·1	14·4°	13·7°		
					63 *m*	1·60°
2. » ..	— 8·5	543·1	18·5	17·8		
					89	1·12
3. » ..	—240·0	774·6	20·6	20·4		
					64	1·55
4. » ..	—464·7	999·3	24·3	23·9		
					43	2·33
5. » ..	—564·7	1099·3	26·7	26·2		
					65 *m*	1·54°
3. Greiferschacht in Kuttenberg						
1. Station..	204·1	100·9	12·6°	11·6°		
					62 *m*	1·60°
2. » ..	104·6	200·4	14·0	13·2		
					42	2·40
3. » ..	4·9	300·1	16·5	15·6		
					50 *m*	2·01°
4. Franzschacht in Idria						
1. Station..	328·7	16·6	12·5°	11·1°		
2. » ..	223·2	122·1	17·8	17·1		
3. » ..	172·5	172·8	25·1	24·9		
4. » ..	170·5	174·8	16·5	15·9		
5. » ..	73·7	271·6	16·8	15·6		
					56 *m*	1·76°

Aus dieser Tabelle entnehmen wir zunächst, dass ausnahmslos die Luft etwas wärmer war als die Gesteine. Die Differenz ist in allen Tiefen eines Bergwerkes ziemlich gleich, jedoch in den einzelnen Bergwerken etwas verschieden. Sie beträgt im Wernerschachte 0°4, im Adalbertschachte 0°5, im Greiferschachte 0°9 und in Idria 0°8; zu beachten ist jedoch hiebei, dass die Lufttemperatur stets in den Observatorien, demnach in ganz abgeschlossenen Räumen beobachtet wurde. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass durch die Anwesenheit des Beobachters und durch die Beleuchtung die Luft im Observatorium etwas erwärmt wurde und bei dem Mangel an Circulation, sowie der nahezu gleichen Temperatur der Felswände, die erhöhte Temperatur behielt.

Bei allen mir bekannten Temperaturbeobachtungen in Bergwerken zeigt sich dieselbe Erscheinung, dass die Luft immer etwas wärmer ist als die Gesteine.

Mit Ausnahme von Idria zeigt sich überall eine Zunahme der Wärme mit der Tiefe; dieselbe ist jedoch sehr verschieden und unregelmässig. Im Allgemeinen werden die Wärmestufen mit der Tiefe geringer. Die grösste Wärmezunahme finden wir im Wernerschachte zwischen der zweiten und dritten Station in einer Tiefe von 360 *m*; sie beträgt 4°16 auf 100 *m*, die kleinste im Adalbertschachte zwischen der zweiten und dritten Station in 650 *m* Tiefe im Betrage 1°12 für 100 *m*.

Geradezu überraschend sind die Temperaturverhältnisse in Idria. Zu- und Abnahme der Temperatur wechseln daselbst bei zunehmender Tiefe ab. Diese auffallende Erscheinung findet ihre Erklärung dadurch, dass in Idria in ein und derselben Tiefe sehr verschiedene Temperaturen angetroffen werden. Wir finden z. B. auf der vierten Station (im 6. Laufe) 15°9 C. und etwa 150 *m* davon entfernt auf der dritten Station in gleicher Tiefe 24°9, demnach um 9° mehr vor. Die vorgefundene Temperatur ist daher lediglich von der Situation der betreffenden Station abhängig.

Herr Schiffslieutenant Scheimpflug, welcher bei den Schwerebestimmungen in Idria als zweiter Beobachter betheiligt war, hat es unternommen, die Temperaturverhältnisse in diesem wenig ausgedehnten Bergbaue festzustellen. Er hat

gemeinschaftlich mit dem Herrn Bergeleven Holler in allen Horizonten an etwa 150 zugänglichen Orten Gesteins- und Lufttemperaturbestimmungen vorgenommen und dieselben mit Hilfe der Grubenkarten verzeichnet. Er war hiedurch im Stande, die Flächen gleicher Temperatur darzustellen und hat constatirt, dass sich im Bereiche des Bergbaues von Idria ein beiläufig linsenförmiger Raum von etwa 200 *m* im Durchmesser und 130 *m* Höhe befindet, in welchem sehr hohe Temperaturen, bis gegen 30°, vorhanden sind, welche gegen die Begrenzung dieses Raumes hin abnehmen und von allen Seiten, auch von oben und unten, von Temperaturen von 15—16° eingeschlossen sind. In diesem Raume befand sich die dritte Beobachtungsstation, während die vierte schon ausserhalb oder nahe seiner Begrenzung gelegen ist. Unabhängig von der Tiefe finden wir daher im Bergwerke von Idria, je nach der Lage der Station, sehr verschiedene Temperaturen vor.

Das Gebiet grosser Wärme steht sichtlich in einem gewissen Zusammenhange mit dem Vorkommen des zinnoberhältigen Schiefers, da die meisten Abbaue sich in diesem Raume befinden. Die Ursache dieser Wärme dürfte daher mit dem chemischen Process bei der Zinnoberbildung im Zusammenhange sein, sie kann jedoch möglicherweise auch daher rühren, dass die Gesteine, wie man annimmt, gegenwärtig noch in Bewegung sind, sich jetzt noch überschieben, falten etc. und dass sich bei dieser Bewegung unter sehr grossem Drucke Wärme entwickelt.

Ich führe diese Möglichkeiten hier an, ohne die Absicht zu haben, fachmännischen Erklärungen für das Vorkommen dieser hohen Temperaturen vorgreifen zu wollen. Ich will nur darlegen, dass diese Art des Vorkommens der Wärme mit der allgemeinen Wärmezunahme, die wir beim Eindringen in die Erde vorfinden, in keinem Zusammenhange steht, sie hat jedoch mit jener in den übrigen Bergwerken immerhin einige Ähnlichkeit, wenn wir annehmen, dass ähnliche Verhältnisse, wie in Idria, überall, wenn auch nur in geringem Maasse, stattfinden. Durch das Vorhandensein derartiger, mehr oder weniger intensiver und entsprechend vertheilter Wärmecentren in der Erde wäre sowohl die verschiedene Wärmezunahme in den ver-

schiedenen Bergwerken und Bohrlöchern, als auch die Ungleichheit der Wärmestufen an einem Orte erklärt.

Die topographische Correction.

Die beobachteten Schwingungszeiten der Pendel, beziehungsweise die aus ihnen abgeleitete Schwere ist in unebenem Terrain von der ungleichmässigen Massenvertheilung in der Umgebung der Schachte beeinflusst. Wir müssen sie von diesem Einflusse befreien, um sie vergleichbar zu machen.

Die umliegenden, unregelmässig vertheilten Bergmassen üben auf die Beobachtungsstationen verschiedene Attractionen aus, deren Beträge nur von der Lage und Grösse dieser störenden Massen abhängig sind und daher in keinem Zusammenhange mit dem Gegenstande unserer Untersuchungen stehen, nämlich mit jener Zunahme der Schwere beim Eindringen unter die Erdoberfläche, die wir beobachten würden, wenn die Gegend im weiten Umkreise des Schachtes eben wäre.

Denken wir uns eine Planirung des Terrains ausgeführt, so müssten alle in Beziehung auf den Tagkranz höher gelegenen Terrainpartien abgetragen, die tiefer liegenden, z. B. die Thäler, hingegen mit Gesteinsmasse ausgefüllt werden.

Durch diese Planirung wird die Schwere am Tagkranze und im Schachte kleine Änderungen erleiden. Auf den Tagkranz haben die höher liegenden Bergmassen vor ihrer Wegnahme eine aufwärts gerichtete Attraction ausgeübt, daher die Schwere verkleinert; durch ihre Wegnahme wird daher die Schwere am Tagkranze etwas vergrössert. Durch die Ausfüllung der Thäler oder tiefer liegenden Partien wird die Schwere am Tagkranze gleichfalls vergrössert, weil die Ausfüllungsmassen tiefer gelegen sind als der Tagkranz und daher eine nach abwärts gerichtete Attraction, im Sinne der Schwere, ausüben.

Auf eine in der Tiefe des Schachtes gelegene Station hingegen üben dieselben Planirungsmassen einen wesentlich anderen Einfluss aus als auf den Tagkranz. Durch die Abtragungen wird die Schwere im Schachte allerdings auch

vergrössert, jedoch in verschiedenem Maasse, weil sowohl die Entfernung dieser Massen, als auch die Richtung der von ihnen ausgeübten Attraction verschieden ist von jener am Tagkranze.

Die Ausfüllungen hingegen befinden sich jetzt oberhalb der unterirdischen Station, sie üben daher eine nach aufwärts gerichtete Attraction aus und verkleinern daher gleichfalls die Schwere.

Die Grösse dieser Einflüsse, welche man die topographische Correction nennt, können wir in ähnlicher Weise berechnen, wie wir es bereits bei vielen Schwerestationen, besonders bei Gebirgsstationen, gethan haben; es sei hier der Vorgang bei der Berechnung in aller Kürze angeführt.

In eine Karte ziehen wir um den Ort des Schachtes zehn concentrische Kreise mit den Halbmessern 0·5, 1, 1·5, 2, 3, 4, 6, 8, 11 und 15 *km*. Durch vier Durchmesser theilen wir diese Kreise in Octanten. Die kleine Fläche des innersten Kreises betrachten wir als eben und in der Höhe des Tagkranzes gelegen. Die Zeichnung stellt uns alsdann neun Kreisringe von verschiedener Breite vor, und die Umgebung des Schachtes erscheint in 72 Flächentheile zerlegt.

Als mittlere Seehöhe h eines jeden dieser Theile nehmen wir das Mittel der darin vorkommenden grössten und kleinsten Höhencote. Ziehen wir von derselben die Seehöhe H des Tagkranzes, durch welchen wir uns eine horizontale Ebene gelegt denken, ab, so erscheint das Terrain im Umkreise von 15 *km* in 72 Hohlcylindertheile von verschiedener Höhe getheilt, deren Dimensionen bekannt sind.

Mit der bekannten Dichte Θ des Gesteines lässt sich die Anziehung A_R, welche jeder dieser 72 Hohlcylindertheile von dem inneren und äusseren Halbmesser r und r_1 und der Höhe $h-H=h_1$ auf einen Punkt im Centrum seiner Basis ausübt, nach dem Ausdrucke für die Anziehung A eines ganzen Hohlcylinders

$$A = \frac{3\Theta g}{2\Theta_m R}\left\{(r_1-r)+\sqrt{r^2+h_1^2}-\sqrt{r_1^2+h_1^2}\right\}$$

berechnen, in welchem für R der mittlere Erdradius $=6,370.000\,m$, für Θ_m die mittlere Dichte der Erde $=5\cdot5$ und für g ein Näherungswerth für die Schwere $=9\cdot805$ zu setzen ist.

Berechnen wir den achten Theil dieser Anziehung und setzen wir für R, Θ und g die eben genannten Werthe, so erhalten wir die Anziehung A_R eines der 72 Flächentheile aus der Gleichung

$$A_R = \frac{1}{8} A = 0\cdot005154\{(r_1-r)+\sqrt{r^2+h^2}-\sqrt{r_1^2+h^2}\}.\Theta. \quad 1)$$

Das Terrain ausserhalb des äussersten dieser Ringe, also in grösserer Entfernung als 15 *km*, denken wir uns planirt und nehmen als Seehöhe H_p dieser Planirung das Mittel der Höhe h der acht Flächentheile des äussersten Ringes. Die Planirungsmassen ausserhalb haben dann die Form einer unendlich ausgedehnten Platte von der Dicke H_p-H mit einem cylindrischen Ausschnitte von $r=15\,km$ im Halbmesser.

Der Ausdruck für die Anziehung A_p, welche eine solche Platte auf einen Punkt im Centrum der Grundfläche des cylindrischen Ausschnittes ausübt, ist

$$A_p = \frac{2(H_p-H)}{R}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\Theta}{\Theta_m}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(H_p-H)}{r}\cdot g$$

und wenn wir für Θ_m, R, r und g wieder die bekannten Werthe einsetzen,

$$A_p = [4\cdot13816-10](H_p-H)^2.\Theta,$$

in welchem die Klammergrösse schon der Logarithmus und Θ die Dichte des Gesteines ist.

Nach den Ausdrücken 1 und 2 können wir die Attraction A_R und A_p, welche die Planirungsmassen auf die Station am Tagkranze des Schachtes ausüben oder die topographische Correction für den Tagkranz berechnen.

Für die Stationen unter der Erdoberfläche, im Schachte, deren Seehöhen wir mit H_u bezeichnen wollen, finden wir die Attraction A_R, wenn wir zunächst die Attractionen der einzelnen Hohlcylindertheile von der Höhe $h-H_u$ berechnen und von

diesen jene von der Höhe $H—H_n$ abziehen. Ganz analog verfahren wir bei der Berechnung der durch die Platte mit dem cycindrischen Ausschnitte bewirkten Attraction A_p, indem wir zunächst die Attraction einer solchen Platte von der Dicke $H_p—H_n$ berechnen und von derselben die Anziehung, welche eine solche Platte von der Dicke $H—H_n$ ausübt, abziehen.

Bei gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen ergeben sich nach dem oben erläuterten Verfahren die nachstehenden topographischen Correctionen in Einheiten der 5. Decimale von g.

Nachdem der Greiferschacht in Kuttenberg in einer ebenen Gegend gelegen ist, so kommen bezüglich der topographischen Correction nur die Bergwerke in Joachimsthal, Přibram und Idria in Betracht.

In den nachfolgenden Tabellen sind die Elemente zur Berechnung der topographischen Correction zusammengestellt. Die neun Kreisringe sind vom Centrum gegen die Peripherie mit I bis IX, die Octanten von Nord über Ost mit 1—8 bezeichnet.

Tabelle V.

Die topographische Correction.

Wernerschacht in Joachimsthal, $\Theta = 2\cdot66$, $H_p = 669$.

Octant	Seehöhen *h* der einzelnen Flächentheile in Metern								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	900	923	890	939	940	1025	1042	960	812
2	875	838	867	833	833	1022	1072	922	671
3	875	800	780	751	748	695	658	593	564
4	900	915	865	825	735	519	440	443	465
5	875	850	775	800	694	725	700	580	515
6	850	790	825	863	900	834	868	815	737
7	850	850	950	954	973	976	935	895	823
8	875	900	950	970	1030	993	887	800	762

Station	H	ΣA_R	A_P	Topographische Correction
		in Einheiten der 5. Decimale von g		
Ober Tags...	918 *m*	+1·1	+0·2	+0·00001
1. Station....	735	−1·9	−0·1	−0·00002
2. Station....	615	−1·8	−0·4	−0·00002
3. Station....	502	−2·5	−0·5	−0·00003

Adalbertschacht in Přibram, $\Theta = 2\cdot75$, $H_P = 535$.

Octant	Seehöhen *h* der einzelnen Flächentheile in Metern								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	495	500	495	475	479	454	500	497	524
2	443	505	540	507	485	520	472	469	422
3	500	495	540	540	544	555	525	496	442
4	500	500	500	500	559	560	552	543	541
5	514	500	500	560	565	611	576	545	505
6	500	500	500	580	590	648	683	706	687
7	495	529	554	592	639	646	703	729	650
8	500	495	519	552	506	523	655	559	500

Station	H	ΣA_R	A_P	Topographische Correction
		in Einheiten der 5. Decimale von g		
Ober Tags...	535 *m*	0·0	0·0	−0·00000
1. Station....	249	−0·9	0·0	−0·00001
2. Station....	− 9	−1·2	0·0	−0·00001
3. Station....	−240	−1·1	0·0	−0·00001
4. Station....	−465	−1·0	0·0	−0·00001
5. Station....	−565	−0·6	0·0	−0·00001

Franzschacht in Idria, $\Theta = 2 \cdot 77$, $H_p = 688$.

Octant	Seehöhen *h* der einzelnen Flächentheile in Metern								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	435	533	556	577	553	736	755	725	713
2	470	700	847	797	675	673	633	643	630
3	425	600	650	677	650	665	731	699	586
4	425	413	414	532	559	600	676	834	839
5	450	525	600	570	625	570	658	959	656
6	375	500	563	600	755	690	700	996	847
7	530	648	650	675	565	712	730	790	642
8	550	608	600	560	510	625	689	656	607

Station	H	ΣA_R	A_P	Topographische Correction
		in Einheiten der 5. Decimale von g		
Ober Tags . . .	345 *m*	+ 5·9	+0·4	+0·00006
1. Station. . . .	329	+ 6·0	+0·5	+0·00007
2. Station. . . .	223	+ 9 1	+0·7	+0·00010
3. Station. . . .	173	+11·4	+0·6	+0·00012
4. Station. . . .	171	+11·4	+0·6	+0·00012
5. Station. . . .	74	+14·0	+1·1	+0·00015

Resultate der Beobachtungen.

Durch den Vergleich der auf den Stationen beobachteten Schwingungszeit S des mittleren Pendels mit jener in Wien S_w erhalten wir die Schwere g auf den einzelnen Beobachtungsstationen.

Die Schwingungszeit S_w ergibt sich aus sämmtlichen in Wien ausgeführten Beobachtungen

$$S_w = 0 \cdot 5078730$$

und ist daselbst die Schwere g_w abgeleitet von den Bestimmungen v. Oppolzer's

$$g_w = 9 \cdot 80876.$$

Nachdem die meridionalen Entfernungen der einzelnen Stationen von dem betreffenden Schachte — siehe Tabelle I — so klein sind, dass die Correction der Schwere wegen des Breitenunterschiedes vernachlässigt werden kann, so sind an die beobachteten Werthe für die Schwere nur die im vorigen Abschnitte ermittelten topographischen Correctionen anzubringen, um dieselben vergleichbar zu machen.

Tabelle VI.

Resultate der Schwerebestimmungen.

Station	Tiefe	Beobachtete Schwere + topographischer Correction	Beobachtete Zunahme Δg der Schwere in Einheiten der 5. Decimale
Joachimsthal, Tagkranz	0·0	9·80870	0
1. Station . ..	182·4	882	12 ± 1
2. »	302·6	863	−7 ± 4
3. »	415·7	900	+30 ± 2
Přibram, Tagkranz	0·0	9·80930	0
1. Station	286·6	954	24 ± 1
2. »	543·1	976	46 ± 3

Station	Tiefe	Beobachtete Schwere + topographischer Correction	Beobachtete Zunahme Δg der Schwere in Einheiten der 5. Decimale
Příbram, 3. Station	774·6	985	55 ± 3
4. »	999·3	1007	77 ± 2
5. »	1099·3	1019	89 ± 3
Kuttenberg, Tagkranz	0·0	9·80994	0
1. Station	100·9	1001	7 ± 2
2. »	200·4	1004	10 ± 3
3. »	300·1	1017	23 ± 2
Idria, Tagkranz	0·0	9·80632	0
1. Station	16·6	634	2 ± 3
2. »	122·1	641	9 ± 2
3. »	172·8	643	11 ± 2
4. »	174·8	645	13 ± 2
5. »	271·6	649	17 ± 2

Die in der letzten Rubrik angegebenen mittleren Fehler der beobachteten Unterschiede der Schwere sind aus den Abweichungen der beobachteten Unterschiede der Schwingungszeiten, Tabelle III, *B*, von ihrem Mittel abgeleitet.

Wie wir aus dieser Zusammenstellung ersehen, nimmt die Schwere auf allen Stationen der Bergwerke mit der Tiefe zu. Eine einzige Ausnahme finden wir auf der zweiten Station in Joachimsthal, auf welcher wir ein vollkommen widersprechendes Resultat vorfinden. Die Schwere ist daselbst um etwa 0·00028 kleiner als sie sein sollte. Einen Grund für diese auffallende Erscheinung vermag ich nicht anzugeben. Die Beobachtungen wurden von mir selbst mit der gleichen Sorgfalt ausgeführt wie auf allen übrigen Stationen, bei den Beobachtungen ergaben sich keinerlei Anstände. Zu verschiedenen Zeiten wurden die Pendelapparate viermal daselbst aufgestellt, ein Einfluss einer fehlerhaften Aufstellung erscheint daher bei der guten Übereinstimmung der Einzelresultate nach Tabelle III, *B* ausgeschlossen, und der allerdings etwas

grössere mittlere Fehler von ± 4 Einheiten der 5. Decimale ist gegen die Abweichung von 28 solcher Einheiten doch nur sehr klein. Durch das Wippen wurde die absolute Festigkeit des Pfeilers nachgewiesen, welche überdies durch die Art seines Aufbaues, nämlich als Ausmauerung des Stollenendes ohnehin selbstverständlich war. Ein Gleiten der Stativunterlage auf der rauhen Deckplatte des Pfeilers kann wohl umsoweniger angenommen werden, als die Pendelapparate bei der viermal erfolgten Aufstellung gewiss auf verschiedenen Stellen der Deckplatte placirt waren.

Die Annahme der Störung der Schwerkraft durch oberhalb in nächster Nähe gelegene dichtere Massen ist bei der Grösse dieser Abweichung geradezu ausgeschlossen.

Diese Erscheinung bleibt daher vorläufig ganz unaufgeklärt, und wir können das Resultat auf der zweiten Station des Wernerschachtes in Joachimsthal nicht weiter berücksichtigen.

Wir sehen ferner aus dieser Zusammenstellung, dass die Schwere auf der dritten und vierten Station in Idria, ungeachtet des grossen Unterschiedes der Temperatur, gleich ist; es war dies a priori zu erwarten, da diese Art des Vorkommens der Wärme mit jener, die wir beim Eindringen in die Tiefe im Allgemeinen wahrnehmen, in keinem Zusammenhange steht; die höhere Temperatur auf der dritten Station hat keine weitere Bedeutung als etwa jene eines geheizten Raumes.

Die in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Daten über die Zunahme Δg der Schwere dienen uns zunächst zur Lösung der gestellten Aufgabe, indem wir dieselben mit der Zunahme der Temperatur vergleichen.

Selbstverständlich kommen hiebei nur die unterirdischen Stationen in Betracht, da uns die Zunahme der Temperatur zwischen der Station am Tagkranze, beziehungsweise an der Erdoberfläche und der ersten unterirdischen Station nicht bekannt ist.

Von den Resultaten im Bergwerke zu Idria können wir zu diesem Vergleiche nur jene auf der ersten und fünften

Station verwenden, auf welchen wir normale Temperaturverhältnisse annehmen können. Denn auf den übrigen Stationen kennen wir die eigentliche Temperatur nicht, weil sie durch locale Einflüsse beeinflusst ist, welche, wie wir gesehen haben, mit der Zunahme der Temperatur mit der Tiefe in keinem directen Zusammenhange stehen.

Berechnen wir, ähnlich wie wir es oben für die Temperaturzunahme gethan haben, auch die Zunahme der Schwere für 100 *m* zwischen je zwei Stationen, so ergeben sich folgende Beträge:

Tabelle VII.

Bergwerk	Zwischen den Stationen	Dicke der Erdschichte in Metern	Beobachtete Zunahme für 100 *m* Tiefe	
			der Gesteinstemperatur in C.	der Schwere in Einheiten der 5. Decimale
Joachimsthal ..	1. und 3.	233·3	2°70	7·8
Přibram	1. » 2.	257·0	1·60	8·6
	2. » 3.	231·5	1·12	3·9
	3. » 4.	224·7	1·55	9·8
	4. » 5.	100·0	2·30	12·0
Kuttenberg ...	1. » 2.	99·5	1·61	3·0
	2. » 3.	99·7	2·41	13·0
Idria	1. » 5.	255·0	1·76	5·9

So wie die Wärmezunahme erscheint auch die Zunahme der Schwere ungleichmässig. Die Unterschiede sind grösser, als sie aus den mittleren Fehlern folgen würden. Theilen wir die Resultate in zwei Gruppen mit kleinerer und grösserer Temperaturzunahme, so ergeben sich folgende Werthe:

Zunahme der Temperatur	Zunahme der Schwere	Zunahme der Temperatur	Zunahme der Schwere
1°12	3·9	2°33	12·0
1·55	9·8	2·41	13·0
1·60	8·6	2·70	7·8
1·61	3·0	2°48	10·9
1·76	5·9		
1°52	6·3		

Hienach scheint in der That der grösseren Temperaturzunahme auch eine grössere Zunahme der Schwere zu entsprechen. Bei 100 *m* Tiefe entspricht für einen Grad Temperaturzunahme eine Schwerezunahme von 4·1, beziehungsweise 4·4, im Mittel daher etwa 4·3 Einheiten der 5. Decimale von g.

Obwohl nach diesem ein Zusammenhang zwischen der Schwere und Temperaturzunahme zu bestehen scheint, kann man doch denselben aus den wenigen und immerhin ziemlich abweichenden Resultaten noch nicht als erwiesen betrachten; denn die Anzahl der Daten ist viel zu gering und die Übereinstimmung nicht überzeugend genug, als dass man der in dieser Reihe sich zeigenden Gesetzmässigkeit unbedingt eine Bedeutung beimessen könnte. Es muss die Fortsetzung dieser Arbeiten abgewartet werden, um eine endgiltige Entscheidung fällen zu können.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Schwere unter der Erde mit der Tiefe zunimmt, indem wir die beobachtete Zunahme Δg mit ihrem theoretischen Werthe $\Delta\gamma$ vergleichen.

Bei der im Verhältnisse zum Erdhalbmesser R nur sehr geringen Tiefe aller Bergwerksschachte können wir bei der Ableitung eines Ausdruckes für die theoretische Zunahme der Schwere unter der Erde von der Kugelgestalt derselben absehen. Wir betrachten daher die Umgebung des Schachtes als eine horizontale Ebene und daher die Schachte in eine unendlich ausgedehnte ebene Platte eingebaut. Unter dieser Annahme können wir die Zunahme $\Delta\gamma$ der Schwere unter der Erde bestimmen, wenn uns die Dichte Θ dieser Platte und die mittlere Dichte Θ_m der ganzen Erde bekannt ist. Erstere können wir durch Abwägungen von Gesteinsproben und Berücksichtigung der verschiedenen Mengen der vorkommenden Gesteine ermitteln; für letztere wurde neuester Zeit gefunden von

C. V. Boys $\Theta_m = 5\cdot5270$,[1]
C. Braun $5\cdot5273$,[2]

[1] Phil. Trans., 186 A, 1895.

[2] Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. der Akad. der Wiss., Wien, 64, 1896.

Richarz und Krigar-Menzel $\Theta_m = 5\cdot5050$,[1]
im Mittel 5·52.

Bei zwei in freier Luft im Abstande h über einander liegenden Stationen ist die Schwere γ_u auf der unteren Station ausgedrückt durch jene auf der oberen γ_0 durch

$$\gamma_u = \gamma_0\left(1+\frac{2h}{R}\right).$$

Eine zwischen diese beiden Stationen eingeschobene Platte von der Dichte Θ und Dicke h übt auf beide Stationen die gleiche Attraction $\frac{3}{2}\cdot\frac{\Theta}{\Theta_m}\cdot\frac{h}{R}\cdot g$ aus, durch welche die Schwere auf der oberen Station vergrössert, jene auf der unteren hingegen verkleinert wird, weil sie auf der letzteren der Richtung der Schwere entgegen wirkt.

Die Zunahme $\Delta\gamma$ zwischen diesen beiden Stationen, deren obere wir uns jetzt auf der Erdoberfläche, die andere in der Tiefe h vorstellen können, ist daher

$$\Delta\gamma = g\cdot\frac{2h}{R}\cdot\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{\Theta}{\Theta_m}\right), \tag{1}$$

wo Θ_m die mittlere Dichte der Erde $= 5\cdot52$ ist.

Nach diesem Ausdrucke können wir die normale Zunahme $\Delta\gamma$ berechnen; der Vergleich mit der beobachteten Zunahme Δg der Schwere gibt uns Aufschlüsse über das Verhalten der Schwere unter der Erdoberfläche.

Aus dieser Gleichung ergibt sich auch

$$\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{2}{3} - \frac{\Delta g}{g}\cdot\frac{R}{3h}, \tag{2}$$

nämlich das Verhältniss der Dichte der Erdschichte zwischen zwei Stationen zur Dichte der ganzen Erde, und wir können daher aus der beobachteten Schwerezunahme Δg entweder die Dichte Θ_m der ganzen Erde bestimmen, wenn uns die Dichte Θ der Erdschichte bekannt ist, oder aus der bekannten Dichte Θ_m der Erde jene der zwischen den Stationen liegenden Erdschichte ableiten.

[1] Abhandl. der Akad. der Wiss. zu Berlin, 1898, Anhang.

Tabelle VIII.

Die Zunahme der Schwere unter der Erdoberfläche.

Station	Tiefe	Beobachtete Zunahme Δg der Schwere	Berechnete Zunahme $\Delta\gamma$ der Schwere	Unterschied $\Delta g - \Delta\gamma$	Berechnete Mittlere Dichte Θ_m der Erde	Berechnete Dichte Θ der Erdschichte, mit $\Theta_m = 5\cdot52$
		in Einheiten der 5. Decimale				
Joachimsthal, $\Theta = 2\cdot73$						
0	0	0	0	0		
1	182·4	12 ± 1	14	−2	5·21	2·89
3	415·7	30 ± 2	32	−2	5·34	2·83
Přibram, $\Theta = 2\cdot75$						
0	0	0	0	0		
1	286·1	24 ± 1	22	+2	5·67	2·68
2	543·1	46 ± 3	42	+4	5·69	2·67
3	774·6	55 ± 3	60	−5	5·36	2·83
4	999·3	77 ± 2	77	0	5·50	2·76
5	1099·3	89 ± 3	85	+4	5·59	2·71
Kuttenberg, $\Theta = 2\cdot78$						
0	0	0	0	0		
1	100·9	7 ± 2	8	−1	5·38	2·85
2	200·4	10 ± 3	15	−5	4·97	3·08
3	300·1	23 ± 2	23	0	5·55	2·76
Idria, $\Theta = 2\cdot77$						
0	0·0	0	0			
1	16·6	2 ± 3	2	0		
2	122·1	9 ± 2	9	0	5·46	2·80
3	172·8	11 ± 2	13	−2	5·24	2·92
4	174·8	13 ± 2	13	0	5·48	2·79
5	271·6	17 ± 2	21	−4	5·22	2·93

Die in dieser Tabelle enthaltenen Unterschiede $\Delta g - \Delta \gamma$ der beobachteten und berechneten Zunahme der Schwere sind sehr klein, sie entsprechen so ziemlich den mittleren Fehlern der Beobachtungen und zeigen keine Gesetzmässigkeit, sondern haben den Charakter von zufälligen Fehlern. Die Schwerezunahme kann demnach in allen vier Bergwerken und in allen Tiefen als eine gleichmässige und normale betrachtet werden.

Ebenso sind die gefundenen Werthe von Θ_m nicht sehr abweichend von dem Werthe 5·52 für die mittlere Dichte der Erde, desgleichen sind auch die Unterschiede der angenommenen und berechneten Dichte Θ der Erdschichte nur gering. In Přibram stimmen sie sogar vollständig überein. Naturgemäss sollte die mittlere Erddichte Θ_m desto richtiger resultiren, je mächtiger die Erdschichte ist, weil der gleiche Fehler in der Bestimmung von Δg von geringerem Einflusse ist. Dessenungeachtet finden wir sie auf allen Stationen eines Bergwerkes fast vollständig übereinstimmend; es ist das ein Beweis für die Verlässlichkeit der Beobachtungen.

Durch kleine, mit Rücksicht auf die mittleren Fehler ganz zulässige Änderungen der beobachteten Schwereunterschiede Δg und der angenommenen Dichte Θ, deren Bestimmung aus mancherlei Gründen keinen Anspruch auf eine grosse Genauigkeit besitzen kann, wäre es leicht möglich, auf den meisten Stationen plausible Werthe zu erhalten und eine Übereinstimmung der Resultate zu erzielen.

Es scheint, dass es nicht gelingen dürfte, auf diese Art die mittlere Dichte Θ_m der Erde mit jenem Grade der Genauigkeit zu bestimmen, wie es durch directe Wägungen oder mittelst der Drehwage möglich ist. Denn wenn auch die Massen und Kräfte, welche bei den Bestimmungen in den Bergwerken in Betracht kommen, vielmal grösser sind als jene bei den Bestimmungen mittelst der Wage, so sind wir doch nicht in der Lage, dieselben mit der entsprechenden Genauigkeit zu bestimmen, wie die kleinen Massen und Kräfte bei den Wägungen. Es scheitern unsere Bemühungen an der Unkenntniss der hiebei in Betracht kommenden Massen und an der Unsicherheit in der Bestimmung der Kräfte, ganz ähnlich wie bei der ersten Bestimmung der mittleren Erddichte durch

Maskelynes im Jahre 1772 aus den durch den Berg Shehallien in Pertshire hervorgebrachten Ablenkungen des Lothes.

Die Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Schwereunterschiede Δg in Tabelle VIII ist jedenfalls sehr befriedigend, die Unterschiede betragen nur wenige Einheiten der 5. Decimale von g, beziehungsweise einige Mikrons der Secundenpendellänge; allein bei der Kleinheit der Grössen, um die es sich hier handelt, ist eine solche Einheit schon ein grosser Bruchtheil der gesuchten Grösse.

Die Grösse der Schwerkraft auf der Erdoberfläche finden wir sehr häufig gestört, nämlich von ihrem normalen Werthe mehr oder weniger abweichend. In den gebirgigen Gegenden, Tirols, finden wir sie zu klein, in den Tiefebenen, z. B. in Ungarn oder auf den Inseln des Meeres, hingegen meistens zu gross. Häufig kommen auch in ein und derselben Gegend verschiedenartige Schwerestörungen vor, mitunter sogar auch in sehr kleinen Entfernungen. Als Ursache dieser auffallenden Erscheinungen nimmt man das Vorhandensein von Störungsmassen unter der Erdoberfläche an, welche diese Abweichungen hervorbringen. Im Allgemeinen kennen wir die Grösse dieser Massen und die Tiefe, in welcher sie sich befinden, nicht; nur unter der Annahme, dass diese Störungsmassen die Gestalt einer unendlich ausgedehnten Platte haben, können wir uns von ihrer Grösse eine Vorstellung machen.

Die Schwerebestimmungen in den Bergwerken sind nun geeignet, bezüglich dieser Störungsmassen einige Aufklärungen zu geben.

In einer Gegend, wo die Schwere auf der Erdoberfläche gestört, z. B. zu gross gefunden wird, wirken auf einen Punkt der Oberfläche zwei verschiedene Anziehungen: jene der ganzen Erde und jene der störenden Masse. Hat letztere im Allgemeinen die Gestalt einer sehr grossen, beziehungsweise unendlich ausgedehnten Platte, so werden wir beim Eindringen in die Tiefe nur die normale, vorhin behandelte Zunahme $\Delta g = \Delta \gamma$ unter der Erde vorfinden; denn nach der Theorie von Gauss ist die Anziehung, welche eine solche Platte ausübt, für alle Punkte ausserhalb, demnach auch für alle Entfernungen, gleich, es hebt sich daher ihre Wirkung in den Unterschieden auf.

Befindet sich jedoch die störende Masse nur an einem Orte, z. B. um einen Punkt kugelförmig gelagert, dann übt sie in verschiedenen Entfernungen auch verschiedene Attractionen aus und beeinflusst daher die Zunahme der Schwere sowohl unter der Erdoberfläche, als auch über derselben in freier Luft, da ihre Wirkung an der Erdoberfläche nicht aufhört.

Aus der in der Tiefe T beobachteten Schwerestörung $g^1-\gamma^1$ und jener auf der Erdoberfläche vorhandenen $g-\gamma$ lässt sich die Entfernung r und die Masse m der störenden Masse nach den leicht abzuleitenden Ausdrücken berechnen:

$$r = 1 : \left\{1 - \sqrt{\frac{(g-\gamma)\gamma^1}{(g^1-\gamma^1)\gamma}\left(1-\frac{2T}{R}\right)}\right\} \qquad 3)$$

und

$$m = \frac{g-\gamma}{\gamma} \cdot \frac{Mr^2}{R^2}, \qquad 4)$$

in welchen für M und R die Masse und der Radius der Erde zu setzen ist.

Berechnen wir die normale Schwere γ für die Stationen am Tagkranze der vier Bergwerke nach dem von mir etwas modificirten Helmert'schen Ausdrucke für die normale Schwere auf der Erdoberfläche

$$\gamma = [9\cdot780(1+0\cdot005310 \sin^2\varphi)+0\cdot00045]\left(1-\frac{2h}{R}\right),$$ [1]

so ergeben sich durch den Vergleich mit der beobachteten Schwere g (siehe Tabelle VI) die nachfolgenden Störungen $g-\gamma$ auf der Erdoberfläche auf diesen vier Stationen:

Bergwerk	Beobachtete Schwere g	Theoretische Schwere γ	Störung $g-\gamma$
Wernerschacht.......	9·80870	9·80843	+27
Přibram.............	9·80930	9·80900	+30
Kuttenberg..........	9·80994	9·80995	— 1
Idria...............	9·80632	9·80626	+ 6

[1] Mittheilungen des militär-geographischen Institutes, Bd. XII.

Auf den beiden ersten Stationen ist die Schwere etwas zu gross, während sie auf den beiden anderen als normal angesehen werden kann. Die beobachteten Störungen $g-\gamma$ im Betrage von 27 und 30 Einheiten der 5. Decimale von g sind verhältnissmässig klein, sie betragen in anderen Gegenden, z. B. in Ungarn, +80 oder nach den neuesten Beobachtungen im Rothen Meere auf der Insel St. Johns[1] +214, während sie z. B. in Tirol —100 gefunden wurden.

Mit Rücksicht auf die Kleinheit der gefundenen Störung und Ungenauigkeit der Resultate können die Beobachtungen in diesen beiden Schachten kaum einen Aufschluss über die Lage und Grösse der störenden Masse geben.

Betrachten wir die in der Tabelle VIII enthaltenen Werthe $\Delta g-\Delta\gamma$ nur als zufällige Fehler, beziehungsweise $g^1-\gamma^1$ als constant, so müssten wir annehmen, dass unterhalb des Adalbertschachtes, wo wir $g-\gamma = +30$ gefunden haben, die störende Masse in unbekannter Tiefe die Form einer ausgedehnten Platte von 300 *m* Mächtigkeit und der Dichte 2·6 habe.

Legen wir jedoch z. B. den auf der fünften Station dieses Schachtes in der Tiefe von 1099 *m* beobachteten Unterschiede $\Delta g-\Delta\gamma = +0\cdot00004$ zwischen der beobachteten und berechneten Schwerezunahme eine Bedeutung bei, so würde sich mit den Werthen $g-\gamma = 0\cdot00030$ und $g^1-\gamma^1 = 0\cdot00034$ nach den obigen Ausdrücken 3 und 4 die Entfernung r der störenden Masse 18·2 *km* ergeben, und ihre Masse m wäre gleich jener einer Kugel vom Halbmesser 1·86 *km* und der Dichte 5·5.

Es wäre müssig, ähnliche Rechnungen auch für die übrigen Stationen durchzuführen oder jetzt schon den daraus erhaltenen Resultaten eine Bedeutung beizulegen. Ungeachtet der unter den schwierigen Verhaltnissen in den Bergwerken erzielten relativ grossen Genauigkeit der Beobachtungen und möglichst sorgfältigen Berücksichtigung der Umstände, welche auf die Resultate von Einfluss sind, ist die erzielte Genauigkeit für den angestrebten Zweck noch nicht ausreichend. Vielleicht

[1] Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. LXV, sechste Reihe, S. 206.

wird es möglich werden, durch entsprechende Constructionen an den Apparaten bei einer allfälligen Fortsetzung dieser Untersuchungen wenigstens bezüglich der Beobachtungen die nöthige grosse Genauigkeit zu erzielen.

Sollte es gelingen, derartige Abweichungen der Schwerezunahme unter der Erde zu constatiren, so wäre dies ein Beweis, dass die Schwerkraft im Inneren der Erde in verticaler Richtung ähnlichen Schwankungen unterworfen ist, wie in horizontaler Richtung auf der Erdoberfläche, welch' letztere bereits vielfach constatirt wurde. In diesem Falle dürfte jedoch die Annahme nur einer Störungsmasse, sei es in Form einer Platte oder einer Kugel, kaum genügen; es müssten wohl viele derartige Massen oder Attractionscentren verstreut in der Erde angenommen werden, um die Erscheinungen zu erklären, und in dieser Hinsicht hätte die Vertheilung der Schwere im Inneren der Erde immerhin einige Ähnlichkeit mit dem Vorkommen der Wärme, denn auch die Wirkung dieser störenden Masse stünde mit der allgemeinen Zunahme der Schwere unter der Erdoberfläche in keinem Zusammenhange.

Die von mir 1883 und 1885 in den Bergwerken von Přibram und Freiberg ausgeführten Beobachtungen[1] sind mit relativ kleinen Fehlern behaftet und ergeben, da es sich bei diesen Untersuchungen immer nur um sehr kleine Grössen handelt, obwohl sie als gut bezeichnet werden müssen, dennoch etwas abweichende Resultate. Es ist staunenswerth, dass es mir gelungen ist, mit den primitiven Hilfsmitteln, welche mir damals zur Verfügung standen, eine so grosse Genauigkeit zu erzielen.

Durch die oben ausgeführten Beobachtungen auf vielen Stationen der Bergwerke in verschiedenen Gegenden, Höhen und Tiefen war es möglich, einigermassen ein Bild über den Verlauf der Schwere unter der Erde zu erlangen, es dürften daher die aus ihnen abgeleiteten Resultate auch richtig und glaubwürdig sein.

[1] Mittheilungen des militär-geographischen Institutes, Bd. III und VI.

Auf allen vier Örtlichkeiten kann die Zunahme der Schwere unter der Erde als eine gleichmässige und normale betrachtet werden, so wie sie sich nach Gleichung 1) aus der Attraction der Erdplatte oberhalb der unterirdischen Station ergibt.

Aus der beobachteten Schwerezunahme ergibt sich im Allgemeinen der Werth für die mittlere Erddichte Θ_m sehr richtig; aus jenen in dem tiefsten Bergwerke in Příbram sogar vollkommen übereinstimmend mit den neuesten Bestimmungen, nämlich 5·52.

Es schliesst dies selbstverständlich nicht aus, dass in anderen Gegenden diese Verhältnisse verschieden sind, dass z. B. die Schwerezunahme eine viel grössere ist, wie sie z. B. 1854 Airy in der Grube Harton in England[1] und neuester Zeit Prof. Rosén in der Grube Sala in Schweden unter 60° nördlicher Breite gefunden hat.[2]

Die Zunahme der Temperatur mit der Tiefe ist zwar nicht an allen Orten gleich, jedoch stets gleichmässig. Die vorkommenden nicht unbedeutenden Abweichungen von einer gleichmässigen Temperaturzunahme, die wir fast überall vorfinden, dürften, meiner Meinung nach, auf ähnliche locale Verhältnisse zurückzuführen sein, wie sie in Idria vorgefunden wurden; sie stehen in keinem Zusammenhange mit der allgemeinen Zunahme der Temperatur mit der Tiefe.

Ein Zusammenhang der Schwere mit der Temperatur scheint zu bestehen, er kann jedoch aus meinen Beobachtungen gegenwärtig nicht als erwiesen betrachtet werden, die Anzahl und Genauigkeit derselben reicht hiezu nicht aus.

Von grösster Wichtigkeit wäre es, wenn ähnliche Untersuchungen mit vervollkommneten Apparaten in Bergwerken in solchen Gegenden ausgeführt würden, wo auf der Erdoberfläche grosse Störungen der Schwere vorhanden sind, z. B. in Tirol oder Ungarn etc. Denn durch solche Beobachtungen könnte es gelingen, wenn sie mit der genügenden Genauigkeit ausgeführt würden, die ersten verlässlichen Aufschlüsse über die Lage und Grösse der störenden Massen unter der Erde zu erlangen.

[1] Phil. Transact., 1856, I. Bd., 146.

[2] Bihang till k. Svenska Vet.-Akad. Handlingar, Bd. 20, Afd. I, No. 7.

Volumenometrische Bestimmung des specifischen Gewichtes von Yttrium, Zirkonium und Erbium

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Juni 1899.)

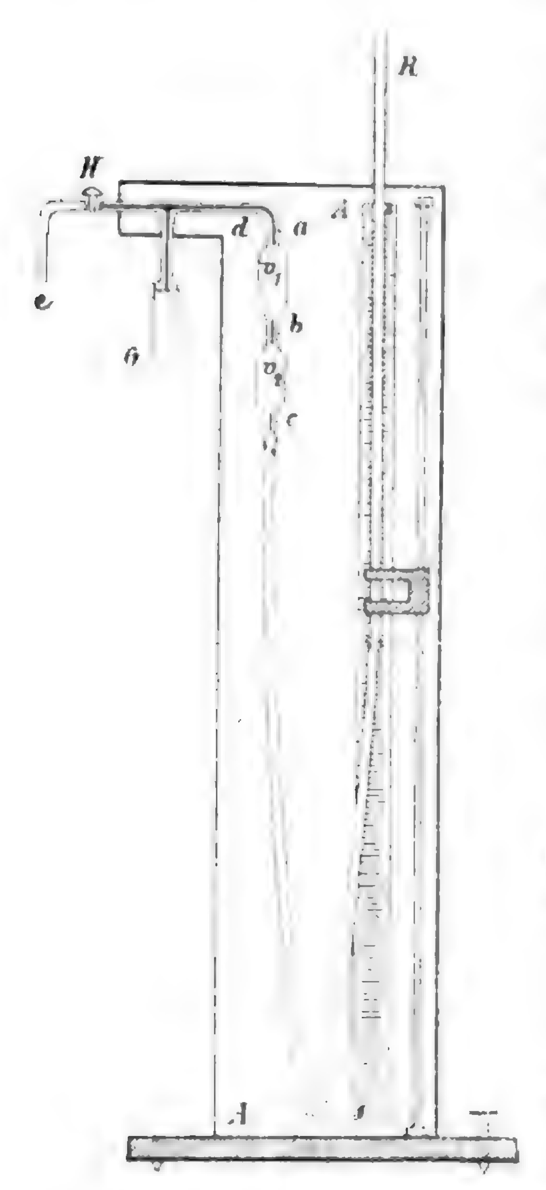
Gelegentlich der magnetischen Untersuchung der Elemente[1] war mir die Stellung aufgefallen, welche Yttrium und Zirkonium im periodischen System der Elemente einnehmen. Es tritt nämlich hier der einzige Fall auf, wo ein einzelnes paramagnetisches Element (Y) eingeschlossen zwischen einer Reihe diamagnetischer steht, und da einerseits, wie ich später fand, auch die Verbindungen des Y (Y_2O_3 und YCl_3) paramagnetisch, diejenigen des Zr (ZrO_2 und $Zr(NO_3)_4$) diamagnetisch sind, sonach diese Stellung nicht durch zufällige Verunreinigung hervorgerufen sein kann, und anderseits das Atomgewicht des Yttrium[2] noch nicht völlig sicher zu stehen scheint, handelte es sich mir darum, eine weitere Constante zu bestimmen, welche die Stellung im periodischen System der Elemente charakterisirt. Hiezu eignet sich besonders die Dichte, beziehungsweise das daraus berechenbare Atomvolumen, da durch geringe Beimengungen fremder Stoffe diese Grösse nur wenig verändert wird.

---

[1] Diese Sitzungsber., 108, II.a, S. 171.

[2] Vergl. z. B. Schutzenberger und Boudouard, Compt. rend., 123 p. 782.

Angaben über das specifische Gewicht des Y liegen nicht vor und die Bestimmung im Pyknometer war für dieses Pulver dadurch, dass die üblichen Hilfsflüssigkeiten dasselbe angreifen und die Substanz auch nicht verunreinigt werden durfte, ausgeschlossen.



Ich habe mich daher eines Volumenometers bedient, das im Principe denjenigen gleicht, wie sie früher schon vielfach beschrieben worden sind,[1] in der Detailausführung aber meines Erachtens für die Dichtebestimmung von Pulvern, von denen nur geringe Quantitäten zur Verfügung stehen, einige Vorzüge — Vermeidung der Umfüllung der Substanz und Controle durch doppelte Messung — aufweist, weshalb ich dasselbe kurz beschreiben will.

Auf dem 1 *m* hohen Brette *AA* ist ein Apparat, ähnlich denjenigen, wie sie zur Demonstration des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes verwendet werden, angebracht. Das Volumen v zwischen den Marken a und c, das dazu bestimmt ist, bei der Messung das ursprüngliche Volumen zwischen dem gut schliessenden Glashahn H und a zu vermehren, zerfällt durch die Marke b in zwei nahezu gleiche Theile v_1 und v_2. Das cylindrische Gefässchen G, welches dazu dient, die zu untersuchende Substanz aufzunehmen, ist an dem T-Fortsatz der Capillare d eingeschliffen und lässt sich

[1] Say, Gilb. Ann., 2, p. 230; Regnault, Pogg. Ann., 66, S. 445; Kopp, Lieb. Ann., 35; Rüdorff, Wied. Ann., 6, S. 288; Paalzow, Wied. Ann., 13, S. 332; W. W. Haldane Gee und A. Harden, Wied. Beibl., 18, S. 695; G. J. W. Bremer, Wied. Beibl., 1899, (letztere Arbeit mir leider nicht im Originale zugänglich) u. A.

nach der Füllung mit dem Pulver und Abwägung desselben unmittelbar ansetzen.[1] Hiedurch ist jede Umfüllung der Substanz zwischen der Gewichts- und Volumenbestimmung vermieden.

Das Ende e führt durch Schlauchverbindung zu einer rückwärts am Brette befindlichen Trockenvorlage.

Die Dimensionen waren die folgenden:

$$v_1 = 0\cdot 9913\, cm^3 \qquad v_2 = 1\cdot 0764\, cm^3.$$

Der Innendurchmesser des Rohres R über der Spiegelscala ss betrug $0\cdot 8\, cm$.

Das Volumen V zwischen H und a, das zur Erzielung günstiger Druckdifferenzen von ähnlicher Grösse sein soll wie v, lässt sich dann, wenn P der herrschende Luftdruck ist, aus den Gleichungen

$$PV = P_1(V+v_1)$$
$$PV = P_2(V+v_1+v_2)$$

und eventuell noch

$$P(V+v_1) = P_3(V+v_1+v_2)$$

in mehrfacher Weise bestimmen, wobei die Resultate gleichzeitig einen Maassstab für die richtige (durch Auswägen mit Quecksilber erfolgte) Bestimmung von v_1 und v_2 liefern, beziehungsweise eine Correctur hiefür ermöglichen.

So erhielt ich im Mittel aus einer grösseren Zahl von Beobachtungen $V = 2\cdot 110\, cm^3$.

Nun wurde das Gläschen abgenommen, Yttriumpulver, das von Merck bezogen war, eingefüllt und nachdem dasselbe abgewogen worden war, wieder angesetzt. Das dann gefundene Volumen V' ergab im Mittel $1\cdot 976\, cm^3$, $V - V' = 0\cdot 134\, cm^3$.

Das Gewicht des Y-Pulvers war $0\cdot 5091\, g$.

Daraus ergibt sich bei 15° C. die Dichte γ zu $3\cdot 80$ und unter Zugrundelegung des Atomgewichtes 89 das Atomvolumen $\alpha = 23\cdot 6$.

[1] Zeigt es sich, dass der Abschluss nicht vollständig luftdicht ist, so kann man durch Auftropfen von ein wenig geschmolzenem Paraffin leicht Abhilfe schaffen. Einfetten der Schliffstelle ist, wenn die Substanz nicht verunreinigt werden soll, nicht gestattet.

Ähnlich ergab sich für Zirkonium das specifische Gewicht $\gamma = 4 \cdot 08$ in genügender Übereinstimmung mit der Angabe von Troost (4·15).

Für das Atomgewicht 90·6 folgt daraus $\alpha = 22 \cdot 2$.

Dem specifischen Gewichte und dem hieraus berechneten Atomvolumen nach passt also das Y völlig an die Stelle, wo es derzeit im periodischen Systeme Platz gefunden hat, und es wird dadurch der Schluss nahegelegt, dass sein abnormes magnetisches Verhalten durch Beimengung eines bekannten oder noch unbekannten Elementes aus der Gruppe mit dem Atomgewicht zwischen 140 und 180 hervorgerufen wird.[1]

Auch für das Erbium liegen bezüglich der Dichte noch keine bestimmten Angaben vor. Ich habe daher von Merck bezogenes metallisches Pulver gleichfalls der Messung unterzogen und erhielt bei 15° C.

$$\gamma = 4 \cdot 77 \text{ und } \alpha = 34 \cdot 9,$$

wenn das Atomgewicht 166 angenommen wird.

Aus den Zusammenstellungen nach dem specifischen Gewichte oder nach dem Atomvolumen wäre dem Er sonach der Platz unter dem Lanthan (bei horizontaler Anordnung) anzuweisen, was mit seiner ausserordentlich hohen Magnetisirungszahl nicht ganz im Einklange steht, wenn man nicht auch hier annehmen will, dass das benützte Materiale ein Gemenge verwandter Elemente sei, deren Atomgewicht zwischen den oben angegebenen Grenzen liegen müsste, wofür auch die chemischen Verhältnisse zu sprechen scheinen.[2]

[1] Die eben bekannt gewordene Nachricht, dass Crookes aus dem Yttrium ein Element »Victorium« isolirt habe, bedarf noch der Bestätigung. Victorium müsste stark paramagnetisch sein.

[2] Vergl. Dammer, Handbuch der anorg. Chemie, III, S. 44.

Über die beim Prager photographischen Mond-Atlas angewandte Vergrösserungsmethode

von

Prof. Dr. **L. Weinek,**

Director der k. k. Sternwarte in Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Juni 1899.)

In den »Publications of the Astronomical Society of the Pacific«, Vol. VIII, No 53, vom 1. December 1896 bespricht Prof. Edward S. Holden, der damalige Director der Lick-Sternwarte am Berge Hamilton bei San Francisco, auf S. 319 das um die Mitte desselben Jahres erschienene erste Heft des Pariser photographischen Mond-Atlas,[1] das auf vierzehn- bis fünfzehnmaligen Vergrösserungen von focalen Mondnegativen der Pariser Sternwarte beruht. Er vergleicht diese, sowie die besten, bis dahin von Anderen erzielten Resultate derselben Art, namentlich diejenigen von A. L. Colton an der Lick-Sternwarte, A. v. Rothschild in Wien, V. Nielsen in Kopenhagen und W. Prinz in Brüssel mit jenen photographischen Mondvergrösserungen, welche von mir seit dem 19. April 1893 zur Herstellung eines grossen Prager photographischen Mond-Atlas ausgeführt wurden und bis December 1896 die Zahl 496 erreicht hatten, in eingehender Weise und kommt auf S. 321 zu dem Schlusse:[2] »Diese Vergleichung zeigt unanfechtbar, dass die Silberdrucke von Prof. Weinek (Monddurchmesser

[1] »Atlas photographique de la Lune, publié par l'Observatoire de Paris, executé par M. M. Loewy et M. P. Puiseux.« Premier fascicule, Paris 1896.

[2] »It (this comparison) appears to show conclusively that the silver-prints of Professor Weinek (X-foot scale) come nearer to technical perfection than any other, in that they most successfully reproduce the grain of the original negative and therefore are best fitted to show the finer details of the lunar surface.«

= 10 Fuss) der technischen Vollkommenheit am nächsten stehen, indem sie das Korn des Originalnegatives am erfolgreichsten reproduciren und deshalb am besten geeignet sind, die feineren Details der Mondoberfläche wiederzugeben,« und auf S. 323:[1] »Prof. Weinek's Anstrengungen concentrirten sich darauf, die minutiösesten Einzelheiten des Originalnegatives wiederzugeben, und es kann gesagt werden, dass er dieses Ziel vollständig erreicht hat.« Da hier von autoritativer Seite hervorgehoben wird, dass die Prager photographischen Mondvergrösserungen trotz ihres relativ grössten Maassstabes die focalen Originalnegative der Lick-Sternwarte, beziehungsweise der Pariser Sternwarte am getreuesten wiedergeben und allen analogen Arbeiten, also auch dem sehr effectvollen, grosse Übersichtsbilder liefernden Pariser photographischen Mond-Atlas an Exactheit und Feinheit der Zeichnung überlegen sind,[2] dürfte es nicht unbegründet erscheinen, die von mir angewandte photographische Vergrösserungsmethode im Folgenden ausführlicher darzulegen.

Die ersten Versuche.

Im Jahre 1893 fasste ich während des mühsamen Fortschreitens meiner nach dem focalen Lick-Diapositive vom 28. Juli 1891, $15^h 49^m 16^s$ P. s. t. zwanzigmal vergrösserten Copernicus-Zeichnung,[3] da auf diesem langsamen, von Sub-

---

[1] »The effort of Professor Weinek has been to reproduce the minutest particularities of the original negative; and he has certainly accomplished this end.«

[2] Ein anderes vergleichendes und massgebendes Urtheil rührt von dem hervorragenden französischen Selenographen C. M. Gaudibert in Vaison (Vaucluse) her, welches ich hier mit dessen Zustimmung veröffentliche. Derselbe schrieb mir am 12. Juni 1896: »J'ai reçu il y a quatre ou cinq jours le premier fascicule de l'Atlas photographique de la Lune.... C'est certainement un beau travail qui laisse bien loin derrière lui celui que M. Prinz avait entrepris. Il est agrandi 14—15 fois sur verre d'après les négatifs de Paris et puis imprimé sur papier. A distance c'est un tableau magnifique, mais vu de près le fond en est grossier et ne pourra jamais représenter les objets d'un faible diamètre. Sous ce rapport, le travail que l'on fait à Paris est bien inférieur au vôtre dont l'agrandissement est presque double et le fond beaucoup plus fin«.

[3] Vide: »Publications of the Lick Observatory of the University of California«, Vol. III, 1894, p. 81.

jectivität nicht freien Wege nur wenig zu erreichen war, den Gedanken, trotz der bisherigen mangelhaften Resultate Anderer auf dem Gebiete der bloss photographischen Vergrösserung gleichfalls Experimente nach dieser Richtung hin vorzunehmen und hierzu den von mir construirten, auf S. 50 der Prager Astron. Beob. 1888—1891[1] beschriebenen Zeichenapparat, sowie dessen achromatische Mikrometeroculare von Reinfelder & Hertel zu verwenden. Dieselben besassen die Äquivalentbrennweiten von 1, $^1/_2$, $^1/_3$ und $^1/_4$ Pariser Zoll und ergaben für meine deutliche Sehweite von 28 *cm* die optischen Vergrösserungen von 11·3, 21·7, 32·0 und 42·4. Bei diesen Versuchen handelte es sich darum, auf rein photographischem Wege im vergrösserten Bilde ein ebenso feines Korn zu erhalten, als dieses bei entsprechender Ocularvergrösserung optisch wahrgenommen wird.

Nach dem Principe der Telephotographie wurde das mit dem Oculare gesehene virtuelle Bild durch allmälige Entfernung des Oculares von dem Negative in ein reelles umgesetzt und auf der Mattscheibe einer gewöhnlichen Camera, deren Objectivkopf abgeschraubt worden, aufgefangen. Da zeigte es sich zunächst, dass eine Einstellung auf das deutlichste Gesammtbild nur wenig Zufriedenstellendes ergab, und dass die Pointirung nicht auf dieses, sondern auf das Korn des Negativs selbst vorgenommen werden müsse. Aus diesem Grunde wurde die Mattscheibe ganz beseitigt und das vergrösserte Bild in der Luft aufgefangen, was schliesslich dazu führte, an Stelle der Mattscheibe eine ganz durchsichtige Glasplatte zu geben, diese in der Auffangebene mit einem Strichkreuze zu versehen und letzteres mit dem hinter der transparenten Glasscheibe fest angebrachten, schwach vergrössernden Oculare scharf einzustellen. Um verschiedene Theile des Feldes hinsichtlich der Schärfe und Präcision des vergrösserten Kornes prüfen zu können, wurde endlich diesem Oculare eine analoge Führung in zwei zu einander senkrechten Coordinatenrichtungen gegeben, wie dies bei dem erwähnten Zeichenapparate der Fall ist.

[1] »Astronomische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag in den Jahren 1888, 1889, 1890 und 1891, nebst Zeichnungen und Studien des Mondes«, Prag 1893.

Zweckmässig war es ferner, das Vergrösserungsobjectiv (hier eines der bemerkten Mikrometeroculare) nicht an der Camera zu befestigen, da schon geringe Erschütterungen derselben merkbare Abstandsänderungen vom Negative und deshalb Unschärfen im vergrösserten Bilde herbeiführen mussten. Es wurde vielmehr das Objectiv mit dem Negative in constante Verbindung gebracht und die Camera von diesem Systeme ganz unabhängig gemacht. Anderseits wurde die scharfe Bild-, d. i. Korneinstellung nicht durch Verschiebung der Cassettenebene, welche der bezüglichen Entscheidung einen zu grossen Spielraum darbot, sondern durch Verschiebung, d. h. Annäherung oder Entfernung des Vergrösserungsobjectives vom Negative bewerkstelligt. Die Beleuchtung des Negativs erfolgte ursprünglich durch künstliches Licht, später durch zerstreutes, nicht zu kräftiges Tageslicht, um Schattenwürfe des originalen Plattenkornes zu vermeiden und die Verhältnisse ganz so wie bei meinem vergrösserten Zeichnen nach Diapositiven zu gestalten.

Die als Vergrösserungsobjective benützten Mikrometeroculare ergaben auf solche Weise in kurzer Zeit sehr günstige Resultate; doch galt dies nur für die Mitte des Feldes, wo das photographisch vergrösserte Emulsionskorn des Negatives völlig genau dem geometrischen Vergrösserungsfactor des Bildes entsprach und neun- bis zehnmal feiner als dasjenige ähnlicher photographischer Vergrösserungen Anderer erschien. Für die nicht centralen Partien hingegen zeigten diese Oculare ungenügenden Anastigmatismus, indem dort die von einem Punkte ausgehenden Strahlen nicht mehr in einem Punkte vereinigt wurden; das vergrösserte Korn erhielt daselbst einen verschwommenen Charakter, war nicht mehr rund und bestand aus verwaschenen Korngruppen, welche das Bild flockig und unbestimmt gestalteten, um so mehr, je stärker die Vergrösserung genommen wurde. Während die centralen Partien Alles, was auf dem Originalnegative unter gleicher Ocularvergrösserung erkannt werden konnte, mit minutiösester Genauigkeit wiedergaben, reproducirten die Randpartien nur das gröbere Detail und zeigten sich adäquat zu jenen photographischen Vergrösserungen, welche damals von Brüssel und vom Mt. Hamilton aus zur Versendung gelangten.

Zum Prüfstein der absolut treuen Wiedergabe des Originals nach der angeführten Methode wählte ich vornehmlich feine rillenartige Objecte in den Ringebenen Thebit und Eratosthenes, welche ich vor längerer Zeit auf Lick-Diapositiven des Mondes gefunden, eingehendst studirt und sorgfältigst gezeichnet hatte, indem ich diese unter successiver Steigerung der Vergrösserung photographirte und zusah, ob dieselben mehr oder weniger klar zur Anschauung kamen. Von besonderem Interesse waren hierbei eine gewundene rillenähnliche Formation auf dem inneren Nordwalle von Eratosthenes, sowie mehrere winzige Kraterobjecte innerhalb dieser Ringebene. Ich vergrösserte auf solche Weise Thebit der Reihe nach 12-, 20-, 29-, 50- und 62mal, Eratosthenes 21-, 38-, 53- und 71mal, wobei selbst die stärkste Vergrösserung ein auffallend feines Korn ergab, das dem gesehenen völlig gleichkam, und das zarteste Detail, sei es, dass dieses dem Monde oder der Plattenschicht angehört, mit vollständiger Klarheit zur Abbildung brachte. Abgesehen von der Kleinheit des scharfen Bildfeldes dieser Oculare, welcher Umstand beim Zeichnen wegen der Verschiebbarkeit derselben nicht in die Wagschale fällt, offenbarte sich bei der rein photographischen Vergrösserung insoferne ein Mangel gegenüber der Zeichnung, als erstere für die gewählte Expositionsdauer keine gleichmässige Güte in allen Theilen des mannigfaltig nuancirten Bildes zu geben vermag, welchem Übelstande aber jederzeit durch verschiedenartige Expositionen, je nachdem man das eine oder andere Object des Bildfeldes vollkommener erhalten will, begegnet werden kann.

Das gewählte Vergrösserungsobjectiv.

Nachdem die Versuche mit den Reinfelder & Hertel'schen Ocularen so weit gediehen waren, wandte ich mich im September 1893 unter Vorlage einer 41maligen photographischen Vergrösserung der Ringebene Capella (nach dem Lick-Diapositive vom 17. November 1890, $6^h\,8^m\,35^s$ P. s. t.), deren Centralberg an der Spitze einen kleinen, von C. M. Gaudibert am 24. Mai 1890 optisch entdeckten Krater zeigt, an Herrn Prof. Dr. E. Abbe in Jena als Autorität auf dioptrischem Gebiete mit dem Ansuchen, ein geeignetes optisches System ausfindig zu machen,

beziehungsweise in Construction zu nehmen, das bei 30- bis 100facher Vergrösserung ohne zu langen Cameraauszug auch für den Bildrand dieselbe Schärfe, wie diese bereits für die Bildmitte erreicht worden, geben würde. Herr Prof. Abbe kam mir bereitwilligst entgegen und machte mich auf ein photographisch corrigirtes Zeiss'sches Objectiv von 22 *mm* Brennweite aufmerksam, das für einen Bildwinkel von circa 30° im ganzen Felde ein gleichmässig scharfes Bild zu geben versprach. Objective dieser Art von kleinerer Brennweite waren bislang nicht ausgeführt worden, konnten aber ohne grosse Schwierigkeit bald hergestellt werden. Das bemerkte Objectiv wurde mir Anfang October 1893 zugeschickt, und ich machte mit demselben eine Reihe von photographischen Versuchen, die immer mehr befriedigten. Um jedoch für starke Vergrösserungen kürzere Cameraauszüge und eventuell auch ein grösseres scharfes Objectfeld zu erhalten, bestellte ich bei der optischen Werkstätte von Karl Zeiss in Jena ein zweites gleichartiges Objectiv von 14 *mm* Brennweite und 60° Bildwinkel. Dasselbe traf Anfangs November 1893 in Prag ein. Die schwierigere Einstellung mit diesem wegen der geringeren Helligkeit des Bildfeldes und die längere Dauer der Expositionen veranlassten mich jedoch bald, zum ersten Objective von 22 *mm* Brennweite zurückzukehren, mit welchem schliesslich der ganze Mond-Atlas unter Anwendung 24maliger Vergrösserung durchgeführt wurde.

Dieses Objectiv ($f = 22$ *mm*) hat das Öffnungsverhältniss $\frac{1}{7\cdot 2}$, gehört zu dem von Dr. P. Rudolph 1889 gefundenen anastigmatischen Constructionstypus und figurirt in dem Zeiss'schen photographischen Objectivkataloge unter dem Namen der »unsymmetrischen Anastigmat-Doublets«. Unter Öffnungsverhältniss ist der Bruch $\frac{o}{f}$ zu verstehen, worin o den Durchmesser des in das Objectiv bei grösster Blende eintretenden parallelstrahligen Bündels bezeichnet. Diesem Objective sind zwei Blenden von 2 *mm* und 1 *mm* Öffnung beigegeben, welche nahe zum geometrischen Mittelpunkte des Linsensystems zwischen den Objectivlinsen eingeschaltet werden. Es wurde

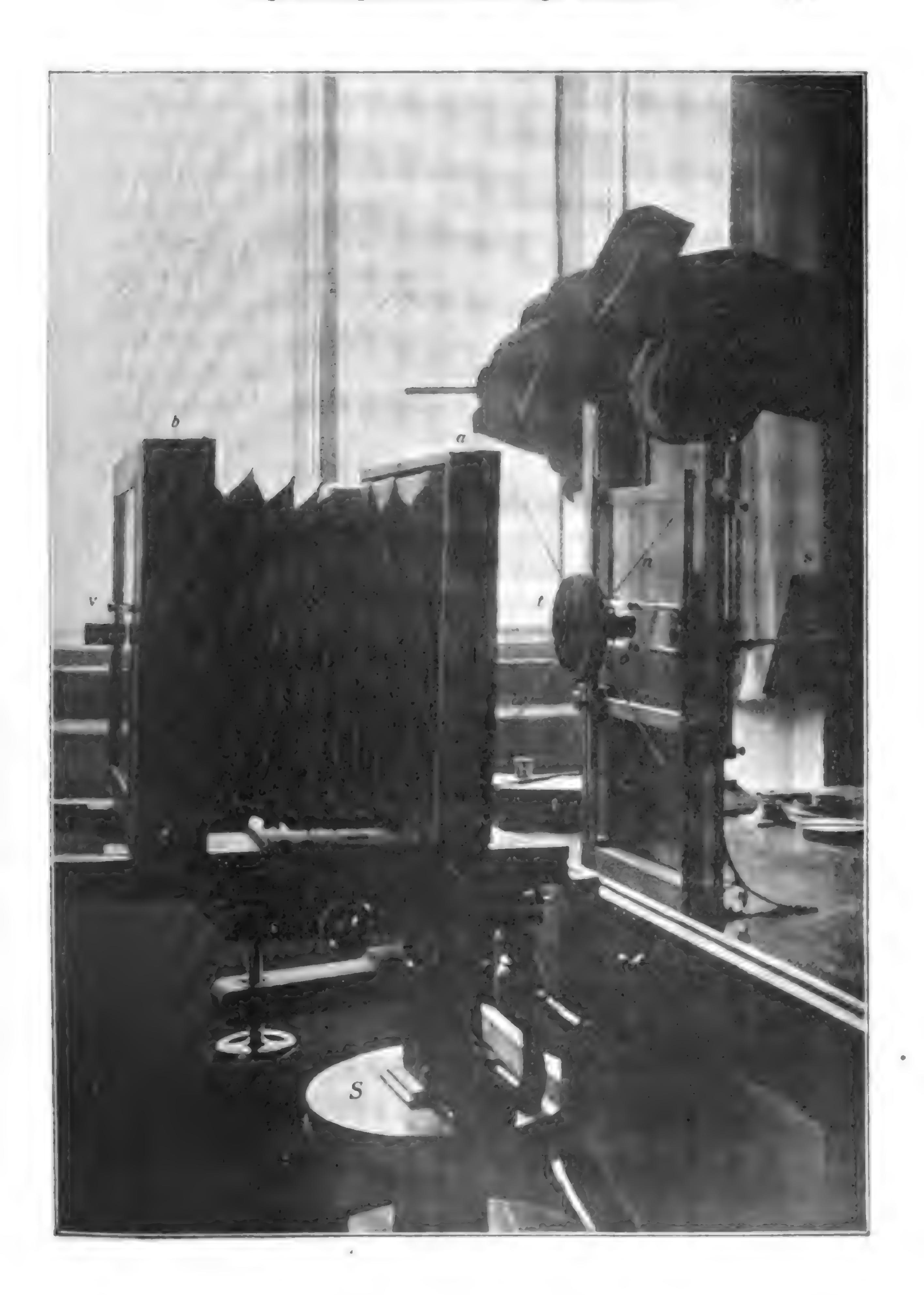
ausschliesslich mit der grösseren Blende gearbeitet, wesentlich deshalb, um keine zu langen Expositionen zu erhalten. Nach dem bemerkten Cataloge (1897, S. 25) besteht das Charakteristische dieser Doubletconstruction darin, »dass die beiden aus unter sich verkitteten Linsen zusammengesetzten Glieder des Systems zwar einzeln achromatisch sind, dabei jedoch der positive Theil (Sammellinse) in dem einen Gliede kleineren, in dem anderen Gliede dagegen grösseren Brechungsindex besitzt, als der damit verbundene negative Theil (Zerstreuungslinse). Die Einführung für sich achromatisirter Glieder von derartig gegensätzlichem Verhältniss ihrer Bestandtheile war möglich geworden durch angemessene Benutzung der Barium-Silicatgläser von relativ hohem Brechungsvermögen, welche das Jenenser Glaswerk (Schott & Genossen) seit dem Jahre 1886 den Optikern zur Verfügung gestellt hatte. Der Vortheil dieser gegensätzlichen Zusammensetzung der Theile eines Doublets besteht darin, dass durch sie eine vollkommene Aufhebung der astigmatischen Abweichungen schiefer Büschel unbeschadet der Ebnung eines grossen Bildfeldes erreichbar ist.« Für dasselbe Objectiv wurden auf mein Ansuchen hin von der Firma Zeiss im Herbste 1898 noch besondere, genaue Messungen ausgeführt. Es wurde gefunden: $f = 21 \cdot 75 \pm 0 \cdot 07$ *mm*, ferner, dass der erste Hauptpunkt $1 \cdot 99$ *mm* hinter dem Scheitel der Vorderlinse, der zweite Hauptpunkt $2 \cdot 275$ *mm* vor dem Scheitel der Hinterlinse liegt. Da der Abstand beider Scheitel $4 \cdot 415$ *mm* beträgt, so folgt daraus als Distanz der Hauptpunkte $0 \cdot 15$ *mm* mit einer Unsicherheit von $\pm 0 \cdot 05$ *mm*. Das zweitgenannte Objectiv hat das Öffnungsverhältniss $\frac{1}{6 \cdot 3}$ und, wie bemerkt, die Äquivalentbrennweite $f = 14$ *mm*.

Der zum photographischen Vergrössern benützte Apparat.

Derselbe besteht aus zwei wesentlichen Theilen, dem Rahmen, welcher das zu vergrössernde Negativ mit dem Vergrösserungsobjective aufnimmt, und der Camera, in welcher das vergrösserte Bild aufgefangen und photographirt wird. Ersterer ist auf einem stabilen Tische festgeschraubt, letztere

hingegen in Verwendung eines sogenannten Salontischstatives mit Schienenführung beweglich.

Der Rahmen erscheint in der Hauptsache ebenso construirt, wie der auf S. 50 der Prager Astron. Beob. 1888—1891 beschriebene. Verschieden ist nur die Einrichtung, dass hier die beiden verticalen Rahmensäulen durchbrochen sind, und die beiden Horizontalleisten, welche das Negativ *n* (vide Abbildung) aufnehmen, durch die Säulenschlitze hindurchgehen. Auf diese Weise wird ein grosser Spielraum für die seitliche Verschiebung des Negatives über den Rahmen hinaus erreicht, so dass auch stark excentrische Partien des Negatives schnell und leicht in die Rahmenmitte gebracht werden können. Die Rückwand des Rahmens wird durch eine schwarze Tafel aus Pappendeckel gebildet, welche in der Mitte eine zureichend grosse Öffnung besitzt und mit sehr fein mattirtem Glase gedeckt ist. Hinter dieser Öffnung befindet sich der Beleuchtungsspiegel *s*. Das Vergrösserungsobjectiv *o* ist vor dem Rahmen, beziehungsweise Negative in ähnlicher Weise, wie beim citirten Zeichenapparate das Ocular, in verticaler und horizontaler Richtung verschiebbar; nur erhielt die Hülse, welche das Objectiv aufnimmt, behufs grösserer Stabilität statt einfacher doppelte Führung an zwei zu einander parallelen Horizontalstangen. Diese Hülse ist anderseits kein glatter Cylinder, sondern trägt an der Innenwand ein Schraubengewinde, in welchem das Objectiv *o* zur Annäherung oder Entfernung vom Negative *n* gedreht werden kann. Letzteres geschieht durch Vermittlung eines an das Objectiv *o* anschraubbaren, schwarzen Metalltrichters *t*, welcher mit sechs langen Speichen versehen ist. Die Drehung dieser Speichen, also auch des Objectives, ist leicht vom Cameraende aus mit Hilfe eines entsprechend langen Stabes zu bewerkstelligen. Der Trichter *t* trägt an seinem, der Camera zugewendeten Rande einen weichen Filzstreifen, an welchem die Vorderseite *a* der Camera, die einen kleineren Ausschnitt als die Trichteröffnung besitzt, leicht angeschoben wird. Überdies trägt der Kopf des Rahmens noch ein vorspringendes Gestell, über welches ein dichter schwarzer Vorhang zur Fernhaltung jedes störenden Seitenlichtes herabgelassen und die Öffnung von *a*, welche bereits der Trichter *t*


b
a
v
t
n
S

nahezu vollkommen abschliesst, noch weiter umhüllt wird. Trichter- und Cameraöffnung müssen natürlich so gross gewählt werden, dass der aus dem Objective *o* tretende Strahlenkegel dieselben unbehindert passire.

Die Camera besteht aus dem Vorderrahmen *a*, dem Hinterrahmen *b* und dem dazwischen liegenden, sehr dehnbaren Balgauszuge. *a* und *b* haben separate Füsse und können auf der Stativschiene unabhängig von einander verschoben werden. Diese Schiene ist dreitheilig, die Mitte fest, das Ende aber nach beiden Seiten herunterklappbar, um bei schwächeren Vergrösserungen nicht durch die Länge der Schiene genirt zu sein. Bei starken Vergrösserungen werden die Endschienen aufgeklappt und durch untergeschobene kurze Metallstücke noch besonders verstärkt. Der rückwärtige Theil *b* der Camera besitzt die Vorrichtung zum Einschieben des Visirrahmens mit durchsichtiger, beziehungsweise mattirter Glasscheibe und der Cassette mit der lichtempfindlichen Platte. Derselbe kann um 90° gedreht werden, um von oblongen zu Querbildern und umgekehrt übergehen zu können. Bei *v* befindet sich hinter der durchsichtigen Visirscheibe, welche in der Auffang-, beziehungsweise Aufnahmeebene mit einem Andreaskreuze und verschiedenen Centrirungsmarken versehen ist, ein Ocular (dasselbe, welches a. a. O. S. 51 als schwächstes mit der Vergrösserung 7·8 angegeben wurde), das auf dieses Kreuz scharf eingestellt wird und längs der ganzen Breite der Visirscheibe eine analoge horizontale Führung hat, wie das vor dem Ngative *n* befindliche Objectiv *o*. Durch Drehung der Visirscheibe im Rahmen *b* um 90° wird diese in eine verticale Führung umgesetzt. Mit dem erwähnten, auf das Strichkreuz der durchsichtigen Visirscheibe focussirten Oculare wird, ohne es weiter zu verstellen, das vergrösserte Korn des Negatives auf das Genaueste betrachtet, während gleichzeitig an den Speichen des Objectivtrichters *t* gedreht wird. Erscheint das Korn völlig scharf und punktartig, so ist die Drehung des Objectives beendet und dessen Abstand vom Negative fixirt.[1] Bei 24maliger

[1] Verschiedene specielle Experimente um diese Lage herum zeigten nämlich, dass die optisch-günstigste Einstellung auch das beste photographische Bild ergab.

Vergrösserung wurde die einmal ermittelte Entfernung *bn* constant beibehalten und für diese stets die entsprechende Objectivstellung durch Drehen der Speichen und gleichzeitiges Anvisiren des Kornes gesucht. Hierbei war die Gesammtvergrösserung für die optische Einstellung des Kornes $24 \times 7 \cdot 8 = 187$ fach, wodurch ein sehr hoher Grad von Genauigkeit erreicht wurde. Erst nachdem diese Objectiveinstellung beendet worden, wurde die Mattscheibe in den Rahmen *b* gebracht, um einen Überblick des ganzen zu photographirenden Bildes zu erhalten, dessen gleichartige Beleuchtung in verschiedenen Theilen zu controliren und die Orientirung des gewählten Mondobjectes in die Mitte der Mattscheibe durch geringfügige Verschiebungen von *o* im verticalen oder horizontalen Sinne vorzunehmen.

Zu dem bekannten Stative *S* ist nichts weiter zu bemerken, als dass mittelst der im Bilde sichtbaren Kurbel die Höhe der Camera regulirt wird, dass die Schraube I eine Drehung derselben um eine verticale Axe, die Schraube II eine solche um eine horizontale Axe, also eine Kippung, und die Schraube III eine kleine seitliche Verschiebung der Camera auf dem Stativtische bewirkt.

Reihenfolge der Operationen beim Vergrössern.

1. Das zu vergrössernde Negativ wird in den Rahmen gegeben, die Schichtseite nach vorne, d. i. nach der Camera hin gewendet, wobei durch Druckfedern, welche auf die Rückseite der Platte wirken und durch entsprechenden Widerhalt in den horizontalen Aufnahmeschienen eine constante Anstossfläche für die Vorderseite erzielt wird. Sodann wird die zu vergrössernde Mondgegend mittelst dieser beweglichen Schienen und durch seitliche Verschiebung der Platte innerhalb derselben in die Mitte des Lichtausschnittes der Rückwand gebracht. Ist dies geschehen, so erfolgt die Festklemmung der beiden Horizontalschienen.

2. Der Träger der Objectivhülse wird als Ganzes vertical und an diesem das Objectiv so weit horizontal verschoben, bis letzteres genau über der gewählten Mondgegend steht. Hierauf wird der Träger gleichfalls festgeklemmt.

3. Das Objectiv wird nun in seiner Hülse so weit gedreht, bis es wie eine Lupe die in Frage kommende Mondgegend deutlich zeigt. Dann wird das ganze Gesichtsfeld des Objectives sorgfältig durchmustert und die Beleuchtung desselben durch entsprechende Drehung des hinter dem Rahmen befindlichen Spiegels regulirt. Diese Manipulation ist sehr wichtig und für die Durchschnittsgüte des vergrösserten Bildes mitentscheidend. Ist die betreffende Mondgegend gleichmässig nuancirt, so hat auch der Spiegel diese Partie des Negatives gleichmässig zu beleuchten. Zeigt sie aber nach dem einen oder anderen Feldrande hin dunkle Stellen, so muss dieser durch correspondirende Drehung des Spiegels etwas mehr Licht erhalten, damit die Contraste des Bildes nicht gesteigert werden, also der Charakter des Originales möglichst gewahrt bleibe. Da an und für sich die Randpartien im Objective weniger hell als das Centrum erscheinen, wird es stets zweckmässig sein, die zu vergrössernde Mondgegend so auszuwählen, dass die dunkelste Stelle des Feldes (d. i. die hellste Stelle des späteren Positives) ins Centrum komme und die helleren Partien nach dem Rande hin fallen.

4. Nach dieser Regulirung der Beleuchtung wird das Objectiv durch abermalige Drehung in seinem Schraubengewinde vom Negative entfernt, bis annähernd dessen Lage für die beabsichtigte Vergrösserung erreicht ist. Dann wird an dasselbe der Trichter mit den Speichen geschraubt und der photographische Aufnahmeapparat ihm gegenüber gestellt, wobei bestimmte Marken einzuhalten sind, um die gewünschte Vergrösserung ohne zeitraubendes Experimentiren zu erhalten.

5. Das Camerastativ wird zunächst bei freier Durchsicht durch die Camera so verschoben, dass die vordere Cameraöffnung symmetrisch das Objectiv umfasse, d. h. dass letzteres dem Augenscheine nach in die Mitte der Cameraöffnung zu liegen komme. Abweichungen in der Höhe können dabei leicht durch Drehung der Stativkurbel, wodurch die gezahnte Stativsäule höher steigt oder niedriger sinkt, beseitigt werden. Nunmehr bleibt das Stativ als Ganzes unverändert stehen, während die genaueren Einstellungen an der Camera selbst vorgenommen werden.

6. Weiter wird die durchsichtige Einstellscheibe mit dem, auf das Strichkreuz derselben focussirten Oculare in die Camera gegeben und der Cameraauszug so weit verschoben, dass einerseits die Auffangebene genau der erstrebten Vergrösserung entspricht, was durch Controle mit einem steifen Maassstabe in Bezug auf das Negativ erfolgen kann, anderseits die Cameraöffnung nahe an die Trichteröffnung herantritt, um seitliches Licht abzuhalten, wozu überdies noch ein schwarzer Tuchvorhang am Negativrahmen zu beiden Seiten herabgelassen wird. Nun erst wird das Feld im Einstellungsoculare aufmerksam betrachtet, und gleichzeitig mittelst eines Stabes so lange an den Trichterspeichen gedreht, bis das Emulsionskorn des Negatives deutlich sichtbar wird.

7. Hierauf erfolgt das Senkrechtstellen der Auffangebene zur optischen Axe des Objectives durch Betrachtung des Lichtfeldes im Oculare. Da letzteres in Anwendung der Spiegelungsmethode genau senkrecht zur Auffangebene mit dem Strichkreuze gestellt ist, so soll das Lichtfeld, wenn Ocularmittelpunkt und Strichkreuzmittelpunkt zusammenfallen, centrisch innerhalb des Oculargesichtsfeldes liegen. Ist dies nicht der Fall, so wird mittelst der betreffenden Stativschrauben die Camera geneigt oder um eine Verticale seitlich gedreht, bis jenes eintrifft. Zur Controle können noch die Ausschnitte des Lichtfeldes im Oculare, sobald dieses in gleiche Distanzen vom Cassettencentrum nach rechts und links, beziehungsweise oben und unten gebracht wird, beachtet werden, wobei deren symmetrische Gleichheit die vollendete Centrirung anzeigen würde.

8. Endlich wird ein zweiter Rahmen mit der Mattscheibe in die Camera gebracht und das vergrösserte Bild in seiner Gesammtheit betrachtet. Die genaue Verschiebung des gewählten Mondobjectes in die Mitte der Cassette geschieht erst jetzt durch minimale Verschiebungen des Objectives im horizontalen und verticalen Sinne. Hierauf wird die Centrirung wiederholt und die berechnete, beziehungsweise experimentell ermittelte Distanz der Auffangebene vom Negative für die gewünschte Vergrösserung mittelst eines Maassstabes thunlichst genau eingestellt. Der Lichteindruck des Bildes auf der Mattscheibe oder im Oculare der durchsichtigen Einstell-

scheibe erscheint massgebend für die Wahl der Expositionsdauer. Nachdem weiter Alles lichtdicht gemacht und die Schärfe des Kornes im Einstellungsoculare abermals controlirt worden, erfolgt die Einführung der Cassette mit der lichtempfindlichen Platte in die Camera und die Exposition.

Bemerkungen zur Exposition.

Da die transparente Beleuchtung des Negatives mittelst eines Spiegels durch zerstreutes Tageslicht an einem nach Norden gelegenen Fenster geschah und diesem, wenn auch in grösserer Entfernung, ein zwei Stock hohes Gebäude gegenüber lag, so war bei der Exposition ebensowohl auf die Färbung des Himmels (ob derselbe blau oder mit weissen, gelben, grauen Wolken bedeckt war), als auch auf jene der bemerkten Wand (ob diese beleuchtet oder beschattet war) zu achten. Am einfachsten erschien die Wahl der Expositionsdauer bei constant sonnigem oder constant trübem Wetter. Schwierig wurde sie bei wechselndem Sonnenscheine, wo dieselbe oft während der Aufnahme geändert werden musste. Gefühl und Erfahrung hatten in diesem Falle zusammenzuwirken, um das Richtige zu treffen. Beim Prager photographischen Mond-Atlas und durchschnittlich 24maliger Vergrösserung variirte im Allgemeinen die Expositionsdauer zwischen 3 Minuten und 3 Stunden. Erstere galt für sehr durchsichtige Negative und Randpartien des Mondes an der Lichtgrenze bei hellem Wetter, letztere für die dunkelsten Stellen des Negatives bei trübem Regen-, beziehungsweise Winterwetter. Zweckmässig war es, das Bild stets etwas überzuexponiren, 1. weil auf solche Weise das scharfe Korn sich auf dunkleren Untergrund projicirte und insoferne nicht so aufdringlich erschien, als bei knapp bemessener Exposition, 2. weil die Reproduction stets härter und contrastreicher als das Original wird. Natürlich war ein stärkeres Überexponiren zu vermeiden, damit nicht die Vergrösserung durch völlige Ausgleichung der Contraste flau werde und das feinere Detail ganz verloren gehe. Auch ist durch möglichst richtige Exposition dem künstlerischen Eindrucke des Originals hinsichtlich der Schönheit seiner Plastik in treuester Weise Rechnung zu tragen. Eine künstliche Lichtquelle hätte zwar den

Vortheil der Constanz und der einfacheren Beurtheilung der Expositionsverhältnisse mit sich gebracht. Doch standen weder zureichende Mittel für die exacte Einrichtung einer solchen zur Verfügung, noch war es wünschenswerth, das Negativ zu intensiv zu beleuchten, um nicht störende Schattenwürfe des Kornes und damit eine Fälschung des feineren Details zu erhalten. Besonders aus letzterem Grunde wurde bei der Benützung zerstreuten Tageslichtes verblieben, wie dieses auch bei meinen vergrösserten Zeichnungen zur Verwendung kam. Hierbei wurde es sogar für günstiger befunden, matte Tagesbeleuchtungen mit längerer Expositionsdauer an Stelle von hellen mit kürzerer zu wählen, vornehmlich dann, wenn das Negativ grosse Durchsichtigkeit besass.

Über einen Beugungsversuch mit elektrischen Wellen

von

Dr. **Anton Lampa.**

Aus dem physikalischen Cabinet der k. k. Universität in Wien.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1899.)

Der Versuch, welcher im Folgenden beschrieben ist, bildet die elektromagnetische Analogie zu dem Experiment, welches Herr Karl Exner unter dem Titel: »Über eine Consequenz des Fresnel-Huyghens'schen Principes« bekannt gemacht hat.[1] Zur Ausführung desselben bediente ich mich eines vertical stehenden, aus Holz verfertigten Spectrometers (Fig. 1). Der Theilkreis, ein Kreisring mit einem äusseren Durchmesser von 45 *cm*, sitzt auf einem starken Zapfen, der eine Bohrung besitzt, in welche ein das Spectrometertischchen tragender Zapfen hineinpasst. Auf dieses Tischchen wurde eine schmale Holzleiste in passender Weise aufgeleimt; dieselbe dient als die eine Unterlage für das Prisma; die zweite wird

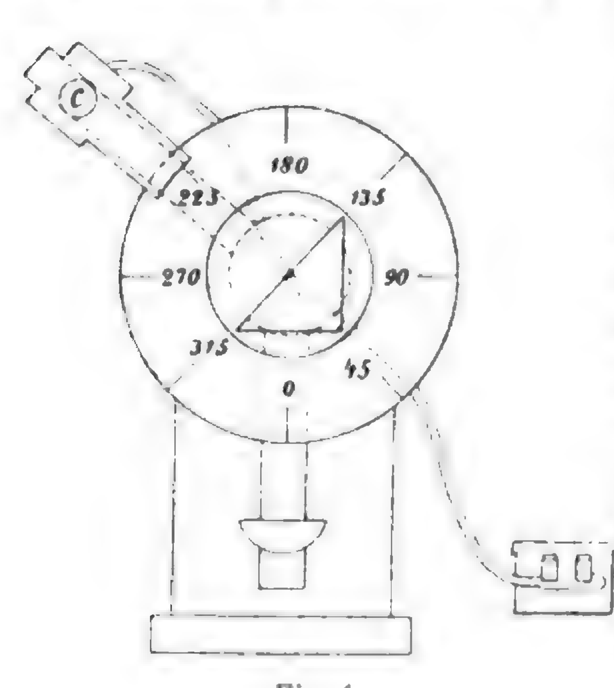


Fig. 1.

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 98, Abth. II.a, 1889, S. 51.

durch eine von einem Holzstativ getragene Leiste gebildet. Auf dem dicken Zapfen sitzen hinter dem Theilkreis zwei Holzarme, von denen der eine zum Tragen des Erregers, der andere zum Tragen des Empfängers bestimmt ist. Diese Holzarme können natürlich in jeder beliebigen Stellung an dem Theilkreis festgeklemmt werden. Der Empfänger ist ein Coherer, der mit kleinen eisernen Holzschrauben gefüllt ist; es ist derselbe, welchen ich bei meinen Bestimmungen des Brechungsexponenten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen benützt habe.[1] Der Coherer liegt in einem sorgfältig verschlossenen Blechkistchen in einer Entfernung von 39 *cm* vom Mittelpunkt des Theilkreises; dasselbe trägt ein gegen den Mittelpunkt des Theilkreises gerichtetes Ansatzrohr von 15 *cm* Länge und 47 *mm* Öffnung; die Entfernung dieses Rohres von

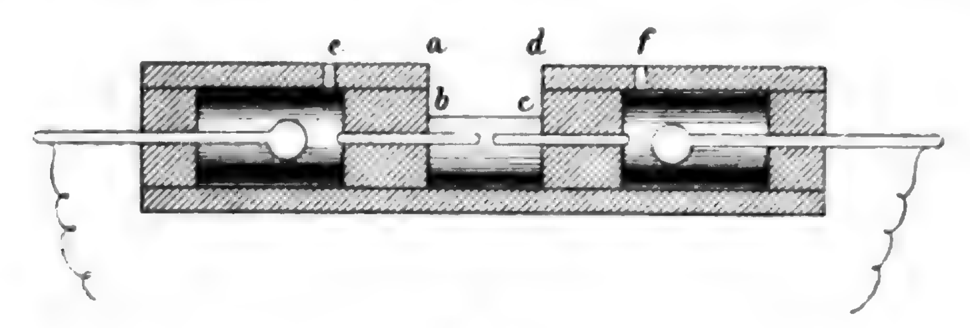


Fig. 2.

dem Holzarm ist so gewählt, dass das Centrum der Öffnung ebensoweit von der Ebene des Theilkreises absteht als die Funkenstrecke des Erregers. Die Zuleitung zu dem Coherer bildet ein Bleidoppelkabel, welches ganz hinter dem Spectrometer verläuft; dasselbe ist in der Axe des Spectrometers leicht fixirt und führt in ein zweites Blechkistchen, wo seine beiden Drähte in einem Quecksilberdoppelcontact endigen. Während der Bestrahlung wurde dieses Kistchen stets geschlossen gehalten, die Verbindung mit dem Galvanometer und der Stromquelle (einem Trockenelement) stets erst nach der Bestrahlung hergestellt.

Ich verwendete einen stabförmigen Erreger, dessen Theorie in jüngster Zeit von Herrn Abraham entwickelt worden

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, Abth. II.a, Juli 1896.

ist.[1] Seine Construction ist aus Fig. 2 ersichtlich. Aus einem Ebonitrohr wird ein Stück (in der Projection *abcd*) herausgeschnitten. Zwei in das Rohr passende Ebonitpfropfen tragen die beiden Erregercylinder, die einander bis auf die Dicke von stärkerem Schreibpapier (Ministerpapier) genähert werden. Bei dieser Anordnung ist es leicht zu erreichen, dass die beiden Cylinder genau in einer Linie liegen. Um die halboffene Kammer, in welcher die Funkenstrecke liegt, wird eine dünne Celluloidplatte derart herumgelegt, dass nur ein schmaler Spalt offen bleibt. Hierauf wird diese Kammer durch einen Schellackanstrich gedichtet und mit Vaselinöl so weit als möglich gefüllt. Der Erreger liegt dann beinahe vollständig in einem zu seiner Axe nahezu symmetrischen Medium, das aus zwei Theilen von annähernd gleicher Dielektricitätsconstante besteht. Dadurch ist die symmetrische Ausbildung der Schwingung gesichert. Die Zuführung der Ladungen erfolgt in der aus der Figur ersichtlichen Weise durch Funkenstrecken von circa 3 *mm* Länge. Bei *e* und *f* ist das Ebonitrohr durchbohrt, um der durch die Funken expandirten Luft Abfluss zu ermöglichen. Der ganze Erreger kommt nun zum Schluss in die Brennlinie eines parabolischen Hohlspiegels. Derselbe besitzt genau parabolische Stirnflächen aus Ebonit, über welche ein Carton gespannt wird. Auf den letzteren wird die reflectirende Metallfläche (Stanniol) aufgeklebt. Dieselbe erstreckte sich nicht über die gesammte Länge des Cartons; ich nahm sie nur um Weniges länger, als die Gesammtlänge des Erregers beträgt.

Der Erreger besteht aus zwei an den Enden abgerundeten Messingcylindern von je 20 *mm* Länge und 1·8 *mm* Dicke. Nach der Formel Herrn Abraham's ist die Wellenlänge der Grundschwingung gegeben durch $\lambda = 4(1+5\cdot 6\,\varepsilon^2)$, worin

$$\varepsilon = \frac{1}{4\,l\left(\frac{2}{b}\right)};$$

[1] M. Abraham, Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie. Wiedemann's Annalen, Bd. 66, 1898, S. 435.

b bedeutet die kleine Halbaxe des (als Ellipsoid aufgefassten) Erregers auf die Excentricität als Längeneinheit bezogen. Für meinen Erreger ergibt diese Formel für die Wellenlänge der Grundschwingung $\lambda = 82\cdot78$ *mm*. Mit Rücksicht auf den relativ kleinen Radius der Umhüllung des Erregers, der 9 *mm* beträgt und die kleine Dielektricitätsconstante derselben kann man annehmen, dass die Ausbildung der Schwingung so erfolgt, als wenn der Erreger frei in Luft läge. Der Spiegel erhielt daher eine Brennweite von 16 *mm*. Es ist auf diese Weise die Bedingung erfüllt, dass die Brennweite des Spiegels etwas kleiner sein soll als ein Viertel der Wellenlänge; der Spiegel functionirte auch recht gut, wie aus den in I mitgetheilten Messungen hervorgeht.

Herr v. Lang macht in seiner Abhandlung: »Interferenzversuch mit elektrischen Wellen« (I. Mittheilung)[1] die Bemerkung, dass der anfängliche Zustand des Coherers auf den durch Strahlung erzielten Zustand wenig Einfluss hat, wenn nur nicht zu extreme Anfangsstellungen verglichen werden. Dieser Bemerkung entspricht eine Beobachtung, welche ich gemacht habe. Es existirt ein anfänglicher Werth des Widerstandes des Coherers (vor der Bestrahlung), welcher einen Grenzwerth darstellt, bei dessen Unterschreitung, respective Überschreitung sehr differente Endzustände durch gleiche Bestrahlung hervorgerufen werden. Geht man von einem Anfangswerthe des Widerstandes aus, welcher unter diesem Grenzwerthe (bei meinem Coherer circa 40.000 S. E.) liegt, so ist die Empfindlichkeit des Coherers eine viel geringere als bei Anfangswerthen, welche oberhalb dieses Grenzwerthes gelegen sind. Die erreichten Endzustände sind jedoch in jedem der beiden Fälle von dem Absolutwerth des Anfangszustandes ziemlich unabhängig. Ich habe bei den folgenden Messungen beide Empfindlichkeiten benützt; bei der Untersuchung der directen Strahlung des Erregers und bei dem Versuch, betreffend Totalreflexion, die geringe Empfindlichkeit bei grösserer Empfindlichkeit des (v. Lang'schen) Galvanometers, bei dem Beugungsversuch die hohe Empfindlichkeit des Coherers bei geringerer Empfindlichkeit des Galvanometers. Die folgende

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV, Abth. II. a, 1895.

Tabelle orientirt über die beiden benützten Grade der Empfindlichkeit des Galvanometers; hiezu sei bemerkt, dass das Lichtbild bei Stromlosigkeit bei Theilstrich 11 der für objective Ablesung bestimmten Scala stand.

Widerstand in Siemens	Stand des Lichtbildes	
	Höhere	Geringere
	Empfindlichkeit	
∞	11	11
100000	14	13·4
90000	14·5	13·8
80000	15	14·2
70000	15·3	14·5
60000	16·2	15
50000	17·2	16
40000	18·3	17
30000	20·5	18·6
20000	24	21·3
10000	30·5	27·3
9000	31·5	28·5
8000	33	29·5
7000	34	30·6
6000	37·5	32·3
5000	40	33·8
4000	43	36
3000	46	37·5
2000	49·5	41·5
1000	55	45
500	58·4	46·8
400	59·2	47·4
300	59·9	48·4
200	60·8	48·8
100	61·8	49·3
0	62·4	50

Der Erreger stand stets beim Nullpunkte der Theilung, die den Coherer tragende Alhydade wurde dann entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers auf dem Theilkreise herumgeführt, die in den folgenden Tabellen angegebenen Winkel bezeichnen also die Stellung des Coherers gegen den Erreger.

Das Paraffinprisma, mit welchem die Versuche angestellt wurden, wurde in einer aus Glasplatten zusammengestellten Form gegossen; durch nachträgliche Bearbeitung mit dem Hobel, welche bei einiger Sorgfalt recht gut durchzuführen ist, wurde die nothwendige Vollkommenheit der Gestalt desselben erzielt. Das Prisma hatte einen Querschnitt von der Gestalt eines gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreieckes; die Länge einer Kathete betrug 107 *mm*, die Höhe des Prismas 115 *mm*.

I. Strahlungsfeld des mit dem Hohlspiegel justirten Erregers.

Der Ausschlag, welcher dem anfänglichen Zustande des Coherers (vor der Bestrahlung) entspricht, beträgt circa 15 Theilstriche.

Stellung des Coherers	Ausschlag	Stellung des Coherers	Ausschlag	Stellung des Coherers	Ausschlag
55°	15·8	140°	15·5	225°	15·2
60	15·4	145	15·3	230	15
65	15·5	150	15·5	235	15
70	15·8	155	15·6	240	15·4
75	16	160	17·2	245	15·5
80	15	165	29	250	15
85	15	170	27	255	15
90	15	175	27·5	260	15·3
95	16·2	180	32	265	15
100	15·2	185	27	270	15·2
105	15·8	190	30	275	15·2
110	16	195	21	280	15
115	15·8	200	17	285	15·2
120	15·8	205	15·4	290	15
125	15·8	210	15	295	15
130	15·8	215	15·4	300	15
135	15·5	220	15·2	305	15

Das Maximum der Bestrahlungsintensität ist also, wie bei einer richtigen Construction des parabolischen Hohlspiegels zu verlangen ist, auf eine schmale Zone zu beiden Seiten der Mittelebene des Hohlspiegels beschränkt. Der absolut grösste Werth fällt in die Mittelebene selbst (Coherer bei 180°).

II. Versuch über Totalreflexion.

Ein solcher Versuch wurde mit Wellen annähernd gleicher Länge von Herrn Righi gemacht und wiederholt beschrieben.[1] Herr Righi gibt den Brechungsquotienten des Paraffins für Wellen von 2·6 *cm* bis 20 *cm* zu 1·43 an, während Herr v. Lang 1·65—1·73 für Wellen von etwa 8 *cm* Länge gefunden hat.[2] Alle diese Werthe geben solche Grenzwinkel, dass ein rechtwinkeliges gleichschenkeliges Paraffinprisma, durch dessen eine Kathetenfläche die Strahlen normal eintreten, so dass sie die Hypothenusenfläche unter 45° treffen, die Erscheinung der Totalreflexion zeigen muss. Ich stellte mein Prisma so auf dass seine Hypothenusenfläche durch den Durchmesser 135°, 315° hindurchging. Die einfallende Strahlung trifft die erste Kathetenfläche normal, ebenso die von der Hypothenusenfläche reflectirte die zweite Kathetenfläche. Brechungen finden keine statt, und es muss daher, wenn Totalreflexion vorhanden ist, das Maximum der Intensität im Vergleich zu dem leeren Strahlungsfeld von 180° nach 90° verschoben erscheinen. Die folgenden Messungen bestätigen Righi's Versuch.

Der Ausschlag, welcher dem anfänglichen Zustande des Coherers entspricht, beträgt wieder circa 15 Theilstriche.

---

[1] Vergl. Righi, Die Optik der elektrischen Schwingungen, deutsch von B. Dessau. Leipzig 1898.

[2] Am angegebenen Orte und II. Mittheilung. Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, Abth. II a, 1896.

Stellung des Coherers	Ausschlag	Stellung des Coherers	Ausschlag	Stellung des Coherers	Ausschlag
55°	15·5	140°	16·5	225°	15
60	16·4	145	18·5	230	15
65	15·5	150	17	235	17
70	16·5	155	18	240	16
75	19·4	160	19	245	16
80	20	165	19	250	16
85	24·5	170	19	255	16
90	26	175	19	260	16
95	25	180	18	265	16·5
100	24	185	18	270	16
105	19	190	17	275	16
110	20	195	16	280	16·4
115	18	200	17	285	16
120	17·5	205	16	290	16
125	18·5	210	15	295	15·5
130	17	215	16	300	16
135	18	220	15	305	16·5

Ich habe sowohl für I. als auch II Messungen bei höherer Empfindlichkeit des Coherers angestellt; dieselben gaben zwar ein noch gut erkennbares, aber doch sehr gestörtes Bild der wesentlichen Verhältnisse. Das Prisma ist relativ klein, so dass der Strahlung in Folge der Reflexionen und Brechungen am Apparat selbst, an den Gegenständen und Wänden des Zimmers Nebenwege zum Coherer offen bleiben; wenn auch der Betrag dieser Strahlung nur sehr gering ist, so reicht er doch schon aus, um bedeutende Widerstandsänderungen des hochempfindlichen Coherers hervorzurufen.

Anders liegt die Sache bei dem eigentlichen Beugungsversuch. Das Gitter lässt überhaupt nur einen geringen Bruchtheil der Strahlung hindurch; derselbe ist zwar noch mit dem wenig empfindlichen Coherer nachweisbar, die Widerstandsänderungen aber so klein, dass es unmöglich wäre, quantitative

Unterschiede festzustellen. Hingegen war es bei diesem Versuche zulässig, der Strahlung durch einen Metallschirm, der bloss eine entsprechend grosse Öffnung hatte, unter welcher das Prisma Platz fand, alle Nebenwege abzuschneiden. Um dies vollkommen zu erzielen, wurde bei diesem Versuch auch das Spectrometertischchen und der Theilkreis zum Theil mit Stanniol überklebt.

III. Beugungsversuch.

Auf die total reflectirende Fläche des Prismas wurden senkrecht zu der Einfallsebene 13 Stanniolstreifen von 3 *mm* Breite in Zwischenräumen von je 3 *mm* aufgeklebt; rechts und links von diesen Streifen wurden noch je 3 *mm* freigelassen, die übrig bleibenden Ränder des Prismas ganz mit Stanniol überklebt, so dass ein Gitter resultirte, welches aus 14 Spalten und 13 Zwischenräumen von je 3 *mm* Breite bestand. Nach dem Fresnel-Huyghens'schen Princip ist dann das Vorhandensein einer Strahlung jenseits der sonst total reflectirenden Fläche zu erwarten. Ist das Gitter geeignet, so müssen in dieser Strahlung ein oder mehrere Minima nachweisbar sein. Im vorliegenden Falle wurde das Gitter den theoretischen Betrachtungen entsprechend gewählt, doch musste ich mich mit Rücksicht auf die Forderung, dass die durchgelassene Strahlung noch gut nachweisbar sein soll, mit der Möglichkeit eines Minimums begnügen.

Das Gitter ist so angeordnet, dass die Mittellinie des mittleren Stanniolstreifens durch den Mittelpunkt des Theilkreises hindurchgeht. Das Fresnel-Huyghens'sche Princip liefert die folgende Berechnung der Erscheinung.

Es sei (Fig. 3) A der Anfang des Coordinatensystems, O der Mittelpunkt des Theilkreises, α der Einfallswinkel der ebenen Welle AW, $OD = R$ der Abstand der Öffnung D des Rohres, durch welches die Strahlung zum Coherer gelangt, von dem Mittelpunkte des Theilkreises, β der Winkel zwischen R und dem Einfallsloth. Zu beiden Seiten von O seien l Spalten von der Breite b, die Zwischenräume mögen die Breite d haben; c_1 sei die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in

Luft, c_2 ihre Geschwindigkeit in der Prismensubstanz, $\frac{c_1}{c_2} = f$ daher der Brechungsquotient des Prismas.

Die von A gezählt k^{te} Spalte (links von O) liefert dann in D eine Bewegung — wenn $\sin \frac{2\pi}{\tau} t$ die Bewegung in der einfallenden Welle darstellt — im Betrage von

$$L_k = \int_{(k-1)(b+d)}^{(k-1)(b+d)+b} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{BC}{c_2} - \frac{BD}{c_1} \right) dx.$$

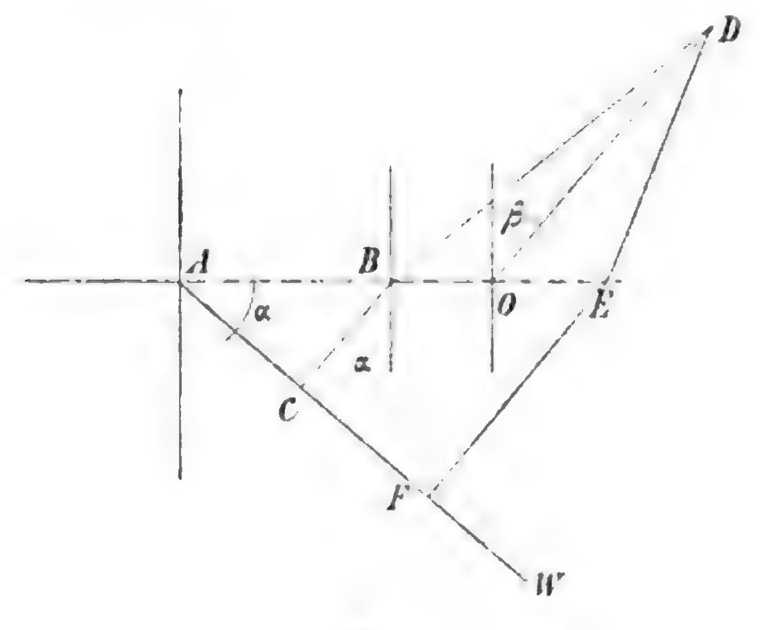


Fig. 3.

Nun ist $BC = AB \sin \alpha = x \sin \alpha$ und

$$BD = \sqrt{R^2 + OB^2 + 2R.OB.\sin\beta} = R + OB.\sin\beta$$
$$= R + (AO - x) \sin\beta,$$

wenn $\left(\frac{OB}{R}\right)^2$ vernachlässigt wird. Diese Vernachlässigung wird das Resultat nicht sehr beeinträchtigen, da bei dem verwendeten Gitter das Maximum von $OB = 40 \cdot 5\,mm$, $R = 240\,mm$ ist.

Dann wird

$$L_k = \int_{(k-1)(b+d)}^{(k-1)(b+d)+b} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left[t - \frac{R + AO.\sin\beta}{c_1} - \left(\frac{\sin\alpha}{c_2} - \frac{\sin\beta}{c_1} \right) x \right] dx,$$

und sämmtliche l Spalten links von O liefern in D eine Bewegung

$$\sum_{k=1}^{k=l} L_k = \sum_{k=1}^{k=l} \int_{(k-1)(b+d)}^{(k-1)(b+d)+b} \sin \frac{2\pi}{\tau} \left[t - \frac{R+AO.\sin\beta}{c_1} - \left(\frac{\sin\alpha}{c_2} - \frac{\sin\beta}{c_1}\right) x \right] dx$$

Es ist nun $c_1\tau = \lambda$ = der Wellenlänge der einfallenden Strahlung in Luft. Setzt man noch der Kürze wegen

$$\frac{2\pi}{\lambda}(R+AO.\sin\beta) = \delta \quad \text{und} \quad \frac{2\pi}{\lambda}(f\sin\alpha - \sin\beta) = \varepsilon,$$

so folgt

$$\sum_{k=1}^{k=l} L_k = \sum_{k=1}^{k=l} \int_{(k-1)(b+d)}^{(k-1)(b+d)+b} \sin\left[\frac{2\pi}{\tau} t - (\delta+\varepsilon x)\right] \partial x,$$

oder nach Ausführung einer Zwischenrechnung, deren ausführliche Mittheilung überflüssig ist:

$$\sum_{k=1}^{k=l} L_k = \sin\frac{2\pi}{\tau} t \cdot \frac{2}{\varepsilon} \sin\frac{\varepsilon b}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=l} \cos\left\{\delta + \varepsilon\left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2}\right]\right\}$$

$$- \cos\frac{2\pi}{\tau} t \cdot \frac{2}{\varepsilon} \sin\frac{\varepsilon b}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=l} \sin\left\{\delta + \varepsilon\left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2}\right]\right\}.$$

Die von A gezählt m^{te} Spalte (rechts von O) liefert in D eine Bewegung

$$L_m = \int_{(m-1)(b+d)}^{(m-1)(b+d)+b} \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{EF}{c_2} - \frac{DE}{c_1}\right) dx.$$

Nun ist $EF = AE.\sin\alpha = x\sin\alpha$ und

$$DE = \sqrt{R^2 + \overline{OE}^2 - 2R.\overline{OE}\sin\beta} = R - OE.\sin\beta$$
$$= R - (x - AO)\sin\beta,$$

wenn wieder $\frac{\overline{OE}^2}{R}$ vernachlässigt wird.

Dann wird

$$L_m = \int_{(m-1)(b+d)}^{(m-1)(b+d)+b} \sin \frac{2\pi}{\tau}\left[t - \frac{R + AO . \sin\beta}{c_1} - \left(\frac{\sin\alpha}{c_2} - \frac{\sin\beta}{c_1}\right) x\right] dx$$

oder

$$= \int_{(m-1)(b+d)}^{(m-1)(b+d)+b} \sin\left[\frac{2\pi}{\tau} t - (\delta + \varepsilon x)\right] dx,$$

worin δ und ε die oben angegebene Bedeutung haben. Sämmtliche l Spalten rechts von O geben dann in D eine Bewegung

$$\sum_{m=l+1}^{m=2l} L_m = \sum_{m=l+1}^{m=2l} \int_{(m-1)(b+d)}^{(m-1)(b+d)+b} \sin\left[\frac{2\pi}{\tau} t - (\delta + \varepsilon x)\right] dx,$$

d. i. weiter:

$$\sum_{m=l+1}^{m=2l} L_m = \sin\frac{2\pi}{\tau} t \cdot \frac{2}{\varepsilon} \sin\frac{\varepsilon b}{2} \sum_{m=l+1}^{m=2l} \cos\left\{\delta + \varepsilon\left[(m-1)(b+d) + \frac{b}{2}\right]\right\}$$

$$- \cos\frac{2\pi}{\tau} t \cdot \frac{2}{\varepsilon} \sin\frac{\varepsilon b}{2} \sum_{m=l+1}^{m=2l} \sin\left\{\delta + \varepsilon\left[(m-1)(b+d) + \frac{b}{2}\right]\right\}.$$

Die Gesammtbewegung in $D: L = \sum_{k=1}^{k=l} L_k + \sum_{m=l+1}^{m=2l} L_m$ lässt sich daher auch schreiben:

$$L = \sin\frac{2\pi}{\tau} t \cdot \frac{2}{\varepsilon} \sin\frac{\varepsilon b}{2} \sum_{k=1}^{k=2l} \cos\left\{\delta + \varepsilon\left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2}\right]\right\}$$

$$- \cos\frac{2\pi}{\tau} t \cdot \frac{2}{\varepsilon} \sin\frac{\varepsilon b}{2} \sum_{k=1}^{k=2l} \sin\left\{\delta + \varepsilon\left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2}\right]\right\}.$$

Die resultirende Intensität J in D wird daher proportional sein dem Ausdruck:

$$J \infty \frac{4}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\varepsilon b}{2} \left(\left[\sum_{k=1}^{k=2l} \cos \left\{ \delta + \varepsilon \left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2} \right] \right\} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{k=1}^{k=2l} \sin \left\{ \delta + \varepsilon \left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2} \right] \right\} \right]^2 \right).$$

Setzt man nun der Kürze wegen $\delta + \frac{\varepsilon b}{2} = \alpha$ und $\varepsilon(b+d) = \beta$, so wird

$$\cos \left\{ \delta + \varepsilon \left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2} \right] \right\} =$$

$$= \cos \alpha \cos (k-1)\beta - \sin \alpha \sin (k-1)\beta$$

und

$$\sin \left\{ \delta + \varepsilon \left[(k-1)(b+d) + \frac{b}{2} \right] \right\} =$$

$$= \sin \alpha \cos (k-1)\beta + \cos \alpha \sin (k-1)\beta.$$

Nun sind die Summen

$$\sum_{k=1}^{k=2l} \cos (k-1)\beta = \cos 0 + \cos \beta + \cos 2\beta + \ldots + \cos (2l-1)\beta =$$

$$= 1 + \frac{\sin \frac{2l-1}{2}\beta \cos l\beta}{\sin \frac{\beta}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{k=2l} \sin (k-1)\beta = \sin 0 + \sin \beta + \sin 2\beta + \ldots + \sin (2l-1)\beta =$$

$$= \frac{\sin \frac{2l-1}{2}\beta \sin l\beta}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Führt man diese Werthe in den Ausdruck für die Intensität ein, so ergibt sich für dieselbe — die Zwischenrechnung werde hier unterdrückt —:

$$J \backsim \frac{4}{\varepsilon^2} \sin^2 \frac{\varepsilon b}{2} \left[1 + 2 \frac{\sin \frac{2l-1}{2} \beta \cos \beta l}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{2l-1}{2} \beta}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \right]$$

oder

$$J \backsim b^2 \left(\frac{\sin \frac{\varepsilon b}{2}}{\frac{\varepsilon b}{2}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{\sin \frac{2l-1}{2} (b+d)\varepsilon \cos l(b+d)\varepsilon}{\sin \frac{(b+d)\varepsilon}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{2l-1}{2} (b+d)\varepsilon}{\sin^2 \frac{(b+d)\varepsilon}{2}} \right).$$

In meinem speciellen Falle ist $2l = 14$ und $b = d$; setzt man daher $\frac{(b+d)\varepsilon}{2} = b\varepsilon = z$, so wird

$$J \backsim b^2 \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{\sin 13z \cos 14z}{\sin z} + \frac{\sin^2 13z}{\sin^2 z} \right).$$

Der Werth von J hängt also von zwei Factoren

$$P = \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \right)^2$$

und

$$Q = 1 + 2 \frac{\sin 13z \cos 14z}{\sin z} + \frac{\sin^2 13z}{\sin^2 z}$$

ab.

Ehe der Verlauf dieser Functionen untersucht wird, sei daran erinnert, dass für die Discussion nur solche Werthe von z in Betracht kommen, welche innerhalb eines relativ engbegrenzten Intervalles liegen. Es war

$$z = b\varepsilon = 3\varepsilon = \frac{6\pi}{\lambda} (f \sin \alpha - \sin \beta)$$

oder

$$f \sin \alpha - \sin \beta = \frac{z\lambda}{6\pi};$$

setzt man $\varepsilon = \rho\pi$, so folgt, da $\alpha = 45°$ war und $\frac{\lambda}{\delta} = 13 \cdot 83$ ist:

$$0 \cdot 70711\, f + \sin\beta = 13 \cdot 83\, \rho.$$

Nun ist das absolute Maximum für $\beta = 90°$; man erhält demnach für ρ die beiden Grenzwerthe:

$$\text{bei } \beta = +90°: \quad 0 \cdot 70711\, f - 1 = 13 \cdot 83\, \rho_1$$
$$\text{bei } \beta = -90°: \quad 0 \cdot 70711\, f + 1 = 13 \cdot 83\, \rho_2.$$

Setzt man nun für f die von den Herren Righi und v. Lang bestimmten Werthe, so erhält man zwei Paare von Grenzwerthen von ρ. Dabei ist von den unteren Grenzwerthen der dem Righi'schen Werthe von f entsprechende der kleinere, von den oberen der dem v. Lang'schen Werthe von f entsprechende der grössere. Nimmt man diese als die äussersten Grenzen, so findet man die Relation

$$0 \cdot 0008 \leqq \rho \leqq 0 \cdot 1447$$

oder mit π multiplicirend

$$0° \, 9' \leqq \varepsilon \leqq 26° \, 2'.$$

Innerhalb dieses Intervalles hat die Function P kein Minimum, sie bleibt in diesem Intervall merklich gleich 1, hat daher auf den Werth von J überhaupt keinen Einfluss.

Was nun die Function Q anlangt, so empfiehlt es sich bei der geringen Ausdehnung des Intervalles, sie direct zu berechnen, anstatt ihre Minima nach der Regel aufzusuchen, umsomehr als diese zu complicirten Formen führt. Von dem Verlauf der Function Q gibt die folgende Tabelle Aufschluss:

ε	Q	ε	Q
0°	703	14°	1·29
1	200·25	15	2·07
2	179·38	16	6·33
3	165·28	17	8·23
4	138·52	18	8·53
5	112·27	19	9·34
6	89·64	20	8·61
7	65·85	21	11·05
8	43·39	22	10·7
9	26·82	23	9·64
10	8·94	24	7·65
11	5·57	25	5·52
12	0·85	26	3·44
13	0·02		

Die stets positive Function Q kann äussersten Falles $= 0$ werden. Wie aus der Tabelle ersichtlich, ist dies in der Umgebung von $z = 13°$ der Fall. Man findet genauer $z = 12° 50' = 12 \cdot 8333°$ als die Stelle, für welche $Q = 0$. Hieraus ergibt sich für den einem Minimum entsprechenden Winkel β_{min} die Gleichung

$$f \sin \alpha - \sin \beta_{min} = 0 \cdot 98364.$$

Sowohl der Righi'sche, als auch der v. Lang'sche Werth für f ergibt ein einziges Minimum in der Nähe von 0°. Da bei dem complicirten Verlauf der Function Q die Werthe der Intensität für grössere, respective kleinere β bei der Untersuchung mit dem Coherer kein geeignetes Material für die genauere Ermittelung von β_{min} abgeben, so habe ich mich begnügt, die Existenz einer Strahlung auch für solche Werthe zu constatiren und nur in der Umgebung der fraglichen Stelle eine genauere Messung vorzunehmen. In den beiden folgenden Tabellen sind die Mittelwerthe dieser Messungen mitgetheilt. Tabelle *B* verzeichnet Messungen, bei welchen die Öffnung des zum Coherer führenden Rohres mit einem Diaphragma verschlossen war, welches eine kreisförmige Öffnung von 22 *mm* Durchmesser hatte. Die Messungen mit diesem Diaphragma zeigen einen durchaus parallelen Gang mit den Messungen mit ganz offenem Rohr. Der Coherer war, wie schon erwähnt, bei diesen Messungen hochempfindlich, das Galvanometer weniger empfindlich, das Lichtbild stand vor der Bestrahlung circa bei Theilstrich 18—20.

A. Rohr offen.

Stellung des Coherers	Ausschlag
210°	46
212	46
214	47
216	46·5
218	46·5
220	46·5
222	42·5
224	45
226	45·5
228	45·5
230	45·5
232	46
234	45

B. Rohr mit Diaphragma.

Stellung des Coherers	Ausschlag
210°	41
212	40
214	40·5
216	40·2
218	40
220	39·5
222	36
224	39
226	39·5
228	39·5
230	40·5
232	40·5
234	39·5

Wie man aus beiden Tabellen ersieht, liegt ein Minimum bei circa 222°, d. h. da das Einfallsloth durch 225° hindurchgeht, bei β circa $= +3°$. Nimmt man die Werthe der Tabelle *B*, welchen wegen des Diaphragmas grösseres Gewicht beizulegen ist, und stellt die den Winkeln 220°, 222°, 224° entsprechenden Werthe der Ausschläge durch eine Function zweiten Grades dar, so ergibt sich, dass diese ihr Minimum bei 222° 4′ hat. Darnach wäre

$$\beta_{min} = 225-222° 4' = +2° 56'$$

und

$$\sin \beta_{min} = 0 \cdot 051174,$$

so dass für f die Gleichung resultirt:

$$0 \cdot 707107 f - 0 \cdot 051174 = 0 \cdot 98364.$$

Diese Gleichung gibt $f = 1 \cdot 46$ in guter Übereinstimmung mit **Righi's** Werth.

Ich habe ausserdem den Brechungsquotienten eines zweiten Paraffinprismas mit dem brechenden Winkel von 30° mit demselben Spectrometer und mittelst Coherer gemessen und den Werth 1·44 erhalten.

Wollte man mehrere Minima nachweisen, so müsste man mit kürzeren Wellen arbeiten. Ich habe mich jedoch für die Benützung von circa 8 *cm* langen Wellen entschieden, weil es mir wünschenswerth erschien, den Nachweis der Existenz der Strahlung jenseits der mit einem Beugungsgitter versehenen totalreflectirenden Fläche mit der Bestimmung des Brechungsquotienten des Paraffins für diese Wellen, für welche differente Angaben existiren, zu verbinden.

Über eine Methode zur Bestimmung der Gasdichte mittelst angeblasener Pfeifen

von

Dr. **Rudolf Jahoda.**

Aus dem Laboratorium des allgem. österr. Apotheker-Vereines.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Juni 1899.)

Es ist für viele Zwecke, insbesondere für die Untersuchung von Rauchgasen, Leuchtgas etc. sehr wünschenswerth, eine rasche und mühelose, wenn auch nicht absolut exacte, so doch allen technischen Anforderungen genügende Methode zur Bestimmung des specifischen Gewichtes zu besitzen; und dies umsomehr, als man in der Lage ist, durch mehrere nach Absorption einzelner Bestandtheile des Gases ausgeführte specifische Gewichtsbestimmungen eine quantitative Bestimmung dieser Bestandtheile vorzunehmen.

Ich habe die Lösung dieses Problems versucht durch Anwendung der Beziehung zwischen Gasdichte und Tonhöhe mittelst dieser Gase angeblasener Orgelpfeifen.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles gilt die Formel $F = \sqrt{\frac{gp}{d}K}$, wo p der Druck des Gases, d seine Dichte, g die Beschleunigung der Schwere und K das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem Drucke und constantem Volumen bedeutet.

Das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in zwei verschiedenen Gasen bei demselben Drucke ist:

$$\frac{F}{F_1} = \sqrt{\frac{d_1 K}{d K_1}}.$$

wobei die mit Index versehenen Buchstaben die analogen Grössen für das zweite Gas bedeuten.

Da $F = Z.4l$, wo Z die Schwingungszahl und l die Länge der gedeckten Pfeife bedeutet, so ist: $\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{d_1 K}{d K_1}}$ daraus, wenn wir d als die Dichte der Luft $= 1$ setzen:

$$d_1 = \frac{l^2 K_1}{l_1^2 K}, \text{ beziehungsweise } d_1 = \frac{Z^2 K_1}{Z_1^2 K}.$$

Nun ist für O, N, H, CO das K nahezu $= 1\cdot4$, und entfällt somit aus der Gleichung, während bei CO_2 ($K = 1\cdot3$) und CH_4 ($K = 1\cdot32$), wofern diese Gase bis zu etwa $10^0/_0$ in Gasgemischen enthalten sind, das Verhältniss von K zu K_1 so nahe dem 1 kommt, dass die Constante K vollständig unberücksichtigt bleiben kann.

Bei Bestimmung der drei- und mehratomigen Gase muss die gefundene Dichte mit dem Werthe von $\frac{K_1}{K}$ multiplicirt werden.

Die Tonhöhe kann somit als den Quadratwurzeln aus den Dichten verkehrt proportional betrachtet werden. Wenn nun von zwei gleichgestimmten Pfeifen eine mit Luft, die andere mit dem fraglichen Gase angeblasen wird, so ergäbe das Tonverhältniss schon eine Beziehung zwischen den Dichten. In der Weise ausgeführt, würde die Methode nur eminent musikalischen Leuten zugänglich sein und dabei nicht einmal brauchbare Resultate geben, weil auch das geübte Ohr kleinere Intervalle als halbe Töne nicht zu beurtheilen und abzuschätzen vermag.

Daran leidet auch eine im Jahre 1880 von H. Goldschmidt publicirte ähnliche Methode zum Zwecke der Moleculargewichtsbestimmung, die überdies noch ein Geräusch mit einem wohlcharakterisirten Tone vergleichen lässt.

Um gar keinerlei musikalische Anforderungen zu stellen, benütze ich das Abstimmen zweier Pfeifen auf denselben Ton, was bei gleicher Klangfarbe der Töne sehr leicht mit grösster Präcision zu bewerkstelligen ist. Da bei starker Annäherung

zweier Töne die Schwebungen sich unangenehm fühlbar machen, so bietet das Verschwinden derselben auch dem nicht musikalisch geübten Ohre einen empfindlichen Indicator.

Da die Tonhöhe der Länge einer Pfeife verkehrt proportional ist, so konnte ich unmittelbar die Beziehung zwischen Gasdichte und Länge der Orgelpfeife benützen, um die erstere zu bestimmen.

Wenn ich eine Vergleichspfeife mit Luft anblase, eine zweite, gleichgestimmte, stimmbare Pfeife mit dem betreffenden Gas, so werde ich bei einem leichteren Gas die Pfeife um ein gewisses Maass verlängern müssen, um gleiche Tonhöhe zu bekommen; an der Verlängerung kann ich durch eine geeignete Scala unmittelbar das specifische Gewicht erkennen; umgekehrt würde ein dichteres Gas die entsprechende Verkürzung der Pfeife erfordern; jedwede Correctur oder Reduction auf den Normalzustand der Gase ist überflüssig, weil jedesmal mit Luft unter denselben Verhältnissen verglichen wird.

Die wesentlichsten Erfordernisse für diese Bestimmungsmethode sind zwei Labialpfeifen, von denen eine gedackt ist, am besten durch einen eingeschobenen Kolben, dessen Verschiebungen durch geeignete Übertragung auf einer Scala abzulesen sind.

In einfacherer Weise lässt sich dies auch mit Pfeifen aus Glas erreichen, die durch Quecksilber abgesperrt sind, dessen Niveau längs einer Scala sich verschieben lässt.

Die feine Einstellung soll mittelst einer Schraube geschehen, weil es sich hierbei um minimale Verschiebungen handelt.

Die Proportionalität zwischen Tonhöhe und Länge der Pfeife trifft in praxi nicht zu, wenn nicht alle Verhältnisse der Pfeife, wie die Weite, das Labium etc. in demselben Sinne geändert werden; es darf daher die Stimmpfeife nicht durch Abmessen geaicht werden, sondern durch Abstimmen, so dass also die Länge 1·5 oder 2 dort zu liegen kommt, wo die Quint, beziehungsweise Octave rein auftritt. Ich konnte bei Verdoppelung der Länge einer Pfeife statt der tieferen Octave nur höchstens eine übermässige Sext constatiren.

Wenn die Längen durch Abstimmen der Pfeife fixirt werden und nur die Intervalle von einem ganzen oder halben Tone in gleiche Theile getheilt werden, so ist der Fehler auf ein Minimum reducirt und die erhaltene Scala ohneweiters verwendbar.

Die Bezeichnung der Scalentheile wird vortheilhaft nach den relativen Schwingungsverhältnissen der entsprechenden Töne vorgenommen, so dass Grundton, Terz, Quint, Octav mit 24, 30, 36, 48 bezeichnet werden. Dies bietet den Vortheil, von der Länge der jeweilig benützten Pfeifen unabhängig zu sein.

Auf einer besonderen Tabelle werden dann die den Theilstrichen entsprechenden specifischen Gewichte abgelesen, eventuell können dieselben unmittelbar auf die Scala aufgetragen werden.

Bei dem für meine Zwecke zunächst construirten Apparat handelte es sich um specifische Gewichte von 0·4—1·0, das entspricht einem Tonumfange von ungefähr einer Quint.

Bei der Bestimmung specifischer Gewichte unter 1·0 nimmt man den mit 36 bezeichneten Ton als Grundton, beziehungsweise stimmt die Vergleichspfeife auf diesen Ton; wird jetzt die Stimmpfeife mit dem leichteren Gase angeblasen, so fällt der Ton viel höher aus und kann durch entsprechende Verlängerung der Pfeife auf den Normalton herabgestimmt werden.

Bei specifisch schwereren Gasen zeigt die Vergleichspfeife den Ton 24 an, bei gleicher Einstellung wird das dichtere Gas in der Stimmpfeife einen tieferen Ton erzeugen, der durch Verkürzung der Pfeife wieder die Normalhöhe erreicht.

Die Verlängerung und Verkürzung kann bei gleichen Tonintervallen, je nach der Länge der Pfeife, verschieden gross sein und dementsprechend auch die Empfindlichkeit der Einstellung; doch erfordern grosse Pfeifen erhebliche Luftquantitäten, damit sie ansprechen, was eine entschiedene Unbequemlichkeit bedeutet. Am zweckmassigsten sind die Tonlagen der zweigestrichenen Octave; derartige Pfeifen erfordern rund 150 bis 200 *l* Gas in der Stunde, das bedeutet für die Einzelnbestimmung circa 1 *l*.

Ein wesentliches Erforderniss ist es, dass das Gas unter ganz constantem Druck in die Pfeife strömt. Druckschwankungen erzeugen Schwankungen in der Tonhöhe, die einen halben Ton und darüber erreichen können; das Überschlagen in einen Oberton ist dagegen auffallend und kann kaum überhört werden. Den Übelstand beseitigt ein Druckregulator oder die entsprechende Verengerung der Zuströmungsöffnung. Jedenfalls empfiehlt es sich, der Pfeife ein Manometer zur Controle des Druckes beizufügen.

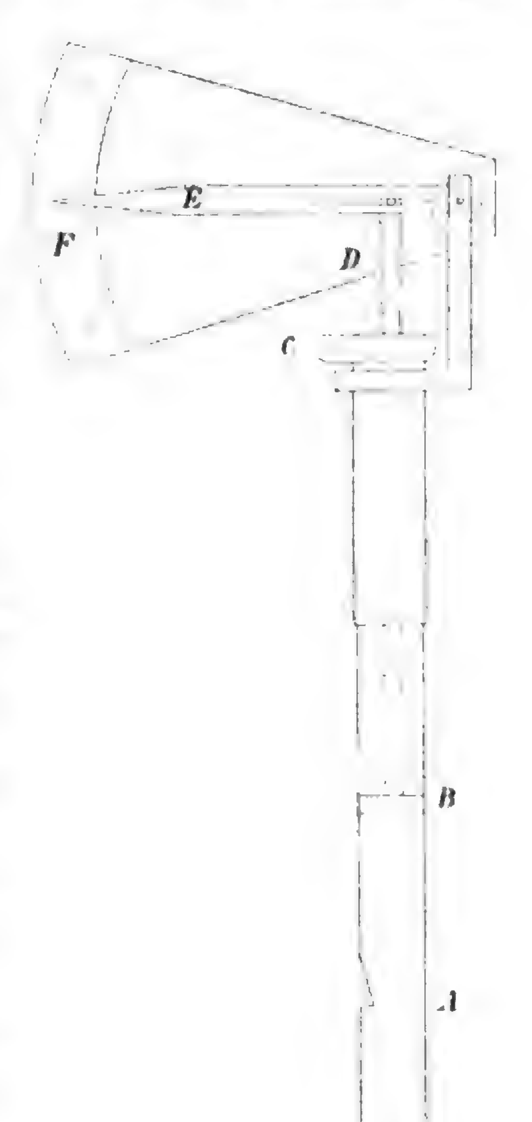


Fig. 1.

Die Luftzufuhr kann durch ein Wassertrommelgebläse oder auch einen doppelt wirkenden Blasebalg bewerkstelligt werden; in gleicher Weise kann das Gas zugeführt werden, wofern es nicht schon unter geeignetem Drucke ausströmt, wie bei Gasleitungen etc.

Der zum Anblasen der Pfeifen erforderliche Druck beträgt circa 20—50 *mm* Wasser.

Die zugeführte Luft zum Anblasen der Vergleichspfeife muss jeweilig durch Natronkalk und Chlorcalcium von Kohlensäure und Feuchtigkeit befreit werden.

Zahlreiche specifische Gewichtsbestimmungen nach dieser Methode ergaben übereinstimmend folgende Werthe:

für Kohlensäure . . . . 1·521
» Leuchtgas. . . . . 0·490
» Wassergas . . . . 0·631
» Sauerstoff . . . . 1·118.

Beistehende Zeichnung stellt einen solchen Apparat dar. *A* ist die Lippenpfeife, *B* der verschiebbare Kolben, *C* eine

drehbare Schraubenmutter, welche mittelst der Zahnstange *D* die Verschiebung des Kolbens bewerkstelligt.

Die Verschiebung wird in der ersichtlichen Weise auf den Zeiger *E* übertragen, der seinerseits auf der Scala *F* spielt.

Die Gaszufuhr geschieht in der Richtung des Pfeiles; unmittelbar vor der Pfeifenöffnung wird das Manometer, beziehungsweise der Druckregulator angebracht.

Um das Arbeiten mit trockenen Gasen zu ermöglichen, wird man das Manometer zweckmässig mit Glycerin füllen.

Für gewisse specielle Zwecke genügt eine Stimmpfeife mit dem Tonumfange einer Secund, wenn nur kleinere Schwankungen im specifischen Gewichte des betreffenden Gases auftreten; aber für fast alle Zwecke genügt eine solche mit dem Tonumfange einer Quint. Folgende Tabelle gibt die den jeweiligen Längen der Pfeife entsprechenden specifischen Gewichte an.

Scalentheil	I. spec. Gew.	II. spec. Gew.
36	1·000	2·250
35	0·945	2·127
34	0·892	2·007
33	0·840	1·927
32	0·790	1·777
31	0·742	1·669
30	0·694	1·562
29	0·648	1·460
28	0·605	1·361
27	0·562	1·266
26	0·521	1·173
25	0·482	1·085
24	0·444	1·000

Der Columne I entspricht als Normalton die Quint, der Columne II der Grundton. Die einzelnen Scalentheile können so gross gewählt werden, dass die Zehntel noch deutlich ablesbar sind.

Der Apparat wird sich zu Folge seiner einfachen Handhabung und genügend grossen Empfindlichkeit sehr gut dazu eignen, einzelne Bestandtheile aus einem Gasgemenge quanti-

tativ zu bestimmen und die für technische Zwecke umständliche volumetrische Gasbestimmungsmethode zu ersetzen.

Ist S_1 das specifische Gewicht eines Gasgemenges, S_2 dasjenige des zu bestimmenden Gases, S_3 das specifische Gewicht nach der Absorption des zu bestimmenden Gases, so ist:

$$S_1 = x S_2 + (1 - x) S_3$$

und daraus

$$x = \frac{S_1 - S_3}{S_2 - S_3}.$$

Zahlreiche Kohlensäurebestimmungen im Leuchtgas und Wassergas gaben vollständig befriedigende Übereinstimmung mit den Resultaten der exacten gasanalytischen Methode.

	Durch Absorption in der Gaspippete	Mittelst der Gaspfeife
Kohlensäuregehalt in Leuchtgas . . .	1·85%	2·0%
Kohlensäuregehalt in Wassergas . .	5·9	5·5
Kohlensäuregehalt in Wassergas . .	5·1	5·1
Kohlensäuregehalt in Wassergas . .	5·1	5·5
Kohlensäuregehalt in Wassergas . .	3·9	4·0

Es unterliegt keiner Schwierigkeit, auf diese Art auch eine vollständige Gasanalyse auszuführen, wenn für jeden Bestandtheil ein Absorptionsgefäss mit einer stimmbaren Pfeife vorhanden ist.

Wenn bei der Absorption, z. B. der Kohlensäure durch Natronkalk, das Gas erheblich erwärmt wird, so muss es hinterher behufs Abkühlung durch ein längeres Bleirohr hindurchstreichen, ehe es zur Pfeife gelangt.

Der Apparat dürfte für manche Anforderungen der Praxis ein werthvolles Hilfsmittel abgeben. Ausser der schon erwähnten

Anwendung dürfte er als ständiger Controlapparat bei Kohlenfeuerungsanlagen verwendet werden können, um den Kohlensäuregehalt der Abgase zu bestimmen.

Eine andere zweckmässige Verwerthung bestünde in dem Nachweise schlagender Wetter, da wenige Procente Methan in der Luft schon zu deutlichen Schwebungen Anlass geben.

Der Apparat wird sich schliesslich, in geeigneter Form, auch als verlässliches Hygrometer benützen lassen, zur Bestimmung der absoluten Feuchtigkeit.

Darüber hoffe ich in Kürze Ausführliches berichten zu können.

XIX. SITZUNG VOM 13. JULI 1899.

Der prov. Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, überreicht folgende Abhandlungen:

I. Von Herrn Prof. Dr. Ernst Lecher in Prag eine Mittheilung über »Einen neuen Versuch mit einem Wehneltfunken«.

II. Von Herrn Prof. Dr. Ernst Lecher ferner eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag, betitelt: »Über einen theoretischen und experimentellen Trugschluss in der Elektricitätslehre«.

III. Von Herrn Franz Schicht eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag, betitelt: »Das äussere elektrische Feld einer Entladungsröhre«.

IV. Von Herrn Prof. Ignaz Klemenčič eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck, betitelt: »Untersuchungen über permanente Magnete. II. Über die Abhängigkeit des Inductionscoëfficienten vom Dimensionsverhältnisse«.

V. Von den Herren Regierungsrath Dr. J. M. Eder und E. Valenta in Wien eine Abhandlung, betitelt: »Normalspectren einiger Elemente zur Wellenlängenbestimmung im äussersten Ultraviolett«.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet vier Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag, und zwar:

1. »Condensationen von Dibenzylketon mit Benzaldehyd«, von Guido Goldschmiedt und Gustav Knöpfer.
2. »Über die Einwirkung von Ammoniak auf die Lactone«, von Dr. Hans Meyer.
3. »Über die Ester der Chinolinsäure und Cinchomeronsäure« von Dr. Alfred Kirpal.
4. »Zur Kenntniss der Benzoylpyridincarbonsäuren«, von Hugo Ludwig Fulda.

Das c. M. Herr Hofrath A. Bauer übersendet eine im Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss der Überwallungsharze« (V. Abhandlung), von Max Bamberger und Anton Landsiedl.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über: »Eine wachsausscheidende Gallmilbe«.

Versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität sind eingelangt:

1. Von Herrn Raimund Nimführ in Wien, mit der Aufschrift »Grundlinien einer neuen Theorie der Flugbewegung auf analytischer Basis nebst Anwendung auf die Construction einer praktisch brauchbaren Flugmaschine (Erster Theil)«;
2. von Herrn V. Wolfram in Wien, mit der Aufschrift: »Eine Potentialmaschine«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Lieben legt eine Arbeit aus dem II. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von den Herren Erich v. Hornbostel und Eduard O. Siebner vor, welche den Titel führt: »Über Condensation von Glyoxal mit Isobutyraldehyd«. (Vorläufige Mittheilung.)

Das w. M. Herr Director E. Weiss berichtet über die Resultate der Beobachtungen des Leonidenstromes der Meteore im Jahre 1898.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt die XVII. Mittheilung der von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführten Untersuchung »Über die ultravioletten Funkenspectra« vor.

Derselbe legt ferner eine Arbeit des Herrn Dr. H. Mache vor, betitelt: »Über die Temperaturverhältnisse in der Flamme«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner legt eine Abhandlung des cand. med. Albert Aigner: »Über Trugbilder von Poren an den Wänden der Lungenalveolen« vor.

Das w. M. Herr Intendant F. Steindachner legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Über das Vorkommen von *Gasterosteus platygaster* Kessl. im Stromgebiete der Donau«.

Herr Custos Dr. Ludwig v. Lorenz berichtet über einen fossilen Anthropoiden von Madagascar.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Lengyel B.: A quantitativ chemiai analysis elemei. Budapest, 1896; 8º.

Than K.: A qualitativ chemiai analysis elemei. Budapest, 1895; 8º.

Weinek L.: Photographischer Mondatlas, vornehmlich auf Grund von focalen Negativen der Lick-Sternwarte im Maassstabe eines Monddurchmessers von 10 Fuss. Prag, 1899; 4º.

Das äussere elektrische Feld einer Entladungsröhre

von

Franz Schicht.

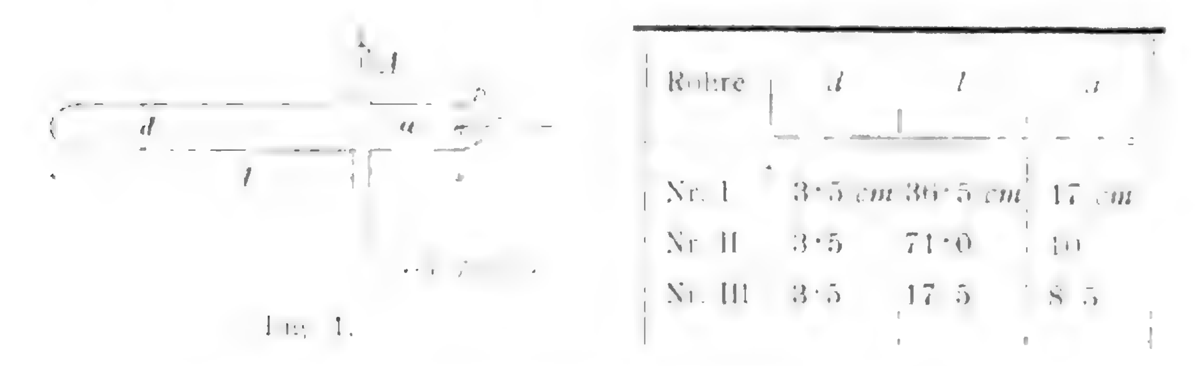
Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag.

Mit 16 Textfiguren.

Während das Potentialgefälle im Inneren einer Entladungsröhre beim Durchgange von Entladungen schon eingehend untersucht worden ist,[1] fehlt bis jetzt, so viel mir bekannt ist, eine Untersuchung des elektrostatischen Feldes ausserhalb der Röhre im umgebenden Luftraume.

Es sollen daher im Folgenden die Resultate einiger derartiger Messungen mitgetheilt werden, und zwar die Beschaffenheit des Feldes bei verschiedenen Röhren, wenn man Verdünnung und Entladungspotential variirt. Ferner ist die Änderung des Feldes bei magnetischer Ablenkung der Entladung bestimmt worden.

Verwendet wurden drei cylindrische Röhren von nebenstehender Form (Fig. 1) und verschiedener Länge; die Anode *(A)* war punktförmig, die Kathode *(K)* eine kreisrunde Scheibe von 25 *mm* Durchmesser, beide aus Aluminium.



Röhre	d	l	a
Nr. I	3·5 *cm*	36·5 *cm*	17 *cm*
Nr. II	3·5	71·0	10
Nr. III	3·5	17·5	8·5

Fig. 1.

[1] Vergl. hierüber Wiedemann, Elektricität, IV, 1 (1885).

Die verwendete Röhre war etwa $1/_2$ *m* über einem Tische, mit ihrer Axe horizontal, in ein hölzernes Stativ eingespannt; Metallgegenstände wurden sorglich ferngehalten. Die Zuleitungen zu den Elektroden wurden, damit sie das Feld möglichst wenig stören, eine grössere Strecke geradlinig fortgeführt, also von der Anode vertical aufwärts, von der Kathode in der Verlängerung der Rohraxe, und waren ausserdem in Glasröhren eingeschlossen. Gespeist wurde die Röhre durch eine gewöhnliche einplattige Influenzmaschine (46 *cm* Scheibendurchmesser), die durch einen kleinen Wassermotor in möglichst gleichmässigem Gange erhalten wurde. Sie war in grösserer Entfernung von der Röhre aufgestellt und gegen dieselbe ausserdem durch einen geerdeten Stanniolschirm abgeblendet. Die Zuleitung zur Kathode war ausnahmslos circa 2 *m* vor derselben zur Erde abgeleitet.

Das Feld wurde in einer durch die Röhrenaxe gehenden Horizontalebene auf einer Seite der Röhre mit einer Flammenelektrode abgesucht, so dass das gesammte Feld, von der durch die Zuleitungen bewirkten Unsymmetrie abgesehen, sich durch Rotation dieser Halbebene um die Röhrenaxe ableiten lässt. Der jeweilige Ort der Flammenelektrode wurde durch einen kleinen, an einem Seidenfaden isolirt herabhängenden Senkel auf einem Coordinatensystem angegeben. Von der Flammenelektrode führte eine Leitung zur Nadel eines Thomson'schen Quadrantenelektrometers, welches durch Herabsenken der Nadel unter die Quadranten für die Messung hoher Potentiale hergerichtet wurde.[1] Die beiden Quadrantenpaare waren je mit den beiden Polen einer kleinen Zink-Kupfer-Wasser-Batterie von zehn Elementen verbunden. Das Elektrometer wurde mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers geaicht. Ein Präcisions-Eisenplatten-Luft-Condensator, dessen eine Platte zur Erde geleitet war, wurde von der Flammenelektrode aus gleichzeitig mit dem Elektrometer geladen und dann durch das ballistische Galvanometer entladen. Dadurch ergaben sich correspondirende Ausschläge am Elektrometer und Galvanometer, wodurch eine Reductionscurve der Elektrometerausschläge auf Galvano-

[1] Ein Elektrometer für hohe Spannungen stand mir nicht zur Verfügung.

meterausschläge gewonnen wurde. Mit Hilfe des Reductionsfactors des ballistischen Galvanometers und der Capacität des Condensators konnte dann leicht die Aichungscurve construirt werden, welche für jeden Elektrometerausschlag direct das Potential in Volt ergab.

Die Messungsresultate waren folgende:

Röhre Nr. I.

1. Es wurde das Feld bei vier Verdünnungsgraden von schätzungsweise 2 *mm* Druck angefangen bis zu grüner Lumi-

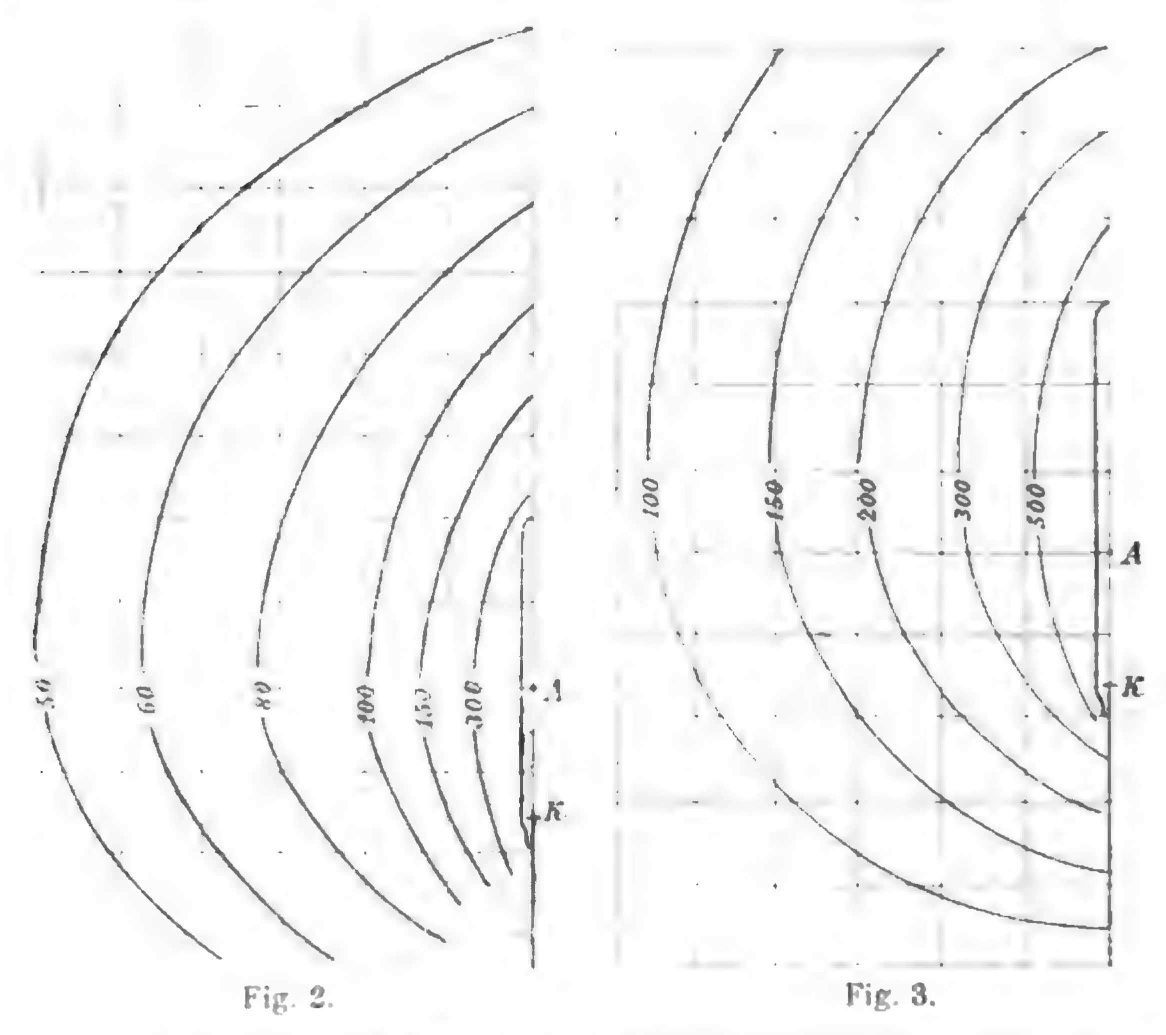


Fig. 2. Fig. 3.

nescenz gemessen.[1] Die in den nebenstehenden Figuren 2—5 gezeichneten Potentialcurven[2] geben ein ungefähres Bild der Vertheilung. (*A* ist die Anode, *K* die Kathode der Röhre, die Zahlen bedeuten Volt.) Die grössten Potentiale ergaben sich in

[1] Der Mangel eines Mac-Leod'schen Manometers gestattete mir leider nicht, den Druck zu messen.

[2] Die Figuren sind in circa 1/11 der natürlichen Grösse gezeichnet (Quadratseite = 10 *cm*).

der Nähe der Anode und betragen bei 2 circa 450 *V*, bei 3 circa 850 *V*, bei 4 circa 1200 *V* und bei 5 circa 2500 *V*.

2. Es wurde bei jeder Stellung der Flammenelektrode parallel einmal mit vor die Entladungsröhre vorgeschalteter Funkenstrecke und dann ohne dieselbe abgelesen.[1] Ein Vergleich der beiden Figuren 6*a* (ohne Funkenstrecke) und 6*b* (mit Funkenstrecke) zeigt, dass bei vorgeschaltetem Funken,

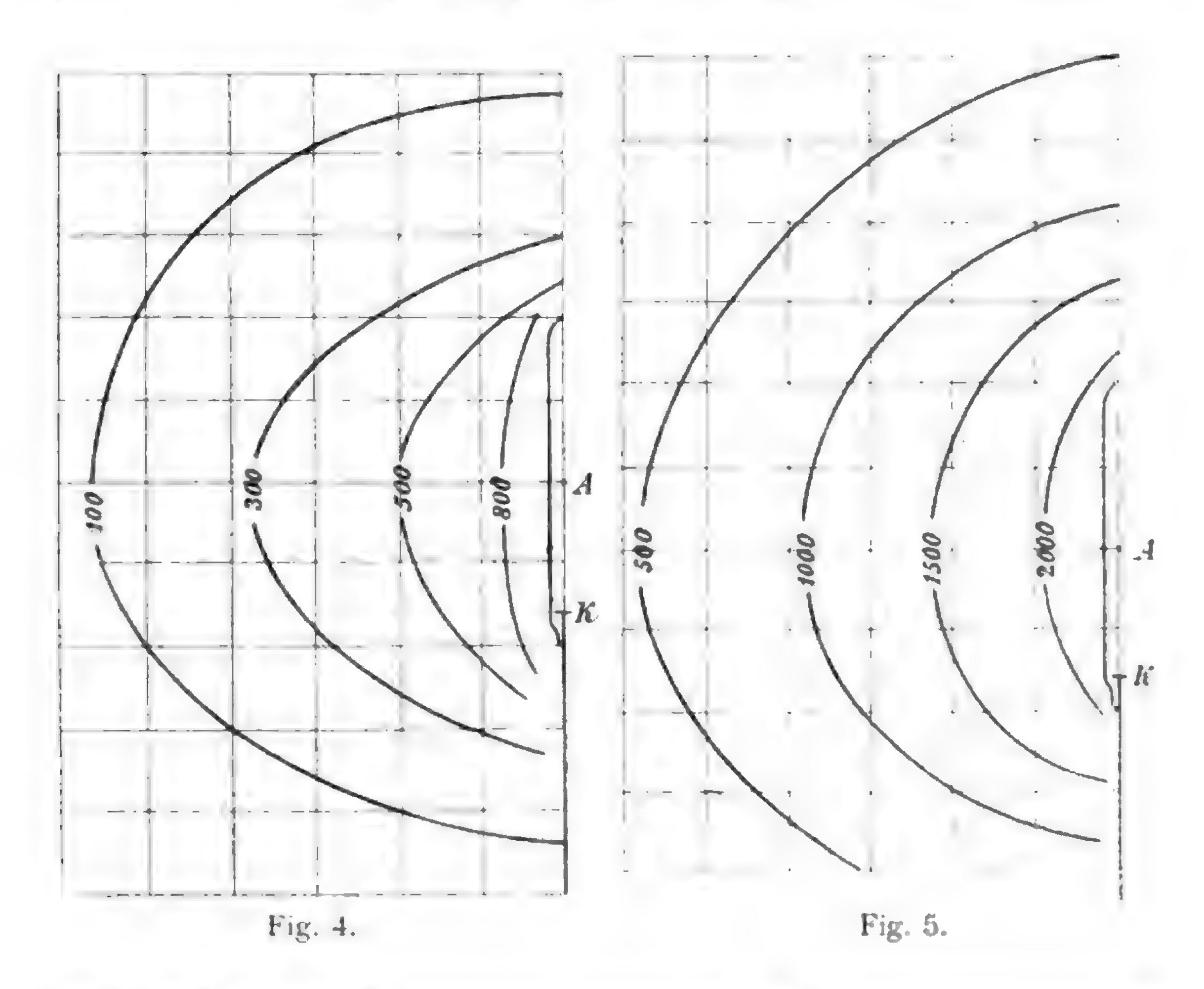


Fig. 4. Fig. 5.

also bei höherem Entladungspotentiale, die Potentialwerthe im Felde grösser sind.

3. In die Nähe der Kathode wurde ein kleiner hufeisenförmiger Elektromagnet gebracht, so dass seine Axe horizontal stand und seine Schenkel die Röhre umfassten. Es wurde bei jeder Stellung der Flammenelektrode bei unerregtem Magnete und bei erregtem Magnet abgelesen, in letzterem Fall auch bei commutirtem Strome. Ein Vergleich der drei Figuren 7*a* (Magnet nicht erregt), 7*b* (Ablenkung der Entladung aus dem

[1] Eine einfache Vorrichtung erlaubte, vom Fernrohr auch die Funkenstrecke jedesmal ein- und auszuschalten.

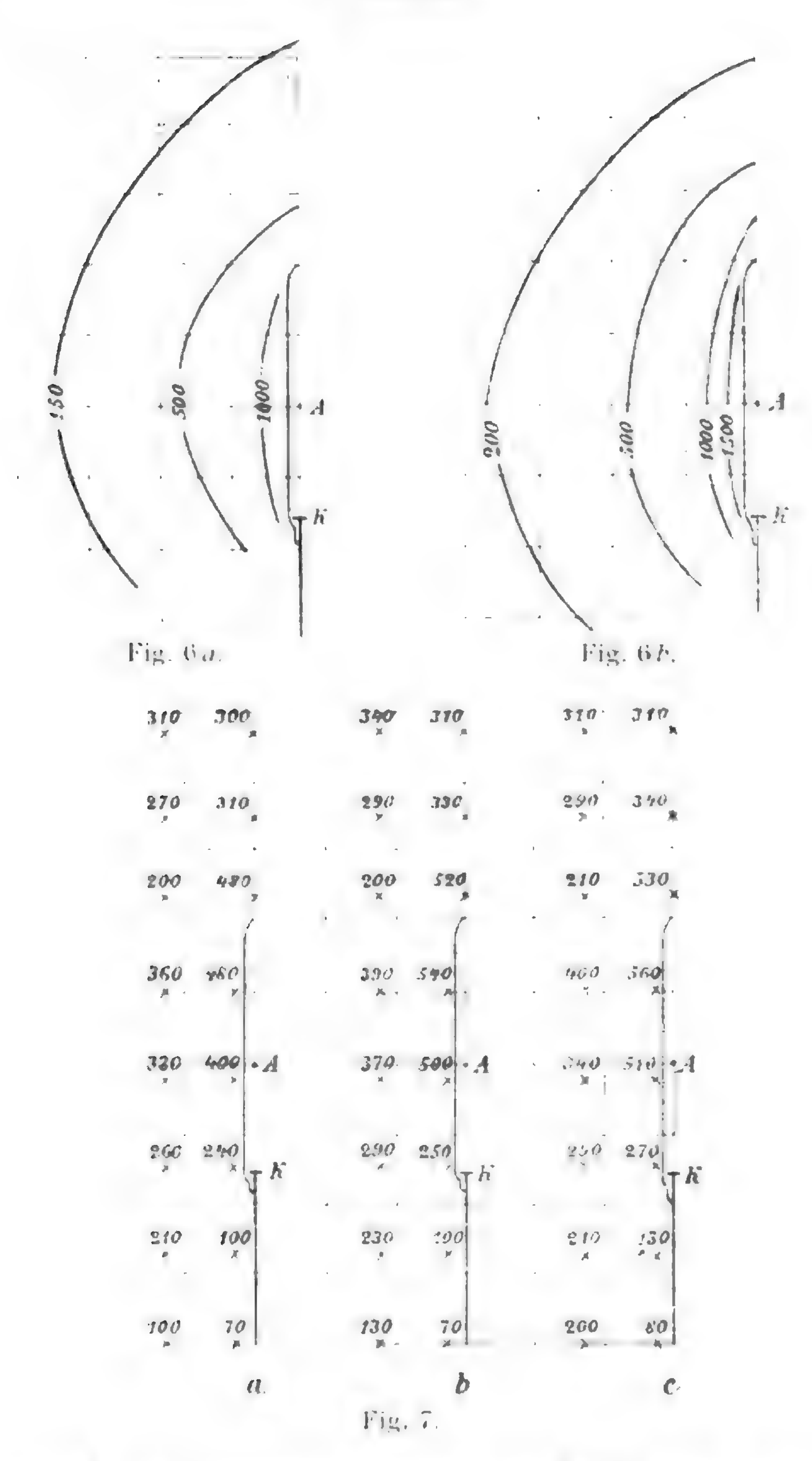


Fig. 6a. Fig. 6b.

Fig. 7.

Felde weg), 7c (Ablenkung gegen das Feld) zeigt, dass bei magnetischer Ablenkung der Entladung das Feld stärker ist.[1]

---

[1] In Folge einer durch eine Störung bewirkten Unterbrechung in der Messung konnte nicht das ganze Feld abgesucht werden, weshalb die Zeichnung der Potentiallinien hier unterbleiben musste.

Röhre Nr. II.

1. Es wurde das Feld bei drei Verdünnungsgraden, circa 2 *mm* Druck, Evacuation bis auf Kathodenstrahlen und einem dazwischenliegenden Drucke gemessen. Den Verlauf der Potentiallinien zeigen Fig. 8, 9, 10. Die höchsten Potential-

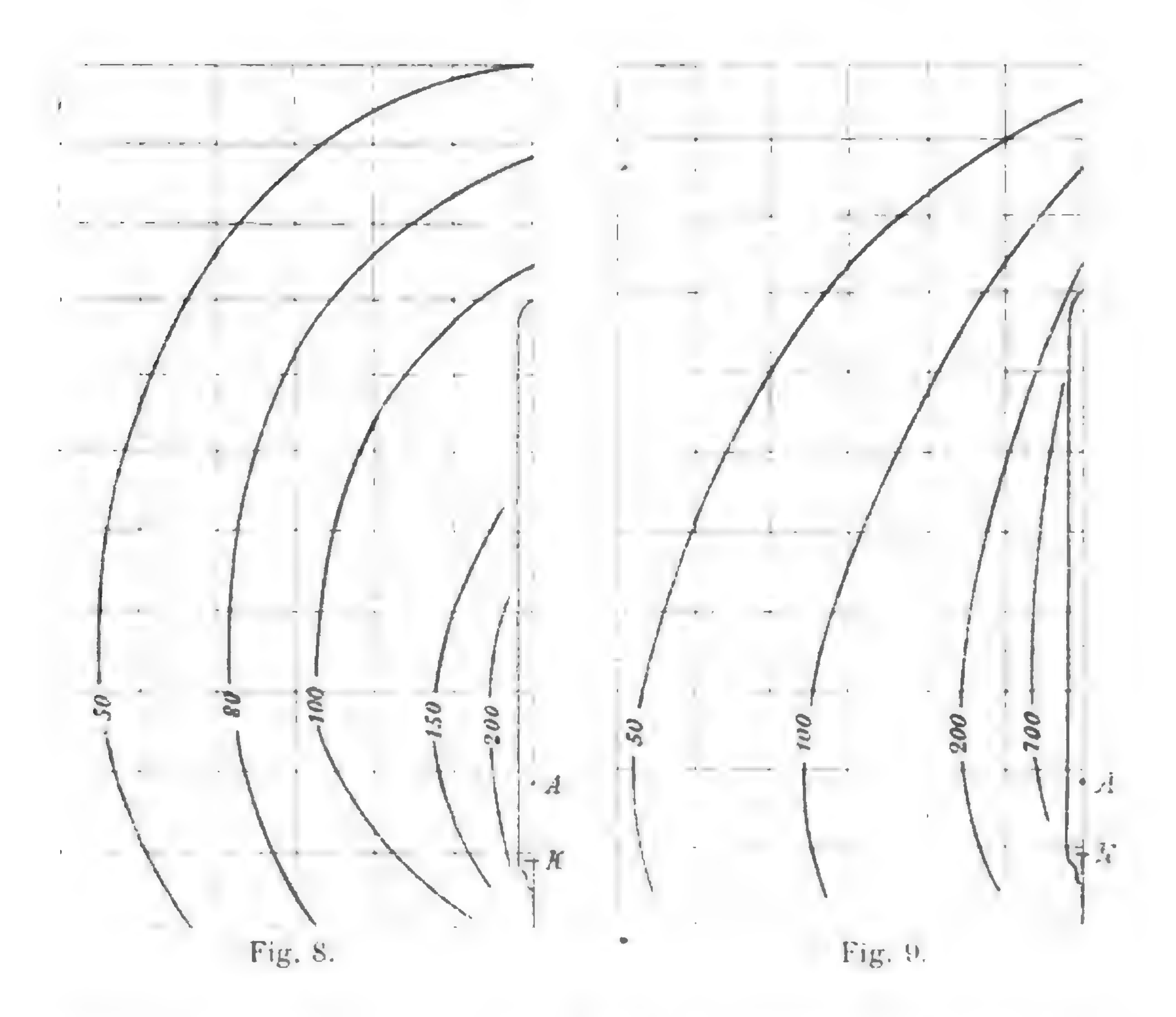


Fig. 8. Fig. 9.

werthe ergaben sich in der Nähe der Röhre, und zwar etwa in der Mitte der Röhrenlänge; sie betragen circa 250 *V*, 750 *V* und 1600 *V*.

2. wurde das Feld bei vorgeschaltetem Funken (Fig. 11 *b*) und ohne denselben (Fig. 11 *a*) gemessen. Wieder sind bei vorgeschaltetem Funken die Potentiale etwas höher.

3. Die Figuren 12 *a*, 12 *b* und 12 *c* zeigen die Änderung des elektrischen Feldes bei magnetischer Ablenkung der Entladung. Im letzteren Falle (12 *b* und 12 *c*) sind höhere Potentiale vorhanden als bei unerregtem Magnete (12 *a*). Bei Ablenkung

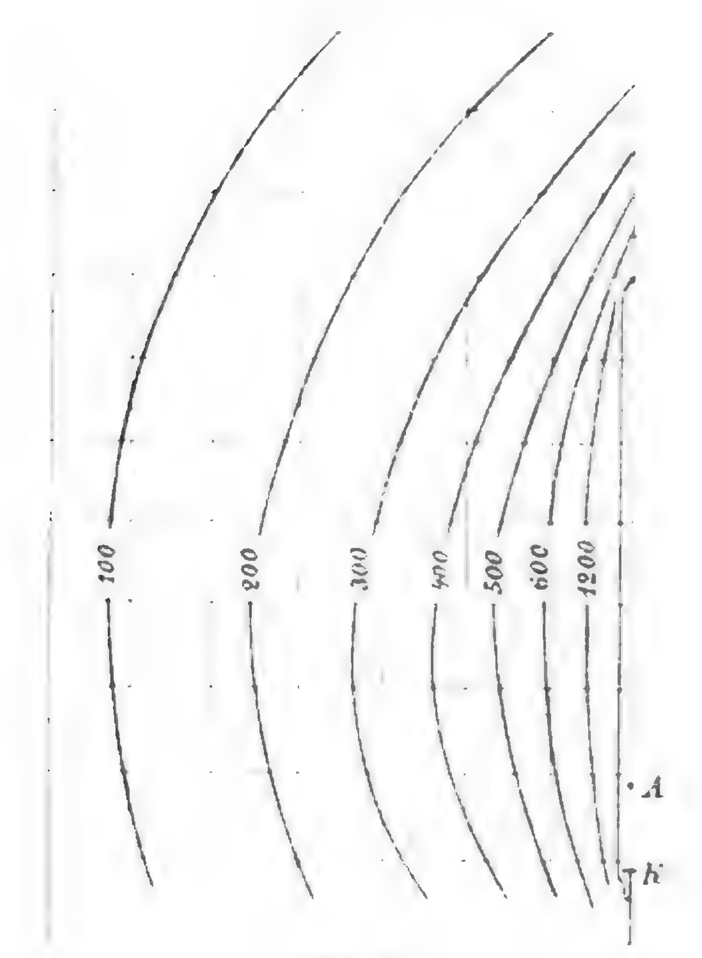


Fig. 10.

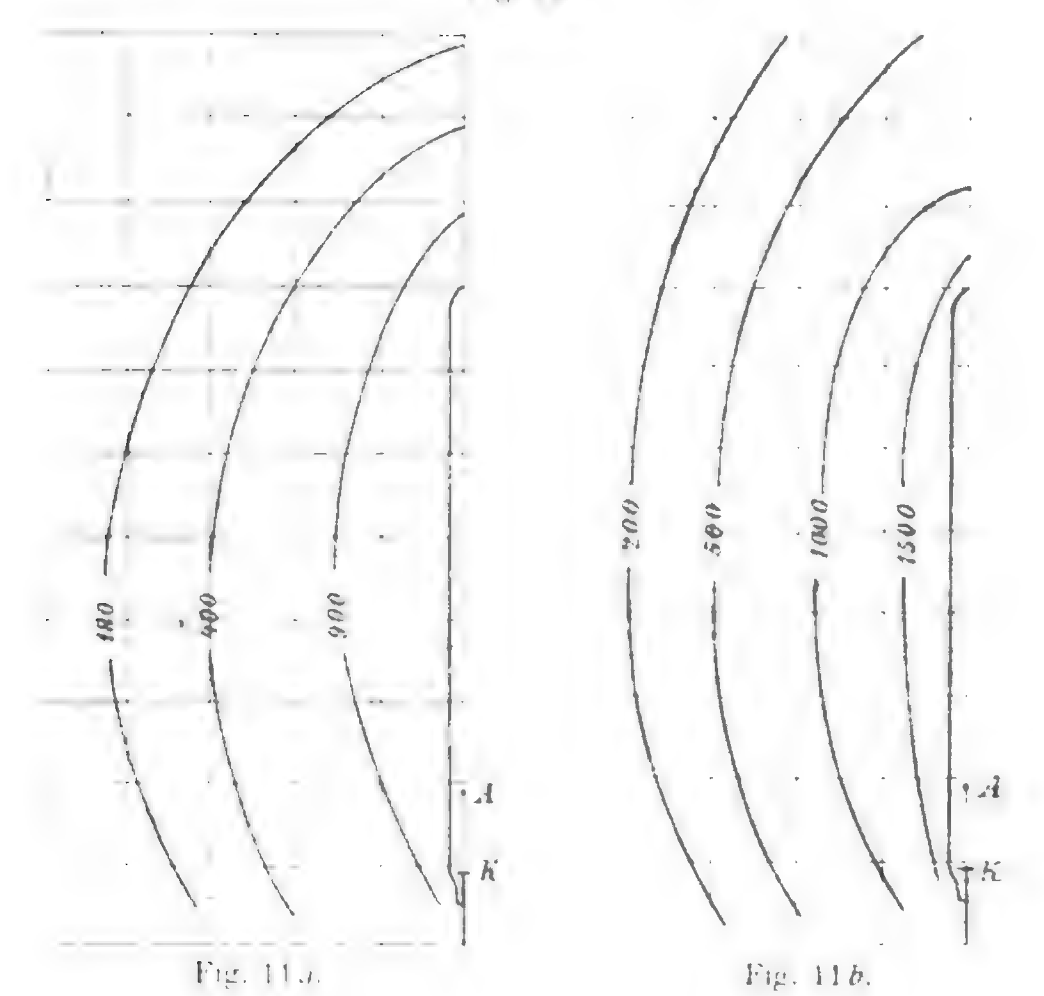
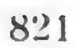


Fig. 11 a. Fig. 11 b.



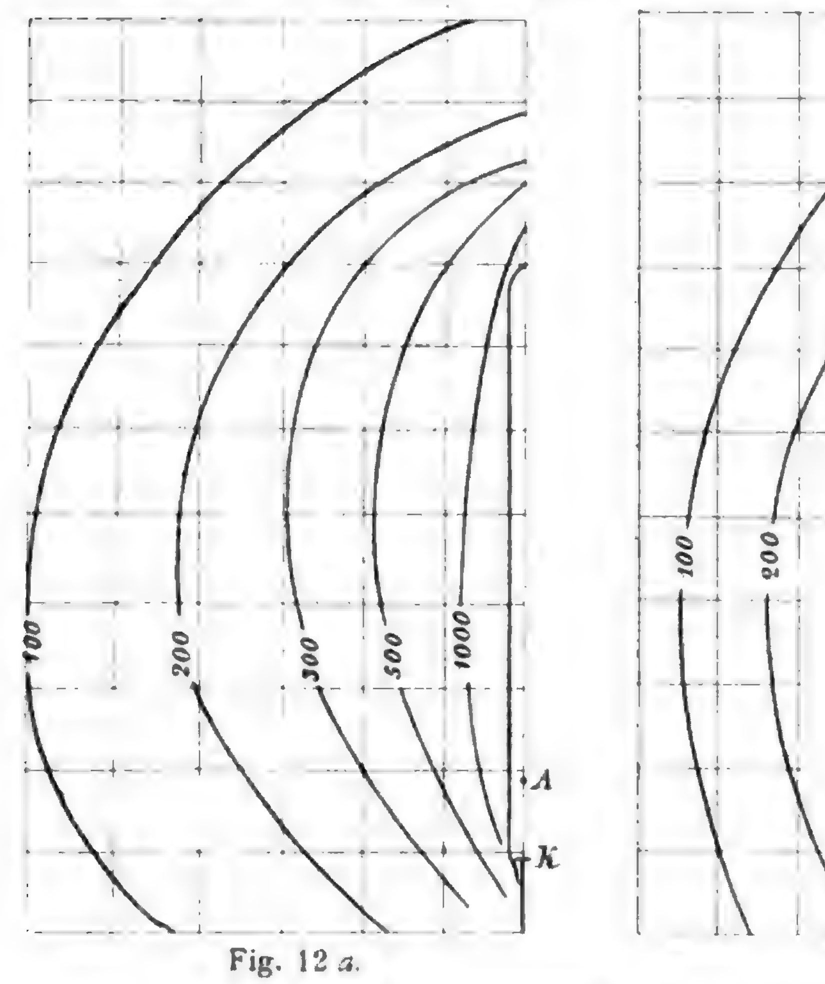


Fig. 12 *a*.

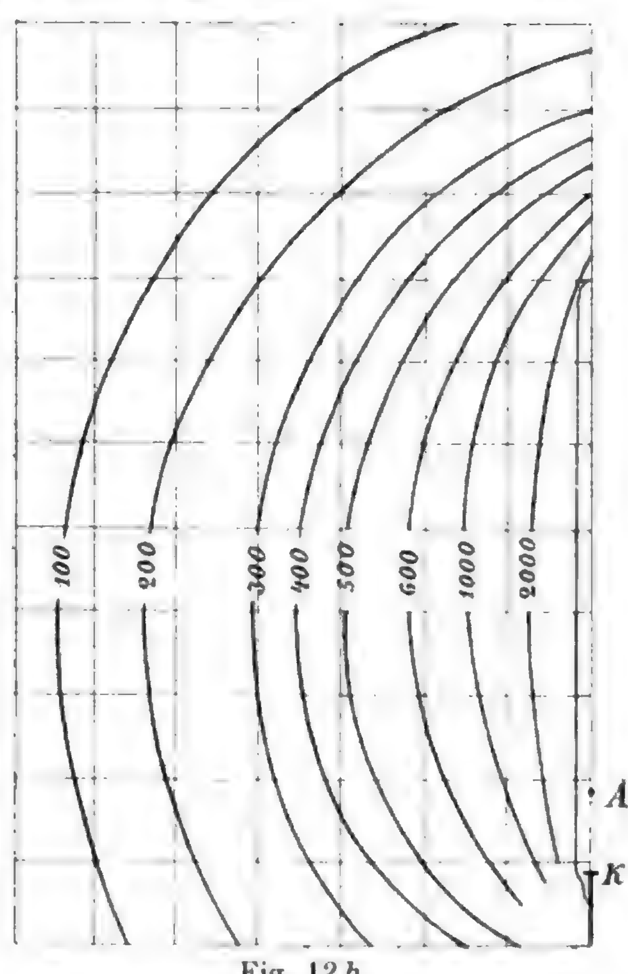


Fig. 12 *b*.

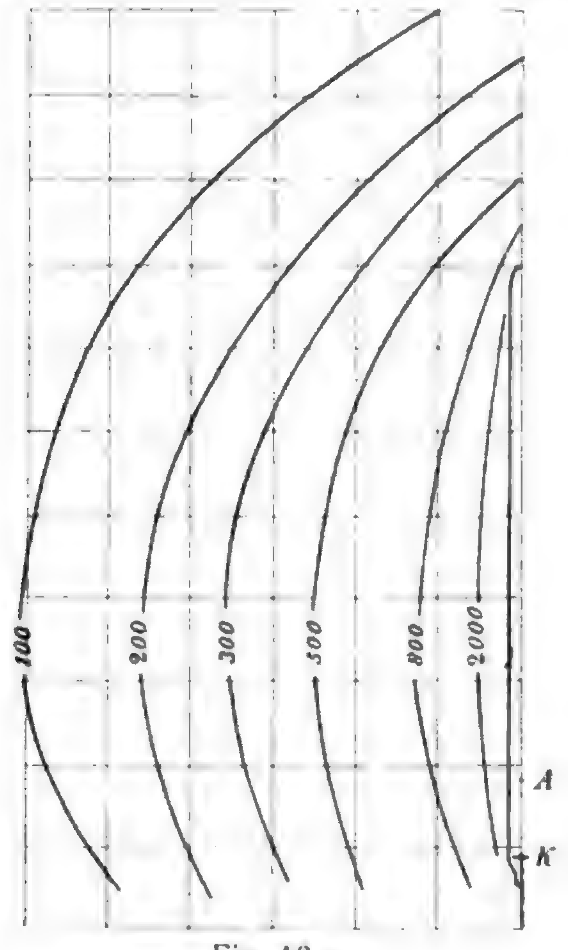


Fig. 12 *c*.

nach hinten (12 *b*) sind die Potentiale etwas höher als bei Ablenkung nach vorn (12 *c*).

4. Um den Einfluss directer Röntgenstrahlung zu ermitteln, wurde in der Verlängerung der Rohraxe einmal, wenn auf das Rohrende eine Bleikappe aufgesetzt war, dann ohne dieselbe gemessen. Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, dass mit Ausnahme der vierten Messung die Potentiale bei aufgesetzter Bleikappe grösser sind.

Abstand vom Rohrende	Ohne Bleikappe	Mit Bleikappe
12 *mm*	850 V	970 V
62	420	440
137	250	260
212	200	190
287	140	150

Röhre Nr. III.

Dieselbe war eine schon ausgepumpte Röntgenröhre. Das Feld ist ausserordentlich kräftig; in der Nähe der Röhre wurde 6600 V und in 60 *cm* Entfernung von der Röhre noch 1950 V erhalten. Die Potentiale in der Nähe der Röhre mussten, da sie bereits über den Messungsbereich des Elektrometers gingen, direct mit dem ballistischen Galvanometer gemessen werden.

Schliesslich wurde noch bei der Röhre Nr. I das Potential 2 *cm* vor der Anode während des Auspumpens gemessen. Solange beim Evacuiren die Funkenentladung längs der Wand der Glasröhre erfolgt, ergeben sich in Folge der starken Ladung des Glases weit über dem Messbereiche des Elektrometers liegende Potentiale. Es wurde daher erst mit dem Messen begonnen, sobald die Funkenentladungen sich in der Röhrenaxe concentrirten (circa 26 *mm* Druck). Das Potential betrug 1650 V. Beim weiteren Evacuiren nehmen die Potentiale stetig ab, bis die Glimmentladung eintritt. Sobald zwischen dem rothen Anodenlicht und dem blauen Kathodenlicht sich ein dunkler Raum zu bilden und das Kathodenlicht von der Kathode loszulösen

begann, wurde ein Minimum von 230 V erhalten. Von da an wachsen bei weiterer Verdünnung die Potentialwerthe wieder. Das höchste Potential wurde zu 3200 V gemessen und entsprach der beginnenden grünen Luminescenz der Röhre (in der Mitte eine graublaue Axe).

Wenn auch die gezeichneten Potentiallinien in Folge mannigfacher Fehlerquellen, als Nullpunktsverschiebung des Elektrometers, Änderung des Druckes in der Röhre und des Ganges der Influenzmaschine, nur ungefähr die Kraftvertheilung im Felde angeben, so ist doch deutlich Folgendes zu erkennen:

1. Die Potentialwerthe nehmen mit der Entfernung von der Röhre ab und sind in unmittelbarer Nähe der Röhre, aber auffälligerweise nicht bei der Anode, sondern in der Mitte der Längsaxe am grössten.

2. Die Potentialwerthe nehmen mit abnehmendem Drucke in der Röhre erst ab bis zu einem Minimum und dann (wenn die Schichtung der Entladung beginnt) wieder zu.

3. Die Potentiale sind bei vorgeschalteter Funkenstrecke grösser als ohne solche.

4. Die Potentiale sind, wenn die Entladung im magnetischen Felde (mit zur Entladungsbahn senkrechten Kraftlinien) erfolgt, grösser als unter gewöhnlichen Umständen.

Da beim Evacuiren das Entladungspotential erst sinkt und dann wieder steigt, und eine vorgeschaltete Funkenstrecke das Entladungspotential erhöht, so gehen nach Punkt 2 und 3 die Potentiale im Luftraume parallel mit dem Entladungspotential.

Nach Untersuchungen von Melani,[1] Mastricchi,[2] Witz,[3] Paalzow[4] u. A. erschwert ein magnetisches Feld, wenn seine Kraftlinien senkrecht zur Entladungsbahn liegen, die Entladung, macht also ein höheres Entladungspotential nothwendig, so dass auch die in Punkt 4 angeführte Erscheinung

[1] Nuovo Cim. (4), 5, 1897.

[2] Nuovo Cim. (4), 7, 1898.

[3] Compt. rend., 1890.

[4] Wied. Ann., 63, 1897.

sich auf das Vorhandensein eines höheren Entladungspotentials zurückführen liesse. Dass bei Ablenkung der Entladung gegen die Flammenelektrode die Potentiale etwas niedriger sind als bei Ablenkung aus dem Felde weg,[1] dürfte auf eine die Potentiale herabdrückende Wirkung der Röntgenstrahlen zurückzuführen sein. Auf eine solche Wirkung lässt auch die Tabelle auf Seite 11 schliessen.

---

[1] Vergl. S. 823, Punkt 3.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XV. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Nb, Th)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek**.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1899.)

XLII. Niob.

Die Spectren von Niob sind bisher noch gänzlich unbekannt; wir schmolzen das metallische Pulver (von Merck bezogen) auf Kupferelektroden auf. Es zeigte sich ziemlich stark verunreinigt mit Ca, Ba, Sr, Si, Ta, Be und Fe. Die Zahl der Linien im Ultraviolett betrug 1785. Ein Vergleich des Niobspectrums mit dem Tantalspectrum zeigte, dass nicht nur starke Linien des einen sich als schwache im anderen finden, wie es einer wechselseitigen Verunreinigung entspricht, sondern dass auch zahlreiche, nach Hunderten zählende, sowohl starke als schwache Linien in beiden Spectren mit angenähert gleicher Intensität auftreten. Ausserdem finden sich aber in jedem der beiden Spectren starke Linien, die im anderen fehlen. Es ist das ein Verhalten, wie es von uns[1] auch schon bei Nickel und Cobalt in Bezug auf das Funkenspectrum, und von Hasselberg[2] in Bezug auf das Bogenspectrum constatirt wurde, und wie es sich auch bei Praseodym und Neodym wiederfindet. Es hat den Anschein, als wären diesen Elementenpaaren je ein dritter, bisher unbekannter Körper beigemengt. Fast alle starken Linien des Niobspectrums finden sich auch im Sonnenspectrum.

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 106 (1897).

[2] Hasselberg, Verhandlungen der kongl. schwed. Akad. der Wiss. in Stockholm, Bd. 28 (1896).

λ	i	λ	i	λ	i
2109·55	1	2271·02	1+	2310·43	1
30·31	1	71·95	1	11·27	1+
30·94	1	72·77	1	11·55	1
31·31	1	72·88	1	12·70	1
46·46	1	73·70	2	13·39	3
55·70	1	74·03	2	14·94	2
56·34	1+	74·29	2	15·24	1
57·40	1	75·31	2	15·52	1
60·39	1	79·49	2	16·99	1
76·00	1	80·63	1	17·31	1
76·89	1	81·62	2	17·85	1
77·41	1	81·97	1	19·16	1
80·93	1+	83·15	2	19·65	1
2203·77	1	84·52	2	20·72	1+
06·14	1	85·36	1	22·05	1
08·13	1	88·98	1	23·18	1+ br.
20·4	1+	89·26	1	23·56	1
21·78	1	90·51	2	24·11	1
36·85	1+	91·8	1+	24·32	2
37·64	1	92·2	1+	25·58	1
39·61	1	92·8	1+	26·27	1
40·43	2	94·02	2+	27·25	1
40·82	1+	95·76	2	30·28	1
44·98	1+	96·65	1+	30·63	1
49·68	1	97·67	1+ J	31·38	1
50·09	1	97·93	1	32·06	2
50·60	1	99·01	1	32·23	1
50·90	1	99·31	1	34·20	1
52·35		99·70	1	34·90	2
53·95	1	2300·43	1	35·39	1
55·70	1	00·89	1	35·70	1
57·63	1	01·59	1	38·11	2 Fe?
61·45	1	02·20	2	38·71	1+
61·8	1+	02·77	2	39·65	1
62·43	1+	03·03	1	40·13	1
64·67	2	03·59	1	41·04	1
66·83	1	04·46	1+	41·73	1
68·64	1	04·85	2	42·65	1
70·02	1	09·31	1	43·65	2
70·32	2	09·98	1	43·80	2+

λ	i	λ	i	λ	i
2344·25	2+	2388·36	2	2428·45	1+
46·67	1	90·85	1+	28·7	1+
48·71	3 Be?	92·02	1	29·01	2
49·32	2	94·63	2	29·80	1
50·65	1	95·44	2	31·12	1
52·45	1	95·72	2 (Fe)	31·77	1
52·96	1	97·8	1+ br.	32·37	1
54·15	1+	98·59	3	32·76	2
55·65	2	2400·75	2	33·6	2+ L?
56·12	1	02·25	1	33·88	2
56·40	1	02·65	1+	34·76	1
60·42	2	04·34	2	35·17	2
61·2	1+ br.	04·97	3 (Fe)	36·5	1+
61·7	1+	05·45	1	37·46	2
62·14	3	05·94	2	38·70	1
62·60	1 d.	06·72	1 (Fe)	41·04	1
63·32	1+	07·75	1	41·70	2
64·35	2	10·12	1	41·93	1
65·31	2	10·35	1	42·23	2
65·76	1+ d.	12·20	1	42·74	2
66·30	1	12·55	3	43·5	1+
66·64	1	12·89	1	45·63	1+
68·25	2	14·00	5	45·90	2
70·93	2+ br.	14·53	4	46·17	2
72·86	3	14·94	1	46·51	2
74·10	1+	16·05	1+	47·7	1+
74·26	1+	16·23	2	48·34	1
74·7	1+	17·05	3	49·50	1
75·52	1	17·20	2	50·18	1
78·08	1	17·35	1+	50·33	1
79·8	1+	17·90	1	50·50	1
80·27	1+	18·76	4	51·95	2
80·85	1 Fe?	19·54	1	52·6	1+
81·25	2	21·99	5	53·12	1+
81·65	1	23·1	1+	53·53	1+
83·84	1	23·6	1+	53·97	3
85·2	1+	25·96	1	54·48	1
85·3	1+	26·30	1	54·70	1+
87·19	3	26·87	2	55·60	1
87·59	4	27·65	1	57·10	8

λ	i	λ	i	λ	i
2109·55	1	2271·02	1+	2310·43	1
30·31	1	71·95	1	11·27	1+
30·94	1	72·77	1	11·55	1
31·31	1	72·88	1	12·70	1
46·46	1	73·70	2	13·39	3
55·70	1	74·03	2	14·94	2
56·34	1+	74·29	2	15·24	1
57·40	1	75·31	2	15·52	1
60·39	1	79·49	2	16·99	1
76·00	1	80·63	1	17·31	1
76·89	1	81·62	2	17·85	1
77·41	1	81·97	1	19·16	1
80·93	1+	83·15	2	19·65	1
2203·77	1	84·52	2	20·72	1+
06·14	1	85·36	1	22·05	1
08·13	1	88·98	1	23·18	1+ br
20·4	1+	89·26	1	23·56	1
21·78	1	90·51	2	24·11	1
36·85	1+	91·8	1+	24·32	2
37·64	1	92·2	1+	25·58	1
39·61	1	92·8	1+	26·27	1
40·43	2	94·02	2+	27·25	1
40·82	1+	95·76	2	30·28	1
44·98	1+	96·65	1+	30·63	1
49·68	1	97·67	1+ d	31·38	1
50·09	1	97·93	1	32·06	2
50·60	1	99·01	1	32·23	1
50·90	1	99·31	1	34·20	1
52·35		99·70	1	34·90	2
53·95	1	2300·43	1	35·39	1
55·70	1	00·89	1	35·70	1
57·63	1	01·59	1	38·11	2 Fe?
61·45	1	02·20	2	38·71	1+
61·8	1+	02·77	2	39·65	1
62·43	1+	03·03	1	40·13	1
64·67	2	03·59	1	41·04	1
66·83	1	04·46	1+	41·73	1
68·64	1	04·85	2	42·65	1
70·02	1	09·34	1	43·65	2
70·32	2	09·98	1	43·80	2+

λ	i	λ	i	λ	i
2344·25	2+	2388·36	2	2428·45	1+
46·67	1	90·85	1+	28·7	1+
48·71	3 Be?	92·02	1	29·01	2
49·32	2	94·63	2	29·80	1
50·65	1	95·44	2	31·12	1
52·45	1	95·72	2 (Fe)	31·77	1
52·96	1	97·8	1+ br.	32·37	1
54·15	1+	98·59	3	32·76	2
55·65	2	2400·75	2	33·6	2+ L?
56·12	1	02·25	1	33·88	2
56·40	1	02·65	1+	34·76	1
60·42	2	04·34	2	35·17	2
61·2	1+ br.	04·97	3 (Fe)	36·5	1+
61·7	1+	05·45	1	37·46	2
62·14	3	05·94	2	38·70	1
62·60	1 d.	06·72	1 (Fe)	41·04	1
63·32	1+	07·75	1	41·70	2
64·35	2	10·12	1	41·93	1
65·31	2	10·35	1	42·23	2
65·76	1+ d.	12·20	1	42·74	2
66·30	1	12·55	3	43·5	1+
66·64	1	12·89	1	45·63	1+
68·25	2	14·00	5	45·90	2
70·93	2+ br.	14·53	4	46·17	2
72·86	3	14·94	1	46·51	2
74·10	1+	16·05	1+	47·7	1+
74·26	1+	16·23	2	48·34	1
74·7	1+	17·05	3	49·50	1
75·52	1	17·20	2	50·18	1
78·08	1	17·35	1+	50·33	1
79·8	1+	17·90	1	50·50	1
80·27	1+	18·76	4	51·95	2
80·85	1 Fe?	19·54	1	52·6	1+
81·25	2	21·99	5	53·12	1+
81·65	1	23·1	1+	53·53	1+
83·84	1	23·6	1+	53·97	3
85·2	1+	25·96	1	54·48	1
85·3	1+	26·30	1	54·70	1+
87·19	3	26·87	2	55·60	1
87·59	4	27·65	1	57·10	8

λ	i	λ	i	λ	i
2457·30	2+	2492·21	3	2538·9	1+ br.
58·14	1	93·08	1	39·32	1
58·40	1	94·72	1+ d. Be	40·70	3
58·85	1+	96·00	1	41·53	2
59·55	1+	97·1	1+ br.	41·90	1 Si
60·46	4	97·71	1	42·4	1+
61·28	1+	98·30	2	43·50	1
62·16	2	99·81	7	44·02	1
62·58	1	2500·53	1	45·71	4
62·99	1	01·49	5	48·74	1
63·82	2	02·06	1	49·55	1+
64·72	1	02·56	1	50·13	1
65·25	1	03·07	1	51·49	3
65·99	1+	03·95	1+	52·12	1+
66·63	1	04·31	1	53·3	1+
67·03	1+	06·97	1	53·63	1
67·46	1	08·59	2	54·74	1
68·80	2	11·09	2	54·9	1+
69·45	2	12·05	2	55·45	1
70·98	1	13·20	1	55·74	2
71·41	1	13·98	1	56·58	1
72·45	2	14·42	2	57·03	3
74·30	1	16·21	3 Si	58·03	3
74·91	1	17·58	1	60·25	1
75·40	1	19·27	1 Si	60·76	2
75·95	2	19·77	1+	61·87	1
76·73	1	21·49	3	62·50	4
77·96	3	22·44	2	64·08	1
78·01	1	23·8	1+	64·16	1
78·35	2	24·20	2 Si	64·94	2
80·02	3	25·87	3	65·57	2
81·95	1	27·97	1	66·18	2
83·83	1+	28·57	2 Si	66·55	1+
83·97	1	30·23	1+	67·53	2
85·00	1	31·04	2	68·50	1
85·50	1+	31·34	2	69·25	1
88·28	1	32·20	1	71·45	2
88·78	3	33·26	1	71·98	2+
90·25	1	33·98	2	73·20	2
91·00	1+	38·01	1	74·05	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2574·96	2	2618·49	5	2662·17	1
76·12	1	20·54	3	62·9	1+ br.
77·46	2	23·08	2	63·66	1
78·33	1	23·4	1+	64·25	1+
78·84	1	26·53	1+	65·32	3
79·15	1	26·70	1+	66·67	3
80·40	2	27·2	1+	67·19	1
81·5	1+ br.	27·53	1	67·38	3
83·27	1+	28·85	3	67·82	3
84·12	8	32·61	3	68·55	1+
86·18	2	33·23	4	69·6	1+ br.
87·03	1	33·87	1	71·35	2
87·54	1	34·23	2	72·02	4
89·05	1	35·67	3	73·67	5
91·10	7	38·18	4	74·97	1+
92·23	1+	38·69	1	76·00	5
93·85	4	39·98	1	77·75	1
94·45	1+	41·15	2	78·15	1
94·84	3	42·32	5	78·75	2
95·68	1	43·99	1	79·11	1
96·56	1	44·67	1+	80·16	3
97·07	2	45·33	1+	80·75	1
97·82	2	46·34	4	81·68	1
98·99	10	47·57	1	82·56	1
2601·40	3	48·13	1+	83·33	1
02·58	1+	49·7	1+ br.	85·22	2
03·10	1+	50·69	2+ Be	86·48	3
03·60	2	51·21	3	87·27	1
03·83	1+	51·89	1	90·97	1
04·86	1	53·35	1+	91·85	2
05·27	1	54·52	1	92·0	1+
06·28	1+	55·41	1	92·75	1+
06·50	1+	55·93	1	94·62	1
07·94	1	56·16	4	97·17	6
09·08	1	57·1	1+ br.	98·3	1+ br.
12·42	1	58·09	4	98·95	3
14·45	1	58·97	1	2700·26	1
14·87	1	59·09	1	02·29	3
16·32	2	60·12	1	02·66	2
17·60	1	61·4	1+	04·36	2

λ	i	λ	i	λ	i
2704·81	1	2754·62	2	2809·25	1
05·40	1+	55·8	1+	09·83	1
06·52	1	57·36	2	10·91	3
07·25	1+	58·88	2	11·82	1
07·95	1	61·81	1	14·40	1
09·35	1	62·15	1	15·50	1
11·47	1	62·47	1	16·76	2
15·41	3	63·24	1	17·18	1
15·96	3	63·71	1	18·27	1+
16·38	1	64·68	1	19·9	1+
16·72	4	65·39	2	20·93	1
17·39	1	66·04	1	23·99	1
17·74	1	66·51	2	24·48	3
19·9	1+ br.	68·21	4	26·0	1+
21·8	2+	71·49	2	26·60	1
22·10	4	71·76	1	27·19	3
22·79	1	73·34	1	28·9	1+
23·74	2+	74·6	1+	29·88	1
25·5	1+	75·9	1+	30·70	1+
27·51	1	80·36	4	32·90	1+
29·45	1+	82·48	1	33·43	1
30·42	3	83·7	1+	35·21	2
33·34	3	84·5	1+	36·35	1+
33·59	1+	85·12	1+	37·62	2+ br.
36·04	1	89·90	1	39·90	2+ br.
36·64	1+	90·71	1+	41·23	3
37·17	2	90·91	2	42·74	4
39·34	1	91·02	2	44·56	2
40·30	3	91·50	1	45·4	1+
45·10	2	91·87	2	45·94	1
45·44	2	93·15	2	46·39	3
45·86	2	93·95	1+	47·34	1
46·22	2+	97·83	2+	48·27	1
47·17	1+	99·02	1	48·40	2
48·93	1	2800·00	1	49·67	2
49·85	1	03·90	1	50·5	1+ br.
50·73	1	05·62	1+	51·1	1+ br.
52·16	1	06·1	1+ br.	51·45	1+
52·59	1	08·40	1	55·63	1
53·19	6 d?	08·82	1	57·46	1

λ	i	λ	i	λ	i
2858·50	1+	2917·12	2 d.?	2997·49	1
59·12	1+	18·6	1+	3001·20	1+
61·20	3	19·0	1+	01·92	2
62·0	1+ br	22·6	1+ br.	02·32	1+
65·72	2	27·89	10	05·88	1
67·5	1+ br.	30·34	1+	09·1	1+
68·60	5	30·75	1+	10·50	1+
72·95	1	31·53	2	10·95	2
75·49	6	32·20	1+	12·67	1+
77·09	6	32·75	1+	14·55	1
77·8	1+	35·38	1	15·14	1
77·97	1+	36·7	1+ br.	15·97	1
78·85	1	37·40	1	19·00	1
79·45	1	37·78	1	22·86	3
80·82	2	41·61	9	24·85	3
81·70	2 Si	45·95	2	25·47	1
82·58	1+	46·20	1	28·52	5
83·27	7	46·95	1	29·85	1
84·5	1+ br.	50·99	10	32·89	5
86·4	1+ br.	54·65	1+	34·20	1
87·2	1+ br.	56·99	1+	35·03	2
87·8	1+ br.	61·29	3	36·20	1
88·91	3	61·73	1	39·45	1
90·45	1+	68·40	1	39·91	3
91·5	1+ br.	70·57	1+	43·38	1
93·15	1+	72·69	5	44·88	3
95·51	1+	74·23	5	48·30	1
97·90	4	74·8	1+ br.	49·63	1
99·34	4	76·27	1+	50·93	1+
2900·8	1+ br.	77·75	2	51·49	1+
04·95	1+	79·05	2	53·75	1
05·4	1+	80·00	2	55·65	2
06·8	1+ br.	80·82	2	61·6	1+
07·6	1+ br.	82·21	2	62·06	1
08·31	4	85·17	1+	63·24	1
08·99	3	90·15	1	63·55	1
10·65	6	90·42	4	63·93	2
11·85	4	92·09	1	64·19	3
15·50	1+ Mg?	94·00	1	65·39	2
16·1	1+ br.	94·85	5	66·20	1

λ	i	λ	i	λ	i
3069·82	3	3134·43	1	3207·46	1
71·02	2	35·01	1	08·33	1
71·33	1	36·03	1	08·70	1
71·71	2	40·60	2	12·0	2+ br.
72·56	1	42·4	2+ br.	15·14	1
73·36	1	44·46	1	15·72	5
73·97	1	45·52	6	17·12	1
75·39	1	47·01	1	23·50	3
76·99	3	50·54	1	25·61	7
80·93	2	52·29	3	29·72	2
81·86	1	52·91	2	30·39	1
82·20	1	53·4	1+ br.	31·2	1+
84·47	1	53·96	1	35·85	1+
86·17	1+	54·95	2	36·55	5
87·93	2	55·70	1	37·84	2
92·85	1+	59·99	1	38·18	2
94·30	10	60·39	1	39·20	1
97·22	1	63·53	8	41·11	1
98·58	1	66·6	1+ br.	42·00	1+
99·30	2	69·8	1+	42·71	1+
3102·05	1	73·35	2	43·31	1+
04·37	1	75·98	3	44·66	1
06·66	1	77·96	1	49·06	1
07·12	1	79·5	1+ br. (Ca)	49·67	1
08·70	2+	80·42	6	50·40	1
10·93	1	81·55	1 Ca?	51·39	1
10·55	1+	84·36	2	51·76	1
13·30	1	87·62	1	52·55	1+
15·24	1	89·41	3	53·03	1
15·68	1	90·57	1	54·19	4
16·45	1+	91·20	4	55·02	1
27·64	7	91·57	4	57·47	1+
28·47	1	94·23	1	60·70	5
29·80	1	94·49	1	61·83	2
30·51	8 Be	95·12	8	62·71	1
30·89	4	96·30	1+	63·51	5
31·18	5 Be	98·35	1	66·17	1+
32·19	1	3203·50	3	67·20	1
32·86	1	05·10	2	67·83	1
33·68	1	06·49	6	68·37	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3269·26	1	3319·10	1	3369·31	3
71·15	2	19·38	1	70·33	2
72·40	3	19·72	3	70·77	1
74·99	1	20·95	2	71·50	1
76·60	1	21·49	1 Be	72·72	2
77·45	1	23·10	1	72·9	1+
77·84	1	24·01	1	74·41	2+ v.
79·38	1	24·73	2	75 07	1
79·50	1+	26 70	2	77·55	1+
79·96	2	31·18	1+	79·46	1
80·13	1	34·70	1	80·58	1
83·61	4	34·98	1	81·10	3
85·80	1	35·39	1	81·59	1
86·48	1	37·99	2 Cu?	82·61	1
87·80	1	39·34	1	83·45	1
88·09	1	40·60	2	86·40	4
89·71	1	41·79	4	87·98	1+
91·17	2	42·15	3	88·48	1+
92·18	3	43·86	3	89·08	2
93·1	1+	44·14	3	91·76	1
94·51	3	46·45	1	93·17	1
95·62	1	46·92	2	93·97	1
96·15	1	48·45	1	95·15	3
97·17	1	48·95	1	95·86	2
97·82	1	49·22	3	96·10	1
99·70	2	49·51	3	96·50	2
3301·64	2	50·55	1+	97·45	1+ Bi?
02·1	1+	51·97	1+	97·7	1+
02·75	1	53·00	1	98·45	1+
03·46	2	53·71	1	99·85	2
04·85	2	54·89	2	3401·38	1
05·74	2	57·20	1	02·13	1
09·39	1	58·58	3	05·55	1
10·61	1	61·10	2	06·00	1
10·81	1	61·38	1	06·28	1
11·35	1+	62·35	1	07·0	1+
12·75	2	65·51	1	08·10	1
15·36	1	65·75	3	08·55	1+
16·75	1	66·10	2	08·82	5
18·45	1+	67·12	2	09·33	4

λ	i	λ	i	λ	i
3412·65	1	3474·88	1	3533·81	1
13·10	3	76·16	1	34·35	3
14·23	1	78·96	3	35·43	4
16·1	1+ br.	79·75	4	37·57	3
17·37	1+	80·40	2	37·75	3
30·77	3	82·70	1	39·26	1
21·35	1+ Ni?	83·14	2	39·76	1
22·99	1	84·23	3	41·06	4
25·60	7	84·78	1	42·05	1
26·70	8	88·97	3	42·33	1
27·58	1	89·27	3	43·15	1
29·20	1	91·20	1	44·16	2
31·07	1	92·06	1	44·50	1
31·31	1	96·18	1+ br.	44·80	2
32·87	8	98·79	2	48·30	1
37·03	2	3500·10	2	49·47	1
38·55	2	00·9	1+	50·61	1
40·09	3	01·49	1	51·29	1
41·84	1	03·34	1	56·13	1
44·13	2	05·03	1	59·28	1
45·9	1+ br.	06·17	1+	59·72	3
47·05	1	08·10	2	60·03	1+
48·35	2	08·68	1	60·62	1
48·82	1	10·48	8	62·08	1+
50·94	2	11·35	1+	63·67	2
51·81	1	12·27	1+ br.	63·75	1
52·51	1	15·60	4	64·26	1
54·89	2	16·37	1	65·74	1
55·10	2	17·1	1+	66·30	1
56·67	1	17·3	1+	68·18	2
58·00	1	17·83	5	68·66	2
58·90	1	20·66	1	69·64	1
59·72	1+	21·37	2	72·23	1
63·96	1	22·55	1	73·6	1+
68·28	1+	23·30	1	74·12	1
69·15	1	25·38	1	74·42	1
70·46	2	27·61	1	76·02	3
72·3	1+ br.	28·35	1	77·89	2
73·21	1	28·61	2	78·58	1
74·17	2	29·01	2	78·90	1

λ	i	λ	i	λ	i
3579·64	1	3633·49	3	3664·83	3
80·49	4	34·01	1	65·30	1
81·45	3+	34·60	3	65·89	1
86·83	2	35·43	1	66·70	1
88·17	1	35·55	1	67·15	1
89·22	2	36·00	1	67·47	1
89·50	2	37·10	1	67·87	1
91·37	2	37·68	1	68·75	1
94·14	2	37·97	2	69·14	2
98·50	1	38·90	1	69·82	1
3602·69	2	39·20	2	70·21	2
04·12	1	39·46	1	71·50	1
04·77	1	40·80	1	71·93	1+
07·20	1	41·45	2 r.	72·1	1+
09·52	1	42·23	1	72·7	1+
10·87	1+	42·85	1 Ti?	73·48	1+
11·50	1	43·52	1	74·92	2
13·88	1	45·11	1	75·42	1+
14·32	1	45·30	1+	76·49	2
15·00	1	49·48	1	77·22	1
15·65	1	49·70	1	77·82	1
19·71	4	49·98	1	78·20	3
19·93	4	51·0	1+	78·80	1
20·70	1	51·37	5	79·73	1
21·15	1	52·36	1	80·96	1+
21·35	1	53·60	1 Ti?	81·80	2
21·85	1+	53·9	1+	83·70	1 Ta
22·65	1	54·4	1+ br.	84·77	1
23·00	1	54·97	1	85·07	1
23·95	1	56·04	1	85·32	2 Ti?
24·33	1	57·23	1	86·18	2
24·49	1	58·0	1+	88·10	5 r.
25·88	1	58·8	1+	88·83	1
26·77	1	59·74	8	89·15	1
27·4	1+ br.	60·50	2	89·40	1
28·32	2	61·86	1	91·29	3
28·84	1	62·20	1	92·30	1
29·60	2	62·46	1	93·50	1
30·82	1	62·89	1	94·89	2 v.
33·25	1+	63·89	1	96·00	5

λ	i	λ	i	λ	i
3696·78	2	3738·52	2	3778·70	1+
97·50	2	39·91	4	79·30	1+
97·92	4	40·92	8	79·69	2
98·87	1+	41·45	2	81·13	2
99·70	1	41·91	2 Ti?	81·51	6 r.
3700·01	1	42·52	3	83·02	1
00·6	1+ br. Cu?	44·16	2	83·95	1
01·58	1	48·68	1	84·99	1
01·83	1	50·70	1+	87·14	3
02·20	1	51·41	2	87·60	1
03·30	1	52·18	2+	88·79	1
04·00	1	53·28	2	89·32	1
04·26	1	54·63	1	89·60	1
04·63	1	55·40	1	90·26	2
08·02	2	55·85	2	91·33	5
09·43	2	57·1	1+	92·9	1+ Bi?
10·60	1	59·36	1	94·03	1
11·49	2	59·68	3	94·52	1
11·95	1	60·93	2	95·64	1
12·15	4	61·25	1	96·53	1 Si?
12·50	2	61·47	1	96·69	1
12·88	2	62·6	1+	96·95	1
16·08	1	63·22	2+	98·21	4
16·35	1	63·62	2	3801·30	7 d.?
17·22	10	64·25	1	03·09	4
17·67	1+	64·77	1	04·00	2
18·55	1	65·20	2	04·89	4
19·72	2+	66·25	2	06·32	1
20·60	4	66·80	1	08·25	1
21·65	1+	68·20	1	09·4	1+
22·69	2	69·27	1	10·61	4
23·60	2	70·15	1	11·19	2
25·36	1	70·79	2	11·56	1
26·33	3	72·00	2	15·64	2
26·7	2+	73·30	1	16·49	1
30·55	1	74·54	1	19·02	10
31·14	1	75·55	1	22·82	1
31·60	1	76·3	1+	23·70	1
32·17	1	77·4	1+	27·15	1
34·31	1	77·78	1	28·39	3 r.

λ	i	λ	i	λ	i
3829·38	1+ Mg?	3885·52	3	3938·07	1
31·99	6	85·81	3	38·66	3
33·87	1	86·20	1	41·38	1
35·27	2	89·8	1+ (Ni)	42·99	1
36·53	1	91·42	3	43·85	3
37·20	1	93·85	2	44·11	3 r.
38·40	2 Mg?	94·18	3	48·55	1
41·85	2 d.	94·70	1+	49·54	4
42·84	1	96·02	2	52·49	3
44·20	1+	98·42	4 r.	53·21	1
46·02	2	99·35	1	53·66	1
46·59	1	3900·66	1	58·32	1 Ti?
52·75	1	04·30	1	59·47	1
53·50	1	05·66	2 Si?	59·88	1
54·25	1	07·02	1	61·17	1
54·84	1	09·07	1	61·62	4 r.
55·20	2	09·45	1	62·30	1
55·61	2	09·76	1	63·29	1
58·46	1 Ni?	11·1	1+	63·74	1
59·05	2	13·14	1	64·40	3 r.
60·58	1+	13·61	1	65·81	2
63·14	3	14·47	1	66·40	3
63·50	2	14·80	4	67·50	2
64·5	1+	19·83	3	68·65	8 Ca
65·13	3	20·89	3	70·25	1
66·35	1+	21·46	1	70·75	1
68·02	2	22·50	2	71·81	2
69·71	1	24·15	1+	72·00	2+
70·73	1	24·60	1	72·67	2
71·05	1+	25·11	1	73·77	2+
71·30	1+	26·72	1	75·40	1
75·52	1	29·40	1	76·67	6
75·85	1	30·13	1	77·98	1
76·17	1+	31·91	3 v.	78·77	1
77·07	2	33·81	10 Ca	79·47	1
77·66	3	34·53	1	80·62	2
78·96	3	35·55	1	81·16	1
79·47	5 r.	36·11	3	82·20	1
82·00	1	36·53	1	84·12	1 Hg?
83·27	3 r.	37·51	3	84·97	1

λ	i	λ	i	λ	i
3985·30	1	4039·22	1	4085·00	2
88·28	1	39·63	1	85·46	2
89·90	1	40·7	2+ br	86·74	1
91·81	1	43·57	2	87·1	1+
93·65	1+ Ba?	44·20	2+	88·9	1+ br
98·58	1+	44·80	2+	89·51	1
98·75	1+	48·03	1	90·30	1
99·32	2	48·80	1	96·10	2
99·86	2	49·91	1	99·18	1
4000·70	3	51·64	1	4100·53	2
01·24	1	53·31	1	01·10	9 d.
02·40	1+	54·62	1	04·30	3
03·12	1+	54·98	1	06·30	1
06·01	1	55·27	1+	07·0	1+ br
07·10	1+	57·02	1	09·13	1
08·39	1	57·4	1+	10·44	2
10·22	1	57·93	1	10·94	2+
12·25	3	59·12	15	13·46	1
13·01	1	59·6	2+	14·05	2
13·40	2	59·82	2+	14·67	1
14·06	1	60·51	1	15·70	2
15·05	1	60·92	2	17·00	2
16·18	1	61·39	1	19·35	7 (i
17·65	1	61·63	1	22·95	1
19·12	1+	62·10	2	23·99	7 d.
20·33	1+	62·81	3+	25·35	1
21·2	1+	64·90	1	25·72	1
22·75	3+	66·26	1	26·30	2
24·25	2+	67·24	1+	27·00	1
24·50	2+	68·40	1	27·52	1+
26·43	1	68·85	1	28·00	1+ Sr?
27·40	1	71·05	1	29·53	3
28·06	1	73·20	2	30·06	4
29·3	1+	77·20	1	31·64	1
31·41	2	77·85	1 Si?	34·70	1
32·60	3	79·3	3+	35·55	1+
33·22	1 Mn?	79·90	10	36·28	1
33·26	1	82·80	1	37·20	5
36·00	1	83·92	1	37·75	1
37·85	2	84·33	1	38·55	2

λ	i	λ	i	λ	i
4139·48	2	4198·66	1	4266·20	2
39·85	6	99·10	1	67·81	1
40·68	1	99·45	1	68·82	1
41·40	1+	4201·72	2	70·90	2
43·28	2	03·05	1+	77·70	1
47·13	1	03·61	1+	80·76	1
47·28	1+	04·50	1+	83·2	1+ Ba
48·6	1+	05·49	3	83·6	1+
48·75	1+	06·30	1	86·40	1
50·26	3	08·34	1	87·18	2
52·76	5	12·25	1	89·10	2
58·16	1	12·75	1	91·38	1
59·68	1+	13·47	1	92·23	1
61·0	1+	13·68	1+	92·68	1
61·44	1	14·97	3	94·0	1+
62·99	1+	15·68	1 Sr	95·81	2
63·83	7	16·13	3	96·33	2
64·86	7	18·14	3	98·15	1+
66·0	1+	18·72	2+	99·75	3
68·29	6	20·76	1	4300·70	1
69·4	1+	22·90	1	01·18	3
69·75	1+	26·39	1	02·65	1+
72·8	1+	26·90	3 Ca	03·40	1
74·15	1+	28·07	1	06·08	1 Ir?
74·55	1+	29·30	2	06·43	1
78·03	1+	29·97	1	07·13	1
78·60	1	30·49	1	08·83	1
79·99	1	32·14	1	09·72	1
81·57	1+	46·45	1	11·50	3
83·13	1+	49·65	1+	11·90	1
83·57	1	53·16	1	12·65	1
84·60	2	53·89	1	12·9	1+
86·27	1+	54·59	2	14·06	1
91·09	3	54·90	1+	17·90	1
92·27	3	55·61	2	21·66	2
93·97	2	56·17	1	23·63	1
95·30	3	58·00	1+	26·47	2
95·85	1	59·06	1	29·88	1
97·1	1+	59·6	1+ br	31·52	2
97·85	1+	62·25	1	41·8	1+ ? Al

λ	i	λ	i	λ	i
4342·99	1	4448·5	1+	4556·61	2+
53·48	1	50·08	2	57·06	1+
54·40	1+	56·97	1	59·62	1+
55·6	1+ br.	57·61	1	64·71	2
57·1	1+	58·31	1	68·0	1+ br.
60·05	1+	60·37	1	73·30	3
67·63	1	60·61	1	74·50	1
68·15	2	64·35	1	74·98	1
68·65	1	66·6	1+	75·57	1
72·88	1	69·52	1	79·62	3
74·95	1+	69·90	1	80·8	1+
81·28	1	71·48	1	81·83	3
82·70	1	72·24	1	82·51	1
83·13	1	74·87	1	84·05	1
85·03	1	75·50	1	84·99	1
87·94	1	88·3	1+ br.	89·24	1
88·45	1	93·18	3	90·05	1+
92·90	2	95·7	1+	94·05	1+
95·3	1+ (Ti)	97·5	1+	4600·45	1
97·27	1+	4500·01	1	06·92	3
4400·5	1+	03·23	1	16·33	1
06·7	1+	03·60	1	58·0	1+ br.
08·9	1+	06·21	1+	64·01	2
10·40	2	08·60	1	66·41	2
11·71	1	11·30	1+	67·44	1+
12·4	1+	16·1	1+	70·30	1+
13·33	1+	22·40	2	72·25	2
19·60	2	23·59	3	73·83	1+
20·00	1	24·32	1	75·52	2
20·8	1+ br.	27·81	2	78·6	1+
21·86	1	33·4	1+	85·30	2
24·03	1	35·8	1+	97·65	1+
24·87	1+	37·87	1	4703·3	1+ br.
26·83	1	40·05	1+ br.	08·40	1
27·26	1	43·00	1	13·61	1
27·87	1	46·99	3	16·0	1+ S?
29·62	1	48·90	1+	27·1	1+
37·39	3	50·31	2+	34·2	1+
38·08	1+	52·05	1+ br.	44·03	1
42·0	1+	54·21	2 Ba	44·78	1

λ	i
4749·85	1+
51·52	1+
58·65	1+
67·58	1

XLIII. Thorium.

Das Spectrum wurde aus Thornitratlösung auf Gaskohle aufgenommen. Das Bogenspectrum ist bisher unbekannt, das Funkenspectrum wurde in dem kleinen Bereich von λ = 3900 bis 4000 AE. von Lockyer,[1] zwischen 4000 und 4700 von Lohse[2] gemessen. Wesentliche Verunreinigungen konnten nicht constatirt werden. Die Zahl der gemessenen Linien beträgt 2070. Die starken Linien des Thoriums kommen in der Sonne als schwache Linien vor.

λ	i	λ	i	λ	i
2192·48	1	2257·7	1+	2211·62	1
98·78	1	78·97	1	19·58	4
99·90	1	80·54	1	24·80	3
2206·75	1	81·69	2	27·01	1
21·15	2	84·33	1+	28·67	1
21·61	1	87·71	2	35·59	3
23·65	1	94·76	2	40·72	3
28·9	1+	97·35	1	51·81	1
30·4	1+	2301·32	3	54·36	1
49·6	1+	07·2	1+ br.	55·35	1

[1] Lockyer, Phil. Trans. (1881).
[2] Lohse, Berl. Akad. (1897).

λ	i	λ	i	λ	i
2355·99	2	2461·99	1	2545·20	4
57·30	1	63·30	7	45·80	1
62·32	1	66·27	1	48·01	2
63·19	4	67·75	2	48·24	1
67·12	1	68·27	1	49·21	3
68·18	1	70·74	2	49·66	4
69·04	2	74·09	5	50·12	1
71·50	4	75·41	4	50·8	1+
73·90	1	77·07	1	51·41	1
75·19	1	89·72	2	54·80	4
75·92	1	94·74	1 Be?	55·31	4
77·92	2	95·47	1	59·26	1
81·60	2	97·35	3	61·13	1
82·15	2	97·69	3	62·04	1
86·94	1	98·49	1	64·50	6
88·23	1	2501·21	5	65·70	3
91·62	3	03·00	1	66·70	3
93·21	1	04·39	2	67·92	3
95·72	2	05·71	1	71·72	5
2403·2	1+	08·02	1	74·60	1
11·42	1	10·09	1	76·44	1
13·58	6	11·35	1	79·56	2
23·79	2	12·81	8	80·48	1
24·69	3	14·40	4	80·85	1 Ag?
25·5	1+ br.	16·56	1	83·48	4
28·06	8	20·26	1	86·24	1
28·89	1	20·77	1	89·17	2
31·23	1	21·9	1+ br.	92·92	1
31·82	7	26·02	1+	95·16	1
32·97	1	28·45	2	97·16	2
37·65	1	29·63	1	97·41	3
39·39	1	30·06	3	2600·72	3
41·38	9	32·56	1	01·03	1+
45·64	1	33·73	1	04·03	1
50·91	1	34·45	1	08·46	1
56·41	1	35·96	1	09·31	3
56·94	1	36·65	3	09·97	2
58·87	1	36·83	1+	15·49	1
59·08	1	42·00	2	19·02	2
61·38	1	42·70	1+	23·57	2

λ	i	λ	i	λ	i
2625·86	2	2694·10	3	2748·93	1
26·50	1	95·31	2	49·67	1
28·92	1	95·65	3	49·8	1
30·13	1	95·93	1	52·30	3
33·45	1	96·94	1	57·30	1
35·5	1+	97·67	1	59·53	1
35·96	2	98·84	1	60·52	2
37·76	1	2700·9	1	60·83	2
38·71	2	02·96	1	61·7	1
39·61	1	04·25	3	63·73	2
40·00	1	08·36	1	64·76	2
40·43	1	10·1	1+	65·24	2
41·62	2	11·59	1	65·97	3
42·75	1	14·[illegible]	1	68·97	4
43·4	1	15·20	1	70·05	2
44·9	1	16·33	2	71·05	3
49·62	1	19·27	1	74·61	2
50·00	1	20·02	1	75·00	1
50·71	2	21·46	1	75·22	2
52·22	1	21·81	3	76·08	1
58·77	1	22·16	2	77·94	1
60·0	1	23·43	1	78·85	1
61·50	1	25·[illegible]	1	80·58	1
62·46	1	26·53	1	80·8[illegible]	1
62·95	1	27·1	1	83·16	2
67·00	2	27·9	1	83·64	1
68·05	1	29·40	3	84·20	1+
71·7	1	30·36	2	84·48	2
73·77	2	31·32	2	85·00	1
75·80	1	32·88	2	85·71	1
76·7	1	34·48	2	86·40	1
78·2	1	[illegible]	1	87·02	2
79·07	1	36·53	1	87·25	2
81·09	3	37·72	[illegible]	87·70	1
84·43	3	38·[illegible]	1	88·80	1
86·77	6	43·20	1	90·53	1
87·22	3	44·1	1	91·15	1
88·42	1	47·29	[illegible]	91·55	1
91·29	1	47·77	1	94·00	2
92·50	3	47·98	1	[illegible]	1

λ	i	λ	i	λ	i
2798·80	1	2855·97	1	2912·10	1
99·22	1	57·57	1	12·82	1
2800·69	1	61·48	3	14·5	1 + br
03·52	1	62·66	1 +	16·55	1 +
07·40	2	64·74	1	17·13	1
09·08	2	68·73	1	17·50	1
11·49	1	70·04	1	17·90	2 d.
14·44	1	70·51	3	19·91	1
14·71	1	70·95	1	20·44	1
16·18	1	71·83	1	21·05	1 +
19·44	2	75·73	1	21·70	2
20·46	1	76·51	1	22·68	2 r.
21·75	1	79·30	1	24·05	2 +
22·14	1	79·65	1	25·14	3
22·6	1 + br	81·24	1	25·70	2 +
23·30	1 [illegible]	82·13	1	28·30	2
23·70	1 +	82·61	1	28·77	2
24·78	[illegible]	84·38	3	29·33	1
26·95	3	85·15	1	31·00	1
27·90	1	86·3	1	32·50	5
28·10	1	86·62	1	35·19	1
30·02	1	87·40	3	35·8	1 +
30·54	1	89·1	1 + br	36·25	1
32·18	1	91·35	1	36·54	2
33·46	1	91·87	2	37·51	1
34·57	2	92·25	1	38·27	2 +
36·14	1	95·24	1	39·65	1
37·40	1	96·82	1	40·73	1
39·33	1	97·19	1	42·97	3
40·25	1	98·40	1	46·75	1 +
41·25	1	99·03	[illegible]	49·15	1
42·90	2	99·52	1	50·02	1
45·[illegible]	1	99·81	2	50·60	1
47·45	1	2903·24	1	51·37	1
48·[illegible]	1	04·56	1	55·1	1 +
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	57·70	2
50·[illegible]	1 +	[illegible]8·41	1	58·04	2
[illegible]		[illegible]	[illegible]	58·20	1 +
[illegible]		[illegible]	[illegible]	61·62	2
55·[illegible]	1	[illegible]	1	61·9	1 +

λ	i	λ	i	λ	i
2964·17	1+	3017·26	1	3078·02	1
65·05	1	18·62	1	78·99	4 d.?
65·64	1	19·52	1	80·00	1
68·81	2	21·61	1	80·31	3
71·63	1	22·22	1	81·80	1
72·36	1	26·68	2	82·06	1
73·67	2	27·9	1+ br.	82·30	1
74·15	2	28·69	1	84·10	1+
75·06	2	31·40	1	84·40	2+
76·18	1	32·08	1	88·54	2
76·85	1+	33·25	1+	89·72	1
77·4	1+	34·17	3	90·20	1
78·80	8	35·21	2	92·46	1
80·5	1+	38·7	1+	93·11	1
81·59	2	40·2	1+	94·8	1+
83·97	2	43·20	1+	96·50	1+
85·38	1	45·67	1	97·35	1
86·20	1+	47·06	2	98·04	6
86·92	1	49·16	2	99·90	1
88·33	3	49·7	1+	3101·02	2
91·20	1	49·9	1+	01·80	1
91·82	1	51·03	1+	02·76	1
93·91	3	51·90	1+	04·50	1
95·90	2	58·00	1+	05·12	1
97·11	1	58·51	1	05·83	3
99·23	2 r.	60·27	2	06·76	1
99·93	1	61·4	1+	07·11	2
3001·37	2	61·79	2	08·37	3
02·51	2	63·15	3 r.	10·12	2
06·10	1	66·03	1	11·9	1+
07·03	2	66·33	2+ r.	12·46	4
07·75	1	67·81	3	14·1	1+ br.
08·0	1+	69·06	1	15·9	1+
08·61	2	69·35	1+	16·4	1+
09·90	1	70·95	3	16·56	1
11·75	1+	72·22	2	17·75	2
12·85	1+	72·92	1	19·60	3
13·80	1+	75·18	1	21·1	1+
15·08	1+	76·05	1+	22·5	1+ br.
15·87	1	77·44	1	23·05	3

λ	i	λ	i	λ	i
3124·47	3	3169·98	1 +	3199·09	1
25·27	2	70·53	1	3202·25	1
25·60	3	71·84	1	03·36	1
27·26	1	72·24	1	03·75	1
30·08	1	72·65	1	04·02	1
31·17	1 Bc?	73·3	1 + br.	05·45	1 +
33·70	1	74·34	1	06·30	1
34·50	2	74·62	1	07·03	1
36·83	1	75·84	3	07·88	1
37·25	1 +	76·65	1	08·15	1
39·38	3	77·33	1	09·47	1 +
41·03	1	77·65	1	10·43	2
41·95	2	78·00	1	12·17	1 +
42·41	3 +	78·91	1	12·96	1 +
42·95	2 r.	79·18	2	13·71	2
46·15	2	80·35	4	15·92	1
48·11	5	81·33	1	16·71	8
50·08	1	81·9	1 +	17·56	1
50·56	2	82·52	1	17·94	1
51·75	1	82·80	1	18·45	1
51·9	1 +	83·70	1	18·94	1
54·40	2	83·94	1	20·46	1
54·89	3	84·06	1 +	21·40	12
55·93	1	85·05	2	22·00	1
56·49	1	87·14	1	23·40	1
58·02	1	87·56	1	23·93	1
58·72	1	88·38	5	24·55	1
59·20	1	90·25	2 d.	25·51	2
60·3	1 +	90·86	1	25·80	1
60·95	1 +	91·33	1 d.	26·23	1
61·81	1	91·98	1	26·52	1
62·9	1 + br.	92·25	1	27·10	1
62·95	1	93·29	1	27·90	2
64·60	1	93·50	1	29·10	3
65·8	1 +	95·45	1	30·98	2
65·94	1	95·90	1	32·21	7
66·25	1	97·73	1 +	32·87	1
66·66	1 +	98·34	1	33·48	1
67·66	1	98·60	1	33·70	1
69·43	1	98·83	1	35·00	1

λ	i	λ	i	λ	i
3235·95	2	3269·57	1	3301·81	1
37·36	1	70·27	1	03·59	1
38·23	3	70·97	1	04·93	1
38·91	1	71·3	1	08·20	1
39·38	1	72·[illegible]	1	09·25	1
40·62	2	74·55	1	10·32	2
41·25	2	75·20	2	10·65	1
41·70	1	76·50	1	12·23	1
42·42	2	78·60	1	13·87	10
43·18	1	[illegible]	2	14·99	2
43·96	1	80·84	1	16·82	1
44·64	1	81·42	1	17·7	1
45·91	3	81·56	1	17·90	1
46·73	1	82·2	1	18·55	1
48·62	2	82·75	2	19·03	1
49·02	1	83·11	2	19·75	1
50·06	1	84·27	2	20·42	2
50·3	1	86·71	2	20·97	2
52·02	1	87·30	2	21·57	[illegible]
52·85	1	88·21	1	22·60	1
53·12	1	90·25	1	24·88	2
54·95	1	90·73	10	25·27	1
55·62	2	91·30	1	26·68	1
56·38	3	91·88	1	27·32	1
57·27	2	92·02	3	27·86	1
58·05	1	93·71	1	28·40	1
58·2	1	93·79	1	30·62	1
59·35	1	94·06	2	31·00	1
59·82	1	94·37	1	31·27	1
61·04	1	94·67	1	32·56	1
61·2	1	94·75	1	33·50	1
61·66	1	95·12	1	34·18	1
62·79	3	96·44	1	34·72	[illegible]
63·16	1	96·65	1	35·17	1
63·8	1	96·72	2	36·20	1
64·26	1	97·11	1	36·[illegible]	1
64·56	1	97·35	2	37·26	1
65·67	1	98·80	1	37·65	1
66·45	1	3300·03	2	38·00	[illegible]
67·65	2	[illegible]	2	38·50	1

λ	i	λ	i	λ	i
3339·70	6	3367·93	3	3401·17	1+
42·37	1+	69·23	1+	01·78	2
43·41	1	70·53	1	02·16	2
43·77	2 r.	70·95	1	02·81	4
44·46	1	71·65	1	03·42	2
45·01	2 r.	71·96	3	04·75	2
46·68	2	72·85	1	05·70	1
47·72	1	74·73	3	06·84	1
49·10	2	75·15	1	07·76	1
49·48	1	76·98	1	08·76	2
49·99	1	77·57	8	09·37	2
50·43	1	78·70	3	11·50	1
51·38	4	79·28	1	11·92	2
51·75	1	79·9	2+ br.	12·53	1+
53·31	1	81·51	2	13·15	1
54·10	1	83·02	1 Ag	13·52	1
54·35	3	83·27	3	14·59	2
54·74	2	85·16	1	15·2	1+ br.
55·38	2	85·66	3	16·03	1
55·69	2	86·64	3	16·54	1
56·96	1	88·70	2	17·22	1
57·21	1	89·77	3	17·83	1
57·38	1	90·48	1	18·89	2
57·48	1	90·93	1	18·99	2
58·74	3	91·85	1	19·29	3
59·20	1	92·20	5	21·31	2
59·87	1	93·05	1	22·70	1
60·30	1	93·35	1	23·24	2
60·51	2	94·27	1	24·09	1
61·82	3	94·64	1	25·28	2
62·35	1	94·96	1	26·04	1
62·68	1	95·26	1	26·20	1+
62·80	1	95·50	1	27·1	1+
63·20	1	95·77	1	27·58	1
63·84	2	96·53	1	28·09	1
64·79	2	96·7	1+	29·10	1
65·43	1 Cu?	97·23	1	29·47	2
65·75	1+	97·65	1	29·99	2
66·64	2	98·02	1	30·50	1
66·8	1+	98·70	1	30·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
3431·16	1	3461·37	1	3492·85	1
31·95	2	63·00	4 r.	93·47	1
34·09	4	63·86	3	93·69	2
34·86	2	64·58	1 Sr?	95·90	1
36·05	3 r.	65·17	1	96·04	1
36·80	2	65·88	4 r.	97·19	1
37·13	1	67·05	1	97·41	1
39·07	3	68·07	1	97·85	1
39·83	4	68·36	3	98·15	2
41·16	2	68·83	1	98·77	1
41·49	2	69·59	1	99·15	2
43·25	1	70·08	5 r.	3500·15	2
44·15	1	73·21	2	00·45	1
45·34	2	73·59	2	00·70	1
45·50	1	73·97	1	01·03	1
45·87	2	74·46	1	01·61	2
46·68	1	75·71	1	02·13	1
47·75	1	76·13	1	02·94	2
48·9	1+	76·70	2	03·75	2
49·42	2	77·03	1	04·20	1
49·77	2	77·84	2	05·62	2
50·0	1+	78·28	2	07·06	1
50·9	1+	78·60	2	07·72	10
51·13	2	79·25	1	09·33	1
51·85	1	79·33	2	10·72	1
52·81	2	81·20	1	10·94	1
53·68	1	82·70	2	11·82	6 r.
54·05	1	82·96	2 s.	12·29	2
54·35	2	83·36	2	13·41	1
54·83	1	83·56	1+	13·90	1
55·1	1+	84·25	1	14·70	2
55·40	1	85·35	2	15·43	1
56·10	1	85·63	1	15·89	1
56·57	1	86·67	3	16·50	2
57·08	1	87·15	2+	16·96	3
57·80	1	88·00	2	18·83	1
58·06	1	89·99	1	19·02	1
59·69	1	90·42	1	19·88	2
59·75	1	90·62	2	20·85	1
61·20	1	91·75	1	22·09	3

λ	i	λ	i	λ	i
3523·73	1	3556·45	1	3597·00	1
25·30	1	57·56	2	98·24	1+
25·80	1	59·55	3	99·13	1
26·40	1	60·08	2	99·45	1
26·89	1	60·99	1	99·77	1
27·5	1+ br.	63·48	1	3601·20	7
28·3	1+ br.	64·1	2+ br.	02·14	1
29·06	5	64·83	2	02·63	1+
31·8	1+	65·24	1	03·32	3
32·08	2	66·3	1+ br.	03·49	2
33·12	1+	67·16	1	03·76	1
33·85	1	67·40	1	04·17	2
35·5	1+ br.	67·81	1	05·78	1
36·2	1+	68·10	1	06·32	2
36·80	1	69·75	1	06·87	1+
37·30	3	70·03	1	07·52	1
38·37	1	71·70	2	08·07	1
38·90	10	72·52	4	08·48	1
39·47	2	73·35	2	09·34	1
39·75	3	73·64	1	09·60	4
41·80	2	75·43	4	10·20	2+
42·14	1	76·68	1	10·55	2
42·40	1	77·34	1	10·94	2
42·80	1	78·27	1	12·27	1
44·2	1+	79·45	3	12·57	1
44·55	1+	80·36	2	13·91	1
45·19	1	81·33	1	14·16	3
45·48	3+ d.	82·15	2	15·26	3
46·41	1	83·16	2	16·85	1
47·60	1	85·16	2	17·22	5
49·91	2	85·91	2	17·88	1
50·47	2	88·35	2	18·48	1+
50·89	1	89·22	1	18·87	1+
51·55	1	89·47	2	19·50	1
52·03	1	91·16	3+	19·85	1
53·23	2	92·60	1	20·52	3
53·52	1+	92·92	2	21·25	4
54·45	1	93·96	2	22·45	1
55·21	2	94·20	1+	22·87	1
55·9	1+ br.	95·40	2	23·17	1

λ	i	λ	i	λ	i
3624·12	2	3651·72	1	3683·01	1
25·05	3	52·31	3	83·50	1
25·74	3	52·69	2	84·10	1
26·05	2	53·72	1	86·03	1
27·55	2 u.	54·74	1	87·13	1
29·36	2	55·2	1+	87·80	2+
31·27	1	56·35	2	88·40	1
31·60	1 [illegible]	57·70	1	88·93	4
32·74	2	58·20	3	90·27	2
33·50	1	58·32	2	90·67	3
33·85	1	59·66	6 [illegible]	92·24	1
34·34	2	60·28	1	92·65	6 [illegible]
34·70	1	61·05	6	94·08	3
35·40	2	62·36	1	95·05	1
35·53	3	62·80	1	95·25	1
36·05	1	63·32	2	96·15	3
36·30	1	63·88	1	96·82	2
36·70	1	65·33	1	97·21	2
37·68	2	65·62	1	98·30	1
37·78	1	65·90	1	98·47	2
39·55	1	66·53	1	98·95	1
41·25	1	68·31	1	3700·1	1+
41·42	1	69·56	1	00·50	2
41·98	1	70·21	3	00·95	3
42·41	1	70·80	1	02·26	1
43·03	1	71·28	1	03·04	2
44·48	2	71·72	1 Pb?	04·16	4
44·84	2	73·1	1	05·16	1
45·43	1	73·45	2	06·15	1
47·01	1	73·97	3	06·91	2
47·45	2	75·72	4	07·16	1
47·80	2	76·88	1	07·60	1
48·28	1	78·0	1	08·90	2
48·55	1	78·19	4	09·82	1
48·80	1	78·96	1	10·15	1
48·97	1	79·89	5	11·50	3
49·37	1	80·72	1	11·95	1
49·90	1	81·38	2	12·71	2
50·65	1	82·06	2	14·73	1
50·95	2	82·62	1	16·47	1

λ	i	λ	i	λ	i
3716·98	1	3747·73	3	3775·47	1
18·00	2	48·45	2	76·10	2 r.
18·36	2	49·17	1	77·27	1
18·85	1	50·30	1	77·50	1
19·63	1	50·82	1	78·06	1
19·90	1	51·91	1	78·93	1
20·18	3	52·73	6	79·95	1
20·52	3	54·75	2	80·65	1
20·90	1+	55·37	1+	81·05	1+
21·55	1+	55·55	1+	81·83	1
22·01	3	56·05	1+	82·35	1+
22·35	3	56·46	1	83·27	3
23·46	2	56·9	1+	83·48	2
23·85	2	57·44	1	83·95	2+ br.
24·70	1	57·88	1	85·50	1+
24·93	2	58·95	1	85·80	3
26·02	1	59·46	2	86·12	1
26·40	1+	60·48	2	87·04	1
26·89	3	61·28	3+	87·34	1
28·11	1	62·50	1+	87·65	1
28·32	1	63·04	4	88·54	1
30·96	4	63·49	1	89·29	3
31·60	2	63·75	1	90·2	2+
32·85	1+	64·26	1	90·67	1
34·77	2	64·48	1	90·99	1
35·05	1 Fe?	64·9	1+	91·50	2
35·70	1	65·43	2	92·15	1+
37·10	1	65·70	1	92·52	1
37·37	1	66·52	1+	92·80	1
39·02	4	67·39	1	93·14	1
39·95	1	68·05	3	93·65	1
40·6	1+	68·62	1	93·92	1
41·03	2	70·25	1+	94·30	2
41·40	6	70·4	1+	94·50	2
42·45	1	71·55	1	95·53	2
43·15	1	71·96	1	95·90	1
43·71	2	72·41	2	96·33	1
44·89	2	73·23	2+	97·10	1
46·15	3	73·94	3	97·66	2
46·68	1	74·40	2+	98·1	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3798·25	1+	3819·46	2+	3872·87	3 (Cy)
98·70	1+ Fe?	20·13	1+	84·67	1
99·36	1	20·95	1	84·96	2
99·79	1	21·57	3	85·87	1+
3800·20	1	21·94	1	86·12	1
00·53	1	22·33	3	87·08	1
00·80	2	23·50	1	87·55	1
01·50	2	23·74	1	90·49	1
01·75	1+	24·52	1	91·18	2
02·10	1	24·92	1	92·42	2
02·31	1	25·21	2	93·20	2
02·93	1	25·80	1	93·55	1
03·25	2	27·11	2	94·53	1
04·2	1+	28·30	2 (Cy)	95·02	1
04·3	1+	28·58	2 (Cy)	95·55	1
04·85	2	29·53	2	98·60	1
05·18	1	31·90	3	98·95	1
05·55	1	32·59	1	99·1	1+
05·95	2	32·97	1	3900·25	1
06·96	1	34·75	1	00·99	3
08·04	3	36·65	2 (Cy)	01·3•	1+
08·30	1+	38·01	2	02·25	1
08·84	1+	38·92	1	02·60	1
09·25	1	39·90	3	04·21	2
10·00	3	43·10	3	05·29	3 r.
10·75	1+	45·17	1	06·13	1+
11·20	1	46·40	1	06·95	1+
11·55	2	51·72	1+	07·48	1+
12·30	2	53·10	1	08·03	1
13·21	4	53·60	1	08·6	1+
13·85	1	54·61	3	11·45	1
14·73	2	59·98	3+	12·41	2
15·02	1	62·50	1	13·15	2
15·22	1	63·51	3 (Cy)	13·95	1
15·71	1	65·20	1 d.	14·6	1+
16·73	1	67·00	1+	15·92	1
17·51	2	67·46	1	16·90	3
17·86	2+	69·50	1	18·13	1
18·81	1	69·77	1	18·62	1
19·2	1+	72·45	1+	20·41	1

λ	i	λ	i	λ	i
3922·34	1	3955·38	1+	3988·99	1
25·19	2+	56·75	3	90·25	1
26·80	1	58·30	1	90·72	1+
27·24	2	59·38	1+	91·80	1+
27·54	2	60·50	2	92·21	1
29·74	3	61·07	1	92·45	1
30·43	1	62·49	2	93·86	1
31·35	1+	63·33	2	94·70	2
32·10	1	63·65	2	96·20	2
32·35	1	65·00	1	97·60	1
33·00	1	66·9	1+	98·01	3
33·65	1	67·10	1	4000·10	1
34·90	1	67·37	1	01·22	1
35·32	1	67·52	1+	01·88	1
35·74	1	69·15	1	03·21	2
36·07	1	69·50	1	03·49	3
36·45	1	69·70	1+	05·69	3
37·14	2	70·00	1	06·51	2
38·01	2	72·30	1	07·68	3
38·86	2	74·38	1	08·35	1
39·88	1	75·36	1	09·22	1
40·49	1	76·56	2	09·70	1+
41·48	1	77·99	1	10·65	1+
42·20	1	79·20	2	11·17	1
42·75	1	80·26	1	11·95	2
42·95	1+	80·90	2	12·67	1
43·47	2+	81·28	3	13·45	1
43·81	2	81·70	1	14·66	1
45·63	2	82·23	1	15·27	1+
45·96	1	82·36	1	16·45	1
46·30	2	84·50	1	17·25	1
47·3	1+	84·76	1	19·30	10
47·48	1+	85·55	1	20·22	1
47·80	1+	86·26	1	22·23	1
49·06	2 r.	86·81	1	23·25	1
50·53	2	87·21	1	23·70	1
51·25	1	87·35	1	24·63	1
51·66	3	87·88	1	25·78	2
52·60	1	88·17	3	26·30	1
53·58	1+	88·71	1	27·48	1

λ	i	λ	i	λ	i
4027·82	1	4066·3	1+	4113·77	1
28·83	1	67·78	1	14·3	1+
29·18	1	68·15	1+	15·85	1
29·5	1+	69·40	4	16·91	5
30·45	1+	70·95	1	22·06	1
31·00	1	73·15	1	22·85	1
31·25	1	73·92	1	23·17	1
21·47	1+	74·90	1	23·72	1
32·69	2	79·35	1	24·79	2
34·36	2	79·77	1	27·60	1
35·02	1	80·12	1	29·15	1+
36·22	1	80·50	1	30·15	1+
36·71	2	81·23	1	30·83	1
37·40	1+	82·10	1	31·60	2
39·53	1	82·49	1	32·95	3
40·45	1	83·60	1	34·27	2
41·36	2	85·22	4	36·53	2
43·2	1+	86·02	1	38·97	1
45·85	1	86·71	3	40·42	4
48·18	1	91·53	1	41·82	3
48·60	1	91·7	1+	42·63	2
49·02	3+	93·60	1+	42·87	2
50·02	1	94·99	3	48·35	2
51·1	1+	97·52	1	48·5	1+
51·3	1+	97·93	1	50·17	2
52·65	1+	99·13	2	51·6	1+
53·68	1+	4100·57	1	55·51	1
55·00	1	01·08	2	56·35	1
55·43	1	01·60	1	56·69	2
57·23	1+	03·9	1+	57·20	1
57·52	1	04·60	2	57·67	1
57·99	1	05·55	2	59·82	2
59·45	1	06·6	1+	60·9	1+
60·05	1	07·58	1	61·73	1
63·59	1	08·01	1	62·10	1
63·91	1	08·61	3	62·87	2
64·50	1	10·72	2	63·37	1
64·9	1+	11·09	1	63·84	2
65·46	1	12·52	1	64·43	1
65·90	1	12·95	1	65·25	1

λ	i	λ	i	λ	i
4165·92	1	4223·9	1+	4282·20	4
66·7	1+	24·37	1	83·70	2
67·45	1+	24·75	1	85·15	2
68·81	2	26·0	1+	85·35	1+
70·65	2	27·82	1	86·38	1
71·00	1	29·58	2	86·90	1
71·52	2	33·41	1	87·9	1+
73·7	1+	34·44	1	88·23	2
74·15	1+	35·12	1	90·6	1+
74·65	1+	37·25	1+	91·60	1
76·55	1+	39·13	1	95·25	3
78·20	3	42·52	1+	96·83	1
79·86	2	42·95	1+	97·11	1
80·15	2	44·05	2	97·53	1
82·15	2	44·99	1	99·01	1
83·76	1	45·63	1	99·66	1
84·48	1	46·56	1	4300·98	1
84·95	1+	47·73	1	02·2	1+ br.
88·75	1	48·10	3	05·65	1+
92·03	1+	49·80	2	06·57	2
93·15	1	50·50	2	07·40	1
94·27	1	53·35	1	08·42	1
95·75	2	53·66	1	10·19	4
96·02	2+	54·00	1	10·90	1+
97·24	1	54·09	1	13·17	1
99·18	1	54·60	1	13·53	1
4202·03	2	56·25	1	14·22	1
06·83	1	62·9	1+	15·52	1
09·01	5	63·50	1	15·86	1
11·07	2	70·49	1	16·15	1
13·28	1	71·26	1	18·47	1
14·15	1	73·54	3	19·28	1
14·73	1	74·19	2	20·31	2
16·19	1	74·54	1	20·77	2
[illegible]	1	76·90	1	22·9	1+
18·54	1	77·13	1	23·1	1+
18·69	1	77·43	2	27·30	1
[illegible]	1	80·13	1	28·86	1
20·23	1	81·23	2	29·65	1
[illegible]	1	81·63	2	31·4	1+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
4332·09	2	4388·59	1	4443·30	1
34·11	2	91·30	8	45·13	1
35·46	1	93·28	1	48·00	2
35·89	3	95·09	2	48·7	1+
36·7	1+	96·67	1	51·23	1+
37·55	2	98·10	2	54·62	1
41·22	2	99 25	2	55·20	1
42·45	2	4400·56	1	55·8	1+
43·79	1	01·87	1	56·83	1+
44·16	2	02·98	1+	57·35	1+
44·50	2	05·95	1+	57·65	1+
45·22	1	06·65	1+	61·28	2
47·36	1	08·61	1	61·91	2
49·57	3+ (L)	09·10	1	63·3	1+
51·00	1	10 60	2	65·52	4
52·87	1	11·80	1	71·97	1
53·55	1	12·68	1	72·47	1
55·50	2	12·98	2	74·25	2
57·79	1	13·60	1	75·43	1
58·70	1	14·8	1+	77·1	1+
59·00	1	16·40	2	79·36	1
61·50	2	18·84	1	81·02	2
61·96	1	19·18	1	81·37	1
62·55	1	21·8	1+	81·85	1
64·5	1+	22·0	1+	84·44	1
66·08	1	22·95	1	85·99	1
69·50	2	24·10	1	86·80	2
74·08	2	25·30	1+	87·67	3
74·96	2	26·18	2+	88·83	3
75·77	1	27·85	1	89·7	1+
77·50	2	28·8	1+	90·5	1+
79·00	1	29·40	1	92·02	1+
79·75	1+	33·12	3	92·45	1
80·13	1+	36·20	1	93·57	1
81·56	1	36·40	1	95·13	1
82·10	8	36·72	1	95·45	1+
84·3	1+	39·26	3	96·53	2
86·35	1	40·73	1	99·13	1+
87·27	1	41·05	2	4500·21	2
87·93	5	42·05	1+	08·4	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4508·9	1+	4554·08	1	4619·67	3
10·73	5	54·9	1+ br	24·05	1+
12·70	2	55·82	8	24·22	1+
13·91	1	62·7	1+	25·24	1
16·20	2	63·48	5	26·8	1+
17·24	1	64·35	1	27·8	1+
18·40	2 r	66·85	1	31·94	2
18·85	1	69·23	1	34·00	1
19·98	1	73·00	1	39·86	1
21·2	1+	75·61	1	40·26	1
21·5	1+	79·25	1+	41·35	1
23·00	1	79·5	1+	51·76	2
25·01	1	81·42	1	52·2	1+
25·31	1	81·78	1	66·69	1
26·23	1	82·66	1 r	80·81	1
27·93	1	83·9	1 r	85·65	1+
28·6	1+	84·55	1	89·35	1
29·06	1	86·44	1	90·87	1
29·67	1	86·80	1+	91·25	2
31·90	2	87·47	1+	94·25	2
32·47	2	87·95	1+	95·05	1+
33·50	3	88·40	1	4700·35	1
34·30	2	89·31	1	02·55	1
36·65	1	89·6	1+	05·92	2
37·26	2	92·07	1+	06·41	1
39·00	1	93·48	1+	08·27	1
40·60	2	93·65	1+	12·57	1
41·8	1+	94·60	1+	15·60	1
42·55	1+	95·06	1	18·79	1
43·42	1+	97·23	2 r br	20·17	1
44·70	2	99·55	1+	23·60	1
46·0	1+	4603·05	1	23·93	1
46·5	1	05·42	1+	24·55	1
47·0	1+	06·59	1	30·00	1
[illegible]	1	09·53	2	32·9	1+
[illegible]	1	10·00	1	40·0	1+
[illegible]	1+	12·06	1	40·70	2
[illegible]	1	13·71	1		

Wir haben bisher immer die Linienzahlen für die Elemente angegeben, da ein offenbarer Zusammenhang zwischen diesen und den Atomgewichten der Elemente besteht, den wir aber erst nach Untersuchung aller Elemente genauer erläutern wollen. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die Linienzahl eine sehr ausgesprochene periodische Function des Atomgewichtes ist, was, soweit man nach den vorhandenen Messungen urtheilen kann, auch für die Bogenspectren gilt. Trägt man die Atomgewichte als Abscissen, die Linienzahlen als Ordinaten auf, so erhält man eine scharf ausgeprägte Curve, die auch in offenbarem Zusammenhang mit der von Humphreys[1] für die Linienverschiebungen durch Druck gegebenen steht. Die Curven präsentiren sich als verzerrte Spiegelbilder, wobei selbst scheinbare Unregelmässigkeiten der einen in der anderen wiedergegeben sind. Die Linienverschiebungen durch Druck sind dementsprechend bei den linienreichen Elementen klein und umgekehrt. Der von Eder und Valenta[2] in Bezug auf die Elemente Na, K und Li vermuthete Zusammenhang zwischen Atomgewicht und Differenz der Linienzahlen im Funken- und Bogenspectrum gilt augenscheinlich für diese Gruppe, dürfte sich aber in der gleichen Weise nicht über die ganze Scala der Atomgewichte erstrecken; einem Anwachsen dieser Differenz auf den aufsteigenden Ästen scheint vielmehr eine Abnahme auf den absteigenden zu entsprechen.

---

[1] Humphreys, Astroph. Journ., Bd. 6 (1897).

[2] Eder und Valenta, Denkschr. d. k. Akad. Wien, LXVII. Bd (1898).

Magnetisirungszahlen anorganischer Verbindungen

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Nachdem ich vor Kurzem einen grossen Theil der Susceptibilitätscoëfficienten der Elemente bestimmt habe,[1] habe ich nun in gleicher Weise mittelst der Wage eine Reihe anorganischer Verbindungen in Pulverform untersucht, wobei wieder Quecksilber als Bezugssubstanz diente.

Die angewandte Methode ist freilich nur vollständig richtig, solange die Substanzen, welche im Gläschen in das Feld hereinhängen, selbst schwach magnetisch sind und die magnetische Kraftlinienvertheilung nicht wesentlich alteriren. Bei stärker magnetischen Körpern wird das Feld wohl etwas geändert, ich habe aber dennoch bei einigen Substanzen, wie den Verbindungen von Erbium, Gadolinium etc. dieselbe Anordnung beibehalten, in der Überzeugung, dass die eventuellen uncontrolirbaren Verunreinigungen der Substanzen von weit grösserem Einflusse sein können, als die durch die Versuchsanordnung bedingten Fehler.

Die Susceptibilitätscoëfficienten der stark paramagnetischen Verbindungen machen sonach bezüglich ihrer absoluten Grösse keinen Anspruch auf völlige Genauigkeit, doch genügen eben

[1] Diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 171.

bei diesen Substanzen die Werthe auch ohne diese Exactheit, um ein deutliches Bild ihres magnetischen Wesens zu erhalten.

Bei der Auswahl des Versuchsmateriales habe ich in erster Linie die Oxyde, Sulfide und Halogenverbindungen, d. h. Verbindungen aus bloss je zwei Componenten, berücksichtigt, dann aber auch complicirtere Salze untersucht. Dieselben wurden zum Theil von Merck, Darmstadt, bezogen, theils mir freundlichst von den Herren Prof. F. Exner, Wien, Prof. G. Goldschmiedt, Prag und Prof. M. Bamberger, Wien überlassen. Einige besonders reine Präparate aus der Gruppe der seltenen Erden verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn Prof. B. Brauner, Prag, einige Kupferverbindungen Herrn E. Murmann, Wien. In der Zusammenstellung bedeuten in der letzten Rubrik die Anfangsbuchstaben M., E., G., B., Br. und Mu. die Acquisitionsart.

Die folgenden Tabellen enthalten zunächst das gesammte gewonnene Materiale nach den Elementen, aufsteigend mit dem Atomgewicht, geordnet. In denselben bedeutet μ das Moleculargewicht, g die zur Verwendung gelangte Gewichtsmenge Substanz in Grammen, a die Anzahl von Grammen, die bei gleicher Raumerfüllung auf 1000 cm^3 kämen, gm die Zahl der Grammmoleküle im Liter; ferners ist p der direct an der Wage abgelesene Zug in Grammen, $\varkappa$ die Magnetisirungszahl, k der Molecularmagnetismus für 1 gm im Liter, beide letzteren Werthe in absoluten Einheiten, und t die Versuchstemperatur.

Die Feldstärke betrug in allen Fällen rund 10.000 [C. G. S.].

Bei Stickstoff, Sauerstoff und den Halogenen sind die Verbindungen nicht unter diesen Elementen, sondern vertheilt bei den zweiten Bestandtheilen eingetragen.

Beifügung eines Sternes * zur Formel besagt, dass die Substanz vor der Messung über Schwefelsäure getrocknet wurde, zwei Sterne ** bedeuten, dass die Verbindung in Form kleiner Kryställchen vorlag. Ein Fragezeichen deutet an, dass vermuthlich Verunreinigungen das Resultat beeinflusst haben.

Substanz	μ	g	a	gm	p	κ.10[6]	k.10[6]	t	Acquisition
Li_2O	20·1	0·795	753	37·5	—0·0120	—0·350	—0·0093	20°	M.
LiCl *	42·5	1·020	973	22·6	—0·0154	—0·449	—0·020	17	B.
Li_2CO_3	74·0	0·817	788	10·7	—0·0069	—0·230	—0·022	15	E.
		0·519	494	6·7	—0·0041	—0·119	—0·018	16	G.
Li_2SO_4 *	110·1	1·430	1362	12·4	—0·0164	—0·478	—0·039	15	G.
$Li_2SO_4 + H_2O$ **	128·2	1·053	1005	7·8	—0·0114	—0·338	—0·043	17	M.
$LiNO_3$	69·1	1·046	991	14·3	—0·0135	—0·367	—0·0256	19	B.
BeO	25·1	0·242	230	9·2	±0	±0	±0	16	G.
BeO_2H_2	43·1	0·334	318	7·4	±0	±0	±0	16	G.
$BeCl_2$	79·8	1·020	983	12·3	—0·014	—0·463	—0·038	17	M.
$BeCO_3$ (?)	69·1	0·375	357	5·2	+0·0031	+0·090	+0·017	16	G.
$BeCO_3 . 2 BeO$	119·3	0·207	197	1·7	—0·0020	—0·058	—0·035	15	E.[1]
$BeSO_4$ *	105·2	0·9475	906	8·61	—0·0108	0·326	—0·038	18	M.
$BeSO_4 + 4H_2O$ **	177·2	0·815	780	4·4	—0·010	—0·314	—0·071	17	M.

[1] Besonders rein, stammt von L. F. Nilson und trägt die Notiz: Gereinigt von Krüss.

Substanz	μ	g	a	gm	p	κ.10⁶	k.10⁶	t	Acquisition
B_2O_3	70	1·026	977	14·0	—0·014	—0·418	—0·030	14	G.
B_4Al_2 (?)	98·2	0·776	740	7·5	+0·218	+6·4	+0·86	15	G.
BN	25	0·202	400	16	±0	±0	±0	15	G.
$B(OH)_3$ *	62	0·746	710	11·5	—0·010	—0·293	—0·026	16	B.
NaOH *	40·1	1·002	954	23·8	—0·0155	—0·451	—0·019	17	B.
NaFl	42·1	1·415	1285	30·5	—0·015	—0·502	0·017	21	M.
NaCl **	58·5	1·346	1288	22·0	—0·0174	—0·521	0·024	19	B.
NaBr **	103	1·424	1356	13·2	—0·0174	—0·506	0·038	18	B.
NaJ **	150	1·934	1833	12·2	—0·0196	—0·572	—0·047	21	M.
Na_2CO_3	106·1	0·748	716	6·8	—0·0044	—0·132	—0·020	17	M.
$Na_2CO_3+10H_2O$ **	286·3	0·946	905	3·2	—0·014	—0·420	—0·133	17	M.
MgO	40·4	0·288	274	6·8	—0·0018	—0·055	—0·008	17	B.
$MgCl_2$	95·3	0·9545	913	9·6	—0·014	—0·420	—0·044	18	M.
$MgCl_2+6H_2O$ **	203·3	0·8015	766	3·8	—0·0115	0·347	—0·092	18	M.
$MgBr_2$ **	184·3	1·050	995	5·4	—0·0154	—0·449	—0·083	20	M.
$MgCO_3$	84·4	0·997	950	11·3	—0·013	—0·381	—0·034	15	G.

$MgSO_4$	120·4	0·987	944	7·8	—0·0110	—0·340	—0·043	18	M.
$MgSO_4+7H_2O$ **	246·5	0·879	840	3·4	—0·010	—0·303	—0·089	20	M.
Al_2O_3	102·2	0·743	708	6·9	—0·0095	—0·279	—0·040	14	M.
$AlCl_3$ *	133·2	0·9093	876	6·6	—0·0126	—0·416	—0·063	19	E.
$AlBr_3$	257·0	1·232	1168	4·54	—0·010	—0·289	—0·064	19	M.
Al_2B_4 ** (?)	98·2	0·776	740	7·5	+0·218	+6·4	+0·86	15	G.
$Al_2(SO_4)_3$	342·5	0·989	946	2·8	—0·012	—0·361	—0·130	18	M.
SiO_2 [1]	60·3	0·0748	72	1·2	—0·0004	—0·012	—0·01	15	G.
SiO_2 [2]	60·3	1·302	1254	20·8	—0·0012	—0·086	—0·004	15	
SiCu (?)	91·5	0·795	766	8·4	+0·0451	+1·492	+0·178	15	M.
P_2Cu_3	252·8	1·341	2680	10·6	—0·010	—0·50	—0·047	18	Mu.
P_2O_5 [3]	142	0·4359	415	2·9	—0·0051	—0·149	—0·051	18	B.

[1] Künstlich.

[2] Natürlich.

[3] Hier, wie bei einigen anderen hygroskopischen Substanzen, wurde das Gläschen mit einem kleinen Korke zugestopselt und bei der Bestimmung von *p* der magnetische Werth des Pfropfens entsprechend berücksichtigt.

Substanz	μ	g	a	gm	p	κ.10⁶	k.10⁶	t	Acquisition
SCu (?)	95·7	1·706	1631	17·0	+0·3026	+9·07	+0·532	18	M.
		0·930	886	9·3	+0·054	+1·572	+0·170	15	G.
SCu_2	159·3	2·935	2665	16·7	—0·0115	—0·388	—0·023	18	Mu.
S_3As_2	246·2	2·190	2086	8·4	—0·0014	—0·041	—0·005	18	M.
S_2Mo	192·2	0·811	772	4·0	—0·007	—0·205	—0·051	16	B.
		1·470	1400	7·3	—0·0123	—0·361	—0·050	15	G.
SSn (?)	150·6	2·393	2279	15·1	+0·270	+7·85	+0·519	15	G.
		1·268	1208	8·0	+0·0016	+0·227	+0·026	15	M.
SBa	169·4	1·736	1653	9·8	—0·014	—0·410	—0·042	18	B.
SHg	232·4	2·914	2775	12·0	—0·016	—0·465	—0·039	16	G.
KFl	58·2	1·271	1205	20·7	—0·015	—0·437	—0·021	21	M.
KCl	74·6	1·245	1186	15·9	—0·0194	—0·566	—0·035	17	B.
KBr	119·1	1·626	1477	12·4	—0·0155	—0·515	—0·042	18	B.
KJ	166	1·742	1666	10·0	—0·0174	0·521	—0·052	17	M.
CaO	56	1·287	1226	21·9	—0·0105	—0·310	—0·015	16	B.
$Ca(OH)_2$	74	0·752	716	9·5	—0·0094	—0·275	0·029	16	B.
$CaFl_2$	78	1·173	1111	14·2	—0·011	—0·320	—0·023	19	M

$CaCl_2$	110·9	1·240	1184	10·7	−0·0149	− 0·442	−0·043	17	M.
$CaCl_2+6H_2O$ **	218·9	1·115	1067	4·9	−0·0154	− 0·461	−0·094	17	M.
$CaSO_4$	136·1	1·227	1173	8·6	−0·0115	− 0·447	−0·052	17	M.
$CaSO_4+2H_2O$	172·1	0·836	800	4·7	−0·0094	− 0·290	−0·062	17	M.
Sc_2O_3 [1]	136·2	0·081	185	1·4	−0·0001	− 0·006	−0·004	17	E.
$Sc(NO_3)_3$ [2]	230	0·03	—	—	±0	± 0	±0	21	E.
TiO_2	80·1	1·000	952	11·9	+ 0·0126	+ 0·37	+ 0·031	15	M.
$Ti_{10}C_2N_8$ (?)	617·3	2·472	2343	3·80	+14·49	+420·9	+117·5	20	B.
V_2O_5	182·4	1·785	1692	9·28	+0·055	+ 1·60	+0·173	20	B.
VO_3NH_4	117·3	0·821	782	6·7	+0·0022	+ 0·064	+0·010	15	G.
Cr_2O_3	152·2	1·8115	1725	11·3	+1·408	+41·0	+3·62	17	B.
CrO_4H_2 **	118·1	1·185	1129	9·6	+0·0214	+ 0·623	+0·065	17	B.
$CrCl_2$	133·0	0·710	685	5·2	+0·975	+31·8	+6·18	19	M.
Cr_2Cl_3	210·6	1·136	1032	4·9	+1·0625	+35·48	+7·24	18	M.

[1] Vergl. diese Sitzungsber., 108, II.a, S. 183.

[2] Formel unsicher, die Substanz, aus der vorhergehenden gewonnen, bildet sehr hygroskopische Kryställchen.

Substanz	μ	g	a	g m	p	κ . 10^6	k . 10^6	t	Acquisition
MnO_2	87	2·078	1979	22·6	+ 1·846	+ 53·75	+ 2·38	17	B.
FeO [1]	72	0·612	860	12	+157·4	+6474	+540	17	E.
Fe_2O_3	160	0·542	519	3·2	+ 1·963	+ 56·9	+ 17·6	18	E.[2]
		0·939	890	5·6	+ 4·42	+128·3	+ 23·0	21	M.
$FeSO_4+7H_2O$	278	1·135	1076	3·87	+ 1·60	+ 46·5	+ 12·0	19	M.
Co_2O_3	166	1·563	1482	8·9	+ 2·17	+ 62·9	+ 7·05	21	M.
Co_3O_4	241	2·288	2179	9·0	+ 6·70	+195·0	+ 21·6	15	B.
NiO	74·7	0·691	655	8·8	+ 1·04	+ 30·1	+ 3·44	21	M.
Ni_2O_3 [3]	165·4	2·475	2357	14·3	+ 0·763	+ 22·2	+ 1·55	15	B.
CuO (?)	79·6	0·981	934	11·7	+ 0·0986	+ 2·90	+ 0·247	16	M.
Cu_2O (?)	143·2	1·733	1650	11·5	+ 0·0416	+ 1·21	+ 0·105	16	M.
CuS (?)	95·7	1·706	1631	17·0	+ 0·3026	+ 9·07	+ 0·532	18	M.
		0·930	886	9·3	+ 0·054	+ 1·572	+ 0·170	15	G.
Cu_2S	159·3	2·935	2665	16·7	− 0·0115	− 0·388	− 0·023	18	Mu.

CuSi (?)	91·5	0·795	766	8·4	+0·0451	+1·492	+0·178	15	M.
Cu_2Se	206·3	3·393	3082	14·5	—0·0135	—0·450	—0·031	18	Mu.
Cu_3P_2	252·8	1·341	2650	10·6	—0·010	—0·50	—0·047	18	Mu.
$CuCl_2+H_2O$ (?)	170·5	1·434	1371	8·0	+0·2766	+8·29	—1·031	17	M.
$CuBr_2$ (?)	223·5	2·624	2509	11·2	+0·204	+6·13	+0·546	18	M.
$CuCl_2.3CuO+4H_2O$ (?)	445·3	1·954	1861	4·2	+0·055	+1·601	+0·383	18	B.
$CuSO_4$ (?)	159·7	1·336	1272	8·0	+0·222	+6·47	+0·81	13	G.
$CuSO_4+5H_2O$ (?)	249·7	1·373	1313	5·2	+0·208	+6·23	+1·19	18	M.
ZnO	81·4	1·567	1492	18·3	—0·0132	—0·388	—0·021	16	B.
ZnO_2H_2	99·4	1·326	1269	13·8	—0·0194	—0·583	—0·042	18	B.
$ZnBr_2$	225·3	2·025	1919	8·52	—0·021	—0·613	—0·072	19	B.
As_2O_3	198	2·522	2402	12·1	—0·017	—0·494	—0·041	18	M.
As_2S_3	246·2	2·190	2086	8·4	—0·0014	—0·041	—0·005	18	M.

[1] Die Messungen in dieser Gruppe sind durch die eingangs erwähnten Mängel der Versuchsanordnung stark beeinflusst, doch haben die Werthe mit Rücksicht auf die Vergleichbarkeit mit den übrigen stark magnetischen Substanzen hier Platz gefunden.

[2] Durch starkes Glühen an der Luft aus dem FeO erhalten, welches besonders rein war.

[3] Vermuthlich ein Gemenge verschiedener Oxyde.

Substanz	μ	g	a	gm	p	x . 10⁶	k . 10⁶	t	Acquisition
$SeCu_2$	206·3	3·393	3082	14·5	—0·0135	— 0·450	—0·031	18	Mu.
SeO_3H_2	129·1	2·098	1998	15·5	—0·019	0·55	—0·036	18	B.
$RbCl$	120·6	1·002	1293	10·3	—0·010	— 0·381	—0·037	19	M.
SrO	103·6	1·032	983	9·5	—0·0159	— 0·463	—0·049	18	B.
SrO **	103·6	1·259	1193	11·5	—0·019	— 0·550	—0·048	20	B.
$SrFl_2$	125·6	1·642	1556	12·4	—0·014	— 0·408	—0·033	19	M.
$SrCl_2$	158·5	1·246	1132	7·1	—0·015	— 0·502	—0·070	20	M.
$SrBr_2$	247·5	1·851	1754	7·1	—0·019	— 0·554	—0·078	19	M.
SrJ_2	341·3	1·770	1678	4·92	—0·020	— 0·582	—0·118	19	M.
Y_2O_3	226	1·1796	1137	5·03	+0·1745	+ 5·77	+1·15	15	Br.[1]
		0·303	288	1·28	+0·115	+ 3·34	+2·61	20	B.
YCl_3	195·2	1·189	1146	5·4	+0·5146	+17·02	+3·18	17	M.
$Y_2(CO_3)_3+3H_2O$	412	0·393	372	0·90	+0·073	+ 2·70	+3·0	20	B.
ZrO_2	122·4	2·5336	2441	19·9	—0·0020	— 0·066	—0·003	15	Br.[2]
$Zr(NO_3)_4+5H_2O$ [2]	428·8	1·337	1289	3·0	—0·0064	— 0·211	—0·070	18	E.
		1·105	1354	3·16	—0·0070	0·232	—0·073	16	Br.

Nb_2O_5	268	0·1846	613	2·3	—0·0010	— 0·051	—0·022	20	M.
Mo_2O_3**	240	1·455	1386	5·8	—0·0076	— 0·39	—0·067	16	G.
MoO_4H_2**	162	1·249	1190	7·3	—0·0004	— 0·012	—0·002	14	G.
MoS_3	192·2	0·811	772	4·0	—0·007	— 0·205	—0·051	16	B.
		1·470	1400	7·3	—0·0123	— 0·361	—0·050	15	G.
$AgCl$**	143·4	2·462	2345	16·4	—0·0226	— 0·658	—0·040	17	B.
$AgBr$	187·5	2·444	2355	12·6	—0·0184	— 0·610	—0·049	19	E.
AgJ	243·8	2·651	2512	10·7	—0·026	— 0·726	—0·068	19	M.
CdO	128	2·881	2791	21·8	—0·023	— 0·670	—0·031	15	B.
$CdCl_2$	182·9	3·180	3040	16·6	—0·0254	— 0·761	—0·046	18	E.
$CdBr_2$	271·9	1·912	1828	6·7	—0·0184	— 0·552	—0·082	18	E.
CdJ_2	365·7	2·884	2758	7·5	—0·0896	— 0·675	—0·090	18	E.
$InCl_3$	219·8	0·8660	990	4·5	—0·0084	— 0·310	—0·069	18	M.
In_2S_3	324·2	0·136	530	1·64	—0·0014	— 0·080	—0·049	20	B.

[1] Vor der Messung im Platintiegel frisch geglüht.
[2] Die Formel ist nicht ganz sichergestellt.

Substanz	μ	g	a	$g\,m$	p	$\varkappa.10^6$	$k.10^6$	t	Acquisition
SnO	134·5	1·813	1727	12·9	—0·0054	—0·158	—0·012	17	M.
SnO_2	150·5	2·083	1984	13·2	—0·0028	—0·082	—0·006	15	G.
Sn_2O_3	285	2·411	2296	8·1	—0·0214	—0·614	—0·076	16	G.
SnS (?)	150·6	2·393	2279	15·1	+0·270	+9·85	+0·519	15	G.
		1·268	1208	8·0	+0·0016	+0·227	+0·026	15	M.
$SnCl_2$	189·4	1·217	1159	6·1	—0·0114	—0·334	—0·055	18	B.
SnJ_2**	372·2	1·726	1644	4·4	—0·006	—0·176	—0·040	15	G.
$SnSO_4$	214·6	2·080	1989	9·3	—0·0154	—0·461	—0·050	18	M.
Sb_2O_3	288	2·412	2297	8·0	—0·0114	—0·334	—0·042	14	B.
TeO_2	159	1·737	2069	13·0	—0·0064	—0·230	—0·018	18	B.
TeO_3 (?)	175	1·207	1150	6·6	+0·058	+1·679	+0·256	17	G.
TeO_3H_2	177	2·813	2679	15·1	—0·0174	—0·506	—0·034	15	G.
TeO_4H_2	193	1·962	1876	9·7	—0·0214	—0·642	—0·066	18	B.
$CsCl$	165·5	1·744	1680	10·0	—0·014	—0·47	—0·047	17	M.
$Cs_2SO_4+Al_2(SO_4)_3$*	704·6	1·331	1268	1·80	—0·0174	—0·506	0·281	15	G.
$Cs_2SO_4+Al_2(SO_4)_3+24H_2O$**	1137·1	1·084	1032	0·91	—0·0138	—0·404	—0·444	14	G.

BaO	153·4	2·515	2285	14·9	—0·008	—0·236	—0·016	20	M.
BaO_2 (?)	169·4	1·297	1235	7·3	+0·0086	+0·252	+0·035	18	B.
		1·6745	1601	9·45	+0·009	+0·270	+0·029	18	M.
$Ba(OH)_2$	171·4	1·536	1470	8·58	—0·0120	—0·361	—0·042	18	M.
$BaFl_2$	175·4	2·183	2070	11·8	—0·009	—0·260	—0·022	19	M.
$BaCl_2$ *	208·3	2·140	2046	9·8	—0·0217	—0·643	—0·066	17	M.
$BaCl_2+2H_2O$ **	244·3	1·910	1826	7·1	—0·0184	—0·552	—0·078	17	M.
$BaBr_2$ *	297·3	2·191	2077	7·0	—0·0220	—0·638	—0·091	20	M.
BaJ_2+2H_2O **	427·1	2·273	2154	5·04	—0·022	—0·638	—0·127	19	M.
BaS	169·4	1·736	1653	9·8	—0·014	—0·410	—0·042	18	B.
La_2O_3	324·4	1·027	1447	4·5	+0·0024	+0·098	+0·022	15	Br.[1]
		1·024	1443	4·4	+0·0027	+0·111	+0·025	15	Br.[1]
$LaCl_3$ *	244·4	1·278	1231	5·0	+0·1626	+5·38	+1·07	15	E.
$La(NO_3)_3+2(NH_4)NO_3$ *	466·3	1·3156	1268	2·7	—0·009	—0·297	—0·108	15	E.[2]

[1] Die zweite Angabe bezieht sich auf unmittelbar vor der Messung nochmals im Platintiegel frisch geglühte Substanz (weisses Pulver).

[2] Die Substanz wurde von den Herren F. Exner und E. Haschek bezüglich des Funkenspectrums untersucht und erwies sich als nahezu absolut rein.

Substanz	μ	g	a	gm	p	$\varkappa . 10^6$	**k . 10⁶**	t	Acquisition
CeO_2	172	1·760	1700	9·9	+0·0034	+ 0·113	+ 0·011	15	Br.
$CeCl_3$ *	246·2	1·1174	1077	4·4	+0·1573	+ 5·20	+ 1·19	19	M.
$Ce_2(CO_3)_3$ *	460	0·750	714	1·6	+0·175	+ 5·10	+ 3·28	15	G.
$Ce(CO_3)_2$	260	1·072	1016	3·9	+0·094	+ 2·73	+ 0·698	20	B.
$Ce_2(SO_4)_3$	568·3	1·252	1187	2·1	+0·264	+ 7·68	+ 3·68	20	B.
$Ce(NO_3)_3+2(NH_4)NO_3$ **	468·3	1·345	1296	2·8	+0·1296	+ 4·28	+ 1·53	16	E.
Pr_4O_7	672	1·3082	1319	1·96	+0·512	+ 16·95	+ 8·64	15	Br.[1]
$PrCl_3$	246·4	0·226	697	2·83	+0·194	+ 9·52	+ 3·36	19	E.[2]
Nd_2O_3	336	0·302	524	1·56	+0·2911	+ 13·88	+ 8·9	16	Br.[3]
$Nd(NO_3)_3+2(NH_4)NO_3$ *	490·4	1·3205	1199	2·45	+0·3125	+ 10·43	+ 4·27	18	E.[4]
$Nd(NO_3)_3+2(NH_4)NO_3+4H_2O$ **	562·4	1·166	1059	1·88	+0·220	+ 7·345	+ 3·90	18	E.[4]
$DiCl_3$ *	248·3	1·395	1344	5·4	+0·331	+ 10·93	+ 2·02	15	M.[5]
Sa_2O_3	348	1·202	1160	3·33	+2·023	+ 66·8	+20·1	17	E.[6]
$Sa(NO_3)_3$ ** [1]	336	0·212	610	1·82	+0·433	+ 21·9	+12·1	20	E.[7]

Gd_2O_3	360·3	0·366	1344	3·73	+2·65	+172·0	+46·3	18	E.[8]
$Gd(NO_3)_3$ ** [1]	342	0·111	439	1·28	+0·422	+ 24·7	+19·3	21	E.[7]
Er_2O_3	380	0·949	1998	5·26	+8·64	+417·8	+79·4	15	E.[9]
Er_2O_3	380	0·387	812	2·14	+0·1318	+ 63·8	+29·8	17	G.[10]
$Er(NO_3)_3+5H_2O$ **	442	1·202	1158	2·62	+0·5040	+ 16·67	+ 6·36	16	M.[11]
$Er(NO_3)_3+5H_2O$ **	442	0·475	970	2·2	+2·23	+ 97·9	+44·5	20	E.[12]

[1] Schwarzes Pulver.
[2] Aus einem Oxyd (schwarzes Pulver), das von Herrn L. F. Nilson stammte.
[3] Weisses Pulver, enthält nach Angabe des Herrn B. Brauner noch etwa 3% Pr_2O_3.
[4] Die Formel ist nicht ganz sichergestellt.
[5] Nach den Ergebnissen der Spectraluntersuchung stark lanthanhältig.
[6] Gelbes Pulver, stammt von Herrn P. T. Cleve.
[7] Aus dem vorhergehenden gewonnen.
[8] Gelbes Pulver, stammt von L. F. Nilson, der es selbst von Marignac erhielt.
[9] Hellrosa Pulver, stammt von P. T. Cleve.
[10] Altes Präparat, offenbar ein Gemisch verwandter Erden, gelbes Pulver.
[11] Enthält nach der Spectraluntersuchung vorzüglich Yttrium.
[12] Aus dem Er_2O_3 von P. T. Cleve.

Substanz	μ	g	a	gm	p	$\varkappa . 10^6$	$k . 10^6$	t	Acquisition
Yb_2O_3	394	2·676	2549	6·47	+2·66	+77·46	+11·97	17	E.[1]
$Yb(NO_3)_3$ **	359	0·215	717	2·0	+0·204	+10·85	+ 5·43	21	E.[2]
$Ta_4O_7H_4$	482	1·673	1586	3·29	+0·0125	+ 0·364	+ 0·111	20	B.
WO_2 (?)	216	1·975	1881	8·71	+0·0136	+ 0·398	+ 0·046	17	G.
WO_3	232	1·834	1747	7·53	—0·0066	— 0·193	— 0·025	17	G.
WO_4H_2	250	1·920	1829	7·32	—0·0056	— 0·164	— 0·022	16	G.
$PtCl_2$	265·7	1·646	1568	5·9	—0·0010	— 0·029	— 0·005	15	G.
$AuCl_3$ **	303·6	0·853	1351	4·45	—0·0116	— 0·455	— 0·102	21	M.
HgO	216·3	4·760	4533	21·0	—0·0299	— 0·869	— 0·042	16	G.
HgCl	235·8	3·550	3384	14·35	—0·0210	— 0·613	— 0·043	19	M.
$HgCl_2$	271·2	3·626	3468	16 5	—0·027	— 0·654	— 0·040	17	M.
$HgBr_2$	360·2	1·872	1783	5·0	—0·015	— 0·437	— 0·088	15	G.

HgJ_2	454	3·173	3022	6·7	−0·0264	− 0·771	− 0·116	17	G.
HgS	232·4	2·914	2775	12·0	−0·016	− 0·465	− 0·039	16	G.
Tl_2O_3	456·2	2·0035	1930	4·23	+0·0030	+ 0·099	+ 0·023	17	M.
$TlCl$	239·6	0·550	1240	5·22	−0·0044	− 0·193	− 0·037	20	B.
$TlCl_3$	310·5	0·439	1108	3·57	−0·0040	− 0·195	− 0·055	20	B.
Tl_2SO_4 **	504·3	1·286	2760	5·47	−0·0120	− 0·541	− 0·099	20	B.
$TlNO_3$ **	266·1	2·598	2463	9·26	−0·0140	− 0·408	− 0·044	20	B.
$TlClPtCl_2$	505·3	0·273	783	1·55	−0·0040	− 0·205	− 0·132	20	B.[3]
PbO [5]	222·9	3·662	3488	15·7	−0·0130	− 0·381	− 0·024	18	B.
		4·091	3896	17·5	−0·0154	− 0·449	− 0·026	18	E.[4]
Pb_3O_4	684·7	3·026	2882	4·2	−0·0164	− 0·478	− 0·114	18	B.
PbO_2 (?)	238·9	3·095	2948	12·34	+0·1026	+ 3·02	+ 0·245	18	B.
		3·350	3175	13·3	+0·036	+ 1·05	+ 0·079	19	M.

[1] Weisses Pulver, stammt von Herrn L. F. Nilson.

[2] Aus dem vorhergehenden gewonnen, Formel nicht ganz sichergestellt.

[3] Formel nicht ganz sichergestellt.

[4] Schwefelgelbe Modification.

[5] Bei dieser Gelegenheit sei der Druckfehler in der l. c. angeführten Tabelle der Atommagnetismen, wo unter Pb −0·0248 statt −0·248 für das $k.10^6$ stehen soll, richtiggestellt.

Substanz	μ	g	a	g m	p	κ . 10^6	k . 10^6	t	Acquisition
$PbFl_2$	244·9	2·933	2792	11·4	—0·0178	—0·519	—0·046	16	B.
$PbCl_2$ **	277·8	2·306	2196	7·9	—0·0184	—0·535	—0·068	15	G.
$PbBr_2$	436·8	2·541	2409	5·52	—0·0180	—0·525	—0·095	20	M.
PbJ_2 **	460·6	2·547	2414	5·24	—0·0215	—0·623	—0·118	19	M.
Bi_2O_3	497	3·342	3183	6·4	—0·0138	—0·404	—0·063	15	B.
BiO_2H	241·5	2·397	2283	9·5	—0·0134	—0·390	—0·041	15	B.
BiJ_3	589·1	3·754	3558	6·04	—0·048	—1·39	—0·230	20	M.
$Bi_2(CO_3)_3$	597	1·719	1637	2·74	—0·0074	—0·217	—0·079	15	B.
ThO_2	264	1·1064	1066	3·8	—0·0028	—0·092	—0·024	18	E.
		1·861	1793	6·8	—0·0027	—0·089	—0·013	15	Br.
$Th(NO_3)_4$	480·2	1·7412	1678	3·5	—0·0112	—0·180	—0·051	18	M.
UO_2	271·5	2·904	2766	10·2	+0·0846	+2·46	+0·243	16	G.
U_3O_8	846·5	1·485	1414	1·67	+0·012	+0·351	+0·210	16	G.
UO_3	287·5	1·648	1570	5·49	+0·005	+0·146	+0·027	16	G.

UCl_4	381·3	1·911	1811	4·75	—0·002	—0·060	—0·013	19	B.
$UO_2(NO_3)_2$*	395·6	1·7112	1649	4·17	—0·0016	—0·053	—0·013	15	E.
Polonium-Wismuth-Nitrat	—	0·0951	842	—	+0·0015	+0·10	—	19	E.[1]
Radium-Baryum-Carbonat	—	0·0296	668	—	+0·0010	+0·16	—	20	E.[1]

Im Anschlusse folgen noch einige Nachtragsbestimmungen an Elementen.

Substanz	μ	g	a	gm	p	$\varkappa \cdot 10^6$	$k \cdot 10^6$	t	
Rother Phosphor (amorph)	31	1·791	1706	55·0	—0·013	—0·392	—0·007	18	
Schwefel (gepulverte Krystalle)	32·1	1·320	1263	39·4	—0·144	—0·431	—0·011	18	
Silicium, Krystalle	28·4	0·970	933	32·9	+0·0002	+0·006	+0·0002	16	
Magnesium,[2] Krystalle	24·4	0·718	758	31·1	+0·012	+0·435	+0·014	20	

[1] Stammen von Herrn Ph. Curie, Paris.

[2] Stammen von einer Argondarstellung, wobei sich grössere Mg-Kryställchen ausbilden.

Ferners wurde Kohlenstoff in Form von Diamanten untersucht, von denen mir vier grössere Exemplare, drei helle und ein gelblicher, zur Verfügung standen. Für das specifische Gewicht $\gamma = 3 \cdot 52$ ergibt sich $gm = 293$ und fand ich in der Weise, wie dies für kleine Stückchen bereits beschrieben wurde,[1] bei 13° C.

$$\varkappa = -1 \cdot 14 . 10^{-6} \qquad k = -0 \cdot 0039 . 10^{-6}.$$

Aus dieser Zusammenstellung lassen sich die folgenden allgemeinen Schlüsse ziehen.

A. Qualitative Beziehungen.

1. Die Verbindung aus zwei diamagnetischen Elementen ist immer diamagnetisch.

Scheinbare Ausnahmen hievon bilden bloss eine Reihe von Kupferverbindungen und Zinnsulfid (Musivgold). Die Kupferverbindungen sind nun im Handel niemals frei von Beimengungen der benachbarten stark magnetischen Metalle, insbesondere von Nickel, erhältlich. Die thatsächlich nahezu absolut reinen Verbindungen, die ich von Herrn E. Murmann erhielt, sind dagegen sämmtlich unzweifelhaft diamagnetisch. Dass man es bei den genannten paramagnetischen Substanzen nicht mit einheitlich definirten Körpern zu thun hat, geht übrigens auch daraus hervor, dass man für die gleiche Verbindung, wenn sie aus verschiedener Quelle stammte, sehr stark verschiedene Werthe erhielt, wie bei CuS und SnS, während andere Materialien, wie Li_2CO_3, MoS_3, SrO, $Zr(NO_3)_4 + 5H_2O$, PbO recht gute Übereinstimmung zeigen.

Man kann sonach annehmen, dass überall, wo der angeführte Satz nicht zutrifft, die Abweichungen sich auf Verunreinigungen zurückführen lassen.[2]

2. Die Verbindung zweier paramagnetischer Componenten ist in der Regel gleichfalls paramagnetisch. Bei schwach magnetischen Elementen kann jedoch hier auch Diamagnetismus entstehen.

---

[1] L. c. S. 178.

[2] Immerhin wäre es möglich, dass für Kupfer ganz besondere Verhältnisse vorliegen, worauf bei der Untersuchung an Lösungen und Amalgamen näher eingegangen werden soll.

Beispiele hiefür bilden

Be_2O_3, MgO, Al_2O_3, SiO_2, Mo_2O_3, WO_3 und ThO_2,

wobei zu bemerken ist, dass aus später zu erörternden Gründen nicht anzunehmen ist, dass die positiven Ergebnisse der Magnetisirungszahlen der Metalle in obigen Oxyden durch Verunreinigungen hervorgerufen seien.

Diese Erscheinung scheint mit der Vergrösserung des Atomvolumens bei Eintritt in die Verbindung zusammenzuhängen, worauf im Folgenden noch näher eingegangen werden soll.

Ein directer Rückschluss auf die Qualität eines Elementes ist also aus der Qualität der Verbindung nur bedingungsweise gestattet.[1]

3. Es gibt ausser der Gruppe Cr, Mn, Fe, Co, Ni eine Reihe von stark magnetischen Elementen, und zwar La, Ce, Pr, Nd, Yb, Sa, Gd, Er, in aufsteigender Folge stärker werdend. In analogen Verbindungen sind die letztgenannten Elemente, von Praseodym angefangen, ebenso stark oder sogar stärker magnetisch als diejenigen der erstgenannten Gruppe. Erbium, das den Höhepunkt erreicht, ist im Er_2O_3 etwa viermal so stark als Eisen in Fe_2O_3.[2]

Dass das früher untersuchte metallische Erbium kaum stärker magnetisch war als das Oxyd, ist so erklärlich, dass mir damals nicht reines Er, sondern eine Legirung von verwandten Elementen vorlag. Wie nun bekanntlich Zusatz von Mangan oder eines anderen paramagnetischen Elementes das *k* des reinen Eisens sehr beträchtlich herabdrückt, so liegen offenbar ähnliche Verhältnisse auch hier vor. Die inzwischen erfolgte Untersuchung des Funkenspectrums dieses Metalles

[1] Die Schlüsse des Herrn J. Königsberger, Wied. Ann., 66, S. 732 sind demnach für Li, Na, K, Rb, Ca, Sr, Ba und Mg nicht ohne Weiteres zulässig und ergeben für Mg wahrscheinlich ein unrichtiges Resultat.

[2] Wäre Erbium als reines Metall in gleichem Maasse stärker magnetisch als Eisen, wie es die Oxyde sind, und berücksichtigt man, dass das specifische Gewicht nur etwa zwei Drittel desjenigen von Eisen ist, so liessen sich aus Erbium Dynamomaschinen und andere Apparate bauen, die sich bei gleicher Leistung auf etwa ein Sechstel des Gewichtes derjenigen aus Eisen reduciren würden.

durch die Herren F. Exner und E. Haschek hat übrigens auch ergeben, dass dieses Materiale vorzüglich Yttrium und Ytterbium enthielt.

4. Von Polonium und Radium lagen mir Spuren in Form von Doppelsalzen, die Herr Curie an die Wiener kaiserl. Akademie der Wissenschaften geschickt hatte, vor. Beide erwiesen sich unzweideutig als paramagnetisch, die quantitativen Angaben sind freilich mit Rücksicht auf die ausserordentlich geringen Mengen nur ganz approximative.

B. Quantitative Beziehungen.

1. Der Molecularmagnetismus k der paramagnetischen Verbindungen ist kleiner als die Summe der Atommagnetismen der Bestandtheile.

Als auffallende Beispiele hiefür dienen die Oxyde der Gruppe Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co und Ni.

Die diamagnetischen Substanzen scheinen sich hingegen in erster Annäherung additiv zu verhalten, wie aus der folgenden Tabelle 1 hervorgeht, in der $k.10^6$ die gefundenen Werthe, $k'.10^6$ die aus der Summe $nk_1.10^6+mk_2.10^6$ berechneten bedeuten, wenn wir die Verbindung in der Form $C = nA_1+mA_2$ schreiben. Hiebei wurden der Berechnung diejenigen Werthe von $k.10^6$ für Ag, Cd, Hg, Pb, Bi, Br und J zu Grunde gelegt, die in der kürzlich gegebenen Tabelle der Atommagnetismen[1] angeführt sind, für S der oben gewonnene Werth und für Cu $-0 \cdot 006$ gewählt.

In der Zusammenstellung bezeichnet γ die Dichte, μ das Moleculargewicht, α das Molecularvolumen (α_1 und α_2 beziehungsweise für nA_1 und mA_2).

Man erkennt, dass, wo eine auffällige Vergrösserung des Volumens bei der Verbindung eintritt, wie bei AgJ, HgJ_2, PbJ_2 die Summe der Atommagnetismen noch hinter dem direct gefundenen Werthe des Diamagnetismus zurückbleibt. Wismuthtrijodid folgt dieser Regel nicht; allerdings lässt sich nicht erweisen, ob das Resultat für diese Substanz nicht durch Verunreinigungen beeinflusst wurde.

---

[1] Diese Sitzungsber., 108, II. a, S. 184.

Tabelle 1.

Substanz	$k \cdot 10^6$	γ	μ	α	Componenten		α_1	α_2	$nk_1 \cdot 10^6$	$mk_2 \cdot 10^6$	$k' \cdot 10^6$	$\alpha_1+\alpha_2$
					nA_1	mA_2						
Cu_2S	—0·023	5·58	159·3	28·5	S	2 Cu	15·7	14·2	—0·011	—0·012	—0·023	29·9
AgBr	—0·049	6·33	187·5	29·6	Ag	Br	10·2	26·9	—0·016	—0·033	—0·049	37·1
AgJ	—0·068	5·62	234·8	41·8	Ag	J	10·2	25·6	—0·016	—0·040	—0·056	35·8
$CdBr_2$ ...	—0·082	4·79	271·9	56·8	Cd	2 Br	12·9	53·8	—0·015	—0·066	—0·081	66·7
CdJ_2	—0·090	5·98	365·7	61·2	Cd	2 J	12·9	51·2	—0·015	—0·080	—0·095	64·1
$HgBr_2$ ...	—0·088	5·74	360·2	62·8	Hg	2 Br	14·1	53·8	—0·030	—0·066	—0·096	67·9
HgJ_2	—0·116	6·26	454	72·3	Hg	2 J	14·1	51·2	—0·030	—0·080	—0·110	65·3
$PbBr_2$....	—0·095	6·57	436·8	66·5	Pb	2 Br	18·1	53·8	—0·025	—0·066	—0·091	71·9
PbJ_2....	—0·118	6·16	460·6	74·8	Pb	2 J	18·1	51·2	—0·025	—0·080	—0·105	69·3
BiJ_3	—0·230	5·82	589·1	101·2	Bi	3 J	21·1	76·8	—0·203	0·120	—0·323	97·9

In den Fällen hingegen, in denen die Summe der Atomvolumina grösser ist als das thatsächliche Volumen der Verbindung, wird die Additivität ziemlich gut erfüllt.

2. Die Halogenverbindungen zeigen ganz bestimmte Regelmässigkeiten, indem, wie aus der Tabelle 2 ersichtlich, das k für Verbindungen desselben Metalles mit steigendem Atomgewichte wächst.

Es erscheint mir beachtenswerth, dass sich in sämmtlichen Fällen in besserer (Na, K, Ba, Ag, Pb) oder roherer Annäherung die k der Fluoride, Chloride, Bromide und Jodide verhalten wie

$$2 : 3 : 4 : 5.$$

Auch für gleiche Halogenverbindung verschiedener Metalle lassen sich Gesetzmässigkeiten erkennen. So ergibt

	LiCl	NaCl	KCl	RbCl	CsCl
$-k \cdot 10^6$	0·020	0·024	0·035	0·037	0·047

Mit steigendem Atomgewicht des Alkalimetalles steigt auch hier die Magnetisirungszahl.

Es ist fraglich, ob in diesem Falle gleichfalls eine einfache Zahlenbeziehung existirt, doch möchte ich darauf hinweisen, dass für die Relation 2 : 3 : 4 : 5 : 6 die Reihe

0·016 0·024 0·032 0·040 0·048

entstünde. Der zu grosse Werth bei LiCl und KCl liesse sich eventuell dadurch erklären, dass die Substanzen nicht ganz wasserfrei gewesen sein mögen.

Regelmässiges Ansteigen des k lässt sich auch sonst, z. B. in der paramagnetischen Gruppe der seltenen Erden zeigen.

	$LaCl_3$	$CeCl_3$	$PrCl_3$
$+k \cdot 10^6$	1·07	1·19	3·36

3. Mit Rücksicht auf die nahezu erfüllte Additivität lassen sich in erster Annäherung Schlüsse für den Atommagnetismus von Fl und Cl, dann Li, Na, K, Rb, Cs, ferners Ca, Sr, Ba und auch In, für welche Elemente keine directen Angaben vorliegen, ziehen.

Tabelle 2.

Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$	Verbindung	$-k.10^6$
$NaFl$	0·017	KFl	0·021	$CaFl_2$	0·023	$SrFl_2$	0·033	$BaFl_2$	0·022
$NaCl$	0·024	KCl	0·035	$CaCl_2$	0·043	$SrCl_2$	0·070	$BaCl_2$	0·066
$NaBr$	0·038	KBr	0·042	—	—	$SrBr_2$	0·078	$BaBr_2$	0·091
NaJ	0·047	KJ	0·052	—	—	SrJ_2	0·118	BaJ_2	0·103
—	—	—	—	—	—	—	—	$PbFl_2$	0·046
$AgCl$	0·040	$CdCl_2$	0·046	$SnCl_2$	0·055	$HgCl_2$	0·040 (?)	$PbCl_2$	0·068
$AgBr$	0·049	$CdBr_2$	0·082	—	—	$HgBr_2$	0·088	$PbBr_2$	0·095
AgJ	0·068	CdJ_2	0·090	SnJ_2	0·040 (?)	HgJ_2	0·116	PbJ_2	0·118

So berechnet sich das $k \cdot 10^6$ für Chlor aus

AgCl ....zu	—0·023
$CdCl_2$.........	—0·016
$HgCl_2$	—0·005
HgCl	—0·013
$AuCl_3$	—0·024
$PbCl_2$.........	—0·021

Die Werthe aus den Quecksilberverbindungen dürften zu gering sein, worauf auch die vorerwähnte Zahlenbeziehung deutet.

In erster Annäherung genügt demnach der Werth —0·02.

Ähnlich erhält man für Fluor in erster Annäherung aus dem Bleifluorid $k \cdot 10^6 = -0{\cdot}01$.

Berechnet man unter Zugrundelegung dieser Zahlen und der für Brom (—0·033), Jod (—0·040) und Schwefel (—0·011) direct gefundenen Werthe nunmehr weiter die Näherungswerthe der oben angeführten Metalle, so ergibt sich aus der Verbindung mit

	Fl	Cl	Br	J	S	Mittel für $-k \cdot 10^6$
Li.	—	sehr schwach	—	—	—	sehr schwach
Na	0·007	0·004	0·005	0·007	—	0·006
K	0·011	0·015	0·009	0·012	-	0·01
Rb	—	0·017	—	—	—	0·02
Cs	—	0·027	—	—	—	0·03
Ca	0·003	0·003	—	—	—	0·003
Sr.......	0·013	0·030	0·012	0·038	—	0·02
Ba	0·002	0·026	0·010	0·023	0·026	0·02
In... ...	—	0·016	—	-	0·009	0·01

4. In der beiliegenden Tafel sind die Magnetisirungszahlen der Oxyde, und zwar immer auf ein Atom des Metalles reducirt, eingetragen und mit den Atommagnetismen der Elemente zusammengestellt.[1]

[1] Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, dass in vielen Lehrbüchern der Chemie, wie denjenigen von Dammer, Kraft u. A. die Kobaltoxyde immer ausdrücklich als unmagnetisch bezeichnet werden, wozu gar keine Veranlassung vorliegt.

›r Elemente.

›·01		
›·02		
›·006	Zn —0·010 ZnO —0·021	Ga —
›·016	Cd —0·015 CdO —0·031	In *—0·01*
›·031	Hg —0·030 HgO —0·042	Tl —0·093 $^1/_2Tl_2O_3$ +0·012 (?)

[3] Die durch den Druck gekennzeichneten We

Oxydation scheint ganz allgemein das k des Elementes herunterzudrücken, selbst soweit, dass paramagnetische Metalle diamagnetische Oxyde liefern können, wie dies schon oben erwähnt wurde. Die negativen Susceptibilitätscoëfficienten von P, Zn, Cd, Hg, Pb werden noch stärker negativ, trotzdem die positive Natur des Sauerstoffes feststeht.

Ein unmittelbarer Rückschluss lässt sich also aus den Oxyden auf die Elemente nicht ziehen, und es ist daher z. B. die Annahme,[1] dass Scandium diamagnetisch sei, weil Sc_2O_3 einen negativen Werth ergab, nicht berechtigt gewesen.

Hingegen zeigen die Oxyde untereinander deutliche Beziehungen.

Je mehr Einheiten Sauerstoff auf eine Einheit des Metalles kommen, desto stärker wird der Werth des k vermindert. Bezeichnet M das Metall, so nimmt demnach der Molecularmagnetismus in der Reihe

$$MO,\ {}^1/_3 M_3O_4,\ {}^1/_2 M_2O_3,\ MO_2 \ldots$$

von links nach rechts ab.

Besondere Regelmässigkeiten zeigen die Sesquioxyde insbesondere bei den seltenen Erden. Beachtet man, dass nach dem Gesagten der Susceptibilitätscoëfficient von $^1/_2 Ce_2O_3$ grösser sein muss als derjenige von CeO_2, so gibt die Folge der Oxyde von La, Ce, Pr, Nd, Sa und Gd eine regelmässig ansteigende Reihe.

Speciell lässt sich daraus schliessen, dass das Gadolinium sehr gut an die Stelle eines oder mehrerer Elemente der Triade unterhalb der Ru-, Rh-, Pd-Gruppe passt.

C. Einfluss des Krystallwassers.

Um den Einfluss des Krystallwassers auf das k zu studiren, habe ich die Magnetisirungszahlen einer Reihe von Salzen mit verschiedenem Gehalte an H_2O bestimmt.

In einem Liter sind $\frac{1000}{18} = 55 \cdot 56$ Gramm-Moleküle H_2O enthalten. Das $\varkappa . 10^6$ desselben ist für Zimmertemperatur

[1] L. c. S. 183.

$-0 \cdot 67$,[1] also die moleculare Magnetisirungszahl für Wasser $k.10^6 = -0 \cdot 012$ [C. G. S.].

Bezeichnet n die Zahl der Krystallwassermoleküle, so ist demnach $n.k_{H_2O}$ der magnetische Werth des Wassers in der Verbindung, wenn dasselbe sich im Salze so verhielte, als ob es frei wäre.

Die Tabelle 3 auf S. 889 ergibt die gewonnenen Resultate. k bedeutet den Susceptibilitätscoëfficienten des wasserhaltigen, k_1 denjenigen des wasserfreien Salzes. Δ ist die Differenz zwischen dem thatsächlich gefundenen Werthe k und dem berechneten $k_1 + nk_{H_2O}$, $\frac{\Delta}{n}$ diese Differenz für ein Molekül Wasser.

Wäre die Magnetisirungszahl der Substanzen eine rein additive Eigenschaft derselben, so müsste sich der Wasserwerth zu dem Molecularmagnetismus des wasserfreien Salzes einfach summiren. Es lässt sich aber ganz allgemein aus der Zusammenstellung in Tabelle 3 constatiren, dass das Krystallwasser den Diamagnetismus um weniger als den vollen Betrag, der dem freien Wasser zukäme, erhöht.

Es liegt daher der — auch anderweitig wohlbegründete — Schluss nahe, dass hier das Wasser nicht einfach eingeschlossen, sondern in thatsächlich chemischer Gebundenheit vorhanden sei.

Leider versagt die Genauigkeit der angewendeten Methode zur quantitativen Bestimmung der hier herrschenden Verhältnisse, doch scheint der Werth $\frac{\Delta}{n}$ wenigstens der Grössenordnung nach untereinander übereinstimmende Zahlen zu liefern.

Eine wesentlich andere Wirkung zeigt das Wasser, wenn es wirklich in eine Verbindung eintritt und Hydroxylgruppen bildet.

So ist z. B. für

CaO .... $k.10^6 = -0 \cdot 011$

CaO_2H_2 ...... $k.10^6 = -0 \cdot 030$; $\Delta = 0 \cdot 018$

[1] Diese Sitzungsber., 108, II.a, S. 271.

Tabelle 3.

Wasserhaltige Substanz	$-k.10^6$	Wasserfreie Substanz	$-k_1.10^6$	$-n.k_{H_2O}.10^6$	$(k_1+nk_{H_2O}).10^6$	$\frac{\Delta}{n}$
$LiSO_4+H_2O$	0·043	$LiSO_4$	0·039	0·012	0·051	0·008
$CaSO_4+H_2O$	0·062	$CaSO_4$	0·052	0·024	0·076	0·007
$BaCl_2+2H_2O$	0·078	$BaCl_2$	0·066	0·024	0·090	0·006
$BeSO_4+4H_2O$	0·071	$BeSO_4$	0·038	0·048	0·086	0·004
$MgCl_2+6H_2O$	0·092	$MgCl_2$	0·044	0·072	0·116	0·004
$CaCl_2+6H_2O$	0·094	$CaCl_2$	0·034	0·072	0·106	0·002
$MgSO_4+7H_2O$	0·089	$MgSO_4$	0·043	0·084	0·127	0·005
$Na_2CO_3+10H_2O$	0·133	Na_2CO_3	0·020	0·120	0·140	0·001
$CsSO_4+Al_2(SO_4)_3+24H_2O$	0·444	$CsSO_4+Al_2(SO_4)_3$	0·281	0·288	0·569	0·005

ZnO .... $k.10^6 =$ 0·021
ZnO_2H_2 .... $k.10^6 = -0·042$; $\Delta = -0·021$

TeO_2 ...... $k.10^6 = -0·018$
TeO_3H_2 .... $k.10^6 =$ 0·034; $\Delta = -0·016$

BaO .... $k.10^6 = -0·016$
BaO_2H_2 .... $k.10^6 = -0·042$; $\Delta = -0·026$

Dies besagt, dass in diesen Fällen die Differenz grösser zu sein scheint, als der Wirkung eines Wassermoleküles (—0·012) entspricht.

Die Erklärung ist vermuthlich darin gegeben, dass H in OH für ein Atom Wasserstoff stärker diamagnetisch ist als in H_2O und dass der Paramagnetismus von O im Oxyde durch die Bindung an H geschwächt wird.

D. Abhängigkeit des *k* von der Feldstärke.

Dass auch stark magnetische Lösungen sich von der Feldstärke unabhängig erweisen, ist bekannt, hingegen die Frage bezüglich fester Verbindungen noch eine offene.

Insbesondere hat Herr J. Königsberger für das Gebiet zwischen 1800 und 2200 [C. G. S.] an einer Reihe paramagnetischer Verbindungen eine solche Abhängigkeit erhalten.[1]

Ich habe daher eine grössere Anzahl von Bestimmungen bei Feldintensitäten im Intervalle von rund 6000 bis 10.000 [C. G. S.] gemacht und im Folgenden zusammengestellt, wobei hauptsächlich die stark paramagnetischen Substanzen herangezogen wurden, und im Anschlusse hieran die Resultate für metallisches Beryllium und Bor gegeben.

In den Tabellen bedeutet M^2 das Feldstärkenquadrat, p den direct abgelesenen, der Magnetisirungszahl proportionalen Zug in Grammen. Die Angabe für die grösste Feldstärke 10.000 [C. G. S.] ist aus Messungen mit einer Wismuthspirale erhalten und eine bloss approximative, die übrigen Werthe für M^2 wurden aus dem Verhältnisse der Stromstärken des den Elektromagneten magnetisirenden Stromes unter Zugrundelegung einer für die Mitte des Feldes bestimmten Magnetisirungscurve gefunden.

---

[1] J. Königsberger, Wied. Ann., 66, S. 734.

Substanz	$10^{-6}.M^2$	p	$100\frac{p}{M^2}$	Bemerkungen
Chromoxyd	100	1·408	1·4	Nicht remanent.
Cr_2O_3	80	1·12	1·4	
	60	0·82	1·3	
	38	0·53	1·4	
Manganoxyd	99	1·85	1·9	Nicht remanent.
MnO_2	80	1·51	1·9	
	60	1·12	1·9	
	38	0·73	1·9	
Manganchlorid	101	2·64	2·61	Enthielt Krystallwasser.
$MnCl_2$	80	2·08	2·60	Nicht remanent.
	60	1·55	2·59	
	38	1·02	2·61	
Eisensulfat	101	1·60	1·59	Nicht remanent.
$FeSO_4+7H_2O$	82	1·28	1·56	
	61	0·96	1·57	
	39	0·62	1·57	
Eisenoxyd	100	1·96	1·96	Aus besonders reinem Eisen durch längeres Glühen an der Luft erhalten, dunkelrothbraun.
Fe_2O_3	81	1·68	2·08	Remanent.
	61	1·45	2·38	
	38	1·20	3·16	
Eisenoxyd	100	4·42	4·4	Käufliches Sesquioxyd, rothbraun.
FeO_3	81	3·80	4·7	Remanent.
	61	3·21	5·3	
	38	2·52	6·6	
Kobaltsesquioxyd	100	2·17	2·17	Nicht remanent.
Co_2O_3	80	1·75	2·19	
	60	1·33	2·21	
	38	0·88	2·3	

Substanz	$10^{-6}.M^2$	P	$100\,\frac{P}{M^2}$	Bemerkungen
Kobaltsuperoxyd	101	6·70	6·7	Vielleicht vermischt mit anderen Oxydationsstufen
Co_3O_4	81	5·50	6·8	
	61	4·34	7·2	
	38	3·10	7·1	Nicht remanent.
Kobaltchlorid	100	1·43	1·43	Enthielt Krystallwasser.
$CoCl_2$	80	1·13	1·41	Nicht remanent.
	60	0·83	1·39	
	38	0·53	1·40	
Nickeloxydul	100	1·04	1·04	Enthalt wahrscheinlich noch andere Oxydationsstufen beigemengt.
NiO	80	0·82	1·03	
	60	0·61	1·01	
	38	0·40	1·01	Nicht remanent.
Nickeloxyd	100	0·763	0·76	Wie oben.
Ni_2O_3	80	0·575	0·72	Nicht remanent.
	60	0·430	0·71	
	38	0·291	0·76	
Ceroamonnitrat	100	0·130	0·13	Nicht remanent.
$Ce(NO_3)_3 + 2(NH_4)NO_3$	80	0·102	0·13	
	60	0·076	0·13	
	38	0·050	0·13	
Praseodymoxyd	100	0·512	0·51	Schwarzes Pulver.
Pr_4O_7	80	0·392	0·49	Nicht remanent.
	60	0·298	0·50	
	38	0·195	0·5[illegible]	
Neodymoxyd	100	0·291	0·29	Enthalt nach der Angabe des Herrn B. Brauner noch etwa 3% von Pr_2O_3.
Nd_2O_3	79	0·217	0·28	Weisses Pulver.
	58	0·167	0·29	Nicht remanent.
	38	0·111	0·29	

Substanz	$10^{-6}.M^2$	p	$100\frac{p}{M^2}$	Bemerkungen
Neodymamonnitrat	101	0·313	0·31	Rosa Pulver.
$Nd(NO_3)_3+2(NH_4)NO_3$	82	0·244	0·30	Nicht remanent.
	61	0·183	0·30	
	38	0·122	0·3	
Erbiumoxyd	100	8·64	8·6	Besonders reines Präparat von P. T. Cleve.
Er_2O_3	80	6·82	8·7	
	60	5·17	8·6	Rosa Pulver.
	38	3·35	8·8	Nicht remanent
Erbiumoxyd	100	0·132	0·13	Altes Präparat, Gemisch verwandter Erden. Gelbbraunes Pulver.
Er_2O_3	80	0·102	0·13	
	60	0·077	0·13	
	38	0·052	0·14	Nicht remanent.
Erbiumnitrat	100	2·23	2·2	Aus dem Oxyd von H. P. T. Cleve.
$Er(NO_3)_3+5H_2O$	80	1·78	2·2	
	60	1·34	2·2	Rosa Krystalle.
	36	0·78	2·2	Nicht remanent.
Yttriumoxyd	101	0·175	0·17	Weisses Pulver von Herrn B. Brauner
Y_2O_3	81	0·136	0·17	
	61	0·101	0·17	Nicht remanent.
	38	0·065	0·17	
Ytterbiumoxyd	99	2·66	2·6	Weisses Pulver, stammt von H. L. F. Nilson.
Yb_2O_3	86	2·17	2·5	
	72	1·88	2·6	Nicht remanent.
	53	1·33	2·5	
	38	0·98	2·6	
Ytterbiumnitrat	100	0·204	0·20	Farblose, sehr hygroskopische Kryställchen aus dem vorstehenden Yb_2O_3.
$Yb(NO_3)_3$ (?)	80	0·156	0·19	
	60	0·114	0·19	
	36	0·068	0·18	Nicht remanent.

Substanz	$10^{-6}.M^2$	r	$100\frac{r}{M^2}$	Bemerkungen
Gadoliniumoxyd	100	2·65	2·7	Gelbes Pulver, stammt von H. Marignac.
Gd_2O_3	82	2·11	2·7	
	62	1·59	2·6	Nicht remanent.
	38	0·94	2·5	
Gadoliniumnitrat	100	0·422	0·42	Aus dem vorhergehenden gewonnen. Weisse nadelförmige Kryställchen.
$Gd(NO_3)_3$ (?)	80	0·330	0·41	
	60	0·249	0·42	
	38	0·161	0·42	Nicht remanent.
Samariumnitrat	101	0·433	0·43	Aus dem Sa_2O_3, das von Herrn P. T. Cleve stammte.
$Sa(NO_3)_3$ (?)	81	0·338	0·42	
	60	0·250	0·42	Weisse Kryställchen mit gelblichem Stich.
	38	0·163	0·43	Nicht remanent.
Beryllium	100	1·021	1·02	Metallisches graues Pulver von Merck.
Be	72	0·817	1·13	
	38	0·577	1·52	Nicht merklich remanent.
Bor	100	0·067	0·067	Von H. Moissan, Paris. Amorphes dunkelbraunes Pulver.
B	71	0·053	0·074	
	38	0·039	0·103	Nicht merklich remanent.

Die Magnetisirungszahl erweist sich sonach bei den angeführten sehr stark magnetischen Verbindungen im Allgemeinen als von der Feldstärke im Bereiche von rund 6000 bis 10.000 [C. G. S.] völlig unabhängig.

Die einzige Ausnahme bildet Eisenoxyd (Fe_2O_3), das eine entschiedene Abnahme von *k* mit wachsender Feldstärke anzeigt. Bei den Kobaltoxyden scheint ebenfalls eine Andeutung gleichen Ganges vorzuliegen, doch fallen hiebei die Werthe zu nahe den Fehlergrenzen, als dass sich ein bestimmter Schluss ziehen liesse.

Das Eisenoxyd zeigte sich auch etwas remanent magnetisch, während alle übrigen Verbindungen auch nicht die geringste Verschiedenheit vor und nach der Magnetisirung mit der Wage erkennen liessen.

Im Gegensatze hiezu macht sich deutliche Abnahme des *k* bei den Elementen Beryllium und Bor bemerkbar. Freilich lässt sich hier nicht erweisen, wie stark dieselben durch Beimischungen verunreinigt waren, doch scheint die Änderung mit der Intensität des Feldes so gross zu sein, dass sie wohl den Elementen selbst zukommen dürfte.

E. Magnetisirungszahl und Atomvolumen.

Es wurde bereits vielfach vermuthet, dass eine Abhängigkeit der Susceptibilität vom Atomgewichte der Elemente existire, so insbesondere von L. Meyer und Th. Carnelley,[1] und speciell auf die Möglichkeit eines Zusammenhanges mit dem Atomvolumen hat neuerdings Herr J. Königsberger[2] hingewiesen.

Das nunmehr vorliegende Materiale über das magnetische Wesen der Elemente ermöglicht es, bereits genauere Beziehungen aufzustellen.

In der beigegebenen Tafel habe ich die Curve der Atomvolumina aufgezeichnet, und zwar bezeichnen die punktirten

---

[1] Vergl. Lothar Meyer, Die Atome und ihre Eigenschaften. 6. Aufl., S. 151.

[2] Wied. Ann., 66, S. 731.

Theile diejenigen Gebiete, für die nähere Anhaltspunkte fehlen. L. Meyer lässt hiebei die aufsteigende Spitze bei dem Atomgewicht von circa 175 weg, doch sprechen viele periodischen Eigenschaften (insbesondere auch die Linienzahlen in den Spectren der Elemente), sowie die kürzlich von mir vorgenommene Bestimmung des Atomvolumens des Erbium,[1] welche allerdings in Folge sehr starker Verunreinigung des Materiales ziemlich unsicher ist, entschieden dafür, dass eine solche Unterabtheilung im Gebiete der seltenen Erden zu machen sei.

Die + und − Zeichen geben den Para-, beziehungsweise Diamagnetismus an, die Pfeile das Anwachsen der betreffenden Eigenschaft.

Es fällt sofort auf, dass die stark magnetischen Elemente stets und nur in den Minimis und den diesen vorangehenden Theilen der Curve Platz finden. Eine bemerkenswerthe Ausnahme bildet bloss der Sauerstoff, der sich aber, wie aus den früher mitgetheilten Thatsachen hervorgeht, in den Verbindungen geradeso verhält, als wäre er ein diamagnetischer Körper.

Die Stellen grossen Atomvolumens entsprechen diamagnetischem Verhalten. Die Maxima beider magnetischen Qualitäten scheinen aber gegenüber den Extremen der Atomvolumencurve ein wenig nach links verschoben zu sein.

Bei den Atomgewichten von 75, 118, 207 zeigen sich Unregelmässigkeiten (secundäre Minima) der Curve. Die an diesen Stellen befindlichen Elemente sind entweder auffallend schwach diamagnetisch oder vielleicht ganz schwach paramagnetisch (Sn).

In der Gruppe der seltenen Erden wächst der Paramagnetismus allerdings regelmässig bis zum Gadolinium, aber auch noch darüber hinaus im Erbium und Ytterbium ist gleichfalls stark magnetisch. Es ist wahrscheinlich, dass diese letzten Substanzen wechselseitig stark vermengt oder überhaupt noch nicht einheitlich sind, und es können sehr wohl trotz der erhaltenen Resultate die Elemente mit dem Atomgewichte zwischen 160 und 180 thatsächlich diamagnetisch sein.

[1] Diese Sitzungsber., 8. Juni 1899.

Auch für das Yttrium[1] liegt die Annahme nahe, dass die untersuchten Substanzen keine einheitlichen waren.

Bezüglich der Gesammtgruppen der paramagnetischen Elemente scheint es, als wäre die 1., 3., 5., 7. (?) Abtheilung stärker magnetisch als die 2., 4., 6.

Mit der allgemeinen Abhängigkeit vom Atomvolumen steht es in Einklang, dass der Magnetismus mit sinkender Temperatur (Verkleinerung des Atomvolumens) zunimmt, sowie dass in Verbindungen, wo das Volumen zunimmt, die Susceptibilität fällt.

Vor Kurzem[2] haben die Herren F. Exner und E. Haschek mitgetheilt, dass aus ihren Messungen der Funkenspectra der Elemente eine deutliche Abhängigkeit der Linienzahl vom Atomgewicht erkennbar ist. Die gewonnene Curve, welche auch einen Zusammenhang mit dem Atomvolumen annehmen lässt, hat überall dort Maxima, wo das Atomvolumen gering, Minima, wo das letztere gross ist. Es scheint mir besonders beachtenswerth, dass auch hier die Extreme etwas nach links verschoben sind, das heisst die Maxima und Minima der Linienzahlen gerade mit denjenigen des Magnetismus zusammenfallen.

Wie aus jeder periodischen Eigenschaft, so lassen sich auch aus dem magnetischen Verhalten Wahrscheinlichkeitsrückschlüsse auf die Atomgewichte der Elemente machen.

So lässt sich schliessen, dass entsprechend den neueren Bestimmungen das Atomgewicht von Neodym[3] grösser sei als dasjenige von Praseodym, dass hingegen, entgegen den neueren Angaben, dasselbe von Nickel grösser sein sollte, als dasjenige von Kobalt.[4]

Gadolinium passt unter die Triade Ru, Rh, Pd.

Polonium und Radium erwiesen sich in den Verbindungen als magnetisch. Wenn diese Ergebnisse nicht auf Verunreini-

---

[1] Vergl. diese Sitzungsber., 8. Juni 1899.

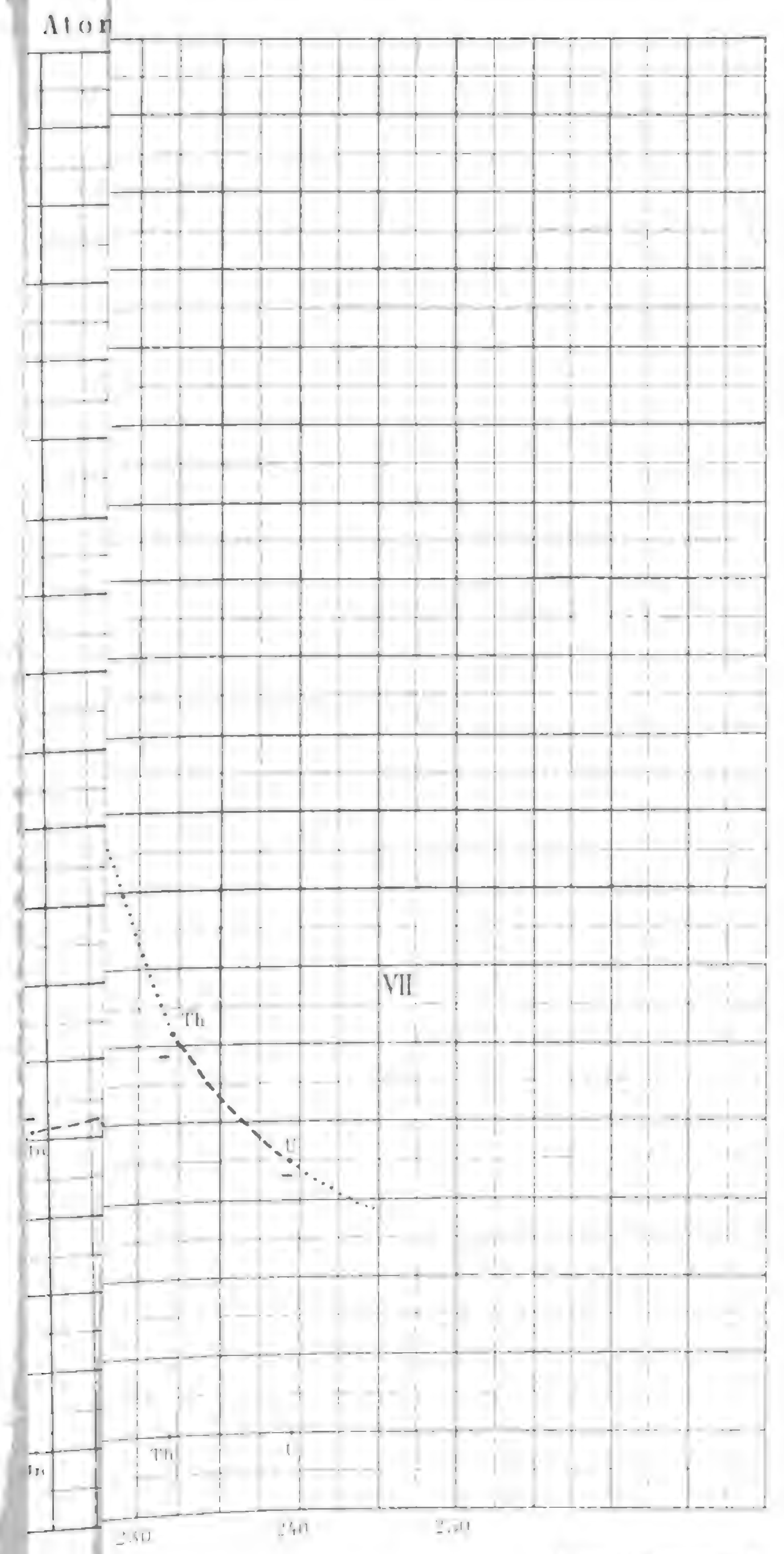
[2] F. Exner und E. Haschek, XVI. Mittheilung, diese Sitzungsber., Juni 1899.

[3] Vergl. C. Jones, Wied. Beibl., 23, S. 205.

[4] Vergl. hiezu die Einwände gegen diese Bestimmungen, welche C. Winkler, Zeitschr. für anorg. Chemie, 17, S. 236 macht.

gungen mit einem bekannten paramagnetischen Element zurückzuführen sind, so wäre zu vermuthen, dass diese beiden in einem Minimum des Atomvolumens Platz zu finden hätten, das heisst ein Atomgewicht zwischen 180 und 190 oder von 230 aufwärts haben könnten.

Weiteren Einblick in das magnetische Wesen der Elemente versprechen die im Zuge befindlichen Untersuchungen an Lösungen und Amalgamen.


VII
Th
U
Th
U
200
240
280

Zur Theorie unipolarer Gasentladungen

von

Dr. **Egon** Ritter v. **Schweidler.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1899.)

Anlässlich meiner Untersuchungen über photoelektrische Ströme,[1] insbesondere angeregt durch die Abhandlung Herrn Buisson's,[2] habe ich versucht, die quantitativen Verhältnisse dieser Erscheinungen bezüglich Stromstärke, elektromotorischer Kraft, Distanz der Elektroden und dergleichen theoretisch abzuleiten. Obwohl nun die Ergebnisse meiner Rechnung mit den Resultaten der Beobachtung theilweise nicht übereinstimmen, will ich doch einen kurzen Überblick über den Gang derselben geben, da sie bis zu einem gewissen Grade eine, wenn auch nur schematische Darstellung unipolarer Entladungsvorgänge gibt und eventuell durch Einführung geeigneter Hilfsannahmen den experimentellen Resultaten besser angepasst werden könnte.

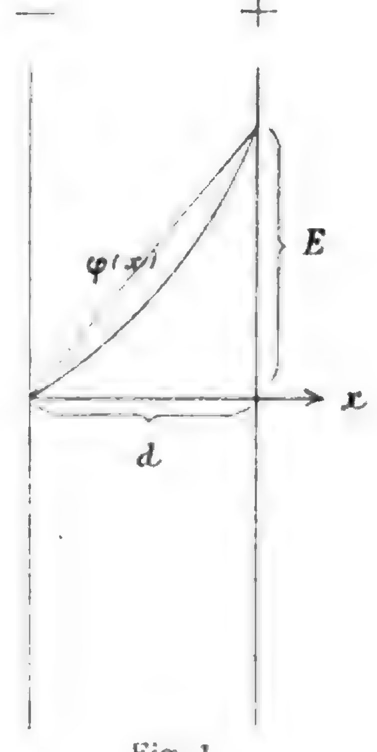


Fig. 1.

Es sei ein ebener Condensator gegeben, bestehend aus zwei unendlich ausgedehnten parallelen Platten in der Distanz d, die beziehungsweise constant auf den Potentialen 0 und $+E$

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 107 und 108.

[2] Compt. Rend., Bd. 127, Nr. 4.

erhalten werden; zwischen diesen Platten werde ein Convectionsstrom von räumlich und zeitlich constanter Stromdichte erzeugt, und zwar dadurch, dass negativ geladene Theilchen von der Kathode zur Anode wandern, während bewegliche positive Theilchen überhaupt nicht vorhanden sind.

Von diesen negativen Theilchen, die der Kürze halber »Ionen« genannt werden sollen, werde vorausgesetzt, dass sie alle gleichbeschaffen sind und bei ihrer Bewegung einen derartigen Widerstand erfahren, dass ihre Geschwindigkeit an jeder Stelle der eben hier herrschenden Feldintensität proportional sei. Im Übrigen bleibt der physikalische Charakter des Entladungsvorganges ganz unbestimmt; die »Ionen« mögen von der Kathode losgerissene Theilchen, an derselben sich ladende Molekeln oder durch Zerstörung einer Doppelschicht frei werdende Ionen (im engeren Sinne) sein.

Die Bedingungen für den stationären Zustand sind:

$$u = A\varphi'(x)$$
$$u\varphi''(x) = K.$$

Dabei bezeichnet x den Abstand eines Punktes von der Kathode; $\varphi(x)$ das Potential, welches eine noch unbekannte Function von x ist, da das ursprünglich homogene Feld durch die Ladungen der Ionen gestört wird; $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ die Ableitungen dieser Function; u die Geschwindigkeit der Theilchen in der positiven X-Richtung; $\frac{K}{4\pi}$ die Stromdichte des negativen Stromes in derselben Richtung, so dass A und K wesentlich positive Constanten sind.

Aus obigen Bedingungsgleichungen erhält man durch Integration:

$$\varphi(x) = \frac{Af_0^3}{3K}\left[\left(1+\frac{2K}{Af_0^2}x\right)^{3/2} - 1\right]$$
$$\varphi'(x) = f_0\left(1+\frac{2K}{Af_0^2}x\right)^{1/2}$$
$$\varphi''(x) = \frac{K}{Af_0}\left(1+\frac{2K}{Af_0^2}x\right)^{-1/2}$$
$$u = Af_0\left(1+\frac{2K}{Af_0^2}x\right)^{1/2}.$$

f_0 ist eine Integrationsconstante, die aus der Grenzbedingung:

$$x = d;\ \varphi(x) = E$$

bestimmbar ist und deren physikalische Bedeutung durch den Werth von $\varphi'(x)$ für $x = 0$, also den Potentialgradienten an der Kathode gegeben ist.

Um die Abhängigkeit der Grösse K von E oder d zu erhalten, bedarf man noch einer bestimmten physikalischen Voraussetzung. Da der Convectionsstrom von der Kathode seinen Ausgang nimmt, wird die Stromstärke primär durch die Feldintensität in der Nähe der Kathode bestimmt sein, so dass zu obigen Gleichungen noch eine von der Form:

$$K = F(f_0)$$

hinzutritt. Im Folgenden sind die beiden einfachen Voraussetzungen:

$$K = \alpha f_0^2 \text{ und } K = \beta f_0$$

eingeführt.

1. $K = \alpha f_0^2$.

Durch Elimination von f_0 ergibt sich:

$$K = \frac{9\alpha^3}{A^2} \cdot \frac{E^2}{\left[\left(1 + \frac{2\alpha d}{A}\right)^{3/2} - 1\right]}.$$

Die Stromstärke ist also bei constanter Elektrodendistanz d dem Quadrate der Potentialdifferenz proportional; bei constantem E nimmt die Stromstärke rascher ab, als die Distanz d zunimmt; endlich ist bei constanter mittlerer Feldintensität $\frac{E}{d}$:

$$K \text{ prop. } \frac{d^2}{\left[\left(1 + \frac{2\alpha d}{A}\right)^{3/2} - 1\right]},$$

d. h., die Stromstärke wächst mit wachsendem d.

2. $K = \beta f_0$.

Man erhält:

$$E = \frac{A}{3\beta^3} K^2 \left[\left(1 + \frac{2}{A\beta^2} \cdot \frac{d}{K}\right)^{3/2} - 1\right],$$

eine Gleichung, die sich bezüglich K nicht explicit auflösen lässt.

Setzt man $\frac{A\beta^2}{2d}K = \xi$, $\frac{A^3\alpha}{12d^2}E = \eta$, so erhält man die einfachere Gleichung:

$$\eta = \xi^2\left[\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{3/2} - 1\right].$$

Beistehende Figur gibt ein ungefähres Bild über den Verlauf dieser Function.

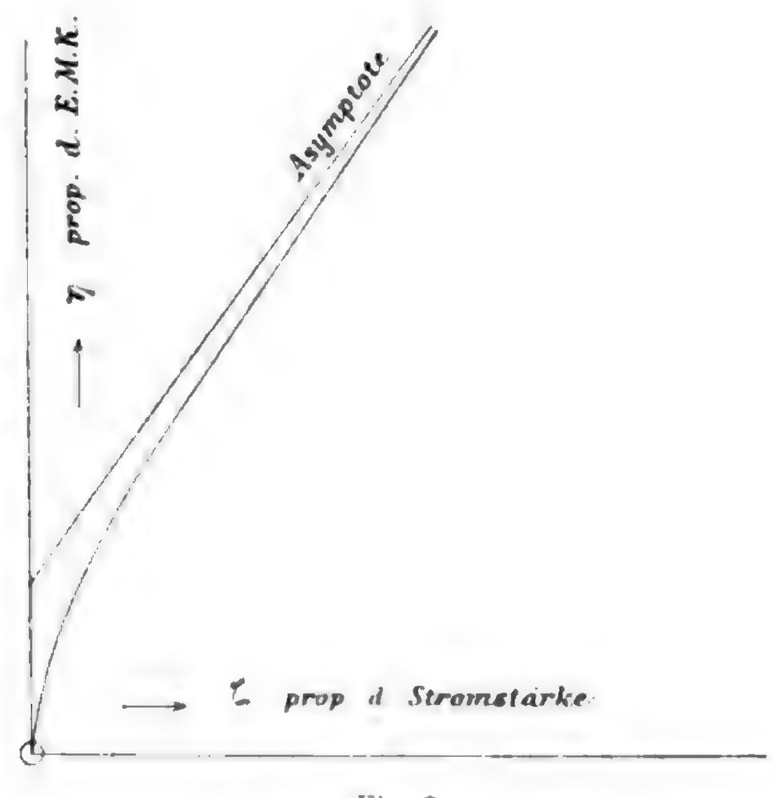


Fig. 2.

Die Stromstärke steigt bei wachsender Potentialdifferenz und sonst ungeänderten Verhältnissen vom Werthe o aus zuerst unendlich wenig, dann rascher als die Potentialdifferenz an, um endlich asymptotisch eine lineare Function derselben zu werden.

Die complicirte Abhängigkeit der Stromstärke von der Elektrodendistanz habe ich nicht weiter verfolgt.

Es mögen noch einige Bemerkungen über die physikalische Berechtigung der zugrunde gelegten Annahmen hier Platz finden. Durch Untersuchung der Potentialvertheilung kann ein directer experimenteller Nachweis blos dafür erbracht werden, dass entweder positive oder negative Jonen in einem bestimmten

Gebiete im Überschuss vorhanden sind; wo aber der Entladungsvorgang rein unipolaren Charakter hat, wie bei der lichtelektrischen Zerstreuung oder bei der Entladung glühender Körper, ist die Hypothese naheliegend, dass überhaupt nur Ionen einer Art vorhanden sind.

Die zweite Hauptvoraussetzung, dass die Geschwindigkeit der Ionen der Feldintensität proportional ist, lässt sich bis zu einem gewissen Grade ebenfalls durch gastheoretische Überlegungen rechtfertigen. Bezeichnet nämlich $\frac{e}{m}$ das Verhältniss der Ladung zur Masse eines Ions, F die Feldintensität, τ die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstössen einer Molekel, so wird die mittlere Geschwindigkeit, mit der sich das Ion in der Richtung der Kraftlinien bewegt, den Werth haben:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} F\tau.$$

Diese Betrachtungsweise wird solange annähernd giltig bleiben, als nicht dieser Werth von u den der mittleren Moleculargeschwindigkeit im betreffenden Gase wesentlich übersteigt, da in diesem Falle secundär eine Dissociation des Gases eintreten könnte.

Bezüglich der beiden speciellen Annahmen über die Beziehung von K und f_0 erscheint die erste Annahme: $K = \alpha f_0^2$ plausibel, wenn es sich um eine Zerstäubung der Kathode handelt; in diesem Falle ist nämlich einerseits die Zahl der beweglichen Ionen an der Kathodenoberfläche, anderseits die Geschwindigkeit derselben der Grösse f_0, die Stromstärke als Product beider f_0^2 proportional. In der That ist die Abhängigkeit der Stromstärke von Potentialdifferenz und Distanz der Elektroden bei der Entladung glühender Körper ungefähr dieselbe wie nach der Rechnung.[1]

Die zweite Annahme einer einfachen Proportionalität von K und f_0 erscheint anwendbar, wenn die frei werdenden Ionen einer zerstörten Doppelschichte die Entladung vermitteln. Bei

[1] Vergleiche Blondlot, Compt. Rend. 104, S. 283 (1887); Pringsheim, Wied. Ann. 55, S. 507 (1895).

den Phänomenen der lichtelektrischen Zerstreuung aber, wo diese Auffassung viele Wahrscheinlichkeit für sich hat, zeigt die Erfahrung eine ganz andere Form der Abhängigkeit von K und E, als die theoretische Betrachtung ergibt; es wächst nämlich die Stromstärke zunächst viel langsamer als die Potentialdifferenz, erst in der Nähe des Entladungspotentiales (für disruptive Entladung) rascher als diese. Es ist mir nicht gelungen, die beobachtete Form dieser Beziehung theoretisch zu begründen.

Die Entstehung der Scala

von

Dr. **Richard Wallaschek.**

(Mit 4 Tafeln, 1 Textfigur und einer Tabelle.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. April 1899.)

Die vorliegende Untersuchung beschränkt sich auf die Feststellung der Scala bei den Instrumenten jener Naturvölker die zu keinem feststehenden System fortgeschritten sind, das uns durch Überlieferung oder schriftliche Aufzeichnungen bekannt wäre. Es konnte somit von vorneherein die Prüfung der Instrumente der Chinesen, Japanesen, Hindus entfallen, da uns deren Systeme bekannt sind und ein deutlicheres Bild geben als die alten, zum Theile schadhaften Instrumente unserer ethnologischen Museen. Nur wo kein anderes Mittel zur Bestimmung der ältesten Scalen vorhanden war, wurden die Instrumente selbst zu Rathe gezogen, und untersucht, ob nicht übereinstimmende Tonfolgen auf verschiedenen Instrumenten derselben Gegend auf eine zu Grunde liegende systematische Absicht schliessen lassen.

Die Tonhöhe der Instrumente wurde theils mit Stimmgabeln (mit Laufgewichten), theils mit dem Appun'schen Tonmesser gemessen. Den dadurch gewonnenen Schwingungszahlen wurde das Notenbild beigegeben, das nach der Stimmung ($a = 440$) der Schwingungszahl am nächsten kommt. Abweichungen über 4 Schwingungen in der eingestrichenen Octave wurden durch ein Plus- oder Minuszeichen angedeutet. In einigen besonders angegebenen Fällen wurde die Normalstimmung ($a = 435$) zu Grunde gelegt, und zwar deshalb, weil bei gewissen Instrumenten Töne producirt werden, denen die Notenbilder der Normalstimmung genauer entsprechen als die der Stimmung mit $a = 440$, die eine beständige Correctur durch

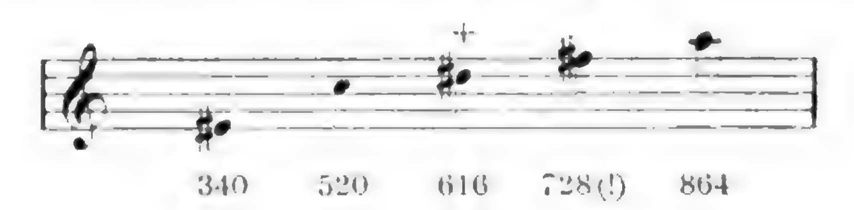
Plus- und Minuszeichen nothwendig gemacht hätte. Zum Vergleiche ist der Abhandlung eine Tafel mit Schwingungszahlen nach beiden Stimmungen beigegeben. Sie enthält auch die Schwingungszahlen der temperirten Stimmung, um die Differenz zu veranschaulichen, die wir in unserer europäischen Musik durch das Gehör zu ignoriren pflegen.

Central-Afrika.

49, 540. Holzflöte. $1^1/_2$ *cm* Durchmesser, 4 Löcher, die zwei oberen und zwei unteren im Abstande von 3 *cm*, die Löcherpaare selbst $6^1/_2$ *cm* von einander entfernt. Dumpfer, aber sehr deutlicher Ton. Sehr variabel. Äquatoriales Afrika *[W]*. Normalstimmung.



49, 539. Holzflöte wie oben. Das dritte Loch (vierter Ton) ist theilweise mit Wachs verstopft. Der Instrumentenmacher scheint experimentirt zu haben *[W]*. Normalstimmung.



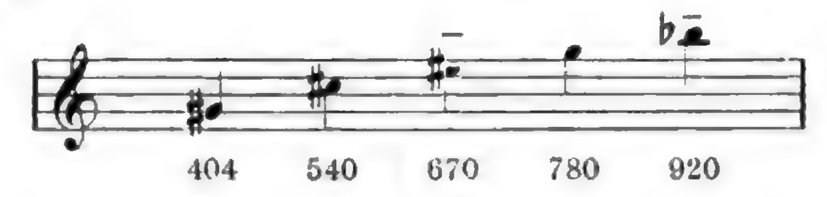
49, 423. Hölzerne Doppelflöte. Durch stärkeres Anblasen kommen die sämmtlichen Töne um eine Septime (sic!) höher heraus. Äquatoriales Afrika *[W]*.



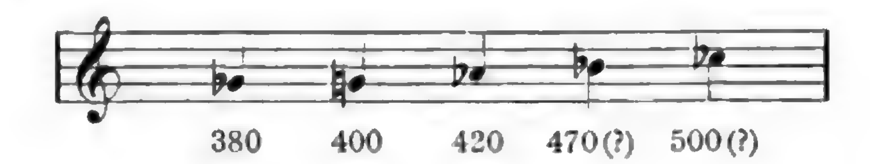
(Zu

Verh. Schwin	125/72	9/5	15/8	48/25	125/64	2
Normal-stimmung $a = 435$	$226\frac{9}{16}$	$234\frac{9}{10}$	$244\frac{11}{16}$	$250\frac{14}{25}$	$254\frac{113}{128}$	261
$a = 440$	$229\frac{1}{6}$	$237\frac{3}{5}$	$247\frac{1}{2}$	$253\frac{11}{25}$	$257\frac{13}{16}$	264
Normal-stimmung $a = 435$	$453\frac{1}{8}$	$469\frac{4}{5}$	$489\frac{3}{8}$	$501\frac{3}{25}$	$509\frac{49}{64}$	522
$a = 440$	$458\frac{1}{3}$	$475\frac{1}{5}$	495	$506\frac{22}{25}$	$515\frac{5}{8}$	528
Temperirt Normal-stimmung	460, 665		488, 07		517, 215	
Normal-stimmung $a = 435$	$906\frac{1}{4}$	$939\frac{3}{5}$	$978\frac{3}{4}$	$1002\frac{6}{25}$	$1019\frac{17}{32}$	1044
$a = 440$	$916\frac{2}{3}$	$950\frac{2}{5}$	990	$1013\frac{19}{25}$	$1031\frac{1}{4}$	1056
Temperirt Normal-stimmung						

49, 538. Holzflöte. Äquatoriales Afrika *[W]*. Normalstimmung.



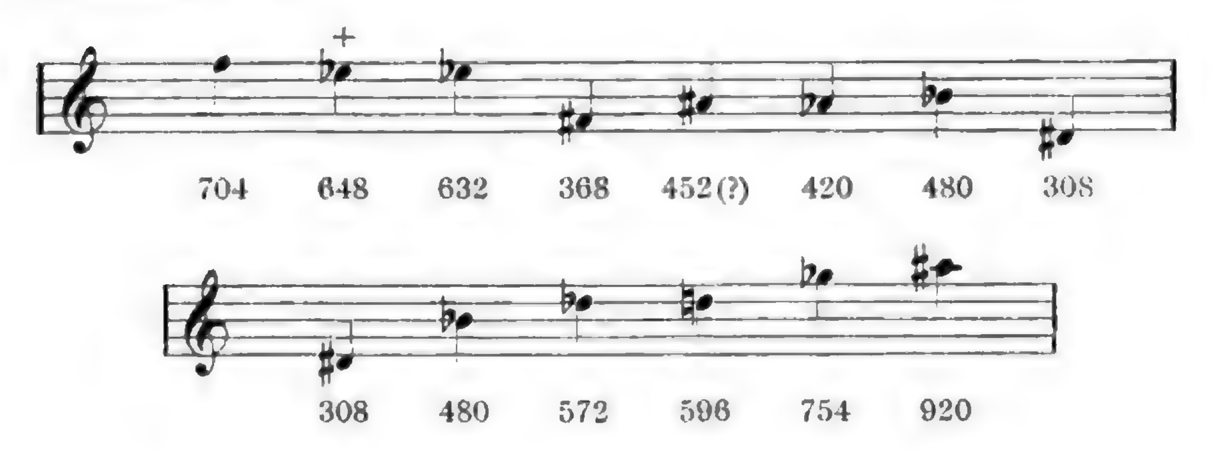
49, 562. Holzflöte. Äquatoriales Afrika *[W]*. Normalstimmung.



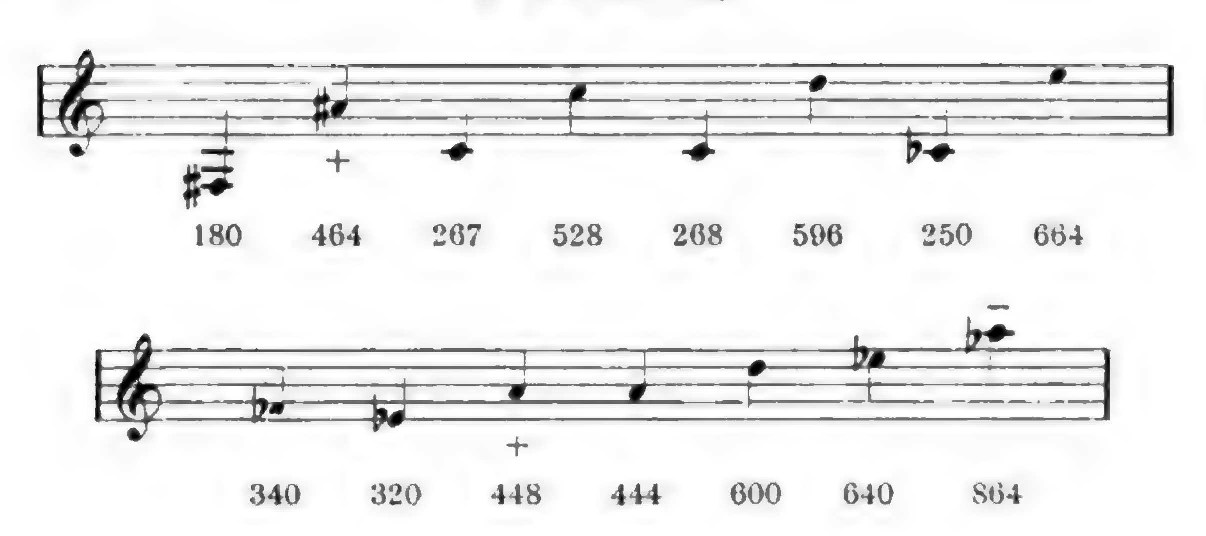
Panpfeife. Lomami-Fluss (West-Centralafrika). Dr. Wolf *[D]*.



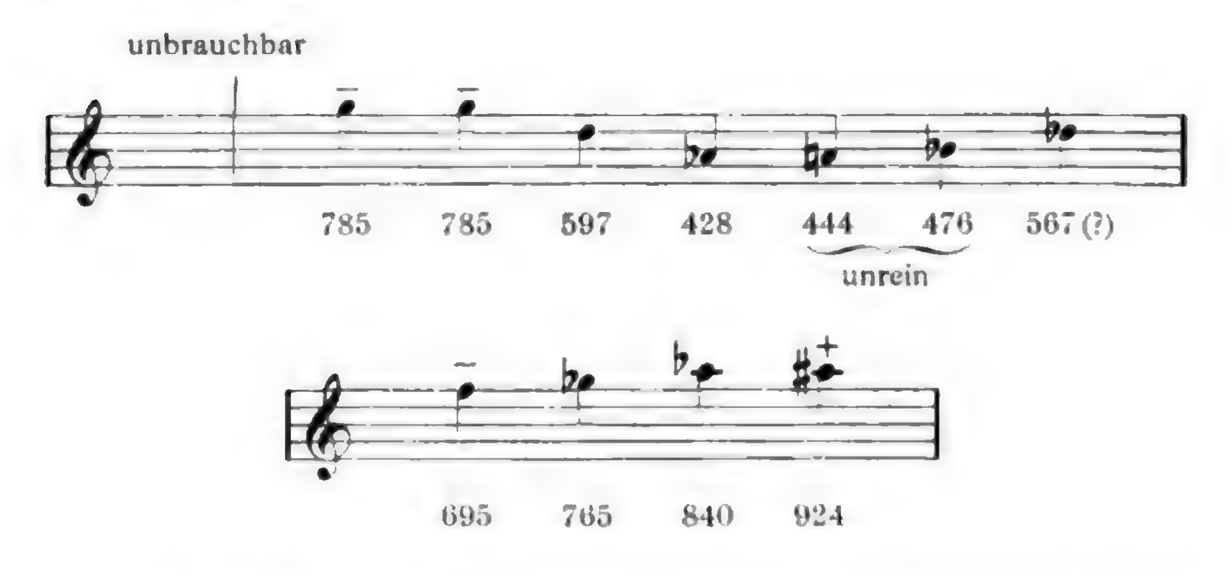
11, 374. Zither. Resonanzboden, Metallzungen. Im hohlen Innenraume sind auf einem querliegenden Metallstabe Metallperlen aufgezogen. Das ganze Instrument liegt auf einer hohlen, kugelförmigen, oben offenen Frucht auf. Marutse-Mabunda (Holub) *[W]*.



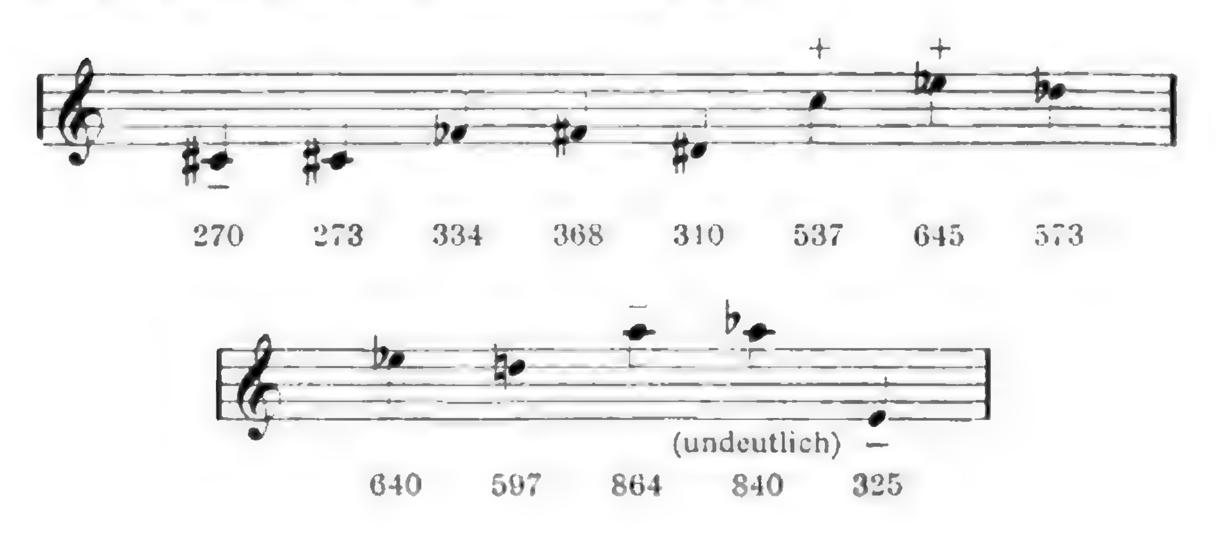
57, 690. Zither. Resonanzboden, auf dem am unteren Rande eine Metallplatte aufliegt, auf der Muschelplättchen durch farbige Perlen an einer Schnur befestigt sind. Metallzunge. Centralafrika *[W]*.



III, *E*, 2109. Zither. Einfaches Brett, zu beiden Seiten ½ bis 1 *cm* erhöht. Diese Erhöhungen laufen in je einen Menschenkopf aus, der aus den oberen Ecken des Brettes heraussieht. Zambesi *[B]*.



III, *F*, 498. Zither. Resonanzboden mit Resonanzöffnung 25 *cm* tief, 14 *cm* lang. Centralafrika *[B]*.

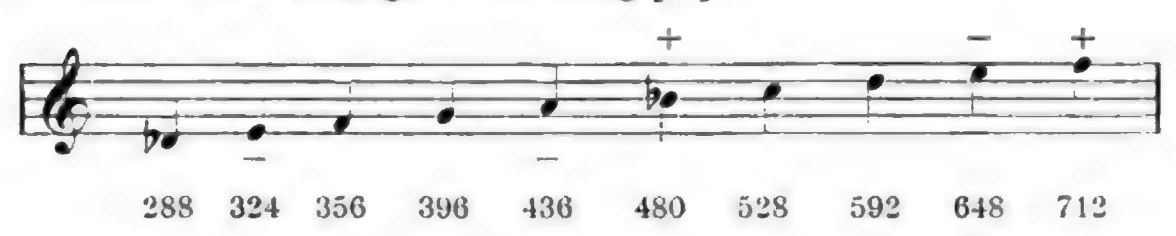


III, *E*, 2019. Zither. Resonanzboden mit inliegender Metallplatte und kleinen Steinchen, die auf Holzplättchen liegen *[B]*.

unbestimmbar

232 256 277 312 335 418 470

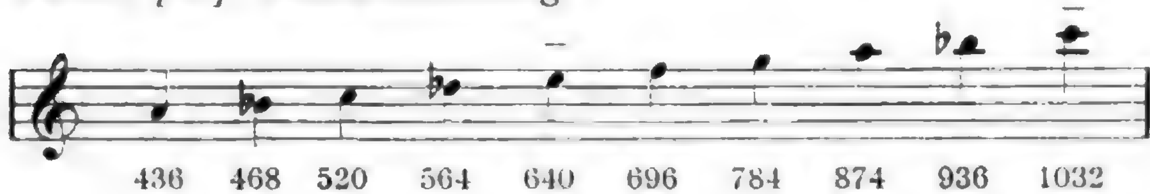
C, 357. Marimba. Kleineres Schossinstrument der Marutse-Mabunda. Geradlinige Anordnung *[H]*.



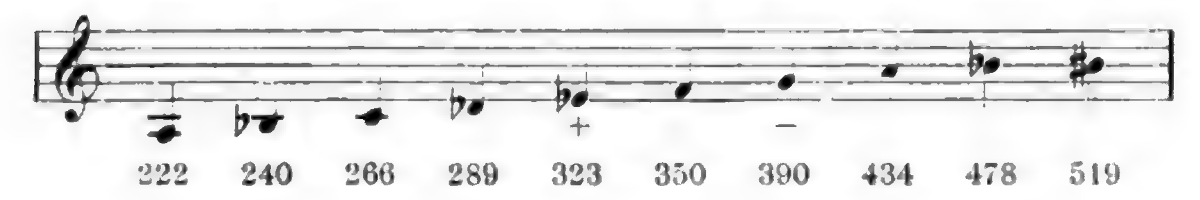
631. Marimba. Holzplatten ruhen auf Strohgeflecht über den Resonanzböden (Calabassen). Von den Bafans oder Fans. Äquatorial-Afrika *[H]*.



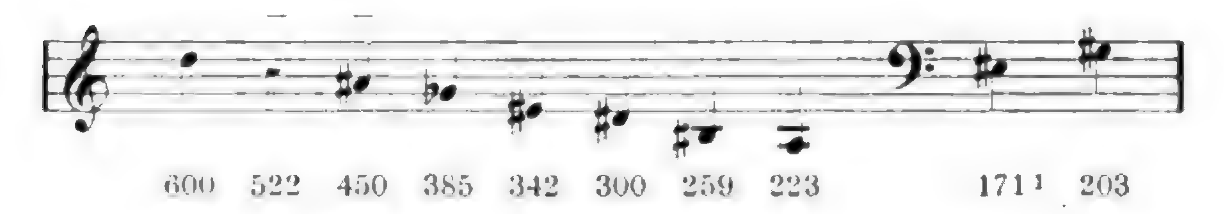
Marimba. Kleineres Schossinstrument von 67 *cm* Länge. Kleine Calabasse. Je zwei Platten durch Holzleisten getrennt. Kaffern *[W]*. Normalstimmung.



Marimba. Kleineres Schossinstrument von 78 *cm* Länge und geradliniger Anordnung der Platten, von denen je zwei durch Holzstäbchen geschieden sind. Kugelförmige Calabasse. Vom Loangwa (linker Nebenfluss des mittleren Zambesi) *[B]*.

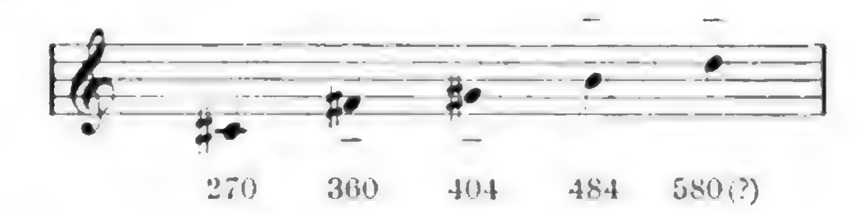


Marimba. Grösseres Instrument von 101 *cm* Länge. Geradlinige Anordnung der Calabasse (14). An beiden Seiten haben je zwei Eckplatten rechtwinklig gekrümmte Calabasse und schlechten, kaum messbaren Ton. Nur die mittleren 10 Platten sind der Tonhöhe nach bestimmt. Acht Platten ornamentirt. Central-Afrika *[B]*.

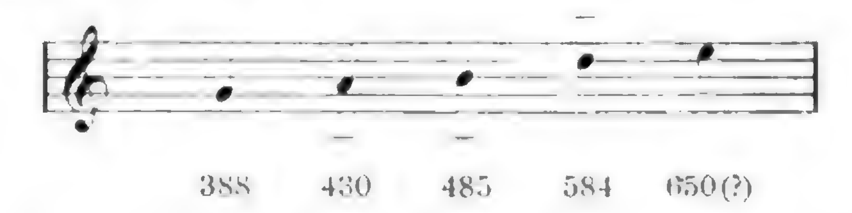


Ostafrika.

Rohrflöte, ornamentirt. Äquatoriales Ostafrika *[W]*. Normalstimmung.



60755. Holzflöte. Karague. Äquatoriales Central-Ostafrika *[W]*. Normalstimmung.



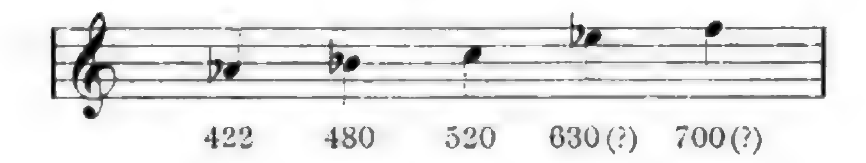
III, *E*, 2312. Panpfeife der Ussoga (am Austritt des Nils aus dem nördlichen Victoria-Nyanza) *[B]*.



III. *E*. 3906. Häuptlingsflöte. Auf dieselbe Art anzublasen, wie die brasilianischen Thierpfeifen. (Vergl S. 932) 67 *cm* lang.

[1] Klingt schlecht, merkwürdigerweise tiefer als der folgende Ton.

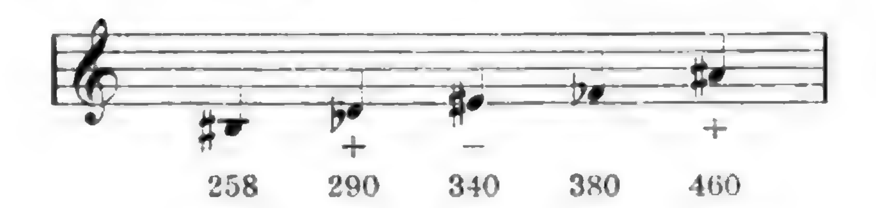
unten ein 30 *cm* langes Haarbüschel. Vor demselben ist das Rohr verdickt. Die ersten 31 *cm* vom Anblasepunkt aus sind mit gezackten Reihen weisser und blauer Perlen belegt. Dann folgen 4 Löcher, zwischen jedem ein Ring von kleinen Muscheln. Die unteren 10 *cm* der Flöte sind mit dicht anschliessenden Reihen lichtblauer, dunkelblauer und rosa Perlen belegt. Die ganze Flöte ist mit braunem Leder überzogen. Die Entfernung der beiden mittleren Löcher beträgt 7 *cm*, der beiden äusseren von den mittleren $8^1/_2$ *cm*, Die Tonreihe ist auch eine Octave höher anzublasen. Tonhöhe sehr variabel. Uganda *[B]*. Taf. I, Nr. 1; Mundstück Taf. III*b*, Nr. 3.



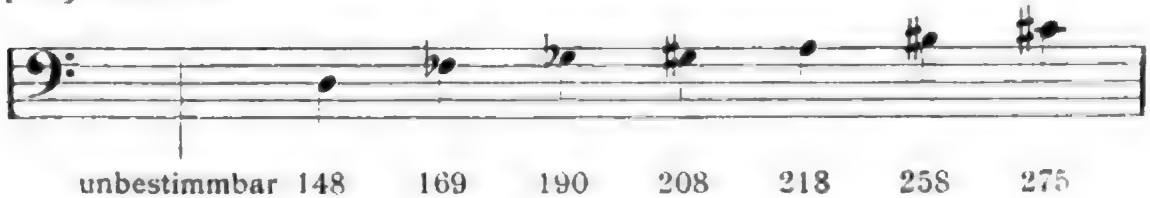
III, *E*, 3676. Häuptlingsflöte, Uganda. Ähnlich wie das vorige Exemplar. Oberer Perlengürtel von schwarzen und weissen Perlen, 24 *cm*, ohne Muschelschnüre zwischen den Löchern. Unterer Perlengürtel 8 *cm*.— 61 *cm* lang *[B]*.

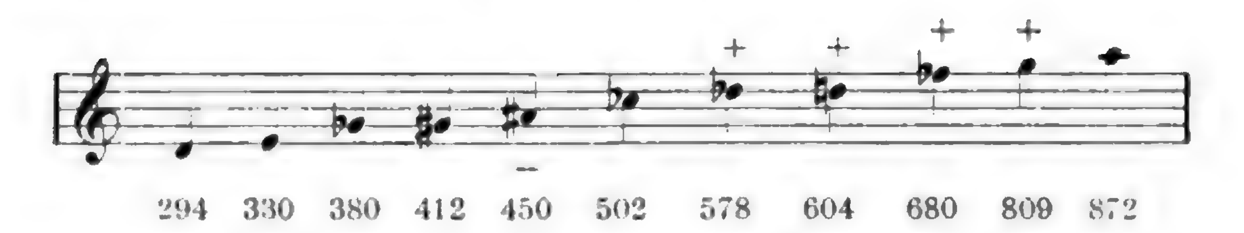


60, 830. Häuptlingsflöte, Uganda. Ohne Perlenschmuck, aber mit Lederüberzug *[W]*. Variable Tonhöhe.



Marimba, halbkreisförmige Anordnung, 100 *cm* Durchmesser, 19 Platten mit Kürbissen, wovon 4 fehlen, Ostafrika *[W]*. Taf. II.

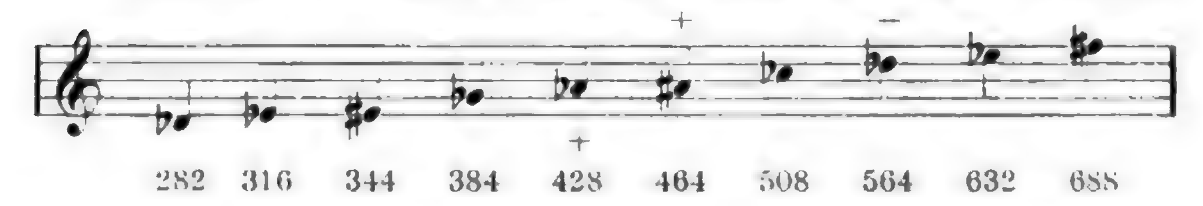




Marimba. Kleines Schossinstrument von 71 *cm* Breite. Längendurchmesser des grössten Calabass 11 *cm*. Geradlinige Anordnung. Je zwei Platten durch Holzstäbe getrennt. Ostafrika (Hans Mayer) *[L]*.



Marimba. Dasselbe wie oben, nur etwas tiefer gestimmt *[L]*.



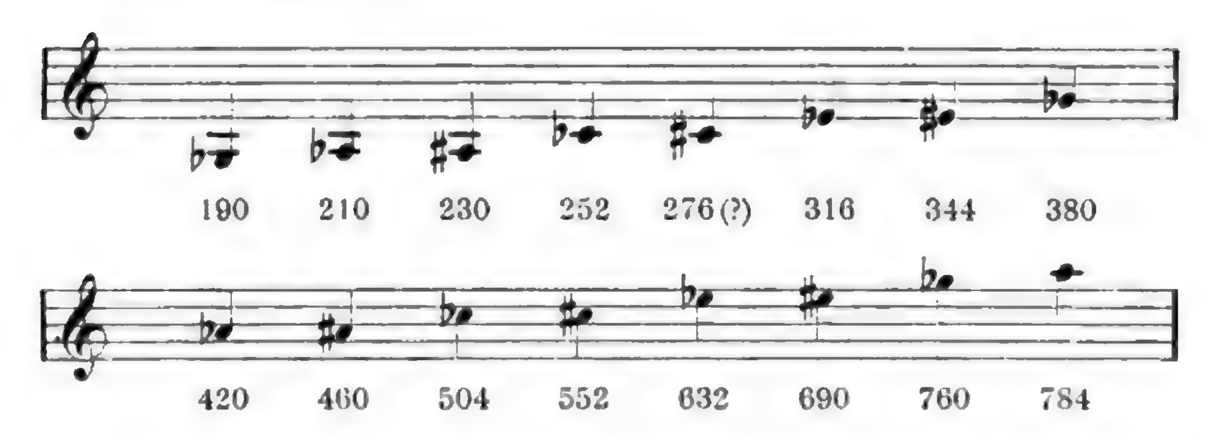
Westafrika.

Lunda und Angola, Loango, Camerun, Fernando Po.

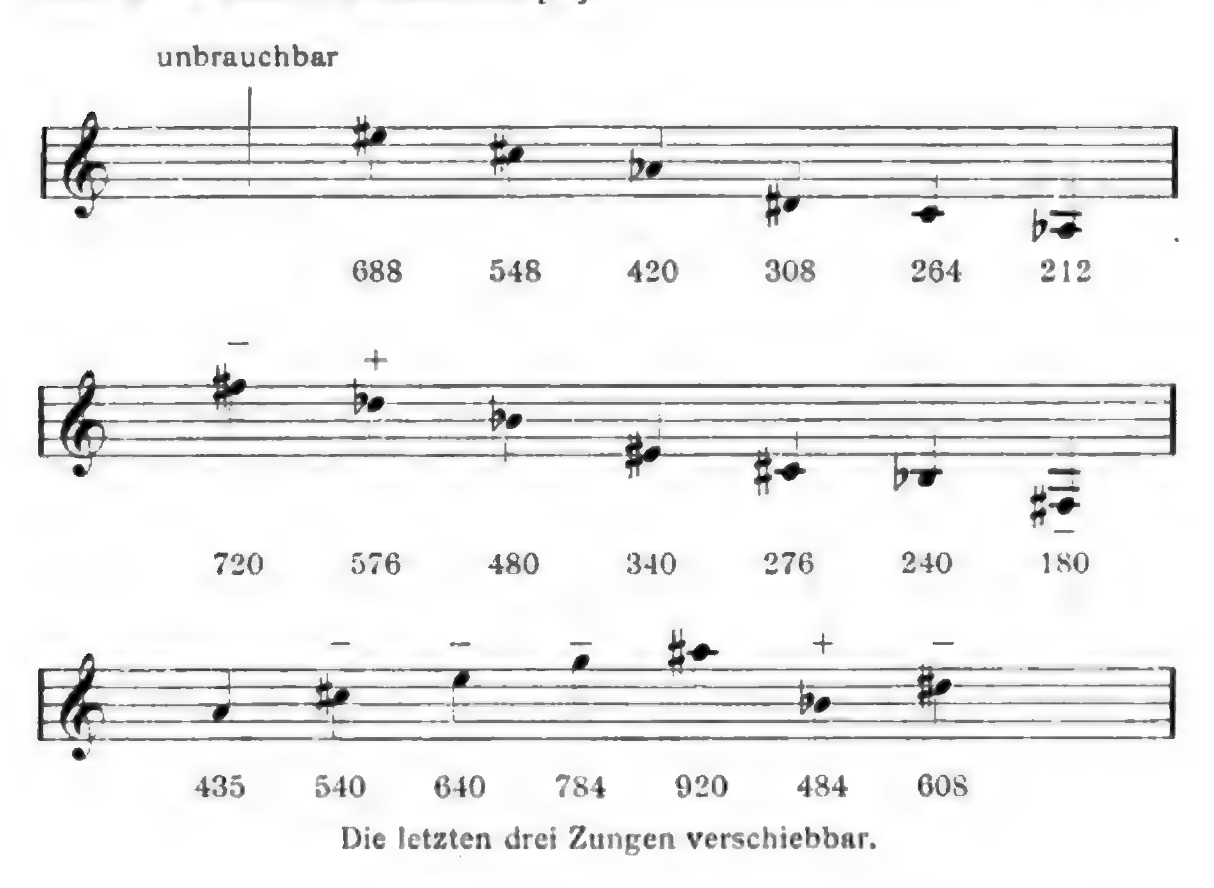
Marimba. Halbkreisförmige Anordnung der Calabasse. Durchmesser des Halbkreises 120 *cm*, grösster Calabass 44 *cm*, kleinster Calabass 12 *cm* im Längsdurchmesser. Die Calabasse sind ziemlich genau nach dem Ton der darauf liegenden Holzplatte abgestimmt. Die Platte des achten Tones (von links) ist gesprungen, die des siebenzehnten Tones schadhaft (angebohrt). Lunda und Angola *[B]*.



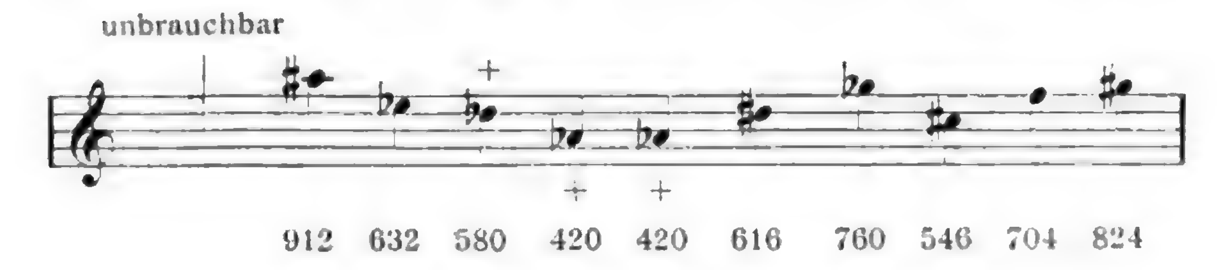
Marimba. Geradlinige Anordnung der Calabasse. 91 *cm* lang. Westafrika *[D]*.



126. Zither, hohles Brett. Metallzungen. 18 *cm* breit, $26^1/_2$ *cm* tief, 4 *cm* hoch. Westafrika *[L]*.



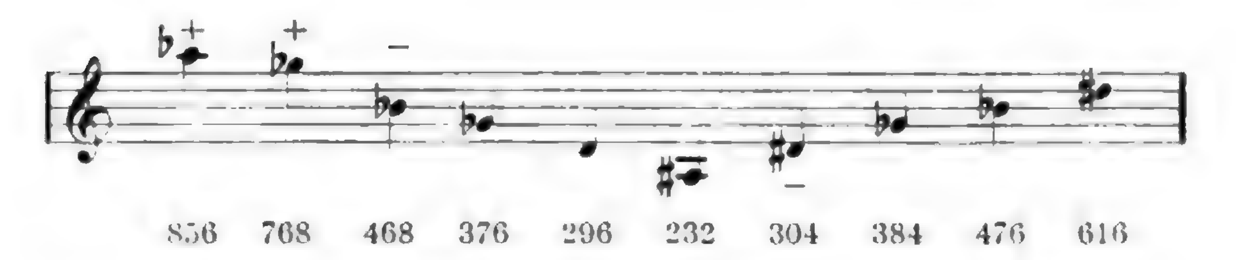
11077. Zither, hohles Brett, Metallzungen mit blauen Glasperlen, 14 *cm*, tief $7^1/_2$ *cm* breit, 3 *cm* hoch. Westafrika *[L]*.



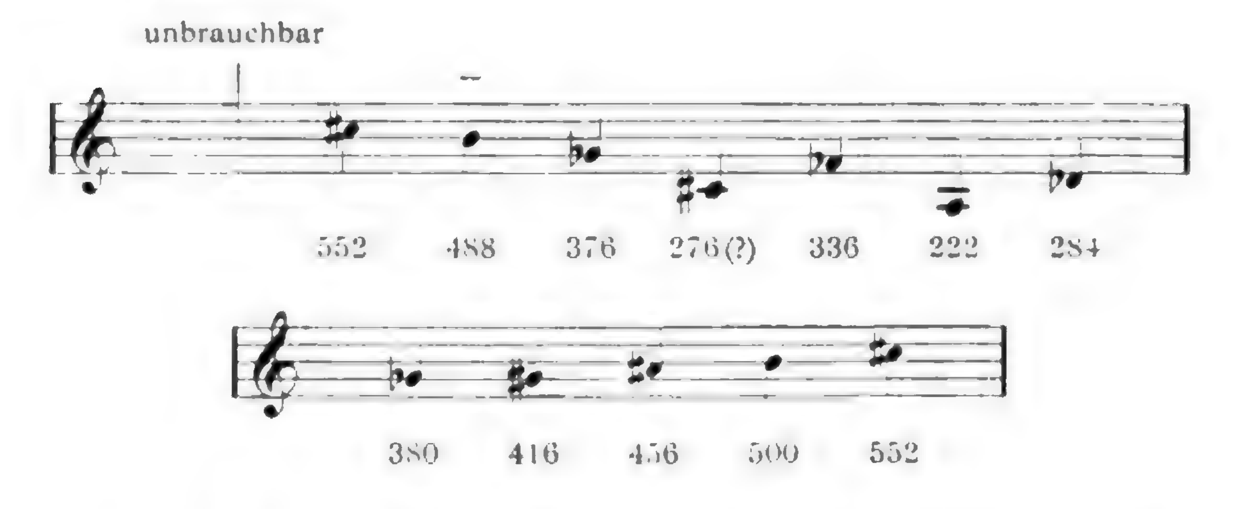
1181. Zither (Sansa). Resonanzboden ornamentirt, Holzzungen. 10 *cm* lang, 32 *cm* tief. Westafrika *[H]*.



1089. Zither. Resonanzboden, Metallzungen. Westafrika *[H]*.

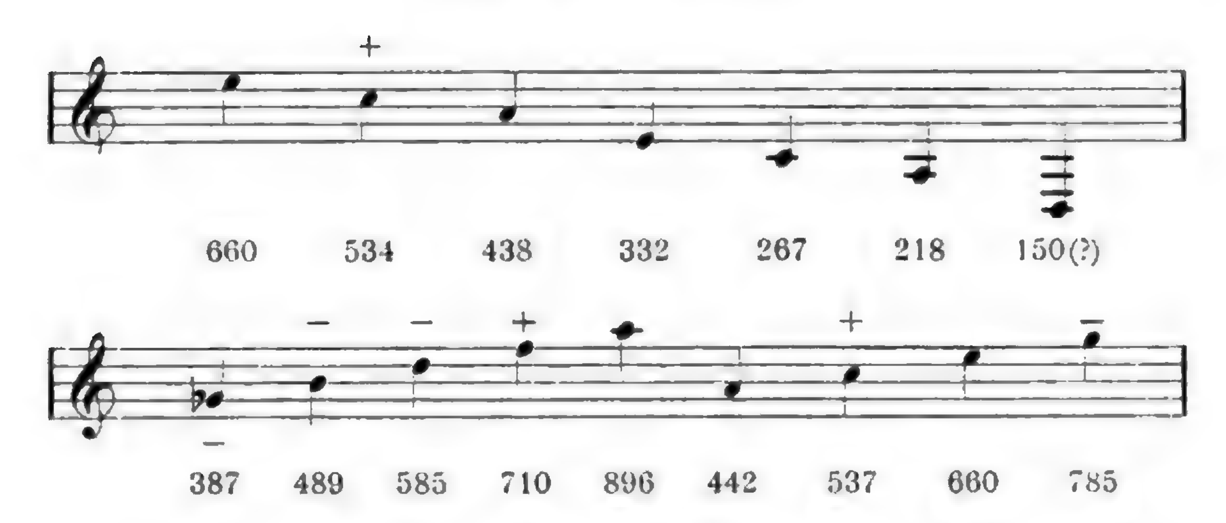


1295. Zither. Resonanzboden mit inliegenden Steinchen. Metallzungen. 30 *cm* tief, 15 *cm* lang, 4 *cm* hoch. Westafrika *[H]*.

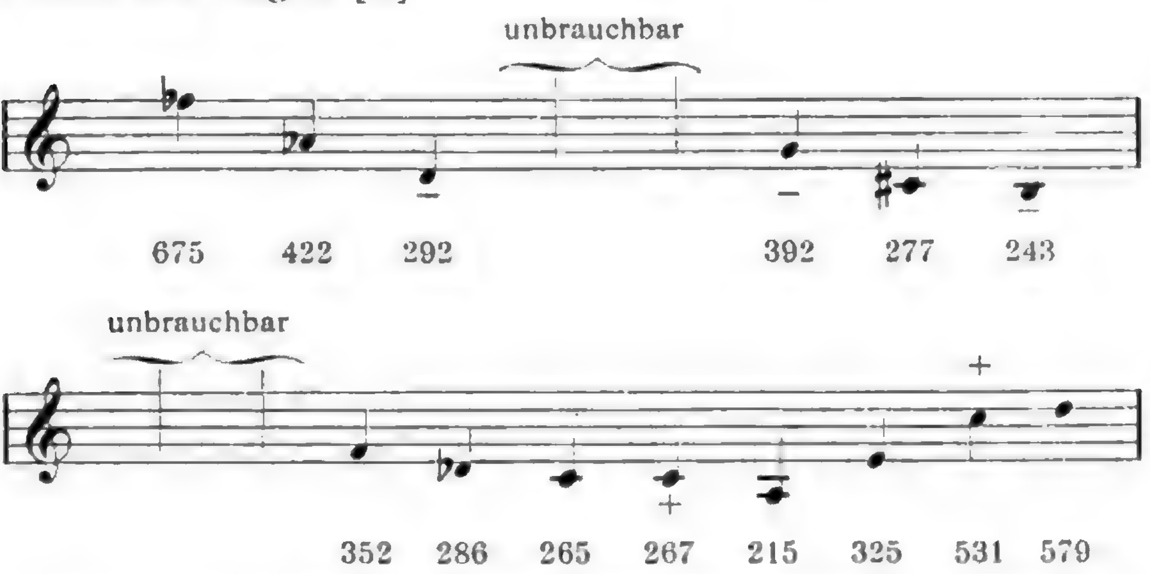


III, *C*, 1387. Negerzither. Hölzerner Resonanzboden, ornamentirt, Metallzungen. 17 *cm* lang, 27 *cm* tief, $3^1/_2$ *cm* hoch. Lunda und Angola *[B]*. Taf. III*a*, Nr. 1.

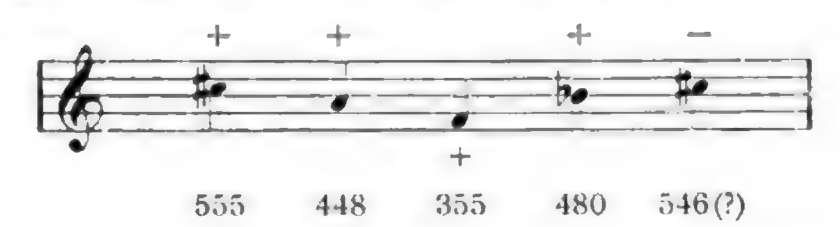




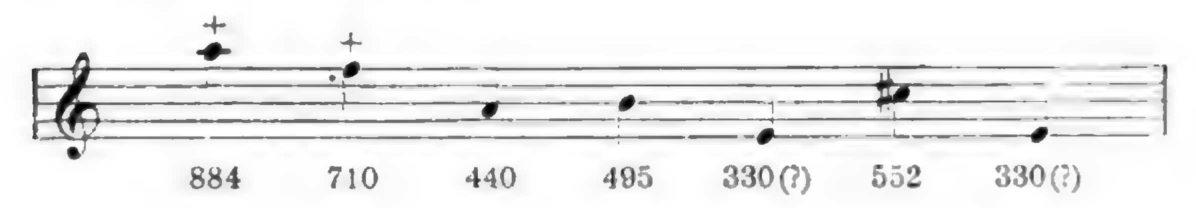
III, *C*, 1386. Negerzither. Hölzerner Resonanzboden, ornamentirt, Metallzungen. 20 *cm* lang, 30 *cm* tief, 4 *cm* hoch. Lunda und Angola *[B]*.

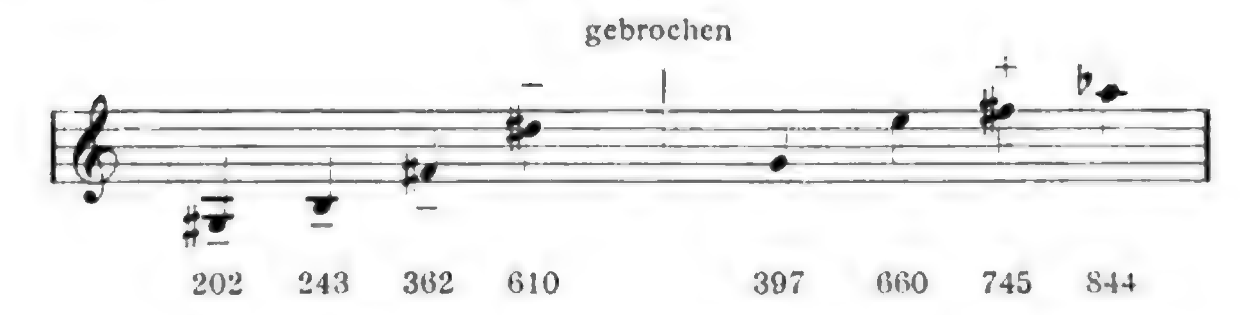


III, *C*, 696. Negerzither. Einfaches Brett ohne Resonanz. Holzzungen. 20 *cm* tief, 6 *cm* lang. Loango *[B]*.

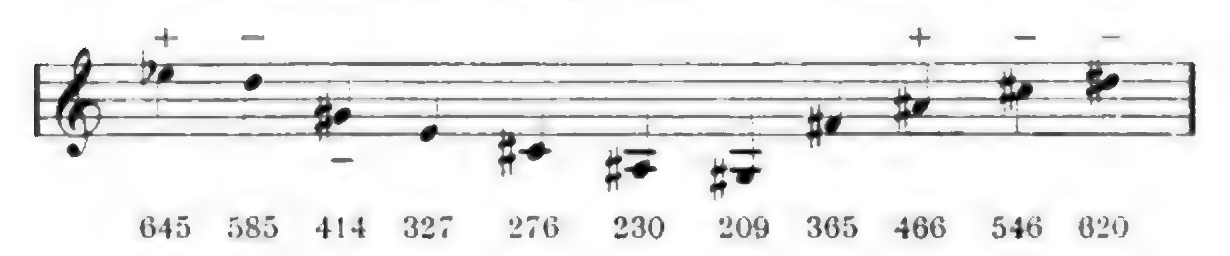


III, *C*, 614. Negerzither. Brett mit Metallzungen. 13 *cm* lang, 18 *cm* tief. Loango *[B]*.





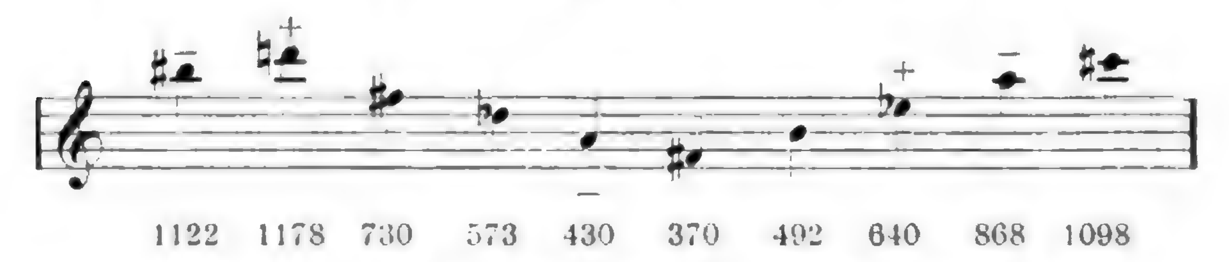
III, *C*, 612. Negerzither. Resonanzkasten, Metallzungen mit blauen Perlen. 11 *cm* lang, 21½ *cm* tief. Loango *[B]*.



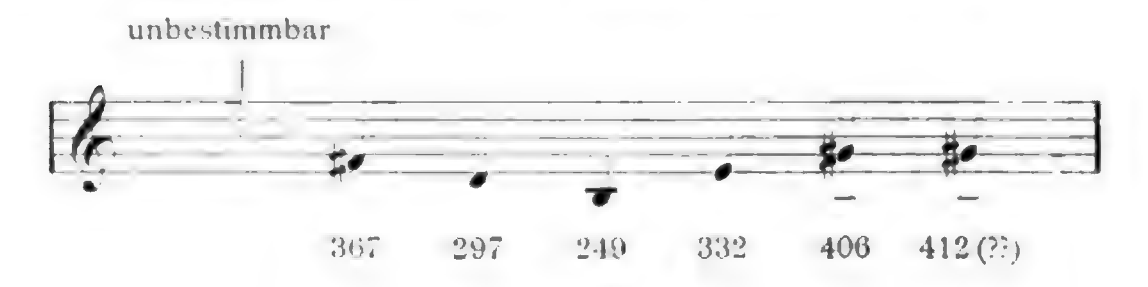
III, *C*, 4441. Negerzither. Metallzungen mit blauen Perlen. 8½ *cm* lang, 16½ *cm* tief. Loango *[B]*.



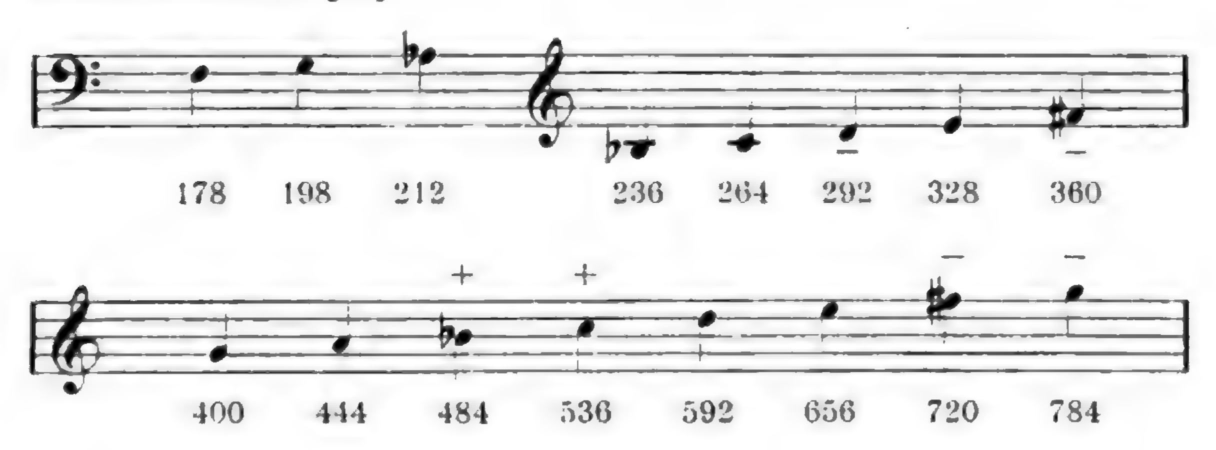
III, *C*, 3009. Negerzither. Resonanzkasten, Metallzungen mit blauen Perlen. 7 *cm* lang, 41½ *cm* tief. Loango *[B]*.



III, *C*, 310. Negerzither. Hölzerner Resonanzkasten, an der dem Spieler gegenüberliegenden Seite in eine Spitze zulaufend. 12 *cm* lang, 31 *cm* tief, 8 *cm* hoch. Loango *[B]*.



Marimba. Kleines Schossinstrument der Mandingos. 84 *cm* lang. Genannt Ballophon oder Balafo, oder Balafen, oder Ballard. Nordwestafrika *[H]*.



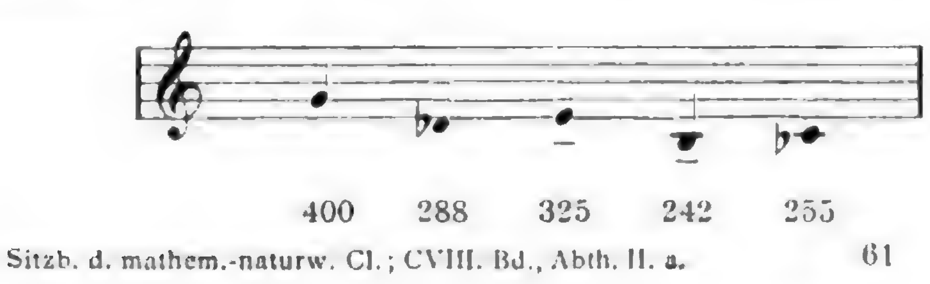
III, *C*, 6278. Negerzither der Bali (Nord-Camerun), hohles rundes Brett, ornamentirt. Längsdurchmesser 17 1/2 *cm* *[B]*.



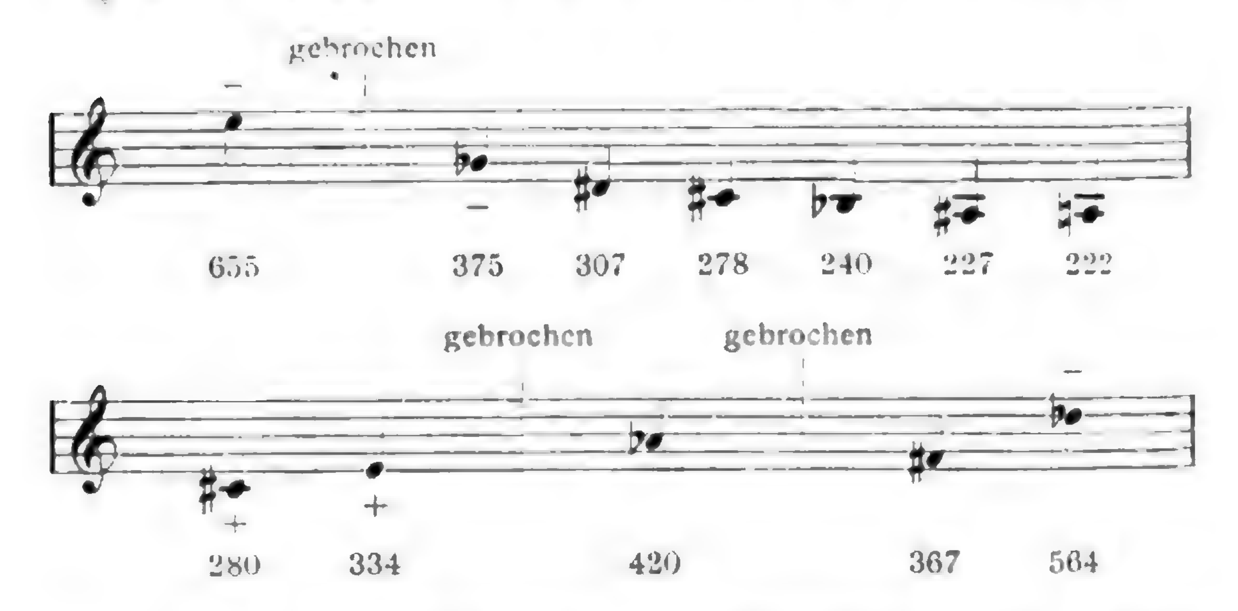
III, *C*, 4837. Negerzither, Camerun, zwei ausgehöhlte Bretter, übereinandergelegt und mit Holznägeln befestigt. Holzzungen. 18 1/2 *cm* lang, 34 *cm* tief *[B]*.



III, *C*, 4534. Negerzither. Resonanzkasten, Holzzungen. Mit einem Handstiel versehen. 19 *cm* tief, 14 *cm* lang. Dualla (Camerun) *[B]*. Die letzten drei Zungen verstellbar, daher nicht gemessen.



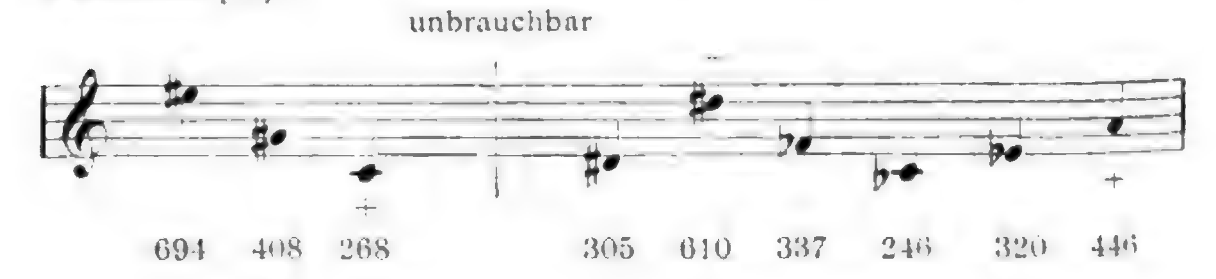
III, *C*, 433. Negerzither. Runder Resonanzkasten mit Handstiel, Holzzungen. 32 *cm* tief, 28 *cm* lang. Camerun *[B]*.



III, *C*, 834. Negerzither. Resonanzkasten unten convex. Holzzungen. 27 *cm* lang, 17 *cm* tief, $11^1/_2$ *cm* hoch. Vom Gabun *[B]*.



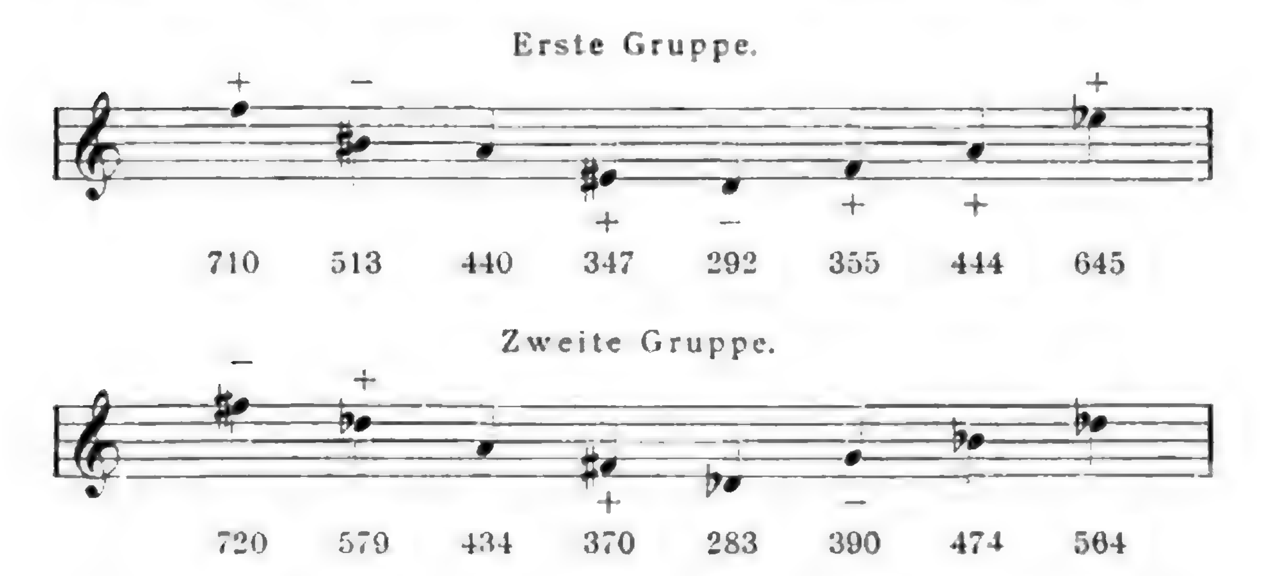
III, *C*, 1701. Negerzither. Resonanzboden mit Holzstiel. Camerun *[B]*.



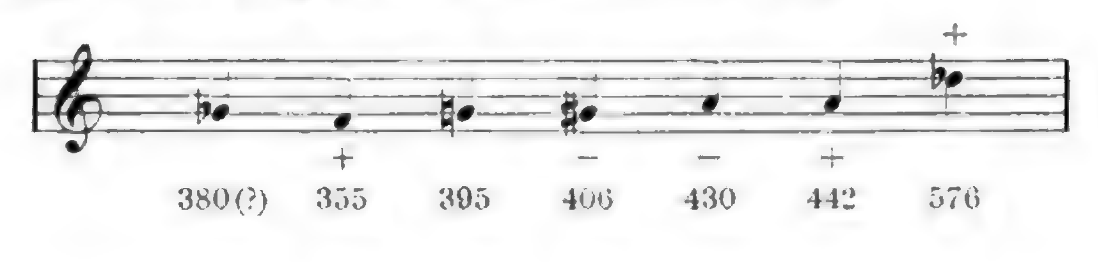
III, *C*, 6024. Negerzither. Resonanzboden. Handstiel, Holzzungen. 23 *cm* tief, 11 *cm* lang, $5^2/_3$ *cm* hoch. Camerun *[B]*.



III, C, 525. Negerzither. Holzbrett, ornamentirt. Die Holzzungen sind in zwei nebeneinanderliegenden, gleich aussehenden Gruppen angebracht. Es ist nicht unmöglich, dass in diesem Exemplare die Verfertigung einer Doppelzither beabsichtigt wurde, in der jeder Ton zweimal vorkommt, je einmal in jeder Gruppe. Leider ist die Stimmung nicht ganz verlässlich, da der Steg offenbar neueren Datums ist und möglicherweise nicht sorgfältig an die ursprüngliche Stelle gesetzt wurde. 26½ *cm* lang, 33 *cm* tief. Fernando Po *[B]*. Taf. III*a*, Nr. 2.



III, *C*, 6552. Holzbrett mit Ornamenten am Rande, Holzzunge. 10 *cm* lang, 36 *cm* tief. Fernando Po *[B]*.



Asien.

I, *C*, 15944. 6 Flöten aus dem Pandschab. Holz *[B]*. Die Versuche einer chromatischen Scala sind charakteristisch. Nach den Messungen von Ellis und Hipkins sind die Hindus schon vor 200 Jahren zu einem ähnlichen Resultat gekommen, wie es unsere temperirte Scala darstellt, allerdings mit ornamentalem praktischen Gebrauch eines veralteten Vierteltonsystems.[1]

[1] Ellis, Journal Soc. Art., vol. XXXIII, No 688; S. M. Tagore, The Musical Scales of the Hindus, Calcutta 1884; Day, The Music of Southern India, London 1891, p. 21.



Rohrorgel, bestehend aus zwei Reihen von je sieben Rohrpfeifen, die in der Mitte durch eine längliche Frucht (Windkasten) zusammengehalten werden. An derselben befindet sich ein Mundstück, durch das man einfach hineinbläst, wodurch alle Pfeifen (deren Seitenloch geschlossen ist) angeblasen werden. Das Instrument gibt einen vollen harmonikaartigen Accord. Es entstammt dem Mian Psu, Tapin-Plateau, Tonking. (Ähnliche, feiner ausgeführte Formen, polirt, mit Windkasten am unteren Ende, kommen auch in China und Japan vor.) Länge der Pfeifen 123—175 *cm.* Taf. I, Nr. 7 *[B].*



Durch enharmonische Verwechslungen kommt ungefähr folgender Accord heraus:

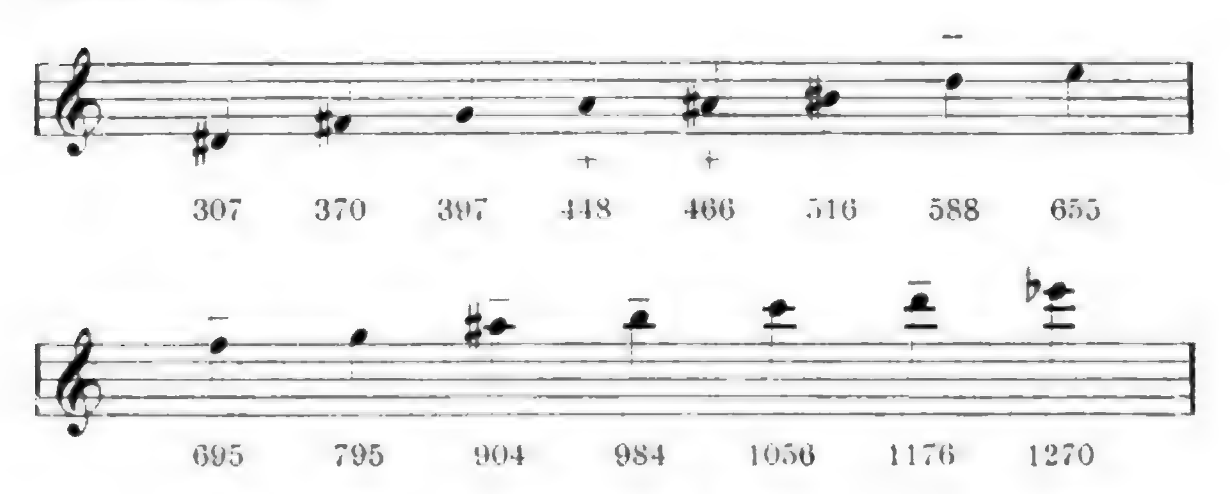


Rohrorgel, Siam. Länge der Pfeifen 52—85 *cm* [B].

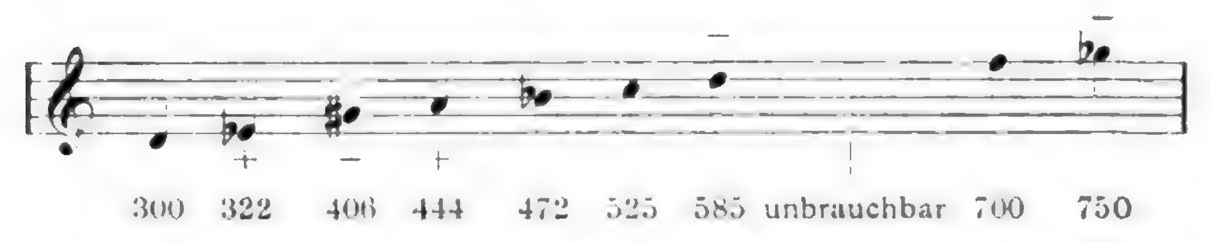


Der störende Ton *h* ist in Wirklichkeit nicht so störend, als man es nach der Notirung vermuthen sollte. Er ist weit schwächer als die Anderen und wird übertönt. Immerhin ist der Klang ziemlich scharf.

I, *C*, 13981. Klangplatten auf schiffförmigem Resonanzboden. Siam. Die 6 tiefsten Platten mit dumpfem, kaum messbaren Tone *[B]*.



I, *C*, 13995. Khong-Wong. Runde Metallschalen verschiedener Grösse, halbkreisförmig angeordnet. Von den 16 Scheiben sind die ersten sechs wegen ihrer undeutlichen und unreinen Glockentöne nicht messbar.



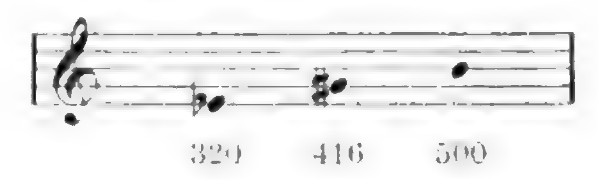
I, *C*, 1708. Wie oben. 16 Schalen. Nur die ersten 4 messbar *[B]*.



Südsee.

Neu-Britannien. Neu-Hannover. Samoa-, Tonga-Inseln. Salomon-Inseln.

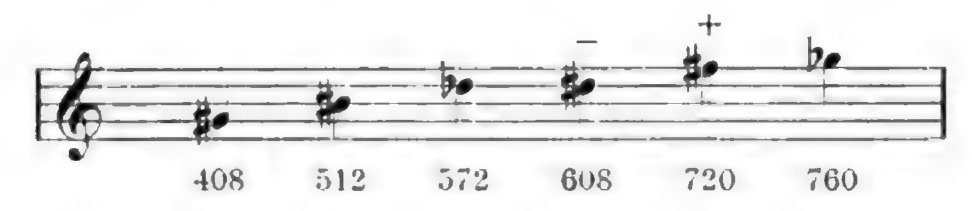
Rohrflöte. Mundstück wie bei der brasilianischen Thierknochenflöte und der Ugandaflöte. Veränderlicher Ton. Neu-Britannien *[H]*.



Rohrflöte (Ralum), wie oben *[H]*. Ornamentirt. Tonreihe auch um eine Sext (sic!) höher anzublasen.



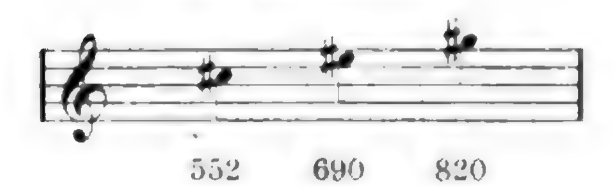
Rohrflöte. An dem oberen Ende ist an dem rundlichen Rohre eine gerade Fläche herausgeschnitten, die allmälig wieder zur Rundung ansteigt. An dem Punkte, wo die gerade Fläche die Rundung erreicht, ist das Anblaseloch. Nun wird das obere Flötenstück bis zum Loche mit einem Rattanstreifen umwickelt, der sich an die Rundung eng anschliesst, während er an der angeschnittenen Fläche einen dünnen Luftstrom bis zum Anblaseloch kommen lässt und dadurch, wenn das ganze Mundstück in den Mund genommen und angeblasen wird, die Tonerzeugung ermöglicht. Am untern Ende ein trichterförmiges Schallrohr aus Horn. Neu-Britannien *[W]*. Taf. III*b*, Nr. 1; Nr. 2 dieselbe Flöte von oben gesehen. Ähnliches Mundstück Taf. I, Nr. 4.



I, *C*, 18390. Flöte, dieselbe Construction *[B]*.



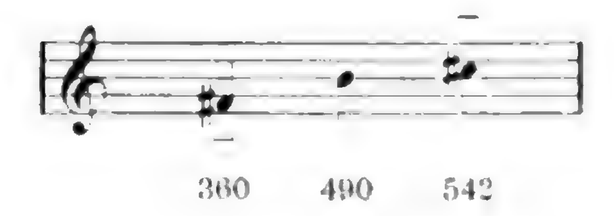
Flöte. 50 *cm* lang, ornamentirt. Löcher mit Sternlinien. Am oberen Ende des Rohres ein kleiner Ausschnitt. Durch Überlegen der Lippe nach Art der Ugandaflöte und brasilianischen Thierknochenpfeifen angeblasen. Neu-Britannien *[D]*. Sehr variabler Ton.



Flöte. Neu-Britannien. Wie oben. Variabler Ton.



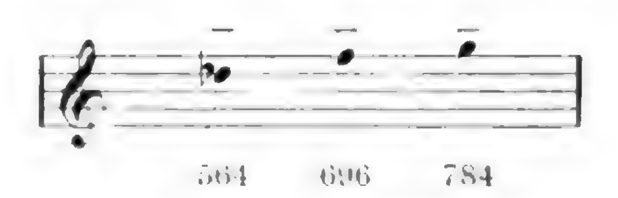
Flöte, wie oben. Variabler Ton.



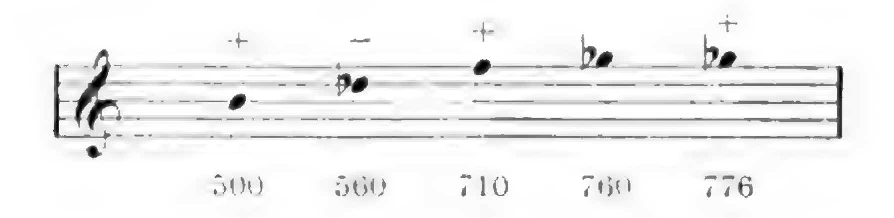
2819. Nasenflöte, 49 *cm* lang. Nach Art der Panpfeifen am oberen Ende des Rohres mit der Nase anzublasen. Untere Hälfte ornamentirt. Sehr schwankender Ton. Neu-Hannover *[L]*.



Nasenflöte (wie oben), $43^3/_4$ *cm* lang. Nicht ornamentirt zwei Löcher mit Sternlinien versehen. Neu-Britannien *[L]*.



25.806. Panpfeife. Neu-Britannien *[W]*.



27.635. Panpfeife. Neu-Britannien [W].



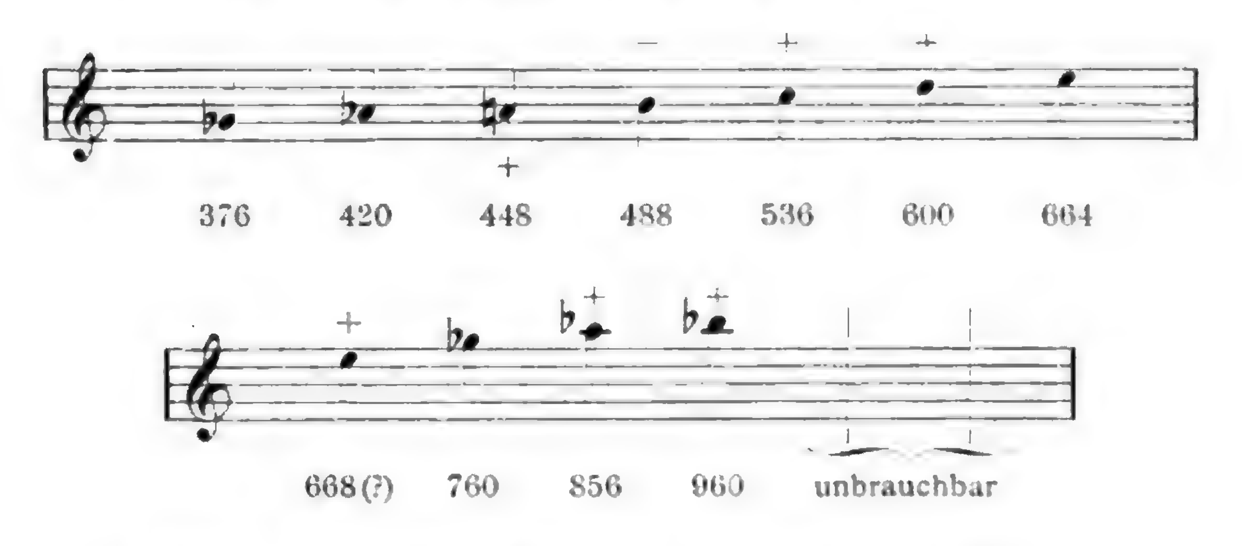
9450. Panpfeife. Neu-Britannien [W].



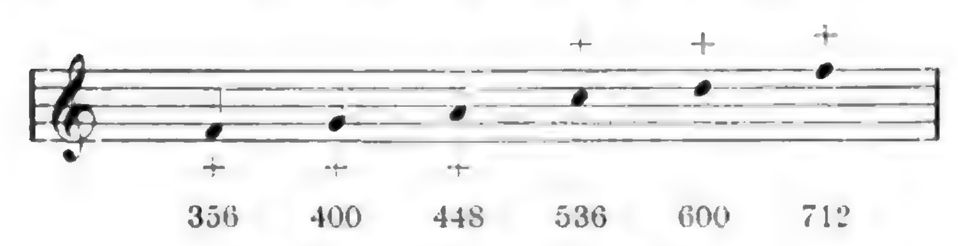
9451. Panpfeife. Neu-Britannien [W].



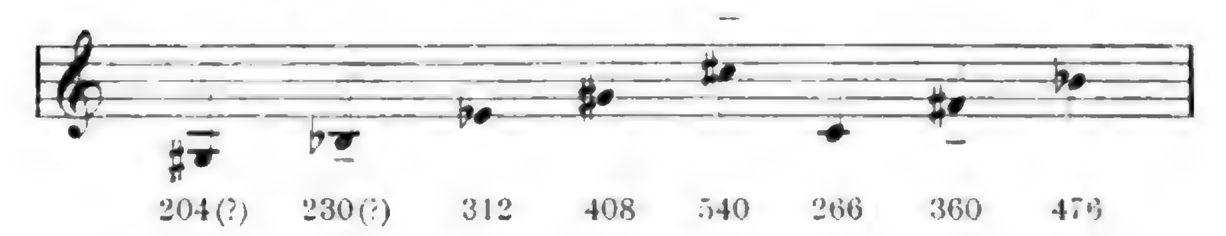
11.724. Panpfeife. Neu-Britannien [W].



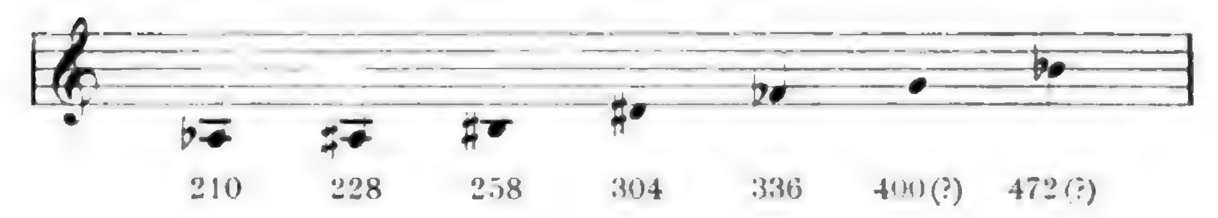
Panpfeife. Neu-Irland und Neu-Britannien [L].



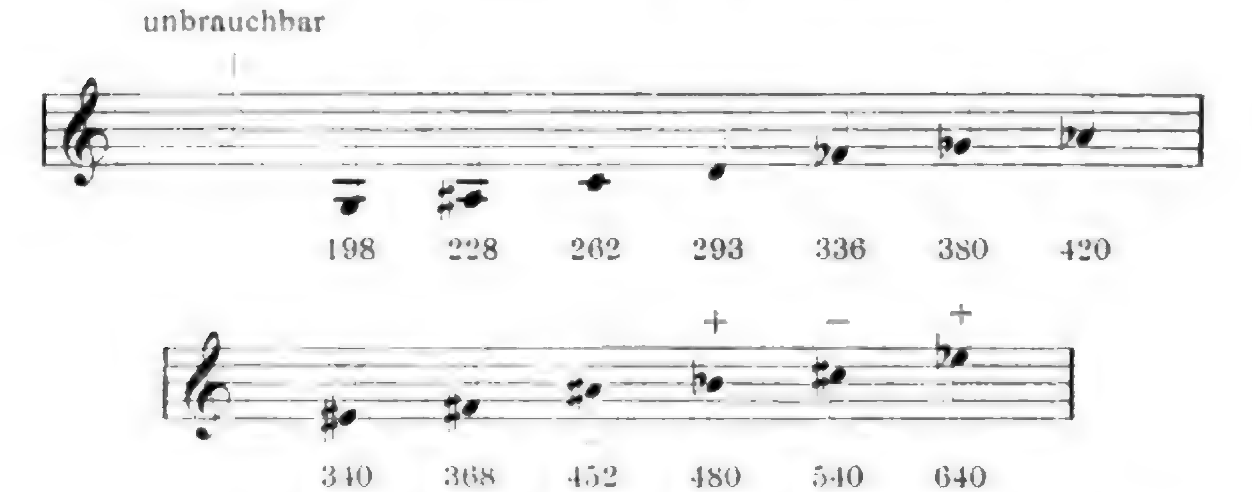
1833. Panpfeife. Neu-Irland und Neu-Britannien *[L]*



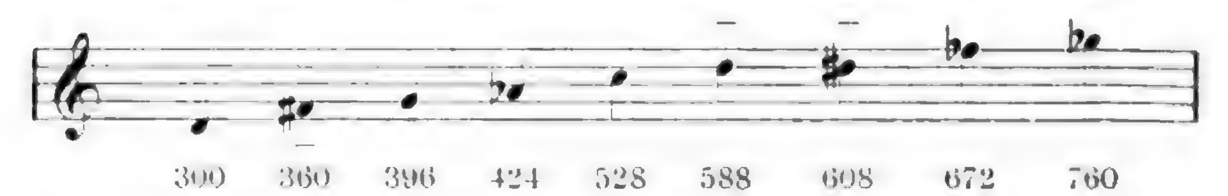
Panpfeife. Neu-Britannien *[D]*.



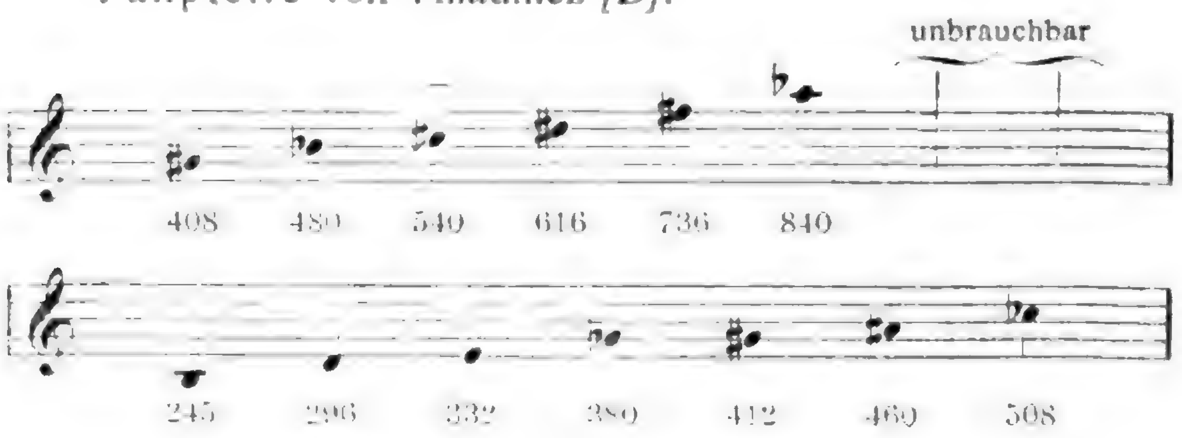
Panpfeife. Neu-Britannien *[D]*. Doppelreihen.



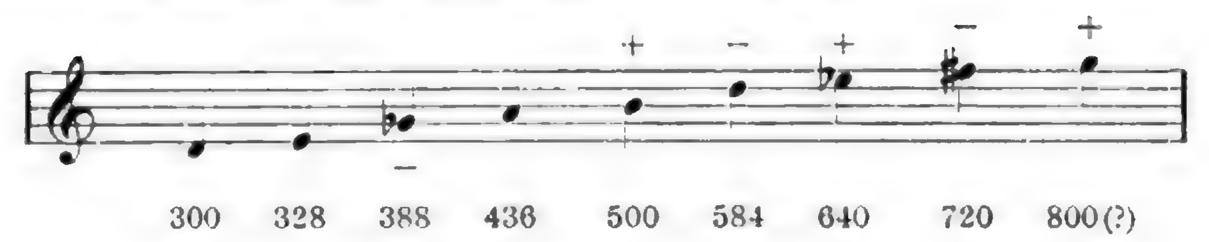
326. Panpfeife. Villaumez (Neubritannischer Archipel *[D]*.



Panpfeife von Villaumez *[D]*.



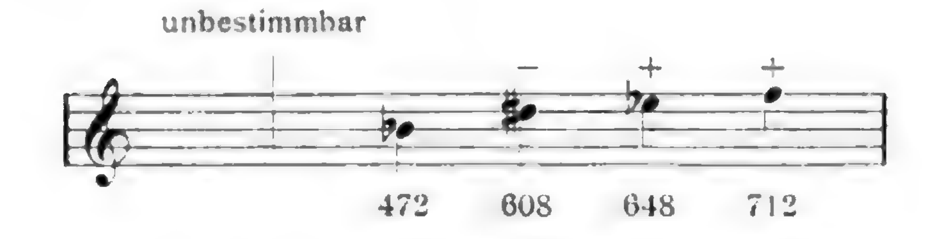
27.572. Panpfeife von Villaumez *[W]*.



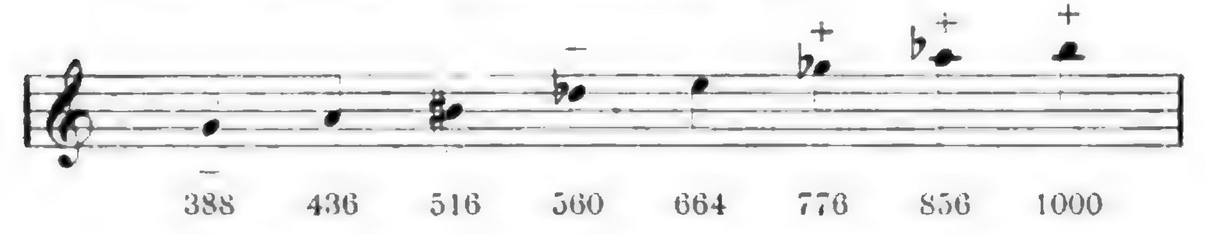
1194. Panpfeife. Neu-Britannien *[H]*.



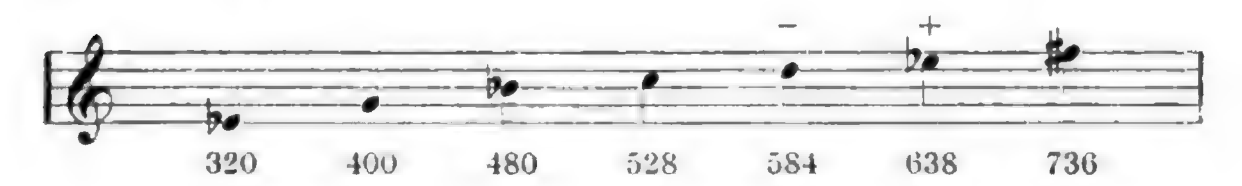
1474. Panpfeife. Neu-Britannien *[H]*.



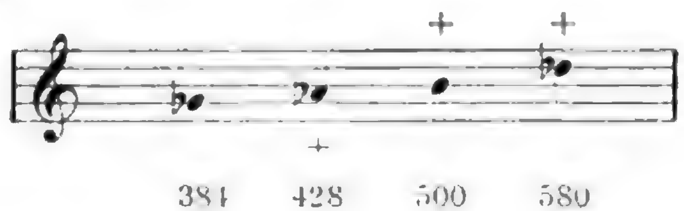
1848. Panpfeife. Neu-Britannien *[L]*.



Panpfeife. Neu-Irland und Neu-Britannien *[L]*. 13 Töne; die ersten 7 bestimmt.



Panpfeife, detto. 6 Töne; die ersten 4 bestimmt (undeutlich) *[L]*.



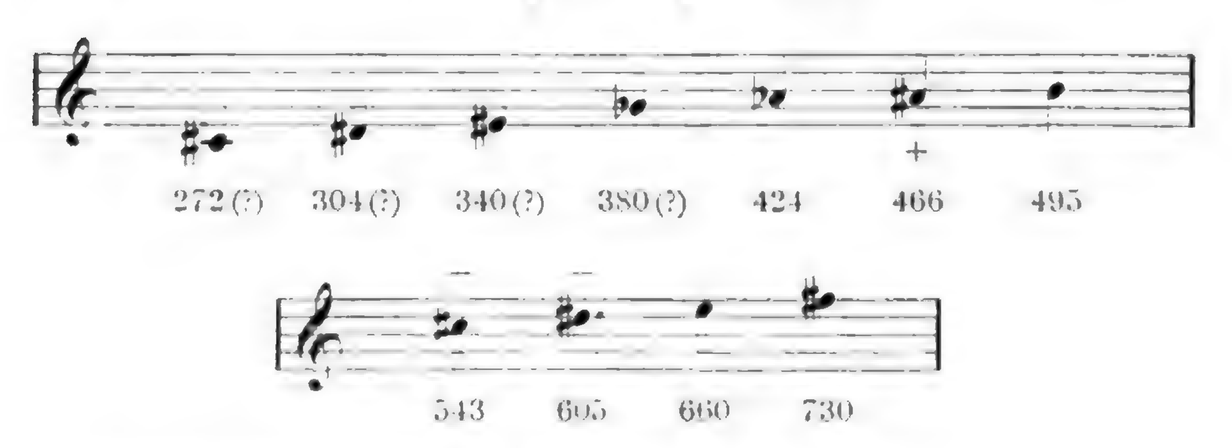
VI, 1058. Panpfeife. Neu-Britannien. 21 Töne; die ersten 8 bestimmbar *[B]*.



VI, 1192 *c*. Panpfeife. Neu-Britannien. 17 Töne; die letzten 9 unbestimmbar, geben bei raschem Darübergleiten einen grellen Pfiff *[B]*.



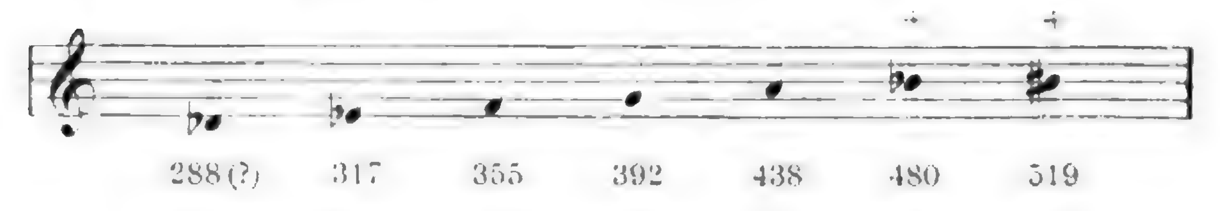
VI, 1073. Panpfeife. Neu-Britannien. Die unteren Töne von düsterer nebelhornartiger Klangfarbe *[B]*.

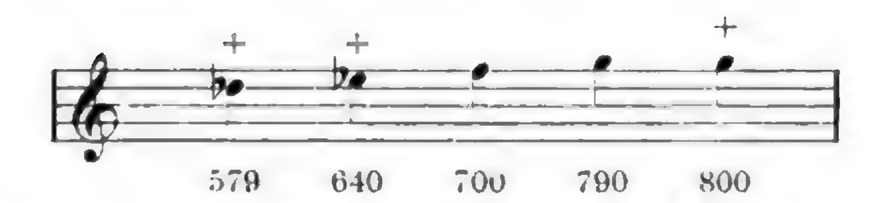


VI, 1473. Panpfeife. Neu-Britannien *[B]*.



VI, 2840. Panpfeife. Neu-Britannien. 22 Töne; die ersten 12 bestimmbar *[B]*.

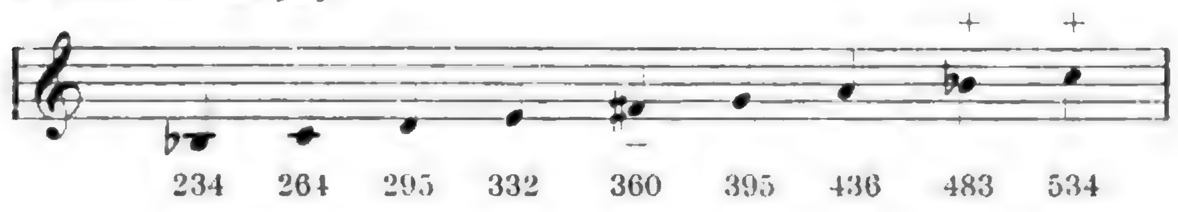




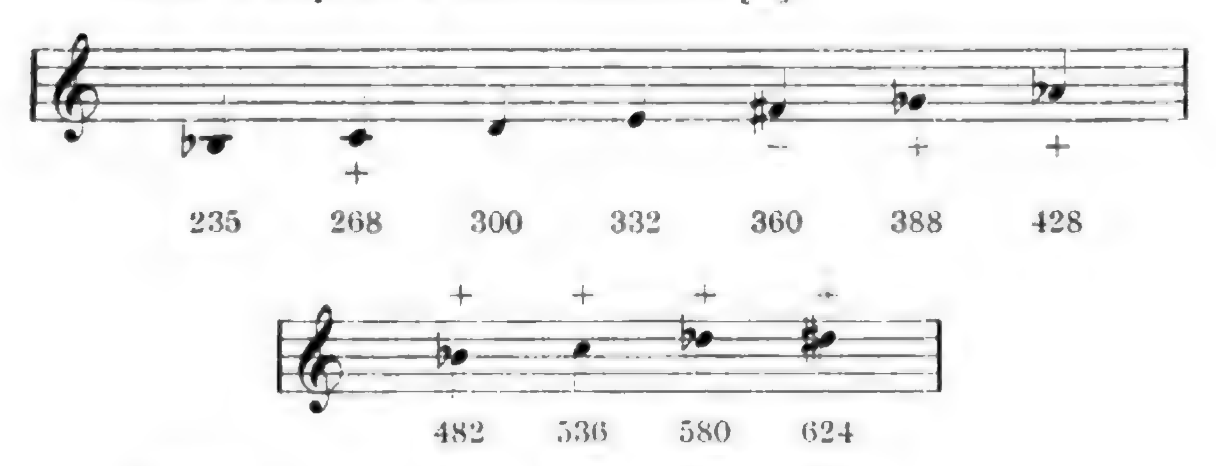
VI, 6220. Panpfeife. Neu-Britannien. 21 Töne; die ersten 9 bestimmbar *[B]*.



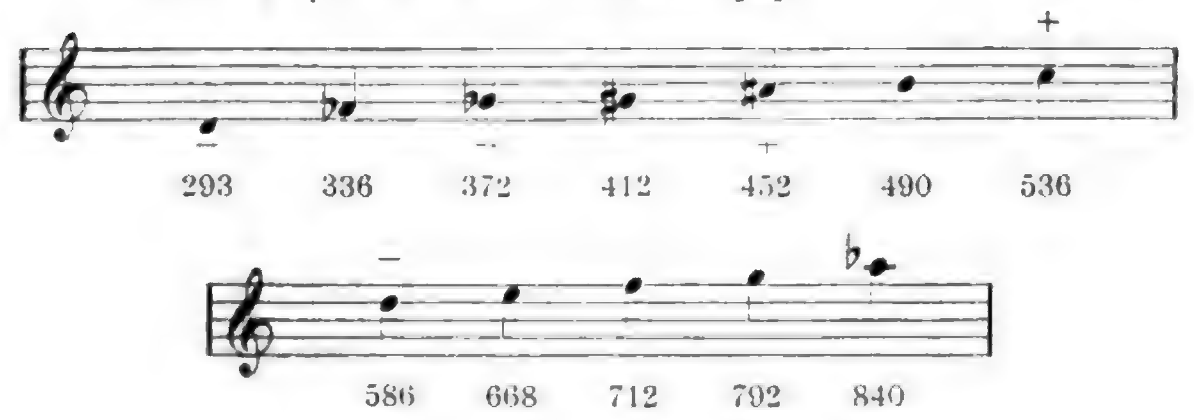
VI, 2685. Panpfeife. Neu-Hannover. 24 Töne; die ersten 8 bestimmbar *[B]*.



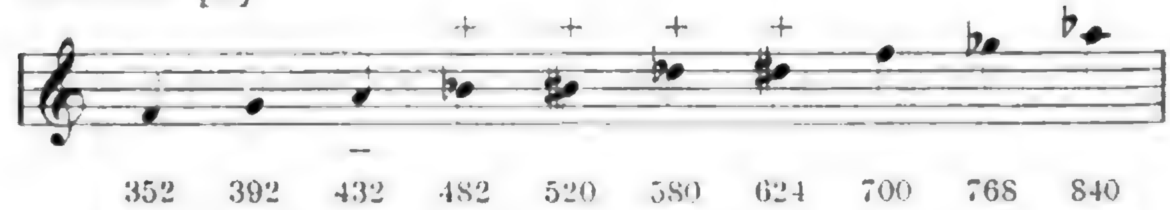
2818. Panpfeife. Neu-Hannover *[L]*.



4221. Panpfeife. Neu-Hannover *[L]*.



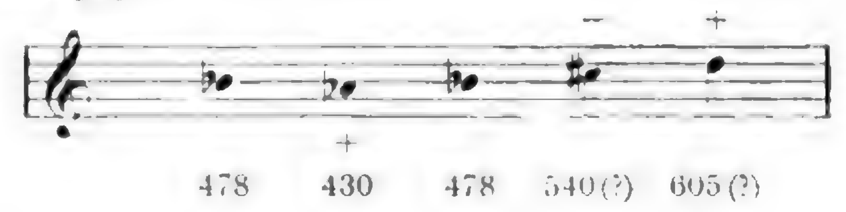
4282. Panpfeife. Neu-Hannover. 21 Töne; die ersten 10 bestimmt *[L]*.



22.913. Panpfeife »Siva Ofe« aus Bambus mit Tapa-Streifen umwickelt. Samoa. Doppelsystem; 5 auf der einen, 7 auf der andern Seite *[W]*.



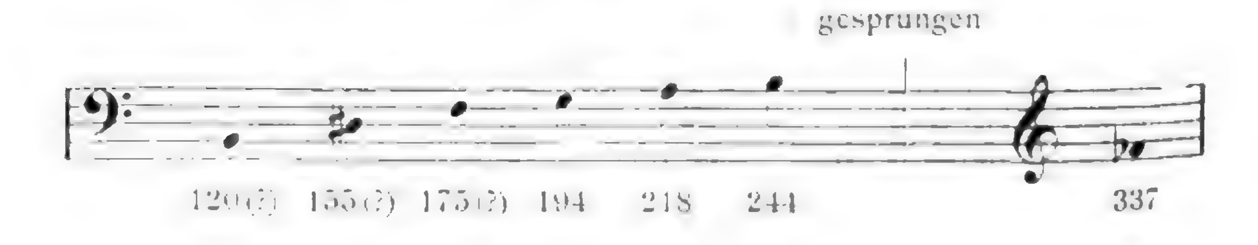
VI, 409. Panpfeife. Tonga-Inseln. Die ersten 5 Töne unbestimmbar *[B]*.



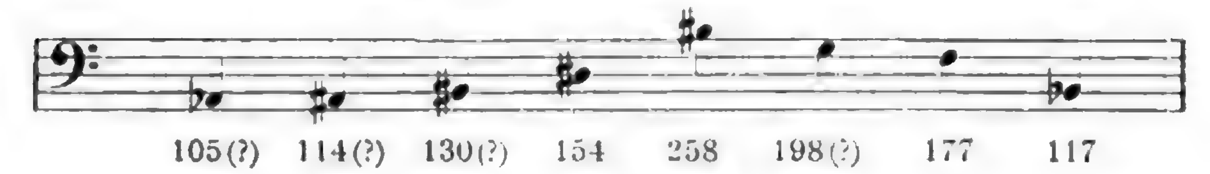
VI, 410. Panpfeife. Tonga-Inseln. Töne durch verschiedene Stärke des Anblasens leicht veränderlich *[B]*.



VI, 11.655. Panpfeife der Salomon-Inseln *[B]*.



VI, 14.212. Panpfeife der Salomon-Inseln *[B]*.



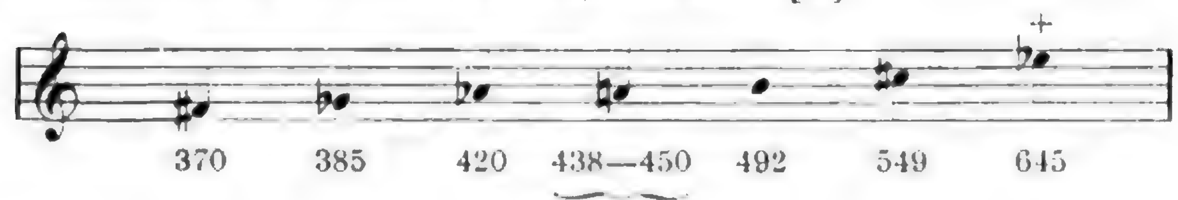
VI, 12.337 *a*. Panpfeife der Salomon-Inseln. Doppelpfeife. Nur eine Reihe konnte angeblasen werden.



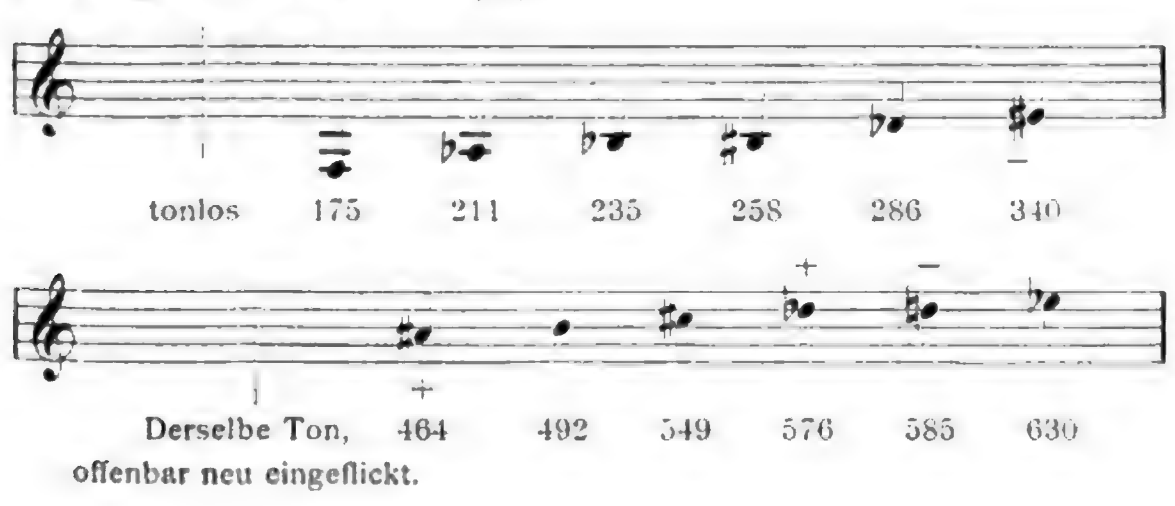
2189. Flöte. »Talaut« (Tàlo-tâlo) Celebes *[L]*.



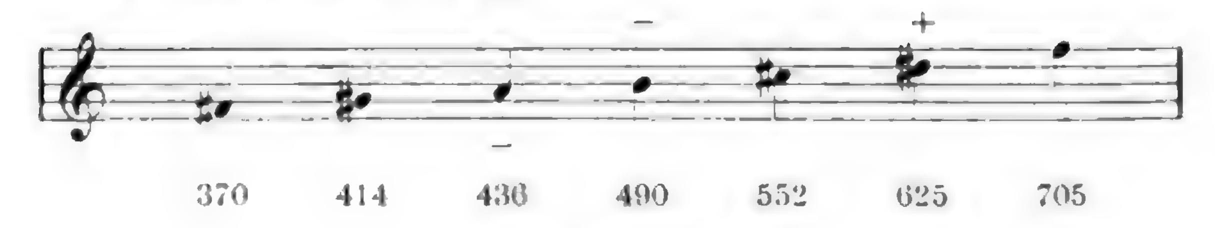
I, *C*, 8846. Flageolet. Die ersten drei Töne können auch in der höheren Octave angeblasen werden. Guter Klang, aber variable Tonhöhe. Halma-Hera, Malaiisch *[B]*.



Javanische Klangstäbe. Hohl, unten geschlossen. 25 bis 84 *cm* lang. Ungefähr die Hälfte des Stabes ist auch seitlich zur Hälfte geöffnet. 14 Stäbe *[B]*.

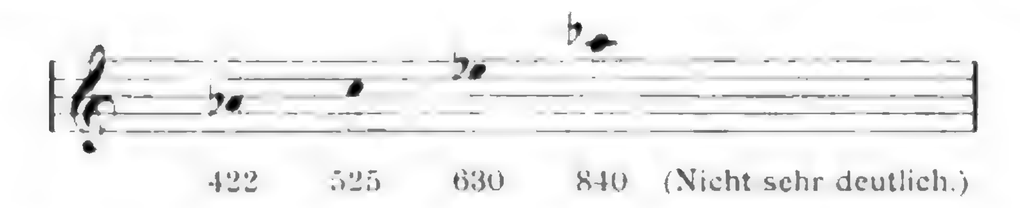


Flöte. Philippinen *[B]*.

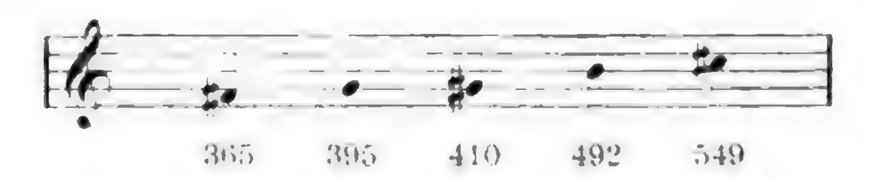


Südamerika.

V, *B*. 782. Vogelknochenpfeife. Ein ausgehöhlter Vogelknochen, der am oberen Rande einen kleinen Einschnitt besitzt. Man bläst das Instrument an, indem man den offenen Rand mit der Unterlippe bis zu dem Einschnitte bedeckt und dann einen engen Luftstrom an den Rand dieses Ausschnittes bläst. Bei manchen dieser Instrumente ist dieser obere Rand durch eine Membran oder das getrocknete Mark geschlossen. Durch den Randeinschnitt wird eine kleine Öffnung offen gelassen. Ob nicht vielleicht alle diese Instrumente gedeckt waren, und nur mit der Zeit der Verschluss bei den Museumsexemplaren abfiel, lässt sich vorläufig nicht feststellen. Jedenfalls ersetzt bei den offenen Instrumenten die Bedeckung durch die Unterlippe die Membran. Diese Art des Anblasens ist über alle Erdtheile verbreitet.[1] Rio Negro-Gebiet *[B]*. Taf. I, Nr. 6.

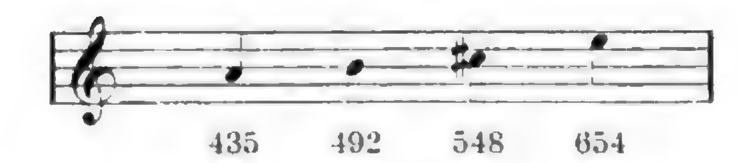


V, *A*, 11.113. Vogelknochenpeife. Guyana *[B]*.



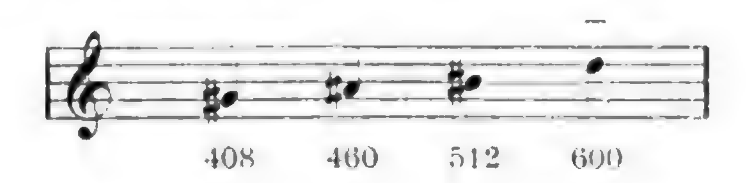
2702. Thierknochenpfeife mit Federbusch am unteren Ende. Brasilien *[W]*. Normalstimmung.

[1] Solche Thierknochenpfeifen sind, nach Ausgrabungen zu urtheilen, die ältesten Instrumente, die wir besitzen. Vergl. meine »Primitive Music«, London 1893, p. 81, 83 und 91.



Das Cis nähert sich mehr der pythagoräischen ($550^{35}/_{64}$) als der natürlichen Terz ($543\,^{3}/_{4}$).

2102. Thierknochenpfeife. Brasilien *[W]*.



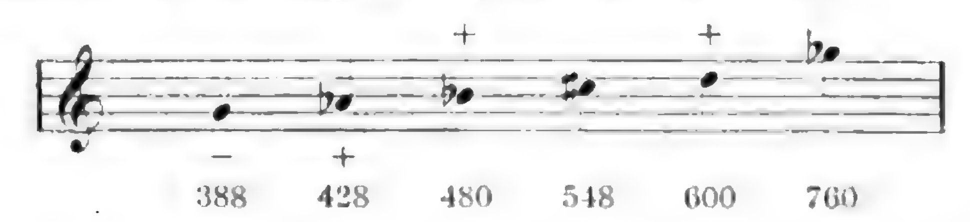
2103. Detto *[W]*.



1720. Detto *[W]*.



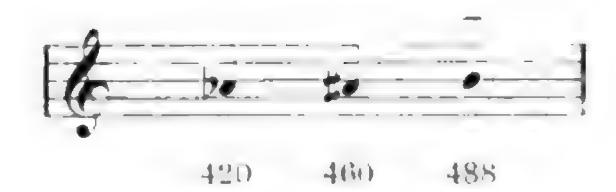
Beinflageolet. Schmuckgegenstand. Offenbar eine vervollkommnete Thierknochenpfeife. Zierlich gearbeitet, geglättet, ornamentirt. 24 *cm* lang, sehr guter Ton. Peru *[W]*.



V, *A*, 2816. Panpfeife. Peru. Dumpfer, nebelhornartiger Klang *[B]*.



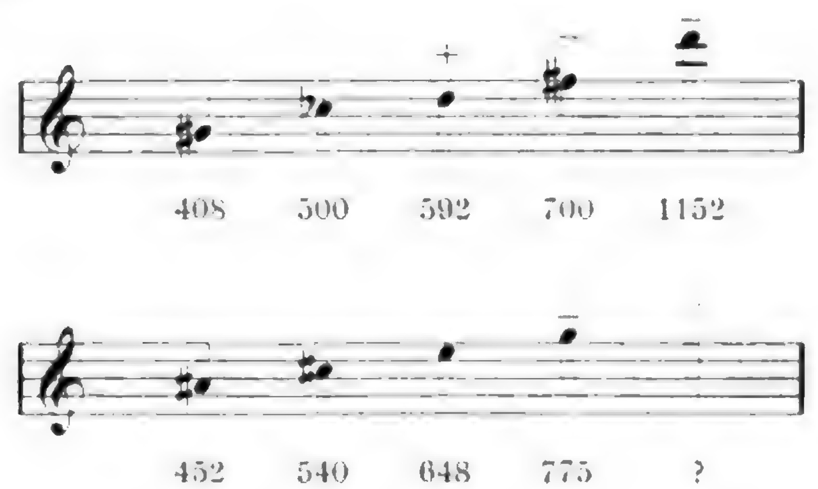
Rohrflöte. Brasilien. Variabler Ton [W].



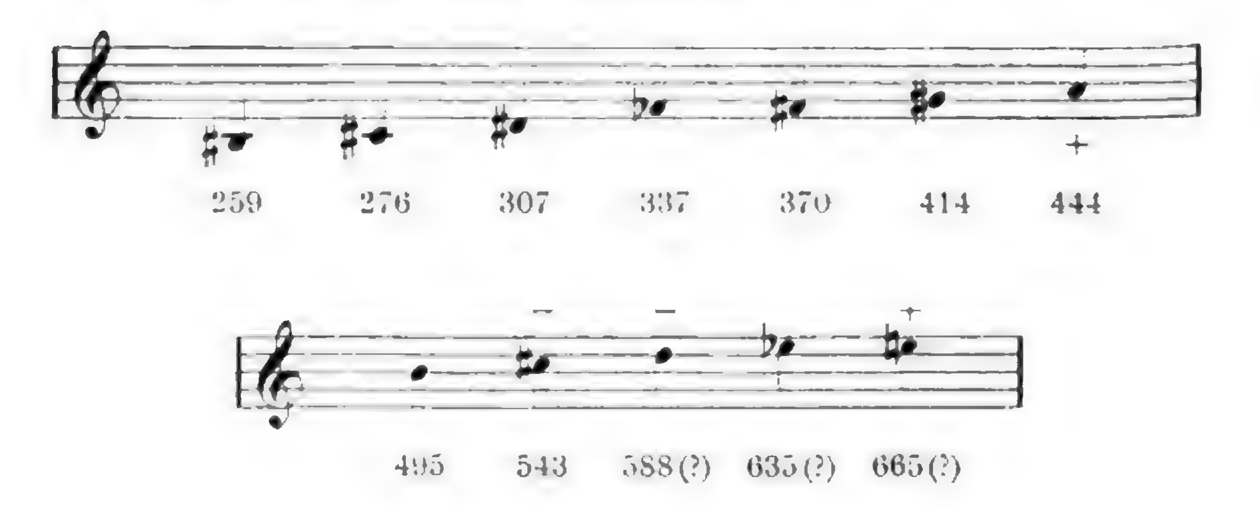
Panpfeife. Brasilien [W]. Normalstimmung.



Panpfeife aus Rohr. Rio Negro-Gebiet *[H]*. Normalstimmung.

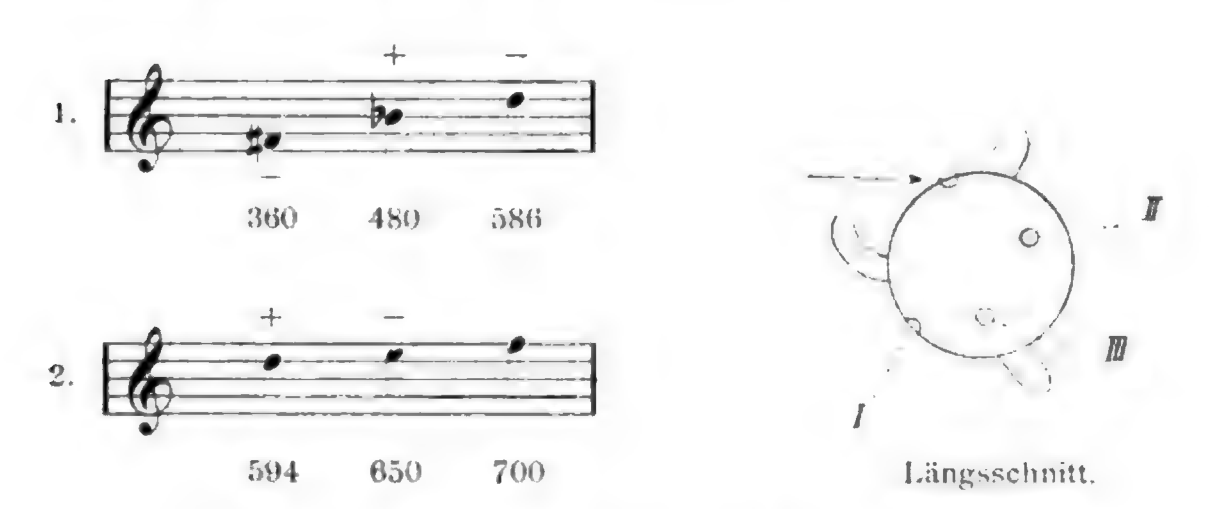


V, *B*, 485. Panpfeife. Amazonen-Gebiet *[B]*.



Centralamerika.

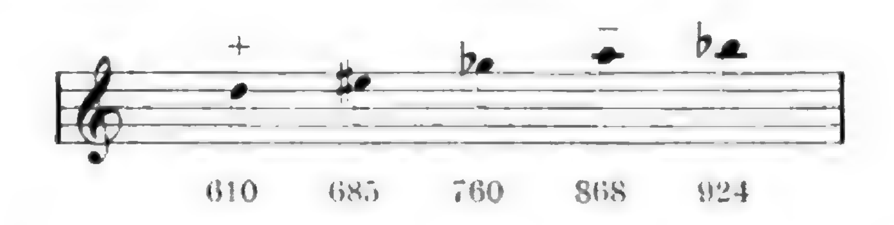
Thonpfeifchen von Costa Rica, theils rundliche Thierformen, theils unerkennbare Phantasiegebilde. Zwei Pfeifen gemessen. Variabler Ton *[D]*.



Längsschnitt.

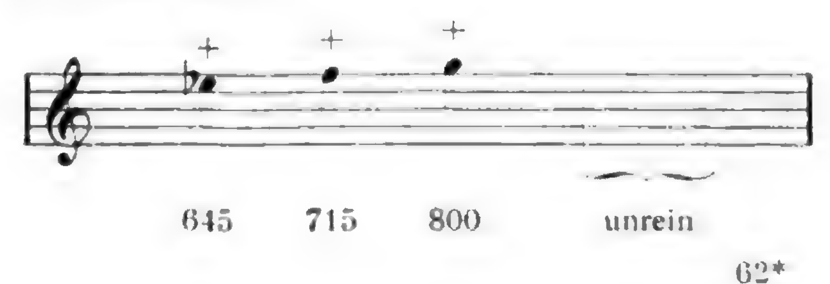
Mexikanische kopfförmige Flöte aus Thonerde. 8 *cm* lang, 7 *cm* hoch. Nur zwei Töne, von denen der zweite ungefähr eine Quart, bei einem anderen Exemplar um einen ganzen Ton von dem ersten entfernt ist *[H]*. Nach Art der Tanzflöte (Bansi) von Hawaii, Taf. I, Nr. 3.

IV, *C*ᵃ, 2577. Flageolet aus Thonerde, mit Schalltrichter am unteren Ende. Empfindlicher Ton, der nur bei schwachem Anblasen entsteht. 23 *cm* Länge. Mexico *[B]*. Taf. I, Nr. 2.

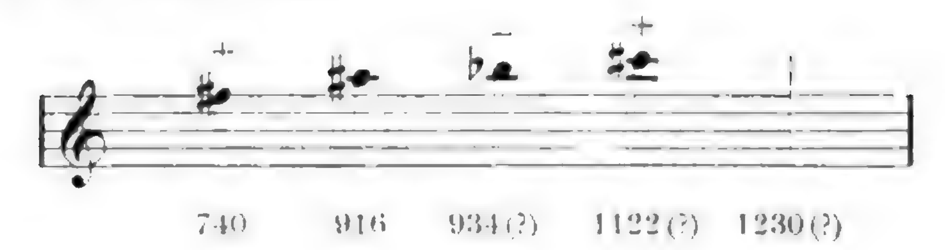


IV, *C*ᵃ, 2533. Dieselbe Stimmung wie das Vorige. Nur der fünfte Ton ist ein Pfiff.

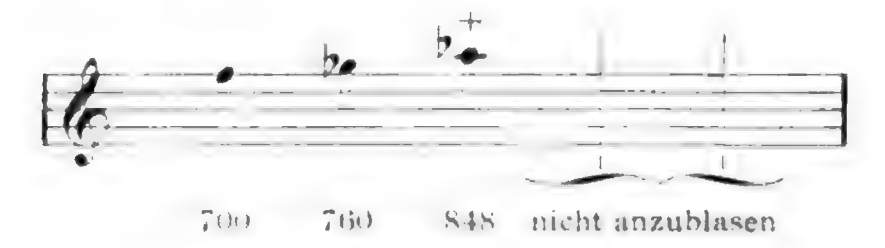
IV, *C*ᵃ, 2535. Detto.



IV, C^a, 2553. Detto.



Ohne Nummer. Detto.



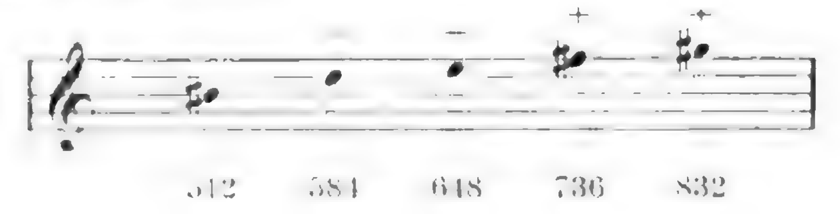
IV, C^a, 2549. Detto.



IV, C^a, 2538 Detto.



C, 208 *[H]*. Detto.



Schlussresultate.

Die Betrachtung der an den Instrumenten ersichtlichen Scala ergibt zunächst zwei Gesichtspunkte:

1. Mangel einer einheitlichen Anordnung und eines einheitlichen Ursprunges der Scala. Die Scalen verschiedener Erdtheile sind nach verschiedenen Principien gebaut worden.

2. Mangel einer einheitlichen Weiterbildung der Scala, die, wie früher häufig angenommen wurde, auf der ganzen Erde dieselben Entwicklungsstadien durchgemacht habe.

Ursprung der Scala.

Mit Bezug auf die Entstehung der Scala lassen sich, abgesehen von manchen Seitenexperimenten, zwei grosse Gruppen unterscheiden: *a)* die hauptsächlich afrikanische und *b)* die chinesisch-asiatische, die ihren Einfluss auf die Südsee-Inseln und auf Amerika erstreckt. Australien kommt bei dem Mangel an Musikinstrumenten hier nicht in Betracht.

a) Die afrikanische Gruppe ist die etwas einfachere, primitivere, direct auf unmittelbarer Gehörsempfindung beruhende. Sie hat nämlich, wie die Scalen der Negerzither unzweifelhaft beweisen, das Princip der Tonfolge des zerlegten Dreiklanges oder statt der Octave des Grundtones einen weiteren Terzenaufbau durchgeführt. Dieses Princip beruht meiner Ansicht nach auf der directen Nachahmung derjenigen Obertöne, die in der Mittellage der Blasinstrumente am leichtesten anzublasen sind. Es ist also die einfache Reproduction einer auf den Naturblasinstrumenten direct abzulesenden Tonfolge. Selbst dort, wo die Scala einen zerlegten Septimen- oder Nonenaccord gibt, dessen Töne ja in dieser Reihenfolge als Obertöne nicht vorkommen, lässt sich, wie ich glaube, ohne gezwungene Interpretation annehmen, dass die Weiterbildung nach dem Principe der fertig vorgefundenen zwei Terzen *(c—e, e—g)* erfolgt ist, dass also ohne viel Nachdenken von einem gegebenen Anfang nach demselben Principe weitergebaut wurde. Über die kleinen Abweichungen in der Stimmung dürfen wir nicht zu absprechend urtheilen, wenn wir bedenken, dass die Eingebornen eine zu genaue Stimmung wegen der noch unausgebildeten (aber doch vorkommenden) Harmonik nicht brauchen, und wenn wir ferner bedenken, wie grosse Differenzen wir auch in unserer temperirten Stimmung ignoriren. Man setze nur in den Notenbeispielen überall die enharmonischen Verwechslungen, die ja auch bei unserem harmonisch viel anspruchsvolleren Gehöre möglich sind, und man wird sehen, wie klar das Accord- oder Terzenprincip zum Ausdrucke kommt. Selbst bei manchen Flöten

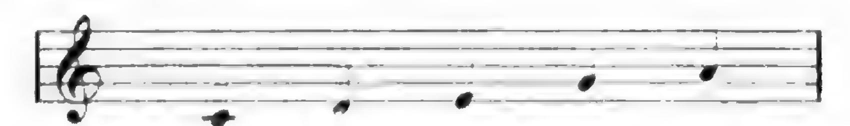
kommt manchmal das Terzenprincip zum Durchbruch. Andere weichen allerdings von diesem Princip ab. Nach einem grossen Obertonintervall im Anfange kommt eine Reihenfolge von Tönen, bei deren Wahl überhaupt kein Princip erkenntlich ist. Ich glaube, dass bei vielen dieser Flöten (in Afrika wie in anderen Continenten) es dem Verfertiger überhaupt nur darauf ankam, durch willkürlich eingebohrte Löcher verschiedene Töne, gleichgiltig welche, zu produciren.

Das System der Naturtöne ist keineswegs auf Afrika beschränkt, auch auf den Südsee-Inseln, in Central- und Südamerika kommen Tonfolgen dieser Art vor. Sie bestätigen in deutlicher Weise die Theorie Fillmore's, dass die primitive Musik sich überall mit Vorliebe innerhalb der Naturtöne hält. Fillmore führte diese Thatsache auf ein »latentes Harmoniegefühl« zurück. Man braucht aber diese Hypothese einer nicht näher definirbaren Latenz gar nicht anzuwenden und kann die directe Empfindung dieser sich auf allen Blasinstrumenten leicht ergebenden Tonfolgen und der aus ihrem gleichzeitigen Erklingen sich von selbst ergebenden, direct wahrzunehmenden Harmonien als genügende Erklärung dieser Thatsache betrachten. Noch unnöthiger ist es, mit Sapper das Vorkommen der zerlegten Accorde vom Vogelgesange abzuleiten, umsomehr, als die von ihm selbst angeführten Beispiele des Vogelsanges ihrer Mehrzahl nach sich nicht innerhalb der Naturtöne abspielen.

Eine Ausnahme von diesem Terzensysteme macht nur die Marimba. Wie kommt dieses Instrument mit seiner offenbar heptatonischen Scala unter die nach dem Terzenprincipe gebauten Scalen Afrikas? Ich glaube, es ist überhaupt nicht autochthon, sondern aus Asien mit der chinesischen Scala eingeführt. Schon die äussere Form, die ursprüngliche halbkreisförmige Anordnung der Platten erinnert an ähnliche chinesische und Hindu-Instrumente. Die ganze Anlage der Scala mit ihrer offenbar berechneten und systematisch ausgedachten Tonfolge ist viel zu complicirt für die Völkerstämme Afrikas, als dass man annehmen könnte, das Instrument sei auf afrikanischem Boden entstanden. Um nun die Scala der Marimba auf ihren chinesischen Ursprung zurückzuführen, wollen wir die

zweite, asiatisch-chinesische Gruppe der Scalenbildung zunächst näher betrachten.

b) Die chinesische zwölfstufige Scala beruht auf dem Principe der Quintenstimmung. Bei dieser Stimmung werden sämmtliche Intervalle zu gross, selbst die Octave. Nur die erste Quinte bildet davon eine Ausnahme. Der Ausgangspunkt dieses Systems ist $d^2 = 601\frac{1}{2}$ Schwingungen. Die Folge dieses Principes ist, dass die Chinesen theoretisch nie zu einer harmonischen Musik kommen konnten, weil ihre sämmtlichen Intervalle zu gross waren. Allerdings hat die Praxis diesen Fehler corrigirt. Die Sänger sangen, und das ist charakteristisch, trotzdem in reinen Octaven. Sie ignorirten hier die Theorie; aber in dieser praktischen Correctur weiterzugehen, haben die Chinesen in der Praxis nicht gewagt. Darum sind sie ewig in der ihnen übermächtigen Theorie stehen geblieben. Eine weitere Consequenz war die, dass die auf Grund der Quintenstimmung entstandenen zwölf Lüs ein für ihre Praxis viel zu complicirtes System waren, das sie praktisch nicht verwerthen konnten. Sie construirten sich daher zu ihrem praktischen Gebrauche durch Hinweglassung einiger Lüs eine sieben- und fünfstufige Scala, welch letztere bis 1300 n. Chr. in Gebrauch war.[1] Ihre Gestalt war auf die Tonica *c* reducirt:

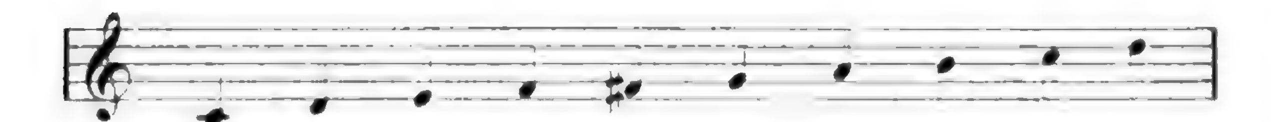


Zur Zeit der Chwa-Dinastie (1100 v. Chr.) wurde ihr *fis* und *h* eingefügt. Da kam die mongolische Invasion (XIV. Jahrhundert) und mit ihr eine neue heptatonische Scala, die genau unserer jetzigen diatonischen Scala entspricht, nur mit dem Stimmungsunterschied, dass die Octave des Grundtons, da sie nicht rein ist, als weiterer neuer Ton aufgefasst wird, und demgemäss auch das nächste *d* als weiterer neuer Ton gelten muss. Hier hört die Bezeichnung auf. Die Scala lautet also:

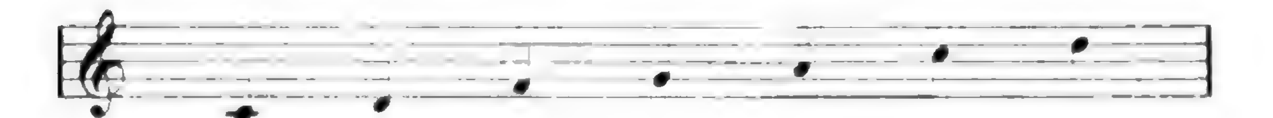


[1] **Aalst**, Chinese Music. Shanghai 1884, p. 14.

Wo die Mongolen diese Scala gefunden hatten, ist mir aus den Quellen nicht klar geworden; ich vermuthe aber, dass sie nichts Anderes war als die praktisch gebrauchte alte Lü-Scala mit Hinweglassung des Chromas. Die nächste Consequenz dieser Invasion war eine Verschmelzung der beiden Scalen zu folgendem Bild:



Schliesslich ist man dabei nicht geblieben und ist theoretisch wieder zur heptatonischen Scala zurückgekehrt, die der unseren entspricht, und hat zum praktischen Gebrauch abermals eine fünfstufige eingeführt, die nach dem jetzigen Usus lautet:



Es ist gar kein Zweifel, dass in China die fünfstufige Scala eine Ableitung aus der siebenstufigen ist, und sich weder hier, noch sonst irgendwo in der Welt der Nachweis führen lässt, dass die Entwicklung der Scala auf der ganzen Erde von der fünfstufigen zur siebenstufigen Form erfolgt sei, wie Karl Engel behauptete. Ebenso lässt sich nicht aufrecht erhalten, was Helmholtz auf Grund des seinerzeit noch unzureichenden ethnologischen Materials annehmen musste, dass man im Bau der Scala zunächst grössere und später erst kleinere Intervalle annahm. Manches vereinzelte Scalenexperiment, das sich ein Instrumentenmacher auf einem primitivsten Exemplare leistete, geht von vornherein von viel kleineren Intervallen aus, als uns heute wünschenswerth erscheint, und das grosse, wohlausgedachte chinesische System, das schon 2000 v. Chr. abgeschlossen war, trifft von vornherein ungefähr unsere heute üblichen Intervalle. Die ganze Geschichte der Scala ist eigentlich nichts Anderes als ein Kampf um die Stimmung innerhalb dieser Scala. Sie blieb gewissermassen nach oben offen (in Folge der zu weiten Intervalle und der zu hohen Octave), und man wusste nicht, wo man die auseinandergehende Tonreihe

zuschnüren soll, um zu einem einheitlichen Abschlusse zu gelangen. Allerdings dauert dieser Kampf über 3000 Jahre. Aber er ist eigentlich nur ein theoretischer Streit, der freilich in vielen Fällen die Entwicklung der Praxis hindert. Von vornherein versuchen ja die chinesischen Sänger die strenge Theorie zu durchbrechen, indem sie reine Octaven singen, und auf den Südsee-Inseln singt mancher Stamm trotz der theoretisch zu grossen, daher dissonirenden Terz, ruhig in Terzen, und nimmt sie dabei viel kleiner, als das auf den Instrumenten befolgte Verhältniss von $^{81}/_{64}$ erheischen sollte. Hätte die Theorie nur der Praxis gefolgt, man wäre viel früher zu einem Abschlusse gekommen.

Wieso die Chinesen zu dieser Lü-Scala gekommen sind, darüber lässt sich nur aus den Sagen eine ungefähre Andeutung entnehmen. Von diesen können wir einige gleich als von vornherein unbrauchbar ausscheiden, denn es bedarf keines Beweises, dass die chromatische Scala, wie sie die Chinesen theoretisch kannten, weder in der Stimme des Menschen, noch im Gesange der Vögel (wie mystisch sie auch immer gewesen sein mögen), noch im Rauschen des Gelben Flusses ohneweiters gefunden werden konnte. Wohl aber lässt sich annehmen, dass ein speculativer Kopf (in der Sage Ling Lun), wie sie die Chinesen immer gewesen sind, seine Bambusflöten in verschiedenen Längen, nach der geometrischen Progression 1, 3, 9, 27, 81 etc. geschnitten habe, wodurch allerdings eine Quintenreihe gegeben ist. Und eine Speculation ist diese Scala offenbar, das beweist schon die immerwährende Beziehung der einzelnen Lüs zu den zwölf Stunden des Tages und den zwölf Monaten des Jahres. Nur wer mathematisch-astronomisch speculirt, konnte ein derartiges System ersinnen.

Leider ist die Ausnützung dieses für primitive Verhältnisse gewiss genialen Quintensystems an der Überspeculation gescheitert. Statt die Beziehung zur Praxis aufrecht zu erhalten und von ihr die einzig richtige Correctur des Quintenzirkels zu entlehnen, haben sich die chinesischen Musiktheoretiker metaphysisch verrannt.[1]

[1] Man denke nur an die interessante philosophische Begründung des Quintenprincips durch die Chinesen. Die Quinte, sagen sie, sei deshalb der

Die Übermacht der Theorie und die Rathlosigkeit der Praxis erkennt man am besten an denjenigen Scalen, die notorisch von den chinesischen abgeleitet sind. So namentlich an der Scala Japans.

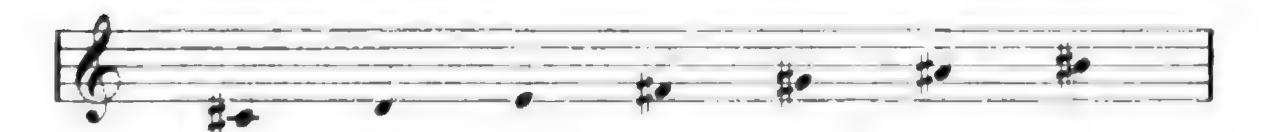
Die Japanesen wissen heute noch nicht recht, einen wie grossen Theil ihrer complicirten Theorie sie in der Praxis weglassen oder dahin aufnehmen sollen. Ihre Saiteninstrumente werden nach dreifacher Art gestimmt, und obgleich in Japan die Stimmung der Instrumente keineswegs identisch ist mit der bestehenden Scala, so möchte ich doch der Anschaulichkeit halber diese drei Arten der Stimmung nebeneinander setzen. Ihre Namen sind: Hirajoshi, Kumoi, Iwato.



Die halben Noten bezeichnen diejenigen Töne, die nur in der höheren classischen Musik gebraucht werden. Über die genauen Stimmungsverhältnisse finde ich nirgends zuverlässige Angaben. Die japanischen Musiker scheinen gar nicht recht zu wissen, was mit diesbezüglichen europäischen Fragen eigentlich gemeint ist. Ja, sie wollen, meiner Vermuthung nach,

Maassstab ihrer Tonberechnung, weil sie das Verhältniss 2 : 3 repräsentire. Die Zahl 3 aber sei das Symbol des Himmels, 2 das der Erde und eine Harmonie zwischen beiden das Grundprincip der Weltordnung, von der die Musik ein Abbild sei. Daher auch der Vergleich der einzelnen Töne der fünfstufigen Scala mit Staatseinrichtungen, den 5 Elementen, 5 Grundfarben, 5 Planeten etc. etc. Ähnlich hat über 3000 Jahre später Schopenhauer die Töne des Dreiklanges verglichen mit dem Mineralreiche, Pflanzenreiche, Thierreiche und die Octave mit dem Menschen. Der Versuch, die Harmonielehre nach Principien der Hegel'schen Philosophie aufzubauen und die Musik für eben so »vernünftig« zu erklären wie »alles Wirkliche«, beruht auf demselben Gedankengang. Die Philosophie ist hier volle 3000 Jahre auf demselben Punkte stehen geblieben.

geradezu eine gewisse Freiheit der Intonation. Darin liegt schliesslich auch nach älteren europäischen Begriffen nichts so Merkwürdiges. Wir dürfen nicht vergessen, dass das europäische Spinett des vorigen Jahrhunderts, das oft bis zu drei Tönen an eine und dieselbe Saite »gebunden« hatte, auch ein Auf- und Abgleiten der Intonation zuliess. Als dann das ungebundene Spinett und Hammerclavier aufkam, empfanden die Musiker die unverrückbare Fixirung des Tones geradezu als Mangel, als ein Hinderniss des Ausdruckes. In Anbetracht dieses Umstandes werden wir auch in diesem Punkte über die Japanesen nicht zu streng urtheilen dürfen. Vergegenwärtigen wir uns ferner, dass der Theorie nach die japanesische Scala folgendermassen lautet:[1]



Vergegenwärtigen wir uns ferner, dass auf japanischen Flöten (Fuyé) und Piccolos (Hichiriki) verschiedener Art der Instrumentenmacher gegen die Theorie zu Anfang und zu Ende Vierteltöne anbringt und der Intonation absichtlich einen kleinen Spielraum lässt, weil die Musikanten es für besonders schön halten, derartige Auf- und Abstriche der Intonation zu produciren, so werden wir uns einen Begriff machen von der heillosen Verwirrung, die in der japanischen Musik herrscht, die einheitliche Geschmacksrichtungen und feststehende Principien einfach nicht entstehen lässt und durch beständige Verrückung der Basis eine ästhetische Entwicklung und damit die Ausbildung einer eigentlichen Tonkunst verhindert. In der That ist diese chinesische und japanesische Musik nie viel mehr gewesen als eine Tonspielerei. Die andere charakteristische Eigenschaft dieser Musik ist, dass Theorie und Praxis nie ineinandergreifen und in Folge dessen niemals durch gegenseitige Beeinflussung ihre Fehler corrigiren. Die Folge davon ist, dass die Theorie und ihre Scala nur eine Art Leitmotiv ist,

[1] P. T. Piggott, The Music and Musical Instruments of Japan. London 1893.

das der Instrumentenmacher zum Theil berücksichtigt, während er zum anderen Theil bei jedem Instrument, ja fast bei jedem Exemplar macht, was er will.

Von dem Standpunkte dieses Resultates aus bitte ich auch, die Beispiele der Tonscalen der Instrumente der Südsee zu betrachten, von denen ein grosser Theil schon durch die äussere Form den chinesisch-japanesischen Ursprung verräth. Sie zerfallen in drei Gruppen:

1. in solche, bei denen an ein bestimmtes System überhaupt nicht gedacht ist;

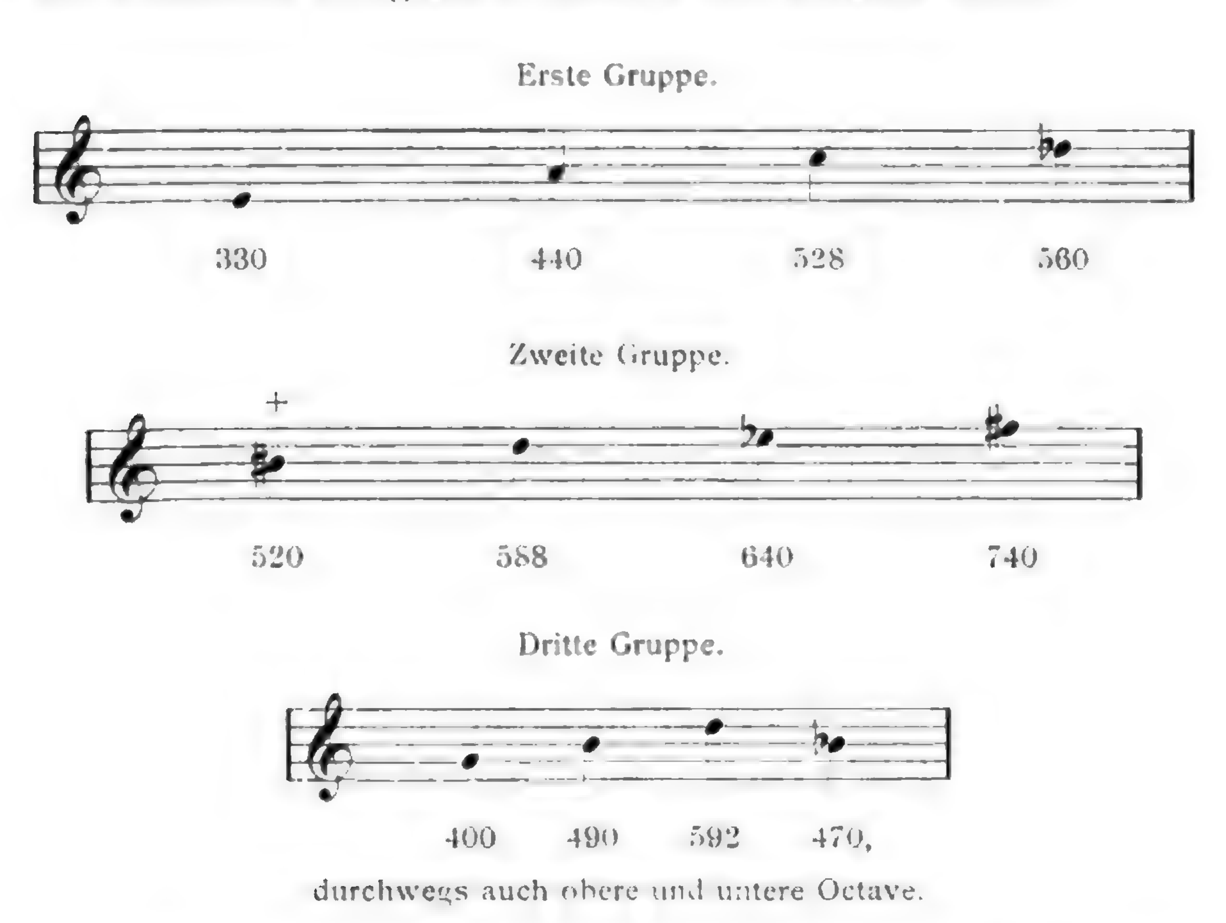
2. solche mit chinesischer oder japanesischer Scala (eventuell mit geringen Abweichungen) und dem beliebten grösseren Intervall zu Anfang. Panpfeifen haben zu Ende häufig eine Reihe von Rohren, die wegen ihrer kleinen Dimension einzeln kaum anzublasen sind, die aber, rasch überblasen, den beliebten Endschnörkel produciren. Ich glaube, dass durch diese Manier die Instrumentenmacher den Spielern die Nachahmung der Unarten (nach einheimischen Begriffen: Vorzüge) der Sänger ermöglichen wollten. Schliesslich ist ja auch bei unseren Landleuten ein Ansatz von unten herauf und ein Abschluss mit einem Juchzer üblich;

3. solche vereinzelte Flöten, deren Tonreihe zerlegte Accorde bilden. Ich glaube, dass diese Tonreihe sich dadurch erhält, dass die Eingeborenen mancher Inseln gewohnt sind, in den von China entlehnten sogenannten Rohrorgeln oder in den javanischen Klangstöcken Accorde zusammenzustellen (also abermals Harmoniegefühl).

Beim japanesischen Shō (Rohrorgel entwickelterer Form) kommen nach der Tabelle des Unterrichtsdepartements in Tokyo folgende Accorde vor, die in Compositionen für das Shō angewendet werden:



Ich selbst habe auf Klangrohren aus Java folgende Zusammenstellungen gefunden. Vier Bogen zu je drei Klangrohren, die sich innerhalb des Rahmens frei bewegen und dadurch einen Klang produciren, gehören zusammen (Taf. IV). Man bekommt einen Moll- oder Duraccord, je nachdem man den ersten, zweiten und dritten oder ersten, dritten und vierten zugleich schüttelt. Jeder Bogen hat denselben Ton in drei Octaven (allerdings nicht rein) gestimmt. Der Klang ist dem der Schweizer Kuhglocken ähnlich. Die Accorde lauten:



Durch die Unreinheit der oberen und unteren, kaum messbaren Octaven, erhält man auch bei den Klangrohrbögen der zweiten Gruppe den oberflächlichen Gehörseindruck, dass es sich hier um den Accord *h d fis* oder *h dis fis* handelt.

Überhaupt muss ich bei allen diesen Accorden, des Klangrohres sowohl, wie der Rohrorgeln, darauf aufmerksam machen, dass der Gehörseindruck des ganzen Accordes als solcher nicht immer so ist, wie man ihn nach der physikalischen Messung der einzelnen Töne erwarten sollte. Man hört, namentlich im ersten Moment, manches lediglich als Klangfarbe, was erst bei der genaueren Prüfung der einzelnen Töne als Dissonanz (nach

unserem Begriffe) erscheint. Es wäre daher übereilt, von diesen Einzelmessungen aus sofort die Thatsache abzuleiten, dass die Consonanz- und Dissonanzempfindung jener Völker nothwendigerweise eine andere gewesen sein müsse als die unsere. Man muss nach der Totalwirkung des effectiven Klanges, nicht nach dem Ergebnisse der physikalischen Analyse schliessen. Letztere ist nur theoretisch richtig, aber diese Theorie wird namentlich im Gesange nach Belieben corrigirt und ignorirt. Eine Entwicklungsgeschichte der physikalischen Stimmung und der theoretischen Consonanz- und Dissonanzbegriffe ist deshalb keineswegs zugleich nothwendigerweise eine Entwicklungsgeschichte unserer Gehörsempfindung. Diese letztere ist meiner Ansicht nach immer dieselbe gewesen, aber die Theorie ist in Folge verschiedener Stimmungsversuche zu verschiedenen Zeiten zu verschiedenen Ansichten über Zusammenklang und Missklang gekommen. Und diese Theorie war es, die zu Zeiten mächtig genug war, die Praxis, die sich davon emancipiren wollte, einzuschüchtern oder umgekehrt auf Pfade zu führen, die trotz ihrer theoretischen Richtigkeit noch immer als »falsch« oder mindestens als scharf klingend empfunden worden sein konnten. Unter die letztere Kategorie rechne ich auch aus neuerer Zeit die Quarten- und Quintenfolgen Hucbald's, die wahrscheinlich lediglich dazu dienten, den schnarrenden Klangcharakter der Orgel im Gesange nachzuahmen, die aber keineswegs ein Beweis dafür sind, dass diese Intervallenfolge für sich betrachtet oder aus dem Klangzusammenhange der Octavenverdoppelungen herausgerissen, eine andere Gehörsempfindung hervorgerufen hätte als bei uns. Es handelt sich in solchen Fällen hauptsächlich um Klangfarbe oder vielleicht richtiger Klangfülle.

Es ist auffallend, dass bei jenen Völkerschaften, die zu einem wohlausgearbeiteten System nicht gekommen sind — wie fast sämmtliche Stämme Afrikas — Terzenparallelen eine so häufige und grosse Rolle spielen. Die mehr theoretisirenden, vorgeschritteneren Chinesen und ihre Nachahmer, die Griechen und die musikalischen Europäer des Mittelalters, scheinen in allen Fällen, wo es sich um Klangfülle handelt, auch Quinten und Quarten nicht zu verschmähen, vermuthlich, weil ihnen

diese theoretisch am reinsten gerathen, während die Te zen (nach der Quintenstimmung) zu gross ausfallen und darum unrein klingen. Die Afrikaner aber, die sich lediglich nach dem Gehör richten, und ihre Intervalle von den Naturblasinstrumenten und deren mittlerer Obertonreihe gelernt haben, verschmähen die Terz nicht, sie spielt im Gegentheil in allen Gesängen und bei Construction von Tonreihen auf Instrumenten, auf denen der Ton erst construirt werden muss, die Hauptrolle.[1]

Somit haben die rein physikalischen Eigenschaften der Blasinstrumente für das Zustandekommen der primitivsten Tonreihe (Scala will ich noch nicht sagen) und für unsere ursprünglichste Intervallempfindung die grösste Bedeutung.[2]

Ich muss bei dieser Gelegenheit auch meine eigene frühere Vermuthung schonungslos fallen lassen, dass bei der Construction der Scala die technische Handhabung des Instrumentes massgebend gewesen sei. In einzelnen Fällen mag das ja der Fall sein. Als allgemeines bildendes Princip hätte ich diesen Umstand wahrscheinlich nie betrachtet, wenn ich zur rechten Zeit eine genügende Praxis in der Handhabung der Instrumente der Naturvölker gehabt hätte. Den weiteren Einfluss der Instrumententechnik, namentlich auf die Beschränkung auf Halbtonstufen und das temperirte System muss ich jedoch aufrecht erhalten.

Die Schlussergebnisse meiner Untersuchung glaube ich in folgenden Punkten zusammenfassen zu können:

---

[1] Vergl. Chap. IV meiner »Primitive Music«, London 1893. Auch die Musikbeispiele am Schlusse.

[2] Ich habe diesen Gedanken schon 1885 in meiner Ästhetik der Tonkunst mit den Worten ausgedrückt: »Die Musik als Kunst fängt erst bei der Instrumentalmusik an«, d. h. bei den durch sie fixirten Tönen. Leider bin ich damals vollständig missverstanden worden. Man hat den Satz aus dem Zusammenhange herausgerissen und ihm den Sinn unterlegt: ich erkenne die moderne Vocalmusik nicht als mit der Instrumentalmusik gleichberechtigte Kunstgattung an. Ein derartiger Widersinn ist mir niemals eingefallen; ich sprach damals lediglich von der historischen Entwicklung. Es gereicht mir zur besonderen Befriedigung, dass Stumpf in seinen »Beiträgen zur Musik und Musikwissenschaft«, S. 62, auf ganz selbständigem Wege zu demselben Resultate kommt. Die historische Grundlage seiner Consonanztheorie scheint mir durch nichts mehr bestätigt zu werden als gerade durch die ethnologischen Untersuchungen.

1. Es gibt keinen gemeinsamen Ursprung der Scala, die in allen Theilen der Erde denselben Entwicklungsgang durchgemacht hätte.

2. Abgesehen von unzähligen Nebenexperimenten, gibt es zwei grosse Principien des Scalenbaues, die ganze Länder beherrscht haben: das sensitive und das speculative, oder das afrikanische und das chinesische. Das eine baut nach den Naturtönen der Blasinstrumente (hauptsächlich Terzen), also im Wesentlichen objectiv identisch mit einem mehr oder weniger latenten Harmoniegefühle, das auch gerade bei afrikanischen Völkerschaften unverkennbar ist. Das andere ist die reine Quintenstimmung, die zur zwölfstufigen chromatischen und später zur siebenstufigen Scala führt.

3. Alle weitere Scalenbildung bis auf unsere Zeit ist nur ein Kampf um die Stimmung dieser Scala, die alle übrigen Versuche verdrängt.

4. Die praktische Musik hat sich wiederholt Correcturen der theoretischen Stimmung der Scala erlaubt, so dass die Geschichte der Consonanztheorie keineswegs zugleich eine Entwicklungsgeschichte unserer Gehörsempfindung bildet.

5. Alle Formen der Tonproduction, die das moderne Orchester kennt, sind schon den Naturvölkern bekannt gewesen. Die Cultur hat zwar neue äussere Formen der Instrumente erfunden, andere weggelassen oder sie technisch vervollkommt, aber eine neue Tonproduction kennt sie nicht. Es gibt also Schlaginstrumente, Geigen, Floten, Oboën, Clarinetten, Trompeten (Hörner), Posaunen.

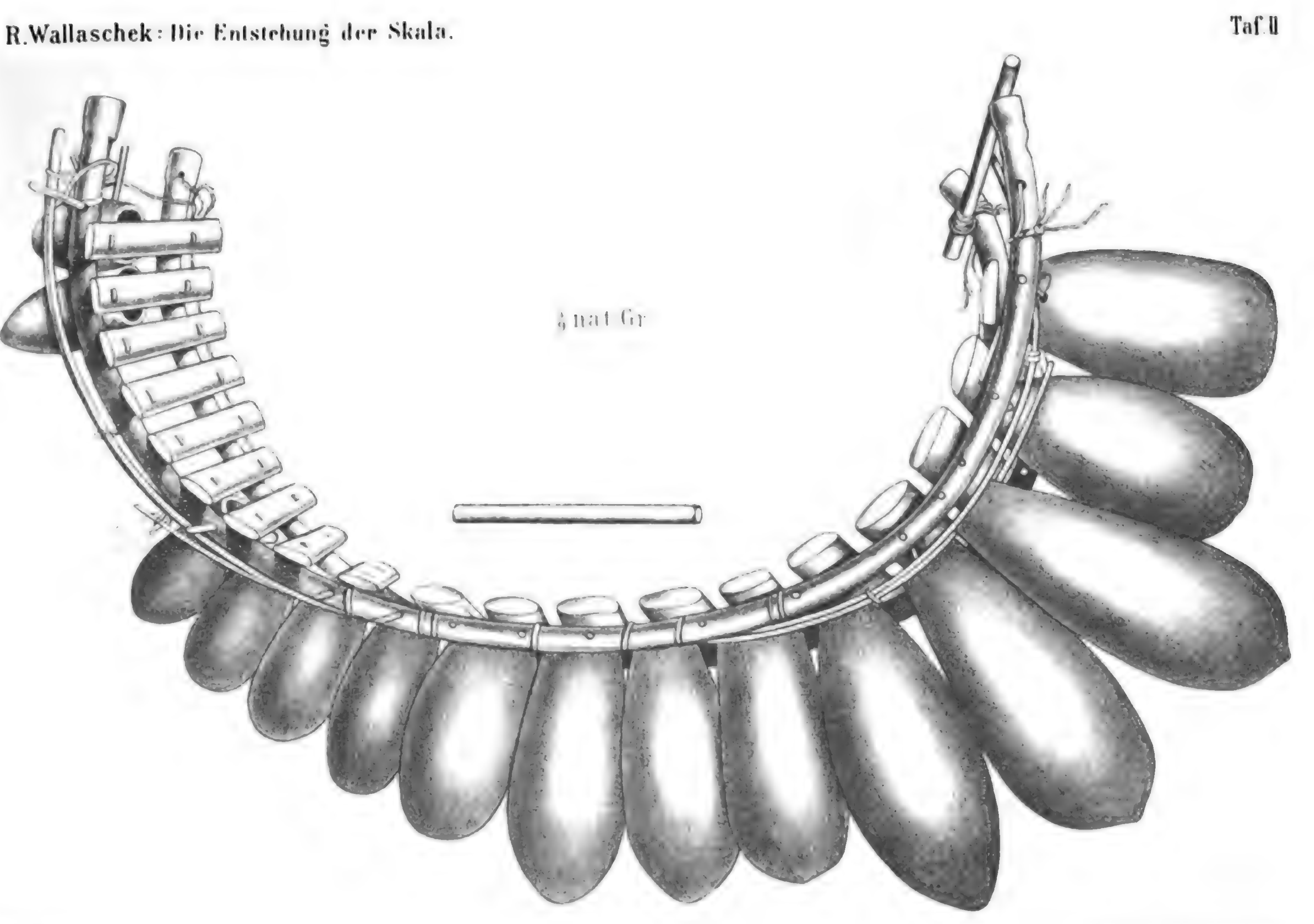
6. Musik wandert, weder Scalen, noch Instrumente sind überall autochthone Erfindungen. Mit ihr wandern zuweilen auch die Texte und sämmtliche Darstellungsmittel.

Am Schlusse der Arbeit erfülle ich die angenehme Pflicht, Herrn Professor Stumpf, der die Anregung zu der ganzen Untersuchung gegeben hat, für die werthvollen Rathschläge zu danken, mit denen er mir jederzeit an die Hand ging, sowie für die Mühewaltung bei Herstellung der Photographien, für die ich auch Herrn Professor Luschan in hohem Grade verpflichtet bin.

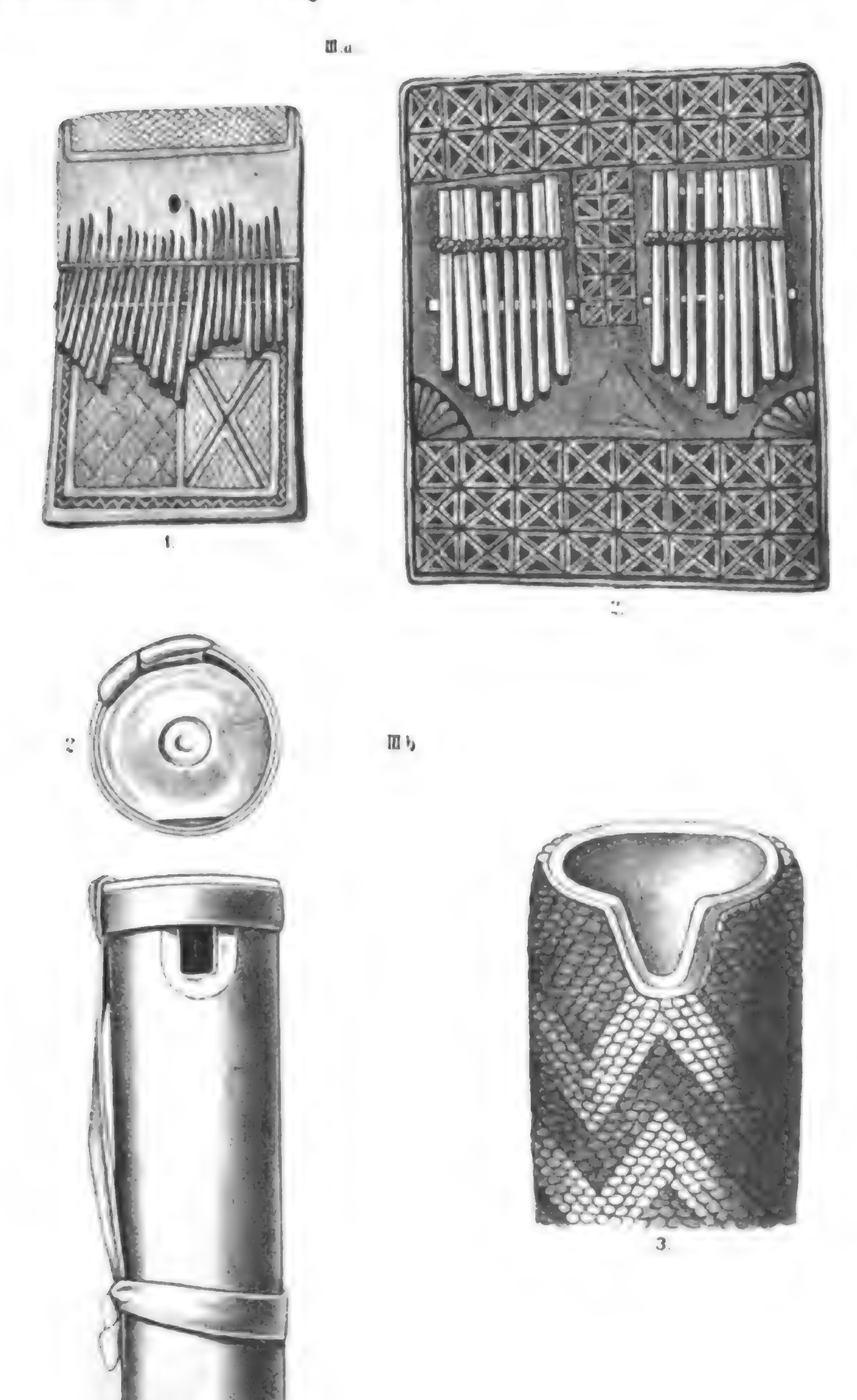


Autor del. Lith Anst. v. Th. Bannwarth Wien.

R. Wallaschek: Die Entstehung der Skala. Taf. II



Autor del. Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien



Autor del. Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

Inhalt.

Vorwort 905
Centralafrika 906
Ostafrika 910
Westafrika. Lunda und Angola. Loango. Camerun. Fernando Po . . . 912
Asien 919
Südsee 922
Südamerika 932
Centralamerika 935
Schlussresultate 936
Ursprung der Scala 937
a) afrikanische Gruppe 937
b) chinesische Gruppe 939
Accorde 944
Summarium 947

Temperaturmessungen im Quecksilberbergwerk von Idria

von

Th. Scheimpflug und **Max Holler**
k. u. k. Linienschiffs-Lieutenant *Bergbau-Eleve.*

(Mit 1 Karte.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. April 1899.)

Im Herbste 1898 wurde mir die Ehre zu Theil, den von Herrn Oberst v. Sterneck, Vorstand der geodätischen Gruppe des k. u. k. militär-geographischen Institutes, im Auftrage der kaiserl. Akademie der Wissenschaften durchgeführten Schweremessungen zugezogen zu werden. Es waren im Ganzen sechs Observatorien eingerichtet worden:

Ein Observatorium ober Tags, eines im Wasserstollen, eines im III. Lauf, eines im VI. Lauf und eines im XI. Lauf.

Das Vorhandensein auffallender Temperatur-Anomalien im Bergwerk war bekannt und waren deshalb im VI. Lauf zwei Stationen eingerichtet worden, eine an einer kalten und eine an einer warmen Stelle. Um den Gesteinstemperaturen ein Augenmerk zuwenden zu können, waren in jeder Station Bohrlöcher von etwa $^1/_2$ *m* Tiefe gemacht worden, in welche während der Pendelbeobachtungen Gesteinsthermometer gesteckt wurden. Selbe wurden vor und nach der Beobachtung abgelesen. Diese Temperaturmessungen ergaben ein sehr merkwürdiges Resultat:

	Gesteinstemperatur	Seehöhe
Wasserstollen	$11^1/_2$°	329 *m*
III. Lauf.	$17^1/_2$	231
VI. Lauf, kalt	16·3	180
VI. Lauf, warm	25·3	180
XI. Lauf	16·0	74

Es war also im VI. Lauf, ja sogar im III. Lauf wärmer als im XI. Lauf; es fand also nicht nur keine regelmässige Temperaturzunahme mit der Tiefe, sondern sogar eine Temperaturumkehrung statt.

Diese Thatsache brachte mich auf den Gedanken, Temperaturmessungen in ausgedehnterer Weise vorzunehmen. Es gelang mir, Herrn Max Holler, Bergbau-Eleven in Idria, für die Sache zu gewinnen und benützte ich mit diesem Herrn vereint, die Pausen zwischen den Pendelbeobachtungen.

Unsere Ausrüstung bestand aus einem Assmann'schen Aspirationspsychrometer zur Messung der Lufttemperaturen, einem gewohnlichen 100theiligen Thermometer als Gesteinsthermometer, den Abbaukarten des Bergwerkes, einem Messband, Bleistift und Millimeterpapier. Beobachtet wurde in der Art, dass der Aspirator des Psychrometers, dessen beide Thermometer als trockene benützt wurden und das an irgend einem Holzpfosten befestigt war, durch 10 Minuten laufen musste, bevor man an die Ablesung der Thermometer schritt, wobei sich der Beobachter während der Laufzeit in grösserer Entfernung abseits aufhielt, die Ablesung selbst aber womöglich unter dem Wind und möglichst rasch bewerkstelligte. Das Gesteinsthermometer wurde in Ermangelung eigener Bohrlöcher, deren Herstellung in so grosser Zahl zu kostspielig gewesen wäre, in eine dem Luftthermometer möglichst benachbarte Gesteinsspalte gesteckt und darauf geachtet, dass die Kugel des Thermometers in directen Contact mit dem Gesteine komme.

Nachdem das Gesteinsthermometer ausgelegt wurde, bevor man an die Aufhängung des Aspirationspsychrometers schritt, dieses circa 10 Minuten laufen musste, bevor es abgelesen werden konnte, und die Ablesung des Gesteinsthermometers erst nach der des Luftthermometers erfolgte, ergibt sich für das Gesteinsthermometer eine Accomodationszeit von rund 15 Minuten, die ein Vorversuch als vollkommen genügend erwiesen hatte.

Die Aufzeichnung der Messungsresultate besorgte Herr Holler an Ort und Stelle in der Art, dass er auf Grund der officiellen Abbaukarten für jeden Horizont eine Skizze machte,

auf welcher der Ort der Messung durch seine Coordinaten. und das Messungsresultat in Ziffern in Form eines Bruches: $\frac{\text{Gesteinstemperatur}}{\text{Lufttemperatur}}$ ersichtlich war. Der grossen Ortskenntniss dieses Herrn und seiner demgemäss vorzüglichen Führung war auch die relativ rasche und anstandslose Durchführung der Arbeit zu verdanken.

Die so hergestellten Skizzen bildeten später die Grundlage der hiermit der Öffentlichkeit übergebenen Isothermen-Kärtchen (siehe Karte). Es wurden im Ganzen 8 Horizontalschnitte und 10 Verticalschnitte gezeichnet, von welch letzteren aber nur zwei publicirt erscheinen. Hiebei waren folgende Grundsätze massgebend:

1. Alle Punkte eines Laufes wurden als praktisch in einer Ebene liegend angenommen. Es ergab sich daher für jeden Lauf ein Isothermenplan.

2. Die Verticalschnitte wurden auf Grund der Isothermenpläne der einzelnen Läufe oder Horizonte entworfen.

3. Die Isothermen wurden auf Grund der Gesteinstemperaturen (Zähler der Brüche) gezogen.

4. Der gemessene Werth ist unantastbar, mag er eine noch so complicirte Curvenführung bedingen.

5. Unter mehreren Curvensystemen, die in ein gegebenes Netz von Temperatur-Côten hineingelegt werden können, ist das einfachste das wahrscheinlichste.

6. Wo zwei oder drei Ebenen, z. B. ein Horizontalschnitt und ein oder zwei Verticalschnitte zusammentreffen, müssen ihre Curvensysteme im gemeinsamen Elemente (Gerade oder Punkt) dieselbe Temperatur zeigen.

Auf diese Weise war es möglich, auf Grund von circa 200 Messungen eine räumliche Darstellung der bei Idria im Innern der Erde vorhandenen Temperatur-Anomalie zu geben.

Es zeigt sich, dass das Bergwerk von Idria mit einem nicht nur nach oben, sondern auch nach allen Seiten, ja sogar nach unten abgegrenzten Wärmekörper räumlich nahezu zusammenfällt, dass das Temperaturgefälle an verschiedenen Stellen sehr verschieden, aber im Allgemeinen ziemlich gross ist, indem besagter Wärmekörper bei einem horizontalen Durchmesser

von etwa 450—600 *m* und einer Höhe von etwa 150—200 *m* an seinen Aussenflächen Temperaturen von 14° und darunter, ja stellenweise bis 10° aufweist, während im Innern die Temperatur bis etwa 27° steigt und früher mehr als 30° C. erreicht haben soll. Wie weiters die den Isothermkärtchen eingeschriebenen Brüche zeigen, schmiegen sich die Lufttemperaturen beinahe ganz den Gesteinstemperaturen an, derart, dass auch die Wetterführung durch die Gesteinstemperaturen bedingt ist.

Die Gesteinstemperatur des Wasserstollens 11·5°, in Seehöhe 329 *m*, und die Gesteinstemperatur des XI. Laufes 16·0° in Seehöhe 74 *m*, ergeben eine Tiefenstufe von 1° pro 56·6 *m*.

Vergleicht man damit die in dem Werke »Allgemeine Erdkunde« von Hann, Hochstetter und Pokorny gegebene mittlere geothermische Tiefenstufe von 1° pro 35 *m* mit einem Spielraum von 1° pro 15·5—115·5 *m*, so zeigt sich, dass die allgemeine Temperaturzunahme nicht allzusehr von der mittleren abweicht, sobald man den localen Wärmeherd ignorirt. Die Temperatur von circa 14° der umliegenden tauben Gesteinsschichten (Gailthaler Schiefer) in den mittleren Horizonten zeigt auch nichts Auffallendes. Die Temperatur von 12°, 11°, ja 10° C. in relativ grossen Tiefen, wie beim Maria Theresien-Schacht und im Gerstorf-Liegendschlag, scheint auf die dort thatsächlich vorhandenen Tagwässer und ihre stark abkühlende Wirkung zurückzuführen zu sein. Verzeichnet doch die Geschichte des Bergwerkes im Maria Theresien-Schacht einen ziemlich bedeutenden Wassereinbruch und ist derselbe deshalb in den unteren Läufen noch heute verstürzt.

Im XI. Lauf, in der Nähe des Maria Theresien-Schachtes, wurde die Wassertemperatur mit 14·7° gemessen, daneben die Gesteinstemperatur mit 15·8°. Im VII. Lauf im Gerstorf-Liegendschlag desgleichen Wassertemperatur 10·2°, Gesteinstemperatur 11·5°.

Der Maria Theresien-Schacht ist deshalb auch der Schacht der constant einziehenden Wetter mit starker Verdunstung in Folge des heftigen Zuges, während der Inzaghi-Schacht wegen der warmen Schichten, die er durchsetzt, der Schacht der ausziehenden Wetter ist, und das in solchem Maasse, dass er an

seinem oberen Ende, im Inzaghi-Einfahrtsstollen, wie ein Schlot erwärmt ist.

Nachdem auf diese Art die räumliche Vertheilung der Temperatur im Bergwerke so gut als möglich ermittelt war, drängte sich die weitere Frage auf: »Bleibt diese Temperaturvertheilung lange Zeit hindurch dieselbe, oder ist sie raschen Veränderungen unterworfen?«

Zur Beantwortung dieser Frage hatte Herr Bergrath Schmidt die Güte, mir die Aufzeichnungen von Temperaturmessungen zur Durchsicht zu überlassen, die seit 1889 von Amtswegen angestellt werden.

Die Frage, ob diese Messungen stets vom gleichen Beobachter, mit den gleichen Thermometern und an den gleichen Orten gemacht wurden, und ob über etwaige Änderungen Näheres bekannt sei, muss leider in negativem Sinne beantwortet werden. Die Beobachtungen, die ja nicht dazu bestimmt waren, wissenschaftlichen Zwecken zu dienen, sind durchaus nicht homogen. Insbesondere erscheinen die Beobachtungsorte nicht genügend genau angegeben und häufigem Wechsel unterworfen. Nachdem aber die räumliche Temperaturvertheilung, wie die Kärtchen zeigen, eine sehr ungleichmässige ist, und es Stellen gibt, wo wenige Meter Ortsveränderung schon um Grade andere Temperaturen bedingen, ist dieser Umstand durchaus nicht gleichgiltig.

Nichtsdestoweniger versuchte ich, aus diesem Materiale so viel wie möglich herauszulesen. Da sind vor Allem die Gesteinstemperaturen von Interesse, die in den folgenden Tabellen zusammengestellt erscheinen. Wenn auch hier über die Orte, wo die Temperatur gemessen worden, gar nichts bekannt ist, so zeigt diese Tabelle doch, dass, so lange nur an einem und demselben Orte beobachtet worden, die Temperaturen ziemlich unverändert bleiben. Die Vereinigung der in sich zusammengehörigen Daten zu Jahresmitteln gibt auch Aufschluss über die Änderungen der Gesteinstemperaturen im Bergwerke mit der Zeit und zeigt, dass selbe sehr gering sind.

Gesteinstemperaturen im Quecksilberbergwerke von Idria (Monats- und Jahres-Mittel).

An den durch Trennungsstriche bezeichneten Stellen fand offenbar ein Wechsel des Beobachtungsortes statt und ist die Messungsreihe in Folge dessen discontinuirlich.

Jahr	Monat	Lagerschiefer	Jahresmittel	Dolomiten	Jahresmittel
	III. Lauf				
1890	Juni	19·5°		17·4°	
	Juli	19·5		17·4	
	August	19·7		17·4	
	September	19·7	19·6	17·4	17·4
	October	19 7		17·4	
	November	19·7		17·4	
	December	19·7		17·4	
1891	Jänner	19·7		17·4	
	Februar	19·7		17·4	
	März	19·6		17·3	
	April	19·6		17·3	
	Mai	19·6		17·3	
	Juni	19·6	19·6	17·3	17·3
	Juli	19·7		17·4	
	August	19·7		17·4	
	September	19·6		17·4	
	October	19·6		17·3	
	November	19·6		17·3	
	December	19·6		17·3	
1892	Jänner	19·6		17·3	
	Februar	18·3		17·4	
	März	18·4		17·5	
	April	18·5		17·4	
	Mai	18·4		17·6	
	Juni	18·6	18·6	17·5	17·5
	Juli	18 9		17·7	
	August	18·8		17·6	
	September	18·8		17·6	
	October	18·8		17·6	
	November	18·7		17·5	
	December	18·7		17·5	

Jahr	Monat	Lager-schiefer	Jahres-mittel	Dolomiten	Jahres-mittel
1893	Jänner	18·7°	18·7	17·4°	17·4
	Februar	18·6		17·5	
	März	18·6		17·5	
	April	18·6		17·4	
	Mai	18·7		17·5	
	Juni	18·6		17·5	
	Juli	18·8		17·5	
	August	18·7		17·4	
	September	18·8		17·3	
	October	18·6		17·3	
	November	18·7		17·4	
	December	18·6		17·4	
1894	Jänner	18·6	18·6	17·3	17·7
	Februar	18·5		17·7	
	März	18·5		17·5	
	April	18·4		17·6	
	Mai	18·6		17·9	
	Juni	18·7		17·8	
	Juli	18·7		17·9	
	August	18·6		17·8	
	September	18·7		17·9	
	October	18·6		17·9	
	November	18·5		17·9	
	December	18·5		17·8	
1895	Jänner	18·6	18·5	17·7	17·4
	Februar	18·6		17·6	
	März	18·6		17·5	
	April	18·5		17·4	
	Mai	18·5		17·5	
	Juni	18·5		17·5	
	Juli	18·4		17·4	
	August	18·5		17·3	
	September	18·3		17·4	
	October	18·5		17·3	
	November	18·4		17·3	
	December	18·3		17·2	

Jahr	Monat	Lager-schiefer	Jahres-mittel	Dolomiten	Jahres-mittel
1896	Jänner	18·3°	18·2	17·3°	17·2
	Februar	18·2		17·4	
	März	18·3		17·3	
	April	18·3		17·2	
	Mai	18·4		17·2	
	Juni	18·2		17·3	
	Juli	18·3		17·1	
	August	18·1		17·2	
	September	18·0		17·2	
	October	18·2		17·1	
	November	18·1		17·3	
	December	18·3		17·2	
1897	Jänner	18·2	18·1	17·1	17·2
	Februar	18·3		17·2	
	März	18·1		17·2	
	April	18·2		17·3	
	Mai	18·2		17·2	
	Juni	18·1		17·1	
	Juli	18·2		17·0	
	August	18·0		17·2	
	September	18·0		17·1	
	October	18·1		17·2	
	November	18·2		17·1	
	December	18 0		17·1	
	IV. Lauf				
1890	Juni	21·9°	22·1	25·4°	25·5
	Juli	22·1		25·5	
	August	22·2		25·5	
	September	22·2		25·5	
	October	22·2		25·5	
	November	22·2		25·4	
	December	22·2		25·4	

Jahr	Monat	Lager-schiefer	Jahres-mittel	Dolomiten	Jahres-mittel
1891	Jänner	22·2°		25·4°	
	Februar	22·2		25·4	
	März	22·2		25·4	
	April	22·2		25·4	
	Mai	22·2		25·4	
	Juni	22·2	22·2	25·4	25·4
	Juli	22·4		25·5	
	August	22·3		25·4	
	September	22·2		25·5	
	October	22·1		25·4	
	November	22·2		25·5	
	December	22·1		25·4	
1892	Jänner	22·1		25·4	
	Februar	21·4		24·5	
	März	21·3		24·8	
	April	21·3		24·9	
	Mai	21·3		24·9	
	Juni	21·5	21·5	25·0	24·9
	Juli	21·7		25·0	
	August	21·7		25·0	
	September	21·6		25·0	
	October	21·6		25·0	
	November	21·5		24·9	
	December	21·5		24·9	
1893	Jänner	21·5		24·8	
	Februar	21·4		24·9	
	März	21·4		24·9	
	April	21·4		24·8	
	Mai	21·4		24·8	
	Juni	21·3	21·4	24·8	24·7
	Juli	21·3		24·7	
	August	21·4		24·6	
	September	21·4		24·5	
	October	21·3		24·6	
	November	21·4		24·4	
	December	21·4		24·5	

Jahr	Monat	Lager-schiefer	Jahres-mittel	Dolomiten	Jahres-mittel
1894	Jänner	21·3°		24·6°	
	Februar	21·4	21·3	24·5	
	März	21·3		24·6	
	April	21·2		24·7	
	Mai	22·9		24·9	
	Juni	22·8		24·7	
	Juli	22·9		24·8	24·7
	August	22·9	22·8	24·7	
	September	22·8		24·8	
	October	22·7		24·9	
	November	22·6		24·8	
	December	22·5		24·7	
1895	Jänner	22·5		24·7°	
	Februar	22·4		24·7	
	März	22·3		24·7	
	April	22·3		24·7	
	Mai	22·2		24·6	
	Juni	22·0		24·5	
	Juli	22·3	22·3	24·4	24·5
	August	22·4		24·3	
	September	22·4		24·3	
	October	22·3		24·3	
	November	22·4		24·3	
	December	22·1		24·2	
1896	Jänner	22·1		24·3	
	Februar	22·0		24·5	
	März	22·5		24·3	
	April	22·5		24·2	
	Mai	22·3		24·4	
	Juni	22·4		24·3	
	Juli	22·2	22·3	24·3	24·3
	August	22·3		24·2	
	September	22·2		24·1	
	October	22·3		24·3	
	November	22·2		24·2	
	December	22·1		24·1	

Jahr	Monat	Lagerschiefer	Jahresmittel	Dolomiten	Jahresmittel
1897	Jänner	22·2°		24·1°	
	Februar	22·1		24·3	
	März	22·0		24·1	
	April	22·3		24·2	
	Mai	22·2		24·2	
	Juni	22·1	22·1	24·3	24·1
	Juli	22·1		24·1	
	August	22·2		24·2	
	September	22·1		24·0	
	October	22·0		24·1	
	November	22·2		24·0	
	December	22·1		24·2	

V. Lauf

Jahr	Monat	Lagerschiefer	Jahresmittel	Dolomiten	Jahresmittel
1890	Juni	26·5°		26·9°	
	Juli	27·6		27·4	
	August	27·7		27·5	27·4
	September	27·8	27·7	27·5	
	October	27·7		27·4	
	November	27·6		27·4	
	December	26·6		25·2	
1891	Jänner	26·6		25·2	
	Februar	26·6	26·6	25·2	
	März	26·6		25·2	
	April	26·6		25·2	
	Mai	25·5		24·9	
	Juni	25·4		24·9	
	Juli	25·6		25·0	24·9
	August	25·6		24·9	
	September	25·7	25·6	24·8	
	October	25·8		24·7	
	November	25·8		24·6	
	December	25·7		24·6	

Jahr	Monat	Lager-schiefer	Jahres-mittel	Dolomiten	Jahres-mittel
1892	Jänner	25·7°		24·6°	
	Februar	24·6		21·2	
	März	24·2	24·3	20·9	
	April	24·1		20·7	
	Mai	24·3		20·9	
	Juni	25·2		21·7	
	Juli	25·1		21·8	21·5
	August	25·2		21·8	
	September	25·2	25·2	21·8	
	October	25·2		21·8	
	November	25·2		21·8	
	December	25·1		21·7	
1893	Jänner	25·0		21·7	
	Februar	25·1	25·1	21·7	
	März	25·1		21·7	
	April	24·1		21·6	
	Mai	24·2		21·5	
	Juni	24·2		21·6	21·6
	Juli	24·3		21·4	
	August	24·4	24·3	21·5	
	September	24·3		21·6	
	October	24·4		21·5	
	November	24·4		21·6	
	December	24·4		21·5	
1894	Jänner	24·4		21·5	
	Februar	24·4		21·4	21·4
	März	24·5		21·3	
	April	24·6		21·4	
	Mai	24·7		23·9	
	Juni	24·9	24·7	23·5	
	Juli	24·7		23·7	
	August	24·8		23·6	
	September	24·6		23·6	23·6
	October	24·8		23·5	
	November	24·9		23·5	
	December	24·8		23·4	

Jahr	Monat	Lager-schiefer	Jahres-mittel	Dolomiten	Jahres-mittel
1895	Jänner	24·9°	24·3	23·8°	23·4
	Februar	24·5		23·7	
	März	24·4		23·6	
	April	24·5		23·6	
	Mai	24·4		23·5	
	Juni	24·3		23·2	
	Juli	24·3		23·3	
	August	24·2		23·4	
	September	24·2		23·3	
	October	24·2		23·2	
	November	24·1		23·2	
	December	24·0		23·1	
1896	Jänner	24·1	24·5	23·2	23·3
	Februar	24·5		23·3	
	März	24·7		23·4	
	April	24·6		23·5	
	Mai	24·7		23·3	
	Juni	24·5		23·4	
	Juli	24·6		23·2	
	August	24·5		23·1	
	September	24·4		23·1	
	October	24·4		23·2	
	November	24·4		23·2	
	December	24·3		23·1	
1897	Jänner	24·2	24·1	23·2	23·1
	Februar	24·2		23·1	
	März	24·0		23·2	
	April	24·3		23·1	
	Mai	24·1		23·2	
	Juni	24·2		23·2	
	Juli	24·0		23·1	
	August	24·1		23·2	
	September	24·2		23·0	
	October	24·1		23·1	
	November	24·2		23·2	
	December	24·1		23·0	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahres-mittel	Gailthaler Schiefer	Jahres-mittel
	VI. Lauf				
1890	Juni	17·5°		17·3°	
	Juli	17·3		16·7	
	August	17·4		16·7	
	September	17·3	17·4	16·7	16·6
	October	17·4		16·7	
	November	17·3		16·7	
	December	17·3		16·7	
1891	Jänner	17·5		16·7	
	Februar	17·3		16·7	
	März	17·4		16·7	
	April	17·4		16·7	
	Mai	17·4		16·7	
	Juni	17·4	17·4	16·7	16·6
	Juli	17·6		16·8	
	August	17·4		16·7	
	September	17·4		16·6	
	October	17·3		16·5	
	November	17·4		16·4	
	December	17·3		16·4	
1892	Jänner	17·3		16·4	
	Februar	17·1		16·8	
	März	17·0		16·7	
	April	17·9		16·6	
	Mai	17·0		16·8	
	Juni	17·0	17·1	16·7	16·6
	Juli	17·3		17·0	
	August	17·2		17·0	
	September	17·1		16·9	
	October	17·1		16·9	
	November	17·0		16·8	
	December	17·0		16·7	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahres-mittel	Gailthaler Schiefer	Jahres-mittel
1893	Jänner	17·1°		16·7°	
	Februar	17·2	17·2	16·7	
	März	17·2		16·7	
	April	16·6		16·5	
	Mai	16·4		16·6	
	Juni	16·4		16·6	16·6
	Juli	16·5		16·4	
	August	16·6	16·5	16·5	
	September	16·4		16·6	
	October	16·5		16·5	
	November	16·5		16·4	
	December	16·4		16·5	
1894	Jänner	16·5		16·4	
	Februar	16·5	16·5	16·3	
	März	16·4		16·5	
	April	16·5		16·4	
	Mai	17·4		16·7	
	Juni	17·8		16·8	16·6
	Juli	17·7		16·6	
	August	17·7	17·6	16·7	
	September	17·6		16·8	
	October	17·7		16·7	
	November	17·6		16·6	
	December	17·5		16·7	
1895	Jänner	17·4		16·3	
	Februar	17·5		16·5	
	März	17·5		16·4	
	April	17·4		16·3	
	Mai	17·4		16·4	
	Juni	17·3	17·3	16·4	16·3
	Juli	17·2		16·3	
	August	17·1		16·4	
	September	17·0		16·3	
	October	17·2		16·3	
	November	17·0		16·2	
	December	19·1		16·1	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahres-mittel	Gailthaler Schiefer	Jahres-mittel
1896	Jänner	19·0°		16·3°	
	Februar	19·1		16·2	
	März	19·0		16·4	
	April	19·2		16·3	
	Mai	19·1		16·5	
	Juni	19·0	19·1	16·4	16·3
	Juli	19·3		16·3	
	August	19·2		16·2	
	September	19·1		16·1	
	October	19·0		16·3	
	November	19·2		16·2	
	December	19·1		16·1	
1897	Jänner	19·0		16·1	
	Februar	19·0		16·2	
	März	19·1		16·0	
	April	19·2		16·1	
	Mai	19·0		16·2	
	Juni	19·0	19·1	16·1	16·1
	Juli	19·1		16·0	
	August	19·0		16·2	
	September	19·1		16·1	
	October	19·2		16·3	
	November	19·0		16·2	
	December	19·2		16·1	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahres-mittel	Tuffen	Jahres-mittel
	VII. Lauf				
1890	Juni	19·4°		17·6°	
	Juli	19·5		17·5	
	August	19·7		17·6	
	September	19·8	19·6	17·7	17·6
	October	19·8		17·7	
	November	19·9		17·8	
	December	19·2		17·5	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahresmittel	Tuffen	Jahresmittel
1891	Jänner	19·2°		17·5°	
	Februar	19·2		17·5	
	März	19·2		17·5	
	April	19·2		17·5	
	Mai	19·2		17·5	
	Juni	19·2	19·2	17·5	17·6
	Juli	19·3		17·5	
	August	19·3		17·9	
	September	19·2		17·8	
	October	19·1		17·7	
	November	19·2		17·6	
	December	19·1		17·6	
1892	Jänner	19·1		17·6	
	Februar	19·5		18·1	
	März	18·9		17·4	
	April	18·8		17·5	
	Mai	18·9		17·4	
	Juni	19·1	19·1	17·7	17·7
	Juli	19·3		17·9	
	August	19·2		17·8	
	September	19·2		17·8	
	October	19·2		17·8	
	November	19·1		17·8	
	December	19·0		17·8	
1893	Jänner	19·0		17·8	
	Februar	19·1		17·7	
	März	19·1		17·7	
	April	19·1		17·6	
	Mai	19·1		17·7	
	Juni	19·2	19·2	17·6	17·6
	Juli	19·3		17·6	
	August	19·2		17·7	
	September	19·3		17·6	
	October	19·3		17·6	
	November	19·2		17·5	
	December	19·3		17·5	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahresmittel	Tuffen	Jahresmittel
1894	Jänner	19·3°		17·5°	
	Februar	19·4		17·5	17·6
	März	19·4		17·8	
	April	19·3		17·7	
	Mai	19·2		18·0	
	Juni	19·1	19·2	18·2	
	Juli	19·2		18·1	
	August	19·3		18·2	18·2
	September	19·2		18·3	
	October	19·1		18·2	
	November	19·2		18·2	
	December	19·3		18·1	
1895	Jänner	19·3		18·2	
	Februar	19·3		18·1	
	März	19·2		18·3	
	April	19·2		18·1	
	Mai	19·1		18·2	
	Juni	19·2	19·2	18·1	18·2
	Juli	19·2		18·2	
	August	19·1		18·1	
	September	19·1		18·2	
	October	19·2		18·2	
	November	19·1		18·1	
	December	19·0		18·2	
1896	Jänner	19·0		18·1	
	Februar	19·5		18·7	
	März	18·2		16·1	
	April	19·2		18·5	
	Mai	19·3		18·4	
	Juni	19·4	19·2	18·3	18·2
	Juli	19·3		18·3	
	August	19·4		18·2	
	September	19·2		18·4	
	October	19·3		18·3	
	November	19·1		18·3	
	December	19·2		18·2	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahres-mittel	Tuffen	Jahres-mittel
1897	Jänner	19·2°	19·2	18·3°	18·2
	Februar	19·1		18·2	
	März	19·3		18·2	
	April	19·3		18·3	
	Mai	19·2		18·1	
	Juni	19·1		18·2	
	Juli	19·1		18·2	
	August	19·0		18·1	
	September	19·2		18·0	
	October	19·1		18·2	
	November	19·1		18·1	
	December	19·2		18·0	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahres-mittel	Schiefer	Jahres-mittel
	IX. Lauf				
1890	Juni	16·2°	16·5	18·7°	18·4
	Juli	16·4		18·4	
	August	16·7		18·2	
	September	16·6		18·2	
	October	16·5		18·3	
	November	16·4		18·2	
	December	16·5		18·5	
1891	Jänner	16·5	16·6	18·5	18·4
	Februar	16·5		18·5	
	März	16·5		18·5	
	April	16·5		18·5	
	Mai	16·5		18·1	
	Juni	16·7		18·3	
	Juli	16·8		18·4	
	August	16·7		18·3	
	September	16·7		18·2	
	October	16·7		18·3	
	November	16·6		18·2	
	December	16·6		18·2	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahresmittel	Schiefer	Jahresmittel
1892	Jänner	16·6°	16·7	18·2°	18·4
	Februar	16·5		18·0	
	März	16·5		18·2	
	April	16·6		18·2	
	Mai	16·5		18·3	
	Juni	16·6		18·4	
	Juli	16·9		18·5	
	August	16·8		18·6	
	September	16·8		18·5	
	October	16·8		18·5	
	November	16·7		18·5	
	December	16·7		18·4	
1893	Jänner	16·6	16·6	18·4	18·4
	Februar	16·6		18·5	
	März	16·6		18·5	
	April	16·7		18·5	
	Mai	16·5		18·5	
	Juni	16·6		18·4	
	Juli	16·5		18·4	
	August	16·5		18·3	
	September	16·6		18·3	
	October	16·5		18·3	
	November	16·6		18·4	
	December	16·5		18·3	
1894	Jänner	16·4	16·5	18·3	18·4
	Februar	16·5		18·3	
	März	16·5		18·4	
	April	16·6		18·5	
	Mai	18·1	18·1	17·9	17·8
	Juni	18·2		17·9	
	Juli	18·0		17·8	
	August	18·0		17·9	
	September	18·1		17·8	
	October	18·1		17·8	
	November	18·3		17·7	
	December	18·2		17·7	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahres-mittel	Schiefer	Jahres-mittel
1895	Jänner	18·3°		17·6°	
	Februar	18·3		17·6	
	März	18·2		17·6	
	April	18·3		17·5	
	Mai	18·3		17·5	
	Juni	18·2	18·3	17·4	17·4
	Juli	18·1		17·4	
	August	18·2		17·3	
	September	18·3		17·4	
	October	18·3		17·2	
	November	18·4		17·3	
	December	18·3		17·2	
1896	Jänner	18·3		17·2	
	Februar	18·4		17·3	
	März	18·3		17·4	
	April	18·2		17·3	
	Mai	18·4		17·2	
	Juni	18·4	18·3	17·1	17·3
	Juli	18·2		17·3	
	August	18·1		17·2	
	September	18·3		17·2	
	October	18·2		17·3	
	November	18·1		17·2	
	December	18·1		17·3	
1897	Jänner	18·1		17·1	
	Februar	18·1		17·0	
	März	18·0		17·2	
	April	18·1		17·3	
	Mai	18·2		17·3	
	Juni	18·3	18·2	17·1	17·1
	Juli	18·1		17·2	
	August	18·2		17·1	
	September	18·2		17·2	
	October	18·1		17·0	
	November	18·2		17·1	
	December	18·2		17·0	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahresmittel	Schiefer	Jahresmittel	Dolomiten	Jahresmittel
		X. Lauf				**XI. Lauf**	
1890	Juni	16·9°		17·6°			
	Juli	16·8		17·4		15·7°	
	August	16·6		17·5		15·8	
	September	16·5	16·6	17·6	17·5	15·7	15·6
	October	16·4		17·6		15·7	
	November	16·3		17·6		15·8	
	December	16·7		17·1		15·2	
1891	Jänner	16·7		17·1		15·2	
	Februar	16·7		17·1		15·2	
	März	16·7		17·1		15·2	
	April	16·7		17·1		15·2	
	Mai	16·6		17·3		15·5	
	Juni	16·7	16·6	17·4	17·3	15·5	15·6
	Juli	16·7		17·5		15·8	
	August	16·6		17·5		16·0	
	September	16·5		17·4		16·0	
	October	16·4		17·4		15·8	
	November	16·4		17·5		15·7	
	December	16·3		17·4		15·7	
1892	Jänner	16·3		17·4		15·3	
	Februar	17·5		17·1		15·8	
	März	17·4		17·0		15·7	
	April	17·3		17·0		15·9	
	Mai	17·5		17·1		15·8	
	Juni	17·5		17·2	17·2	16·0	16·0
	Juli	17·6	17·5	17·3		16·4	
	August	17·6		17·4		16·5	
	September	17·6		17·3		16·4	
	October	17·6		17·3		16·4	
	November	17·5		17·3		16·2	
	December	17·4		17·2		15·9	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahresmittel	Schiefer	Jahresmittel	Dolomiten	Jahresmittel
1893	Jänner	17·5°		17·2°		15·9°	
	Februar	17·4		17·3		16·0	
	März	17·4		17·3		16·0	
	April	17·4		17·3		16·1	
	Mai	17·3		17·4		16·1	
	Juni	17·5	17·4	17·4	17·4	16·0	16·2
	Juli	17·4		17·5		16·2	
	August	17·6		17·4		16·2	
	September	17·5		17·6		16·3	
	October	17·4		17·6		16·3	
	November	17·5		17·6		16·4	
	December	17·3		17·5		16·5	
1894	Jänner	17·3		17·4		16·5	
	Februar	17·3	17·3	17·5	17·4	16·4	
	März	17·3		17·5		16·4	
	April	17·2		17·4		16·5	
	Mai	18·4		16·0		16·5	
	Juni	18·3		16·2		16·1	16·4
	Juli	18·3		16·0		16·4	
	August	18·4	18·3	16·2	16·2	16·3	
	September	18·3		16·3		16·4	
	October	18·3		16·2		16·4	
	November	18·3		16·3		16·3	
	December	18·4		16·2		16·5	
1895	Jänner	18·4		16·3		16·3	
	Februar	18·5		16·4		16·3	
	März	18·5		16·3		16·5	
	April	18·4		16·3		16·5	
	Mai	18·4		16·2		16·3	
	Juni	18·3	18·3	16·1	16·2	16·4	16·3
	Juli	18·3		16·2		16·3	
	August	18·3		16·2		16·0	
	September	18·2		16·3		16·0	
	October	18·2		16·0		16·3	
	November	18·3		16·2		16·0	
	December	18·2		16·1		16·3	

Jahr	Monat	Dolomiten	Jahresmittel	Schiefer	Jahresmittel	Dolomiten	Jahresmittel
1896	Jänner	18·2°		16·2°		16·0°	
	Februar	18·1		16·2		16·1	
	März	18·2		16·1		16·0	
	April	18·3		16·0		16·1	
	Mai	18·2		16·0		16·3	
	Juni	18·4	18·2	16·3	16·2	16·2	16·1
	Juli	18·3		16·2		16·1	
	August	18·2		16·3		16·0	
	September ..	18·3		16·1		16·2	
	October	18·2		16·2		16·1	
	November ..	18·3		16·3		16·1	
	December ..	18·1		16·1		16·0	
1897	Jänner	18·2		16·2		16·1	
	Februar	18·3		16·2		16·0	
	März	18·1		16·0		16·1	
	April	18·2		16·2		16·3	
	Mai	18·0		16·1		16·3	
	Juni	18·1	18·2	16·3	16·1	16·2	16·2
	Juli	18·2		16·2		16·3	
	August	18·1		16·1		16·3	
	September ..	18·1		16·0		16·1	
	October	18·2		16·1		16·2	
	November ..	18·2		16·0		16·1	
	December ..	18·1		16·0		16·2	

Die Brüche der Isothermenkärtchen $\frac{\text{Gesteinstemperatur}}{\text{Lufttemperatur}}$ zeigen, dass sich die Lufttemperaturen den Gesteinstemperaturen sehr nahe anschmiegen. Es befremdet daher, zu sehen, dass trotz der grossen Constanz der Gesteinstemperaturen die in den citirten Aufzeichnungen registrirten Lufttemperaturen stellenweise grosse Schwankungen zeigen. Möglich, dass Veränderungen des Wetterzuges die Ursache davon sind.

Wahrscheinlicher aber scheint es, dass bei der Messung der Lufttemperaturen vom Beobachter noch weniger Sorgfalt auf die Beibehaltung derselben Örtlichkeit verwendet wurde, wie bei den Gesteinstemperaturen. In Folge dessen geben diese Aufzeichnungen kein gutes Bild des Verhaltens der Lufttemperatur im Bergwerke, weshalb sie unbenützt blieben.

Eine weitere Frage von Interesse war:

»Ist der in Idria constatirte, räumlich eng begrenzte Wärmekörper eine vereinzelte oder eine oft vorkommende Erscheinung, und was ist darüber bekannt?«

Eine Durchsicht der einschlägigen Literatur förderte nur sehr wenig zu Tage, und scheint es mir, dass bisher nur die Frage nach der mittleren Zunahme der Temperatur mit der Tiefe die Fachleute beschäftigte und man derartigen Anomalien, wie in Idria, aus dem Wege ging oder sie ignorirte. Doch wären nachstehende Orte zu nennen, von deren Temperatur-Anomalien Erwähnung gethan wird:

Die Comstock-Grube in der Sierra Nevada;

der St. Gotthard-Tunnel;

die Osthälfte des Arlberg-Tunnels;

die Radstok-Collieries bei Bath;

die Talargoch-Mine (Bleibergwerk), die an sechs Beobachtungsstationen ganz verschiedene Temperaturen zeigen soll;

ein Bohrloch bei Pechelbronn im Elsass mit Tiefenstufen von 7, 8·2 und 12·7 *m* pro 1° C.;

ein Bohrloch bei Dundee, welches in 100 Fuss engl. um 10° F. wärmer sein soll, als in 50 Fuss, in dem dann die Temperatur steigen soll bis circa 400 Fuss, darüber hinaus aber wieder abnimmt (Bericht von Professor Everett vom Jahre 1869);

ein 340 *m* tiefes Bohrloch bei Neussen in Württemberg mit einer Tiefenstufe von 10·5 *m* pro 1°.

Zweifellos ist es mir als Laien auf dem Gebiete der Geologie auch nicht annähernd gelungen, alle diesbezüglich bekannten Daten in Erfahrung zu bringen. Doch bringen schon die angeführten Fälle auf die Vermuthung, dass Erscheinungen, wie die geschilderten Temperaturverhältnisse im Bergwerke von Idria nicht vereinzelt dastehen, sondern häufiger sind, als

man glaubt, wofür vielleicht auch das von Prof. Everett und Prof. Prestwich in ihren Arbeiten erwähnte häufige Vorkommen von warmen Quellen in der Nähe von Metall-Bergwerken, sowie die von denselben Autoren behaupteten höheren Temperaturen von Erz-, insbesondere aber Kupferlagern, sprechen.

Es ist daher vielleicht nicht zu gewagt, zu behaupten, dass die so leicht durchführbaren und einfachen Temperaturmessungen in Bergwerken, wenn ähnlich wie in Idria, aber an vielen Orten durchgeführt, vielleicht nicht uninteressante Resultate zu Tage fördern könnten.

249

2-2

200

0-1

9-18

8-1

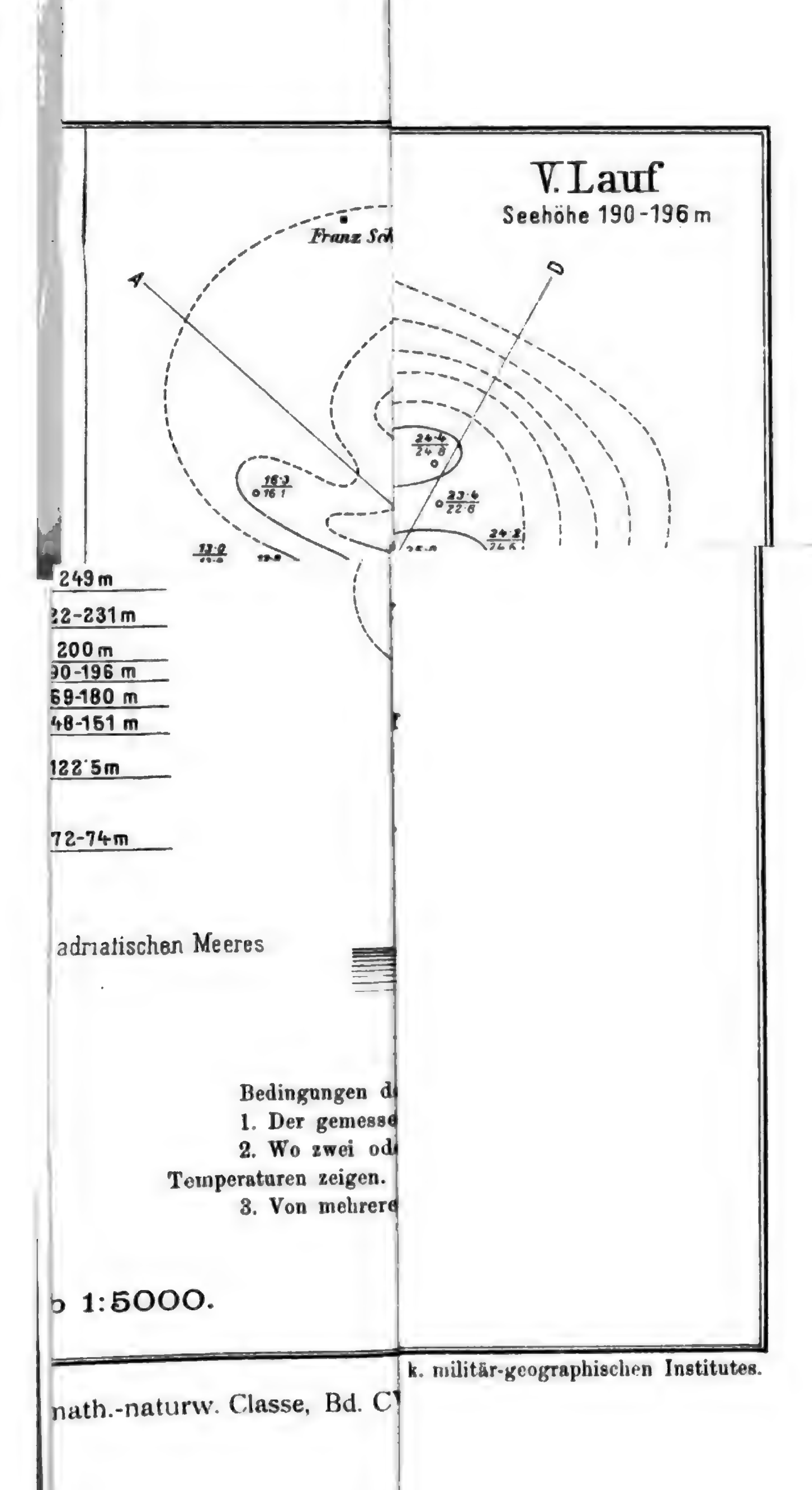
122.5

72-7

edria

p 1:

nath.


V. Lauf
Seehöhe 190-196 m
Franz Sch
A
D
24·4
24·8
16·3
16·1
23·4
22·6
24·2
249 m
22-231 m
200 m
90-196 m
69-180 m
48-161 m
122·5 m
72-74 m
adriatischen Meeres
Bedingungen d
1. Der gemesse
2. Wo zwei od
Temperaturen zeigen.
3. Von mehrere
b 1:5000.
k. militär-geographischen Institutes.
nath.-naturw. Classe, Bd. C

Über einen theoretischen und experimentellen Trugschluss in der Elektricitätslehre

von

Professor Dr. **Ernst Lecher.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag.

(Mit 11 Textfiguren.)

In allen grösseren Lehrbüchern der experimentellen Elektricitätslehre ist der in Fig. 1 abgebildete Apparat[1] geschildert, und das damit angeblich erzielte Resultat bildet gewöhnlich einen wichtigen Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen. Als Beispiel solcher Anschauungen möge Drude[2] ausführlich citirt werden: »Aus der Gestalt der Kraftlinien des magnetischen Feldes eines stromführenden Drathes folgt, dass ein Magnetpol continuirliche Rotationen um denselben ausführen muss, wenn er stets den Kräften des magnetischen Feldes frei folgen kann. Damit dies letztere eintritt, sind einige experimentelle Kunstgriffe erforderlich, welche es ermöglichen, einige Stücke des stromführenden Systems beweglich zu machen.« Nach einer Schilderung des Apparates — ich habe in Fig. 1 die Buchstaben genau nach Drude gewählt — fährt er fort: »Wesentlich für die Bewegung der Pole n, n' der Magnete ist nur a, wenn

[1] Von wem derselbe herrührt, weiss ich nicht. Weder Wiedemann, Elektricitätslehre, 1895, III, S. 186, noch Pouillet-Pfaundler, 1888—1890, III, 706, noch Wüllner, 1897, IV, S. 1018, noch Feilitzsch, Fernwirkung des galvanischen Stromes, 1865, S. 265, noch Winkelmann, Handbuch, 1895, III, 2, S. 313, nennen den Autor dieses Versuches. Auch in der von Winkelmann angegebenen Literaturübersicht konnte ich, soweit sie mir zugänglich war, keinerlei Angaben finden. In einigen älteren Lehrbüchern ist Pohl als Autor genannt.

[2] »Physik des Äthers«, Stuttgart, Enke, 1894, S. 75.

man dafür sorgt, dass die Pole möglichst nahe an a sich befinden. Der Strom in der Quecksilberrinne f kann übrigens auch deshalb nicht wirken, weil er nur eine Rotation des Magnetes um horizontale Axen veranlassen würde, nicht um die verticale Axe eg, und ebenso wenig kann der Strom in dem Platindrahte p wirken, weil dieser mit den Magneten fest verbunden ist, also seine relative Lage zu ihnen gar nicht ändern kann. Von den Kräften, welche auf die Pole s, s' der Magnete wirken, kann man absehen, wenn die Magnete hinreichend lang sind, da dann ss' weit von den stromführenden Theilen entfernt ist. Nach der Gestalt der Kraftlinien des Stromes in a muss eine continuirliche Rotation des Magnetsystems um a erfolgen, falls die unteren Pole gleichnamig sind, z. B. Nordpole. Die Rotationsrichtung muss sich umkehren, falls die unteren Pole beide Südpole sind. Diese Erscheinung wurde thatsächlich beobachtet.« Auch hier bei Drude ist ebenso wie in allen anderen Lehrbüchern die Einwirkung des Drahtes z, der allein die Rotation bewirkt, ausser acht gelassen.

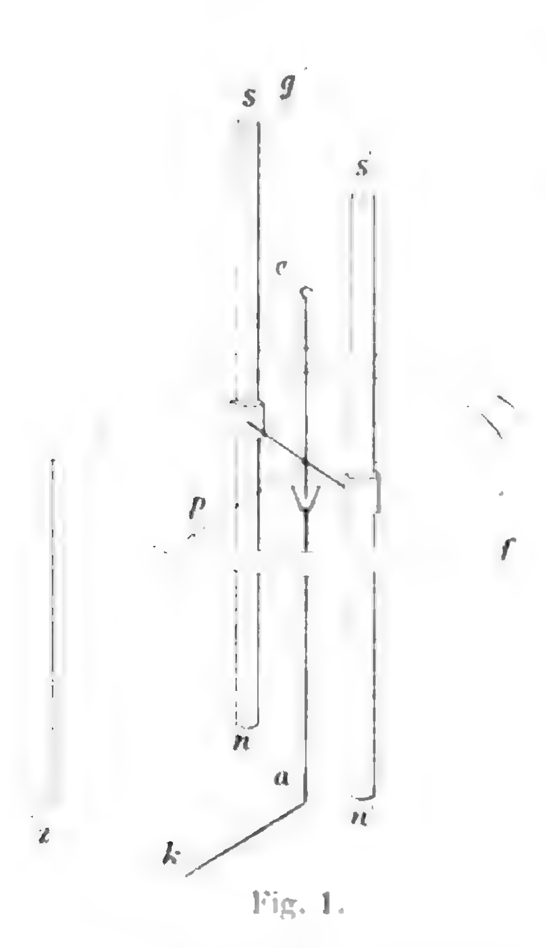


Fig. 1.

Wenn ich nun neuerdings[1] auf diesen Gegenstand zurückkomme, so hat das verschiedene Gründe. Zunächst ersah ich in der Zwischenzeit, dass schon Margules,[2] von anderen Gesichtspunkten ausgehend, die theoretische Unmöglichkeit der Rotation eines Poles um einen Strom behauptete, eine Erklärung aber der Eingangs geschilderten, wirklich stattfindenden Rotation gibt er nicht. Des ferneren habe ich neuerlich

[1] Siehe Wien. Ber., 103, S. 957, 1894. Wied. Ann., 54, S. 276, 1895.
[2] Wien. Ber., 77, S. 311, 1878. Wied. Ann., 6, S. 59, 1879.

einige Versuche angestellt, deren Schilderung vielleicht nicht ohne Interesse ist. Unmittelbarer Anlass indess für die folgende Publication wurde das Werk von H. Ebert »Magnetische Kraftfelder«.[1] Dieses Buch ist nämlich nach meiner soeben angeführten Arbeit erschienen, welche auch von Ebert erwähnt und berücksichtigt wird. Da mir aber trotz der bewunderungswürdigen Durchführung der Kraftlinienidee der in Rede stehende Gegenstand auch hier nicht ganz einwurfsfrei behandelt erscheint, so möchte ich mir diesbezüglich einige Bemerkungen erlauben und hoffe, dass die zu schildernden Experimente und die anknüpfenden Betrachtungen genügen werden, die Unrichtigkeit des Eingangs citirten Versuches endgiltig darzuthun. Dabei will ich ganz von jenen Anschauungen über Kraftfelder ausgehen, welche im Ebert'schen Buche eine pädagogisch so vorzügliche und originelle Darstellungsweise gefunden haben.

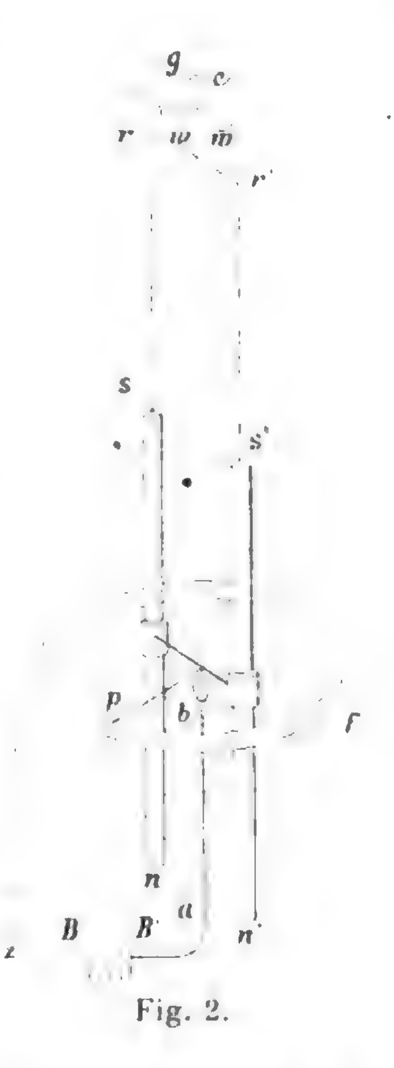


Fig. 2.

Um zunächst die Frage zu präcisiren, will ich einen alten Versuch von mir in etwas anderer Form wiederholen: Der in Fig. 1 gezeichnete Apparat erhält eine kleine Abänderung. Die beiden Magnete (Fig. 2) hängen mittelst des zweimal recktwinkelig gebogenen Drahtes $sr, s'r'$ ($sr = 20\,cm$) an dem Faden eg. In der Mitte von rr' sind zwei Zacken angelöthet, welche in die kleine runde Quecksilberrinne w eintauchen. BB' sei die Batterie. Der eine Pol B' bleibt dauernd an dem langen Drahte a.[2] Von dort kann der Strom in zweierlei Weise weitergehen. Er geht entweder durch den Platindraht p nach der Quecksilberrinne f und über den Draht z zur Batterie zurück; es ist das die alte Schaltung. Verbindet man aber B nicht mit z, sondern in weitem Bogen mit w, so fliesst der Strom

[1] Leipzig, 1896, S. 160.

[2] In der Fig. zu kurz gezeichnet.

wieder durch den geraden Draht a, das Quecksilbernäpfchen b, geht dann durch die beiden oberen Hälften der Magnete und weiter über srw und $s'r'w$ zur Batterie zurück. Bei der ersten Schaltung genügt eine Stromstärke von 1·5 Ampère, um die bekannte Rotation hervorzubringen. Bei der zweiten Schaltung aber ist bei dem Maximum der Stromstärke, die ich ohne Gefährdung des Instrumentes anwenden konnte, circa 30 Ampère, keine Spur einer Bewegung zu bemerken. Wenn nun die Bewegungsursache bei der ersten Schaltungsweise durch die Wirkung des Drahtes a auf n und n' gegeben ist, so müsste diese Wirkung auch bei der zweiten Schaltungsweise vorhanden sein, und das ist, wie der Versuch zeigt, nicht der Fall. Somit ist die Ursache der Rotation auch bei der ersten Schaltungsweise nicht im Drahte a, sondern im Drahte z zu suchen.



Fig. 3.

Das ist auch ganz natürlich. Überblicken wir etwas eingehender den Verlauf der Kraftlinien in Fig. 3. Es sei n der zu betrachtende Pol, dem irgendwo ein entsprechender s-Pol zugeordnet sein muss. Der Leiter, dessen Wirkung die Rotation hervorrufen soll, sei aa'. Derselbe wird nun von Kraftlinien des Magneten — punktirt gezeichnet — einmal geschnitten. Für den Zweck der Betrachtung ist es gleichgiltig, ob wir die Kraftlinien fest mit dem Magnete verbunden denken, oder ob wir die originale Anschauung Faraday's einführen, welche ich in der früher citirten Arbeit vertreten habe, wonach die Kraftlinien im Raume, aber nicht am Magnete haften. Ich wähle der Einfachheit wegen die erstere als die derzeit wohl verbreitetere Annahme. Ist der Magnet so aufgehängt, dass er sich um die Richtung aa' als Axe drehen kann, so werden bei der Rotation nirgends Kraftlinien geschnitten. Es ist daher eine solche Bewegung des ganzen Systems unmöglich, und ebenso unmöglich ist natürlich auch eine Erzeugung eines Stromes in aa' durch Rotation des Magneten.

Die letztere Frage nach einer Erzeugung eines Stromes in aa' durch Rotation eines Poles ist eine absolut nothwendige Folge der behaupteten Rotation. Der leichteren Beobachtung wegen sei dieser Punkt zuerst erwähnt.

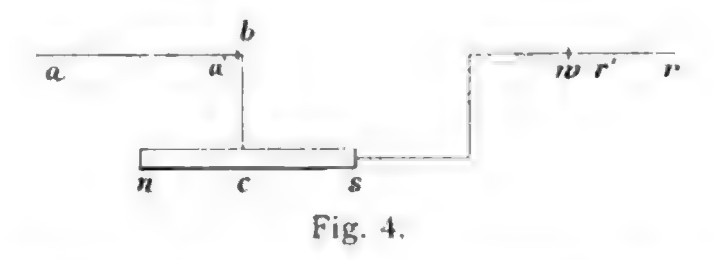


Fig. 4.

b und w sind zwei Quecksilbercontacte. aa' und $r'r$ sind fest; hingegen ist das starr mit einander verbundene System bc, ns, sw, um die Axe $aa'wr$ circa zwanzigmal in der Secunde drehbar. Es war keine Spur eines Stromes von mehr als 1.10^{-10} Ampère zu entdecken.[1]

Der umgekehrte Nachweis, dass eine Rotation des Magneten um den Strom oder des Stromes um die eigene Längsaxe nicht eintritt, ist schwieriger zu führen, wenn man sich nicht mit einem so qualitativen Versuche, wie er in Fig. 2 geschildert wurde, begnügen will. Zunächst ist Eines klar: wenn man zwei Magnete nimmt, die man den gewöhnlichen Anordnungen entsprechend möglichst nahe an den Leiter aa' bringt, werden die Kraftlinien ganz nach aussen gedrängt, und der Leiter liegt gar nicht im magnetischen Felde. Darum ist es besser, wenn man, wie ich es schon bei den beiden vorangehenden Versuchen that, mit nur einem Magneten arbeitet.

Ich versuchte nun experimentell die ablenkende Kraft eines Stromes auf den Magnetpol nach dem Örstedt'schen und

[1] Ebenso ist auch die Umkehrung dieser relativen Bewegung, nämlich eine Drehung von aa' um seine eigene Längsaxe bei feststehendem Magnete nicht im Stande, einen Strom zu erzeugen. Dieses Experiment machte schon gelegentlich Plücker (Poggendorff, Ann., 87, 1852; gesammelte Abhandlungen, 1896, II, S. 756). Es lässt sich dieser Versuch mit modernen Hilfsmitteln sehr genau nachmachen, weil man riesige Magnete anwenden kann. Neben einem grossen stabförmigen Elektromagneten von 80 *cm* Länge, dessen fünf Windungslagen mit circa 20 Ampère gespeist wurden, liegt parallel ein Draht, dessen eine Hälfte in der Nähe des einen Poles 25mal in der Secunde um die Drahtlängsaxe rotirt wurde. Trotz der colossalen Kräfte, die hier angewendet wurden, war kein Strom in der Stärke von 1.10^{-10} Ampère zu entdecken.

dem in Frage stehenden Versuche zu vergleichen. Der Magnet ns (Fig. 5a) ist fest verbunden mit dem Drahte cc', der in seiner weiteren Verlängerung das Gegengewicht g trägt. Der Strom geht durch aa' über das Quecksilbernäpfchen b, dann durch den Magneten über s und den Punkt u in die kleine Quecksilberrinne w. Das ganze System hängt an einem Coconfaden, und eine Spiegelablesung ermöglicht, die kleinste Drehung zu beobachten. Indem man zwei Schrauben bei s und u löst, kann man dann den Magnet an dieselbe Aufhänge- und Ablese-

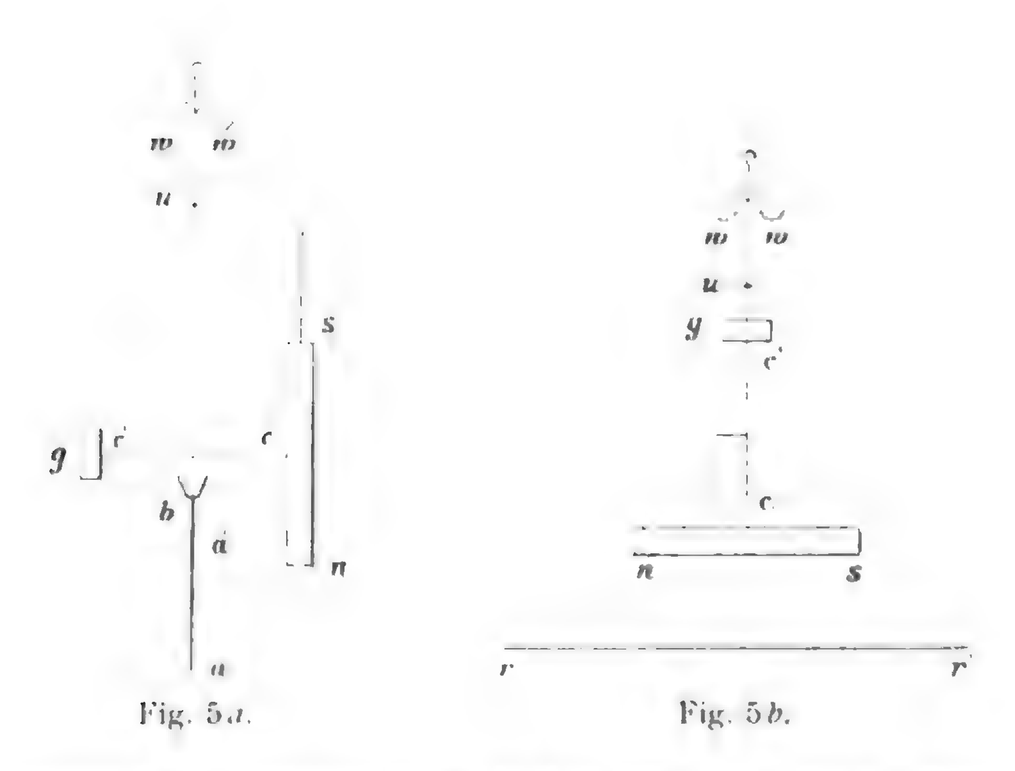


Fig. 5a. Fig. 5b.

vorrichtung in horizontaler Lage hängen und unten horizontal einen Stromleiter rr' vorbeiführen (Fig. 5b).

Wenn die Entfernung der Pole n vom Stromleiter die gleiche ist, so ist in beiden Versuchen Alles gleich, bis auf die Hebelarme und den Umstand, dass im zweiten Falle zwei Pole wirken. Bei einer so feinen Anordnung zeigt sich nun das merkwürdige Resultat, dass auch in der ersten Stellung immer eine Ablenkung eintritt, die aber in ihrer Grösse mit der zweiten Ablenkung absolut nicht stimmen will. Sie ist bald grösser, bald kleiner und auch im Zeichen oft entgegengesetzt. Die Fehlerquelle ist leicht zu finden. Wenn aa' nicht genau centrirt ist, oder wenn dieser Draht irgendwo kleine Verbiegungen besitzt, dann werden bei der Rotation Kraftlinien geschnitten, und das

ist die Ursache der Bewegung. Wenn aber der Draht aa' während der Bewegung mechanisch um die eigene Axe rotirt wird, so verschwindet jede Ablenkung. Dasselbe tritt ein, wenn man den Magnet ns in zwei Lagen beobachtet, welche um 180° von einander verschieden sind, also einmal rechts vom Draht und dann links, und wenn in mehreren Azimuten solche Beobachtungen angestellt werden. Die Ablenkung, welche bei der Anordnung meiner Versuche innerhalb der Fehlerquellen liegt, erscheint fast 1000mal kleiner als der aus dem Versuch in Fig. 5b reducirte Werth.

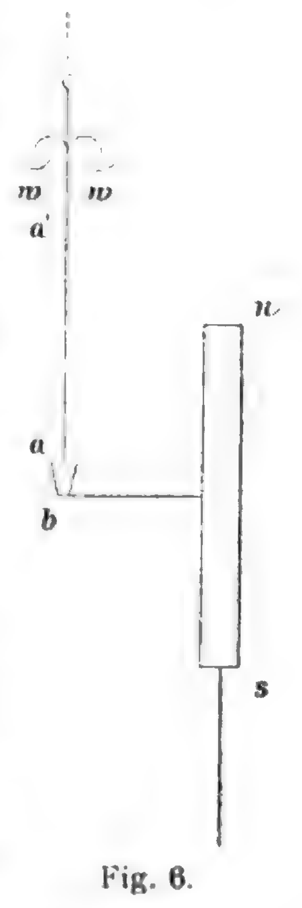


Fig. 6.

In ähnlicher Weise scheint der in Fig. 6 dargestellte Versuch leicht zu Täuschungen Anlass zu geben. ns sei der Magnet, durch welchen der Strom eintritt, um durch das Quecksilbernäpfchen b in gewohnter Weise weiter zu gehen. Hier beobachtet man fast immer Drehungen des Drahtes aa' bei feinen Spiegelbeobachtungen, weil es unmöglich ist, den Draht absolut gerade zu strecken und ihn absolut genau zu centriren. Wenn man die Beobachtungen aber so anstellt, dass immer zwei je um 180° verschiedene Lagen von ns im Mittel zusammengenommen werden, so verschwindet jede Bewegung.[1] Es ist eine solche Rotation des Drahtes unmöglich, weil die Kraftlinien des Stromes bei Rotation des Leiters sich nicht ändern.[2]

Es liegt, wie ich glaube, in der historischen Entwicklung unserer Anschauungen über Kraftlinien, dass die Idee der

[1] Die Idee dieses Versuches rührt von Wollaston her, 1820. Faraday erwähnt derselben in »Experimentaluntersuchungen« (II, S. 144). Faraday spricht an anderer Stelle (II, S. 119, 1821) von der Möglichkeit einer Rotation des Stromes im feststehenden Drahte, wobei er wohl an solche Phänomene dachte, wie wir sie im Hall'schen Phänomene vermuthen.

[2] Folgender Versuch, der nur mittelbar zum Gegenstande obiger Abhandlung gehört, scheint mir nicht ohne Interesse zu sein. Es sei ns ein an einem Coconfaden hängender Magnet. Unter demselben fliesst ein Strom, der, wie aus Fig. 7 ersichtlich ist, so geschaltet ist, dass er unter dem Nord- und Südpole in entgegengesetzter Richtung vorbeigeht. Man kann leicht

Rotation des Poles um den Strom sich so lange erhalten konnte. Faraday nämlich beschäftigte sich mit diesen Dingen lange Zeit vor Conception seines Kraftlinienbegriffes. Damals — 1821 — spricht man von Polen als selbständigen Existenzen: »Es hat offenbar jeder Pol für sich, und nicht, insofern er einen Theil der Nadel bildet oder mit entgegengesetzten Polen verknüpft ist, die Fähigkeit, auf den Draht zu wirken«. Faraday betrachtete damals den Pol als blossen Wirkungsmittelpunkt.[1] An anderer Stelle definirt er — physikalisch entschieden nicht einwandfrei — die Kraftlinien als Weg, den der Pol nehmen würde,[2] oder behauptet noch präciser, dass Eisenfeilicht über die Stromspirale gestreut, »sich sehr bald über dem Magnet in krummen, von einem Ende zum anderen gehenden Linien anordnen und den Weg angeben, den der Pol nehmen würde«. Seine bekannten Rotationsversuche unternimmt er von dieser Voraussetzung aus, die sehr einfach und verlockend erscheint. Die Entdeckung von Örstedt und die Arbeiten von Biot und Savart schienen alle mit dieser Voraussetzung in bester Übereinstimmung; haben sie sich doch bis heute in allen Lehr-

---

durch passendes Shunten des einen Zweiges es dahin bringen, dass selbst bei dem stärksten Strome kein Ausschlag des Magneten erfolgt. Ich habe nun einen Draht ab, der unter dem Nordpol vorbeigeht, um die eigene Längsaxe circa 25 mal in der Secunde rotiren lassen. Dabei trat absolut keine Änderung seiner Wirkung auf. Der ganze Apparat war so empfindlich, dass ich noch eine Änderung von $^1/_{1000}$ Procent hätte erkennen müssen. Die Stromkraftlinien sind also nicht fest mit dem Leiter verbunden, und wenn sie sich mit dem Leiter mechanisch verschieben lassen, so ist das eine Wirkung des Querdruckes der Kraftlinien. Dasselbe gilt für das Solenoid und wohl auch für den Magneten. Der oft gemachte Vergleich von Kraftlinien mit Kautschukfäden, die an dem Pole festsitzen, ist nicht richtig. Man konnte wohl eine durch einen Magneten gehende Kraftlinie in sich selbst verschieben, ohne auf den Magnet ponderomotorisch zu wirken.



Fig. 7.

[1] II, S. 116; II, S. 137.

[2] II, S. 127.

büchern erhalten. Dass Faraday erst später — 1831 — zu dem Begriffe der Kraftlinien kam, sagt er selbst gelegentlich in einem Briefe an Tyndall:[1] »Es sind nun heutzutage 24 Jahre her, dass ich zum erstenmal die Aufmerksamkeit auf diese Linien lenkte«. Eine genaue Definition der Kraftlinien gab Faraday aber erst 1845[2] oder genauer 1851[3] und fast identisch 1852.[4] In dieser Definition fehlt die bis heute gängige Vorstellung, dass die magnetischen Kraftlinien Linien seien, längs welcher ein Pol sich bewegen müsse. Faraday war eben inzwischen zu einer bestimmteren Vorstellung gekommen:[5] »Absoluter oder beziehungsloser Nord- oder Südmagnetismus ist ebenso unmöglich wie eine absolute oder beziehungslose Existenz von positiver oder negativer Elektricität«. In dieser späteren Zeit kam aber Faraday nicht mehr auf den in Frage stehenden Rotationsversuch zurück. Und da dieser Versuch zur Anschauung der Fernwirkungstheorie scheinbar zu stimmen schien,[6] wurde es ermöglicht, dass er auch im experimentellen Studium sich mit solcher Hartnäckigkeit erhalten konnte.

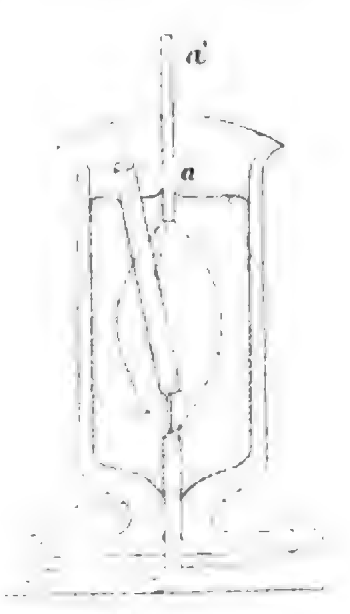


Fig. 8.

Betrachten wir den aus dem Jahre 1822 stammenden Rotationsapparat von Faraday,[7] durch welchen er glaubte, die Rotation eines Magneten um einen Strom bewiesen zu haben.

Der Magnetstab schwimmt hier im Quecksilber, in welches auch der Strom eintritt, und rotirt um den Draht aa'. In Fig. 8 tritt der Strom unten in das Quecksilber ein und geht der besseren Leitfähigkeit wegen zum grössten Theile durch den Magnet. Es seien die Stromlinien durch - - - - - - und die Kraftlinien

[1] III, S. 637.
[2] III, §. 2149.
[3] III, §. 3071.
[4] III, S. 367.
[5] III, §. 3277.
[6] So Margules, loco citato.
[7] II, S. 135.

durch . . . . . . symbolisirt. Hier schneiden sich die Stromlinien und die Kraftlinien, und eine einfache Überlegung zeigt, dass hier ein dauernder Rotationsantrieb erfolgen muss. Es liegt der Stromleiter gleichsam im Quecksilber fest, und der Magnet geht mittelst eines Gleitcontactes durch den Leiter hindurch. Der Trugschluss ist ganz ähnlich wie der in Fig. 2 veranschaulichte.

Für einen Trugschluss etwas anderer Art halte ich auch die neue Anordnung von W. König.[1] Derselbe verwendet eine stromdurchflossene Röhre (rr') und bringt die gleichnamigen Pole hakenförmig umgebogener Magnetstäbe ns in das Innere derselben. Das Wesentliche der Anordnung ist in Fig. 9 schematisch skizzirt. Sowohl Magnet, als Röhre sind, jedes für sich, um die gemeinsame Axe aa' drehbar. Der Strom tritt mittelst eines Quecksilbercontactes in rr ein und vermittelst eines zweiten aus $r'r'$ aus. Fliesst durch die Röhre ein starker Strom, so rotirt Röhre und Magnet nach entgegengesetzter Richtung. Mir erscheint dieser Versuch nur als eine etwas complicirtere Form des alten Barlow'schen Rädchens. Die Kraftlinien zwischen n und s werden durch den Leiter rr' bei der Bewegung fortwährend geschnitten. Der Fall liegt hiemit ganz anders als bei unserem im Eingange dieser Arbeit geschilderten Versuche. Die Bewegung hat mit der angeblichen Rotation eines Poles um einen stromdurchflossenen Leiter nichts zu thun.



Fig. 9.

Was schliesslich die Darstellung Ebert's anlangt, so seien mir folgende Bemerkungen gestattet: Ebert spricht sich zwar zu wiederholtenmalen gegen die Existenz »eines« Poles aus und scheint auch[2] meine Einwendungen gegen den in Rede stehenden Versuch für begründet zu halten. Gleichwohl aber ist an anderer Stelle[3] eine diesbezügliche Fiction ziemlich weit — wie ich glaube, pädagogisch zu weit — ausgeführt. Als

[1] Wied. Ann., 60, S. 519, 1897.

[2] §. 158, S. 160.

[3] §. 174, S. 179.

Überschrift des in Rede stehenden Paragraphen setzt Ebert »Diagramm des elektromagnetischen Grundversuches«. Nach dem Vorhergehenden ist dies ja gar kein Versuch, und am allerwenigsten ein Grundversuch. Gleichwohl könnte aber, wie ich glaube, auch die weitere Darstellung des Gegenstandes zu Irrthümern Anlass geben. Durch die bekannte Superposition der Kraftfelder des Stromes und des Magneten erhält Ebert ungefähr nebenstehende Zeichnung (Fig. 10). Der Punkt links ist der Durchschnitt des Stromes, der Punkt rechts ein Südpol. Die spiralförmigen Linien stellen die Kraftlinien dar. Der Südmagnetpol ist eine Sinkstelle. Ebert sagt ganz richtig, dass die Linien hier scheinbar enden, in den Magnet hineingehen und aus dem Felde verschwinden. Doch sollte meiner Meinung nach ganz besonders betont werden, dass diese Linien irgendwo aus dem Nordpol herausquellen und ins Feld zurückkehren müssen. Ebert sagt mit Bezug auf den Eindruck nebenstehender Figur: »Die sonst in sich zurückkehrenden Stromkraftlinien sind dadurch zu einer unendlichen Spirale geöffnet.« Dieses Beispiel, das ja unter der allerdings betonten Annahme eines einzigen Poles als geometrisch richtige Fiction gelten kann, hat aber, und das scheint in Ebert's Darstellung leicht übersehen werden zu können, nicht den geringsten physikalischen Sinn. Es darf daher auch der Anblick dieses Kraftfeldes nie zu weiteren physikalischen Schlüssen verwendet werden. Die vom Pole ausgehenden Kraftlinien biegen sich ja immer einmal nach unten oder oben zum anderen Pole um und treten aus der Zeichnungsebene heraus. Die Kraftlinien liessen sich hier nur im Raume richtig darstellen. Denken wir uns einen Leiter und parallel zu demselben einen Magnet, so werden die Kraftlinien des Magnetes schraubenförmig um den Leiter sich herum-

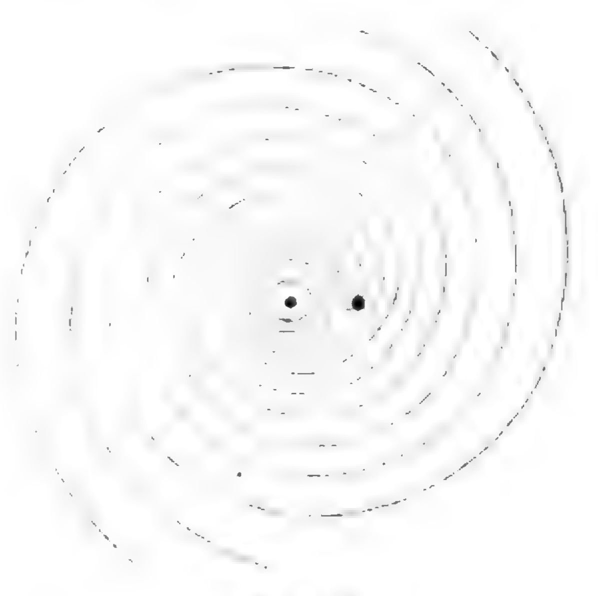


Fig. 10.

wickeln, immer aber in sich geschlossene Curven bilden. Ein »Hineinsaugen« eines Poles entlang der entgegenkommenden Kraftlinien findet nie statt. Es würde ein solches Saugen entlang der Kraftlinien auch jenem Experimente widersprechen, das ich Anmerkung 2 S. 983 dieser Arbeit geschildert.

Darum muss der hier erörterte sogenannte Fundamentalversuch als ein theoretischer und experimenteller Trugschluss erklärt werden; aus den theoretisch erörterten Gründen kann eine Rotation nie eintreten, und die experimentell gezeigte Rotation hat ganz andere Ursachen als die bisher angenommenen.

Es muss also dieser Versuch endgiltig aus den Lehrbüchern gestrichen werden, wenn auch dadurch die Darstellung eines der wichtigsten Capitel der Elektricitätslehre eines scheinbar so bequemen und einfachen Ausgangspunktes fernerhin wird entrathen müssen.

Untersuchungen über permanente Magnete. II.

Über die Abhängigkeit des Inductionscoëfficienten vom Dimensionsverhältniss

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

Wenn man in der Richtung der Axe eines permanenten Magnets eine schwache magnetisirende Kraft wirken lässt, so wird sein Moment um einen kleinen Bruchtheil des ursprünglichen Momentes geändert. Die Änderung ist jedoch nur vorübergehend und verschwindet mit dem Aufhören der magnetisirenden Kraft. Diese Thatsache ist von Bedeutung bei Bestimmungen der erdmagnetischen Componenten und in allen solchen Fällen, wo der wahre Werth des Momentes eines Magnets in Rechnung gebracht werden soll.

Das Auftreten solcher Änderungen wurde schon von Kupffer constatirt; die ersten ausführlichen Messungen darüber rühren jedoch von Lamont[1] her. Legt man einen Magnet vom Moment M mit seiner Axe in die Richtung der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus X, so wird sein Moment

$$= M \pm aX \text{ oder } = M(1 \pm \beta X),$$

wo $\beta = \frac{a}{M}$ von Lamont als Inductionscoëfficient bezeichnet wird. In dieser Weise ausgedrückt, ist β eine veränderliche

[1] Vide: Lamont, Handbuch des Magnetismus. S. 371. Allg. Encyklopädie der Physik, 1867.

Grösse und nimmt zu in dem Maasse, wie der Magnet an Moment verliert. Lamont folgerte aus seinen Messungen, dass β bei derselben magnetisirenden Kraft einen verschiedenen Werth hat, je nachdem es sich um eine Schwächung oder um eine Verstärkung des Momentes handelt. Auch andere Physiker scheinen an diese Thatsache geglaubt zu haben, bis F. Kohlrausch[1] diese Ansicht durch eingehende Versuche widerlegte. Er zeigte, dass innerhalb gewisser Grenzen der magnetisirenden Kraft, die bei praktischen Versuchen wohl nicht überschritten werden, der Verstärkungs- und Schwächungscoëfficient keinen mit Sicherheit nachweisbaren Unterschied zeigen.

Kohlrausch drückt den Inductionscoëfficienten anders aus wie Lamont. Bei Kohlrausch bedeutet der Inductionscoëfficient die Veränderung des specifischen Magnetismus, respective die Vermehrung oder Verminderung des magnetischen Momentes der Masseneinheit (1 *g*), welche durch die Einheit der magnetisirenden oder entmagnetisirenden Kraft (in abs. E.) hervorgebracht wird. Hinsichtlich der Abhängigkeit des Inductionscoëfficienten von den Eigenschaften und der Beschaffenheit des Magnets sagt Lamont (l. c.) ganz allgemein, dass der Inductionscoëfficient umso kleiner ausfällt, je härter und dünner ein Magnet ist. Auch F. Kohlrausch macht in seinem »Leitfaden der praktischen Physik«, 8. Aufl., S. 378 die allgemeine Bemerkung, dass der Inductionscoëfficient von Gestalt, Härte, chemischer Beschaffenheit abhängt und für unmagnetisches Material etwas grösser ist als für magnetisches.

Es schien mir nicht ohne Interesse, dieser Frage etwas näher zu treten, und ich habe daher mit den Magneten, an denen die Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten vom Dimensionsverhältniss untersucht wurde,[2] auch Bestimmungen des Inductionscoëfficienten bei verschiedenen Feldstärken, und zwar für den magnetischen und unmagnetischen Zustand der betreffenden Stahlstücke vorgenommen. Die Messungen erstreckten sich also auf 18 Magnete, deren Dimensionsverhältnisse zwischen den Grenzen 5 und 37·5 liegen.

---

[1] Wied. Ann., Bd. 22, 1884, S. 411.

[2] Vide I. Abhandlung.

Bei dieser Untersuchung bot sich die Gelegenheit, noch eine Frage von praktischer Bedeutung zu erörtern. Wenn man einen Stahlstab im homogenen Felde einer Spule magnetisirt, so soll man den magnetisirenden Strom nicht plötzlich unterbrechen, sondern das Feld allmälig auf Null sinken lassen, um einen möglichst hohen Werth des permanenten Magnetismus zu erhalten. Es entsteht nun die Frage, um wie viel Procent das permanente Moment bei langsamer Feldabnahme stärker wird als bei rapider und wie die Verhältnisse bei verschieden gestalteten Magneten liegen. Ich habe in dieser Richtung einige Versuche gemacht, welche am Schlusse mitgetheilt werden sollen.

Anordnung der Versuche.

Zur Bestimmung des Inductionscoëfficienten habe ich das Verfahren von F. Kohlrausch (l. c.) gewählt. Dieses Verfahren besteht bekanntlich darin, dass man den Magnet in eine lange Spule gibt und darin mittelst eines Stromes ein schwaches Feld erzeugt; eine zweite, über die erste gewickelte Spule ist in einen Galvanometerkreis eingeschaltet und dient zur Beobachtung des bei der Änderung des Momentes inducirten Stromes. In unserem Falle war die Spule bifilar gewickelt, sie hatte eine Länge von 38·5 *cm*, einen äusseren Durchmesser von 5 *cm* und im Ganzen 75·6 Windungen pro Längeneinheit. Von den beiden Lagen der bifilaren Wicklung wurde die eine zur Erzeugung des Feldes, die andere zur Beobachtung des inducirten Stromes benützt. Die elektrodynamische Induction wurde durch eine zweite ebenfalls bifilar gewickelte Spule compensirt. Überdies war behufs Aichung im Galvanometerkreis ein Magnetinductor, bestehend aus einer langen Spule von 47·8 Windungen pro Längeneinheit und aus einem Magnet vom Moment = 208 abs. E. vorhanden. Als Galvanometer diente ein solches von Rubens-du-Bois mit dickdrahtigen Rollen. Bei der Aichung des Galvanometers mit dem Magnetinductor musste ein grösserer Widerstand in den Galvanometerkreis eingeschaltet werden, wodurch die Dämpfung der Galvanometernadel geändert wurde. Bei der Berechnung der absoluten Änderung des Momentes musste auf diesen Umstand Rücksicht genommen werden.

Es wurde immer der bei der Commutirung des Feldes auftretende inducirte Strom beobachtet und sodann die Hälfte des Galvanometerausschlages zur Berechnung des Inductionscoëfficienten genommen. Gewöhnlich geschah die Beobachtung bei drei verschiedenen Feldstärken, und der im Schlussresultat verzeichnete Inductionscoëfficient ist das Mittel der bei den drei Feldstärken erhaltenen Werthe.

Ferner machte ich die Versuche mit den Stahlstäben im unmagnetischen und nahezu gesättigten magnetischen Zustande. Da die Stahlstäbe schon früher zu Beobachtungen dienten und magnetisirt waren, habe ich dieselben mit Hilfe einer langen Spule und eines Ewing'schen Flüssigkeitsrheostaten durch fortwährendes Commutiren bei allmäliger Abnahme des Feldes entmagnetisirt. Dieselbe Spule diente auch zur Magnetisirung, und zwar geschah diese in der Weise, dass das Feld mehrmals commutirt und dann der Strom durch Herausziehen eines Bügels aus einem Paar von Quecksilbernäpfen rasch unterbrochen wurde. Die Spule hatte 48 Windungen pro 1 *cm* und wurde beim Magnetisiren von einem Strom von 12 Amp. durchflossen, woraus die Feldstärke = 724 abs. E. resultirt.

Die Werthe für den specifischen Widerstand der Stahlstäbe habe ich aus der ersten Abhandlung genommen, während die Werthe für den specifischen Magnetismus auf Grund der neuen Momente berechnet sind.

Die Resultate.

In den nachfolgenden Tabellen bedeutet:

Bez. die Bezeichnung des Magnets, und zwar ist die Marke der Stahlsorte (U I, 45, 00) und rechts daneben die Länge in Centimetern eingetragen. Es sei noch erwähnt, dass die Stäbe quadratischen Querschnitt hatten. Bei 15 Stück war die Seite 4, bei drei jedoch 6 *mm*.

M das magnetische Moment in abs. Einheiten.

G das Gewicht in Grammen.

H die Feldstärke, bei welcher die Änderung des Momentes beobachtet wurde.

δM_0 und δM die Änderung des Momentes für den unmagnetischen, respective magnetischen Zustand.

Δ_0 und Δg den Inductionscoëfficienten nach der Definition von Kohlrausch, und zwar wieder für den unmagnetischen, respective magnetischen Zustand.

Δm den Inductionscoëfficienten nach Weber, jedoch nicht auf die Horizontalcomponente, sondern auf die Einheit der Feldstärke bezogen.[1]

V das Dimensionsverhältniss $= \frac{\text{Länge}}{\text{Seite}}$ des Magnets.

m den specifischen Magnetismus.

σ den specifischen Widerstand.

Tabelle I*a*.

Bez.	M	G	H	δM_0	$\frac{\delta M_0}{H}$	Δ_0	δM	$\frac{\delta M}{H}$	Δg	Δm
			1·074	6·07	5·65		4·98	4·64		
45, 15	1380	18·7	0·464	2·06	5·60	0·297	2·15	4·63	0·248	0·00337
			0·117	0·63	5·40		0·54	4·62		
			1·074	3·42	3·17		3·17	2·95		
45, 10	766	12·0	0·464	1·52	3·25	0·268	1·39	3·00	0·247	0·00386
			0·117	0·37	3·18		0·34	2·93		
			1·074	2·65	2·46		2·54	2·37		
45, 8	510	9·7	0·464	1·15	2·48	0·252	1·10	2·38	0·241	0·00458
			0·117	0·28	2·40		0·27	2·28		
			1·074	1·75	1·63		1·77	1·65		
45·6	291	7·5	0·464	0·76	1·65	0·217	0·76	1·65	0·217	0·00556
			0·117	0·19	1·59		0·19	1·59		
			1·074	0·94	0·87		0·95	0·88		
45, 4	112	5·0	0·464	0·38	0·84	0·172	0·40	0·87	0·176	0·00792
			0·117	0·11	0·90		0·11	0·90		

[1] Es ist also $\Delta_0 = \frac{\delta M_0}{HG}$; $\Delta g = \frac{\delta M}{HG}$; $\Delta m = \frac{\delta M}{HM}$.

Tabelle I*b*.

Bez.	m	σ	V	Δ_0	Δg	Δm
45, 15	73·8	38·3	37·7	0·297	0·248	0·00337
45, 10	64·0	39·1	25·4	0·268	0·247	0·00386
45, 8	52·7	39·5	20·6	0·252	0·241	0·00458
45, 6	38·8	39·1	15·2	0·217	0·217	0·00556
45, 4	22·2	39·8	9·9	0·172	0·176	0·00792

Tabelle II*a*.

Bez.	M	G	H	δM_0	$\frac{\delta M_0}{H}$	Δ_0	δM	$\frac{\delta M}{H}$	Δg	Δm
U 1, 15	1454	18·2	1·074 0·464 0·117	5·92 2·54 0·64	5·52 5·48 5·44	0·302	4·88 2·08 0·52	4·55 4·50 4·45	0·247	0·00310
U 1, 10	802	12·3	1·074 0·464 0·117	3·53 1·51 0·37	3·30 3·26 3·18	0·263	3·28 1·42 0·35	3·07 3·07 2·98	0·247	0·00379
U 1, 8	531	9·4	1·074 0·464 0·117	2·58 1·10 0·27	2·40 2·37 2·31	0·252	2·47 1·06 0·26	2·31 2·28 2·25	0·244	0·00429
U 1, 6	368	7·[illegible]	1·074 0·464 0·117	1·81 0·78 0·19	1·69 1·68 1·65	0·222	1·84 0·80 0·19	1·71 1·72 1·65	0·225	0·00559
U 1, 4	122	5·1	1·074 0·466 0·117	0·99 1·43 0·11	0·93 0·93 0·90	0·180	1·01 0·43 0·11	0·94 0·93 0·90	0·181	0·00756

Tabelle II*b*.

Bez.	m	σ	V	Δ_0	Δg	Δm
U I, 15	80·0	37·1	37·8	0·302	0·247	0·00310
U I, 10	65·2	36·6	25·3	0 263	0·247	0·00379
U I, 8	56·4	35·2	20·8	0·252	0·244	0·00429
U I, 6	40·3	36·2	15·2	0·222	0·225	0·00559
U I, 4	23·9	36·8	10·1	0·180	0·181	0·00756

Tabelle III*a*.

Bez	M	G	H	δM_0	$\frac{\delta M_0}{H}$	Δ_0	δM	$\frac{\delta M}{H}$	Δg	Δm
			1·074	4·03	3·75		3·13	2·92		
00, 15	1310	18·7	0·464	1·72	3·70	0·197	1·35	2·91	0·154	0·00221
			0·117	0·43	3·63		0·33	2·85		
			1·074	2·38	2·22		2·05	1·92		
00, 10	742	12·1	0·464	1·03	2·23	0·183	0·88	1·91	0·158	0·00257
			0·117	0·26	2·19		0·22	1·89		
			1·074	1·88	1·75		1·72	1·61		
00, 8	512	9·8	0·464	0·81	1·74	0·178	0·74	1·61	0·163	0·00312
			0 117	0·20	1·74		0·18	1·58		
			1·074	1·28	1·13		1·26	1·18		
00, 6	310	7·3	0·464	0·55	1·18	0·158	0·54	1·16	0·158	0·00374
			0·117	0·14	1·18		0·13	1·13		
			1·074	0·72	0·67		0·75	0·70		
00, 4	137	4·9	0·464	0·31	0·67	0·141	0·32	0·69	0·140	0·00502
			0·117	0·08	0·72		0·08	0·67		

Tabelle III*b*.

Bez.	m	z	V	Δ_0	Δg	Δm
00, 15	70·5	43·7	37·6	0·197	0·154	0·00221
00, 10	61·2	43·6	25·6	0·183	0·158	0·00257
00, 8	52·3	45·8	20·3	0·178	0·163	0·00312
00, 6	42·5	45·4	15·5	0·158	0·158	0·00374
00, 4	28·1	45·2	10·3	0·141	0·140	0·00502

Tabelle IV*a*.

Bez.	M	G	H	δM_0	$\frac{\delta M_0}{H}$	Δ_0	δM	$\frac{\delta M}{H}$	Δg	Δm
45, 9	910	24·8	0·753	5·59	7·40	0·294	5·65	7·50	0·300	0·00815
			0·326	2·40	7·36		2·42	7·40		
			0·082	0·59	7·15		0·60	7·35		
45, 6	362	16·7	1·342	4·32	3·21	0·188	4·36	3·25	0·191	0·00881
			0·753	2·37	3·15		2·41	3·20		
			0·326	1·02	3·13		1·04	3·19		
			0·082	0·25	3·09		0·26	3·13		
45, 3	63·5	8·3	1·342	1·26	0·94	0·112	1·26	0·94	0·113	0·00147
			0·753	0·69	0·92		0·71	0·94		
			0·326	0·30	0·92		0·30	0·93		

Tabelle IV*b*.

Bez.	m	z	V	Δ_0	Δg	Δm
45, 9	36·7	33·6	15·2	0·294	0·300	0·00815
45, 6	21·7	34·0	10·1	0·188	0·191	0·00881
45, 3	7·7	34·2	5·0	0·112	0·113	0·0147

Discussion der Resultate.

Zunächst gibt die nachfolgende Tabelle V einen Aufschluss über den Unterschied zwischen Δ_0 und Δg, d. h. den Inductionscoëfficienten für unmagnetisches und magnetisirtes Metall. In dieser Tabelle ist unter $\delta^0/_0$ der Unterschied in Procenten von Δg angegeben; ein $+\delta$ bezeichnet, dass Δ_0 grösser ist als Δg.

Tabelle V.

Bez.	V	$\delta^0/_0$	Bez.	V	$\delta^0/_0$
45, 15	37·7	+19	00, 15	37·6	+28
45, 10	25·4	+ 9	00, 10	25·6	+16
45, 8	20·6	+ 4	00, 8	20·3	+ 9
45, 6	15·2	0	00, 6	15 5	0
45, 4	9·9	— 2	00, 4	10·3	0
U I, 15	37·8	+22	45, 9	15·2	— 2
U I, 10	25·3	+ 6	45, 6	10·1	— 1
U I, 8	20·8	+ 3	45, 3	5·0	— 1
U I, 6	15·2	— 1			
U I, 4	10·1	0			

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass der auf die Gewichtseinheit bezogene Inductionscoëfficient bei Dimensionsverhältnissen von circa 40—15 für unmagnetisches Material grösser ist als für magnetisirtes. Die Differenz nimmt jedoch mit dem Dimensionsverhältniss ab, und bei Werthen desselben, die zwischen 15 und 5 liegen, sind die beiden Inductionscoëfficienten gleich.

Hinsichtlich der Abhängigkeit des Inductionscoëfficienten von der Feldstärke wäre aus diesen Beobachtungen eine ganz geringe Abhängigkeit in dem Sinne zu constatiren, dass die Inductionscoëfficienten mit der Feldstärke ein wenig abnehmen; doch muss dabei bemerkt werden, dass die Beobachtungen bei der niedersten Feldstärke (0·117) schon sehr unsicher waren, da das Commutiren des Feldes nur sehr kleine Galvanometer-

ausschläge lieferte. Es ist also immerhin möglich, dass die scheinbare Abhängigkeit auf Beobachtungsfehler zurückzuführen ist und dass der Inductionscoëfficient auch für diese Stahlstäbe innerhalb der hier angewandten Feldstärken constant ist, wie dies Kohlrausch und Sack[1] für andere Magnete festgestellt haben.

Betrachten wir endlich den Einfluss des Dimensionsverhältnisses, so haben wir bei den Stahlsorten 45 und U I nahezu constante Werthe des Inductionscoëfficienten Δg für die Dimensionsverhältnisse 37·5—15; von da ab bis 5 nehmen dieselben ab. Die Werthe von Δm, d. h. die auf das perm. Moment bezogenen Inductionscoëfficienten nehmen jedoch mit abnehmendem Dimensionsverhältnisse beträchtlich zu.

Bei den Stahlsorten 00 ergibt sich wieder wie bei den Temperaturcoëfficienten (vide 1. Abhandlung) eine Anomalie, und zwar für die Magnete 00, 15 und 00, 10. Diese zwei Magnete besitzen aber einen anderen specifischen Widerstand als die übrigen Stücke dieser Gruppe; dies deutet auf eine verschiedene Härtung, und darin wird auch der Grund dieses anomalen Verhaltens zu suchen sein.

Schliesslich noch einige Daten über die Abhängigkeit des permanenten Magnets von der Art der Unterbrechung des magnetisirenden Feldes. Ernst Andreasch[2] empfiehlt auf Grund der Beobachtungen von Waltenhofen's, Righi's, Allessandri's und Fromme's eine langsame Abnahme des magnetisirenden Feldes behufs Erreichung eines möglichst hohen permanenten Momentes. Eine solche Abnahme ist aber nicht so leicht ohne Weiteres durchzuführen, wenn man nicht etwa den Magnet langsam aus der magnetisirenden Spule herausziehen will. Es entsteht daher die Frage, wie viel man an Moment profitirt, wenn man die empfohlene Regel befolgt. Im vorliegenden Falle diente zur Magnetisirung die bereits früher erwähnte Spule, welche bei einem Strom von 12 A. eine

[1] Wied. Ann., Bd. 22 und 29.

[2] Elektrotechnische Zeitschrift, Heft 32 und 33, Jahrg. 1897.

Feldstärke von 724 abs. E. lieferte. Zur langsamen Stromunterbrechung bediente ich mich eines Ewing'schen Flüssigkeitsrheostaten mit zwei fixen und einer mittleren beweglichen Elektrode. Die Spule war im Nebenschlusse mit einer fixen und der beweglichen Elektrode angebracht.

Die schon früher beschriebenen Stahlstäbe wurden nun magnetisirt, indem ich zunächst das Feld mehrmals wechselte und dann mittelst eines Schlüssels von Du Bois (trockener Contact) plötzlich unterbrach oder indem ich nach mehreren Wechseln das Feld durch Aufwinden der beweglichen Elektrode langsam auf 0 sinken liess. In der nachfolgenden Tabelle VI ist unter $Z^0/_0$ die Zunahme des Momentes in Procenten nach der zweiten Art der Magnetisirung eingetragen. Die Magnete hatten durchwegs quadratischen Querschnitt, und s bedeutet die Seitenlänge in Millimetern.

Tabelle VI.

Bez.	V	s	$Z^0/_0$	Bez.	V	s	$Z^0/_0$
45, 15	37·7	4	0·10	00, 15	37·6	4	0·07
45, 10	25·4	4	0·14	00, 10	25·6	4	0·06
45, 8	20·6	4	0·45	00, 8	20·3	4	0·28
45, 6	15·2	4	0·34	00, 6	15·5	4	0·32
45, 4	9·9	4	1·59	00, 4	10·3	4	0·62
U I, 15	37·8	4	0·22	45, 9	15·2	6	2·51
U I, 10	25·3	4	0·25	45, 6	10·1	6	5·10
U I, 8	20·8	4	0·60	45, 3	5·0	6	5·40
U I, 6	15·2	4	0·78	Z 0	10	10	7·2
U I, 4	10·1	4	1·84	R 7	10	7	5·0

Zunächst lehren die Daten der Tabelle VI, dass bei dünneren Magneten (Querschnitt unter 16 mm^2) und den in der Praxis üblichen Dimensionsverhältnissen mit einer langsamen Abnahme des magnetisirenden Feldes ausserordentlich wenig gewonnen wird. Die Zunahme macht sich erst bei

grösseren Querschnitten praktisch bemerkbar. Sodann zeigt Tabelle VI eine regelmässige Zunahme von Z bei abnehmendem Dimensionsverhältniss, und schliesslich geht auch daraus hervor, dass Magnete mit höherem specifischen elektrischen Widerstande von der Art der Unterbrechung des Feldes weniger beeinflusst werden als solche mit niederem, was ja leicht erklärlich ist, da ja bei dieser Erscheinung die Foucault'schen Ströme eine Hauptrolle spielen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

67

XX. SITZUNG VOM 12. OCTOBER 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. I., Heft V (Mai 1899); — Abth. II. a., Heft IV und V (April und Mai 1899); — Abth. II. b., Heft IV und V (April und Mai 1899); — Abth. III., Heft I—III (Jänner bis März 1899). — Monatshefte für Chemie, Bd. XX, Heft VI (Juni 1899); Heft VII (Juli 1899); Heft VIII (August 1899).

Der Vorsitzende, Präsident Prof. E. Suess, begrüsst die Classe bei Wiederaufnahme der akademischen Sitzungen und gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe durch das am 16. August l. J. erfolgte Ableben ihres Ehrenmitgliedes, Geheimen Rathes Prof. Dr. Robert William Bunsen in Heidelberg, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diesen Verlust durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das Präsidium der »Società Adriatica di Scienze Naturali« in Triest übersendet eine Einladung zu ihrem am 15. October l. J. stattfindenden feierlichen Gründungsjubiläum.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus, und zwar die Herren Prof. Dr. Otto Stolz in Innsbruck und Prof. Dr. Karl Rabl in Prag für die Wahl zum wirklichen Mitgliede, die Herren Prof. Dr. Ludwig v. Graff und Prof. Dr. Rudolf Hoernes in Graz für die Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern, sowie Herr Prof. S. Schwendener in Berlin für die Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Weitere Dankschreiben haben übersendet:

I. Das w. M. Herr Prof. K. Grobben und das c. M. Herr Prof. B. Hatschek für die Überlassung der Kupferplatte mit dem Bildnisse von Hofrath Claus, behufs Anfertigung von Abzügen für die Zeitschrift: »Arbeiten aus den zoologischen Instituten der Universität Wien«;

II. Herr Dr. P. Zeeman in Amsterdam für die diesjährige Verleihung des A. Freiherrn v. Baumgartner-Preises;

III. Herr Eduard Mazelle in Triest für die bewilligte Subvention zur Entlohnung einer Hilfskraft betreffs Feststellung der täglichen Periode der Lothlinie für Triest;

IV. Herr Prof. Dr. Arthur Biedl in Wien für die bewilligten Subventionen zum Zwecke der Fortsetzung seiner physiologischen Arbeiten an der zoologischen Station in Neapel.

Die Direction der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien theilt in Beantwortung einer Anfrage seitens der Akademie-Kanzlei mit, dass vom Mai 1899 angefangen, die bisher im akademischen »Anzeiger« veröffentlichten magnetischen Beobachtungen nicht mehr erscheinen werden, da sich die Direction gezwungen sieht, überhaupt die magnetischen Beobachtungen als unbrauchbar infolge der durch die elektrischen Betriebe bei der Tramway und bei der Stadtbahn veranlassten Störungen aufzugeben.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

I. von Herrn Ernst Beutel eine Mittheilung aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz, betitelt: »Vorläufige Mittheilung über eine Methode zur Messung sehr hoher Temperaturen«.

II. von Herrn E. Oekinghaus in Königsberg i. P., betitelt: »Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche und der Integrabilität«;

III. von Herrn Karl Regensdorfer eine Arbeit aus dem III. chemischen Universitäts-Laboratorium in Wien, betitelt: »Über die quantitative Bestimmung des Äthyldichloramins«.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Karl Přibram, betitelt: »Beiträge zur Kenntniss des verschiedenen Verhaltens bei der Anode und Kathode bei der elektrischen Entladung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Mach übersendet eine vorläufige Mittheilung des Privatdocenten Herrn Dr. W. Pauli, betreffend einige im chemischen Laboratorium des k. k. Rudolph-Hospitales in Wien ausgeführte Versuche: »Über die physikalischen Zustandsänderungen der Eiweisskörper«.

Das c. M. Herr Prof. Rud. Hoernes in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Bericht über die obersteirischen Beben des ersten Halbjahres 1899 (zumal über die Erderschütterungen vom 1., 7. und 27. April)«, welche in der Reihe der »Mittheilungen der Erdbeben-Commission« die Nummer XIV tragen wird.

Das c. M. Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. Victor Schiffner in Prag, betitelt: »Expositio plantarum in itinere suo Indico annis 1893/94 suscepto collectarum«. Series secunda. Hepaticarum partem alteram continens.

Herr Lt. Cl. A. Baudouin in Paris übersendet ein Manuscript, betitelt: »L'éther, sa nature et ses vibrations différentes. Chaleur, lumière, électricité«.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften für Oberösterreich, Herr Prof. Franz Schwab, übersendet die Berichte über die mit dem Ehlert'schen Seismographen in den Monaten Mai bis August 1899 zu Kremsmünster angestellten Beobachtungen.

Versiegelte Schreiben zur Wahrung der Priorität sind eingelangt:

I. Von Herrn Dr. Franz Waldner in Innsbruck mit der Aufschrift: »Aëronautik«;

II. von Herrn Raimund Nimführ in Wien mit der Aufschrift: »Lösung einiger physikalischer Probleme«;

III. von Herrn Josef Knett in Karlsbad mit der Aufschrift: »Gesetzmässiges Wiederkehren mehrwöchentlicher Schwarmbeben im Erzgebirge nach 53—75-jährigen Pausen«;

IV. von Herrn Anton Braun in Wien mit der Aufschrift: »Theorie und Construction eines Dreifach-Verbund-Gebläses zur Erzeugung relativ hoher Pressungen bei geringem Kraftbedarf«;

V. von Herrn Franz Rychnowski in Lemberg mit der Aufschrift: »Eine Ätheroid- (Elektroid-) Maschine«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung: »Zur Theorie der Elimination. I. Theil«.

Herr Dr. Anton Elschnig, Privatdocent für Augenheilkunde in Wien, legt eine Abhandlung vor mit dem Titel: »Der normale Sehnerveneintritt des menschlichen Auges«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Belar, Albin: Laibacher Erdbebenstudien. Laibach, 1899; 8°.

Decroly, Dr. O.: Étude de l'action des toxines et antitoxines sur la nutrition générale. Extrait des Archives internationales de Pharmaco-dynamie, vol. IV, fasc. 5—6. Gand-Paris, 1898; 8°.

K. k. Geographische Gesellschaft: Die Pflege der Erdkunde in Österreich 1848—1898. Festschrift der k. k. geographischen Gesellschaft aus Anlass des 50jährigen Regierungsjubiläums Seiner Majestät des Kaisers Franz Joseph I., verfasst von Prof. Dr. Friedrich Umlauft. Wien, 1898; 8°.

Kerntler, Franz: Die Unität des absoluten Maass-Systems in Bezug auf magnetische und elektrische Grössen. Budapest, 1899; 8°.

Klossovsky, A.: Vie physique de notre planète devant les lumières de la science contemporaine. Odessa, 1899; 8°.

Moravec, Dr. Wenzel: Heilbarkeit der Tuberkulose. Prag, 1899; 8⁰.

Santa Rosa, Dr. Henrique: Album do Parà em 1899 na administração do Governo de Sua Ex[cia] o Senr. Dr. José Paes de Carvalho. 4⁰.

Stossich M.: Appunti di elmintologia. Con una tavola. Trieste, 1899; 8⁰.

— La sezione degli echinostomi. Trieste, 1899; 8⁰.

— Lo smembramento dei Brachycoelium. Trieste, 1899; 8⁰.

— Strongylidae. Lavoro monografico. Trieste, 1899; 8⁰.

Unger, Joachim: Die Ursache der Umdrehung der Erde und aller Planeten um ihre Achse. Wien—Leipzig, 1898; 8⁰.

Über die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art und die zu ihnen perspectiven ebenen Curven

von

Phil. Dr. **Josef Grünwald** in Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Juni 1899.)

Einleitung.

Die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art sind schon oft zum Gegenstande eingehender Bearbeitung gemacht worden.[1] In der vorliegenden Arbeit soll ein kleiner Beitrag zur Theorie dieser Curven geliefert und zugleich sollen die rationalen ebenen Curven vierter Ordnung, welche ja als perspective Bilder jener Raumcurven aufgefasst werden können, in Untersuchung gezogen werden. Eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art ist im Allgemeinen vollständig bestimmt, wenn angegeben wird: 1. die einzige durch sie gehende Fläche zweiter Ordnung F mit der besonderen Angabe jener Regelschaar der Fläche, deren Gerade die Curve in je einem Punkte treffen; 2. auf dieser Fläche die Lage von sieben Punkten der Raumcurve.

Im ersten Abschnitte der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man die Centralprojection einer so gegebenen Raumcurve aus einem beliebigen Punkte auf eine beliebige Ebene punktweise construiren kann. Im zweiten Abschnitte wird sodann

---

[1] Ein ziemlich ausführliches Verzeichniss der einschlägigen Arbeiten findet sich in der ebenfalls hierhergehörigen Abhandlung von Rohn: »Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species« im 42. Bande der »Verhandl. der kgl. sächs. Ges. der Wiss.«, S. 209. Die erwähnte Abhandlung ist im 43. Bande fortgesetzt.

die gefundene Construction vereinfacht, und weiterhin werden im Anschlusse daran die Untersuchungen von Ameseder über rationale ebene Curven vierter Ordnung in ein neues Licht gerückt. Im dritten Abschnitte wird eine interessante Eigenschaft der Bisecanten der Raumcurve abgeleitet und ausserdem die von anderen Autoren eingeführte Eintheilung der betrachteten Raumcurven in verschiedene Typen einer näheren Erörterung unterzogen.

I.

1. Durch eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4 geht bekanntlich nur eine Fläche zweiter Ordnung F. Die beiden Regelschaaren dieser Fläche zeigen gegenüber unserer C_4 ein wesentlich verschiedenes Verhalten, indem auf den Geraden G der einen Schaar nur ein einziger Punkt der C_4 liegt, während auf den Geraden Γ der anderen Schaar immer je drei Punkte liegen (von denen zwei conjugirt imaginär sein können).

Zwischen den Geraden G und Γ der beiden Schaaren, welche sich in einem Punkte x der C_4 treffen, besteht eine ein-drei-deutige Beziehung, indem zu jeder G nur eine Γ gehört, zu jeder Γ aber drei G. Diese ein-drei-deutige Beziehung ist im Allgemeinen vollständig bestimmt, wenn zu sieben der Geraden G die zugehörigen Geraden Γ oder — was auf dasselbe hinauskommt, die auf ihnen liegenden Punkte x der C_4 angegeben werden. Wenn man die Geraden G und Γ aus einem beliebigen Punkte p des Raumes, welcher der Fläche F nicht angehört, auf eine Ebene E projicirt, so sind ihre Bilder G' und Γ' Tangenten eines und desselben Kegelschnittes F'. Zwischen den Geraden G' und Γ' besteht wie zwischen den Geraden G und Γ eine ein-dreideutige Beziehung; zwei sich entsprechende Gerade G' und Γ' schneiden sich in einem Punkte derjenigen ebenen Curve C'_4, welche durch Centralprojection der C_4 aus p in E entsteht. Die ebene Curve C'_4 ist wie die Raumcurve C_4 selbst rational und von der vierten Ordnung; man erkennt auch, dass sie den Kegelschnitt F' in jenen vier Punkten berühren muss, welche man erhält, wenn man die C_4 mit der Polarebene des Punktes p in Bezug auf F schneidet und die Schnittpunkte aus p auf E projicirt.

2. Es fragt sich nun, wie man auf einer beliebigen Tangente G' von F' den Schnittpunkt x' derselben mit der zugehörigen Tangente Γ' finden kann, wenn dem Obigen gemäss auf sieben der Geraden G' die zugehörigen Punkte x' gegeben sind.[1]

Man kann zeigen, dass die eben gestellte Aufgabe mit Hilfe einer gewissen Schaar von ∞^1 Collineationen (Q) in der Ebene E folgendermassen zu lösen ist: Um auf einer Tangente G' von F' den zugehörigen Punkt x' zu finden, braucht man die G' nur mit jener Geraden G'' zu schneiden, welche der G' in einer Collineation Q der Schaar entspricht.

Zunächst überzeugt man sich leicht, dass wenn man in der angegebenen Weise jede Tangente G' von F' mit der ihr jeweilig in einer Collineation Q entsprechenden Geraden G'' schneidet und aus dem Schnittpunkte x' die zweite Tangente Γ' an F' zieht, zwischen den Tangenten G' und Γ' thatsächlich eine ein-dreideutige Beziehung besteht. Dass zu jeder G' nur eine Γ' gehört, ist selbstverständlich; um zu erfahren, wie viele G' zu einer Γ' gehören, haben wir nur nachzusehen, wie oft auf einer bestimmten Tangente Γ' von F' zwei in der Collineation Q sich entsprechende Gerade G' und G'' sich schneiden. Wenn G' das System der Tangenten von F' durchläuft, wird die ihr in Q entsprechende Gerade G'' den Kegelschnitt F'' umhüllen, welcher F' in Q entspricht; die Punktreihen g' und g'', welche hiebei von den Geraden G' und G'' auf der Γ ausgeschnitten werden, stehen in ein-zweideutiger Beziehung zu einander, indem zu jedem g' ein g'', zu jedem g'' aber zwei g' gehören.

Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincip gibt es daher auf der Γ': $1+2=3$ Punkte, in welchen zwei zusammengehörige Punkte g' und g'' vereinigt liegen, in welchen also zwei zusammengehörige Gerade G' und G'' sich schneiden. Zu jeder Γ' gehören somit thatsächlich drei Gerade G'.

---

[1] Mit der Beantwortung dieser Frage ist offenbar das Problem vollkommen gelöst, eine durch sieben entsprechende Paare gegebene ein-dreideutige Beziehung zwischen den Tangenten eines und desselben Kegelschnittes zu vervollständigen.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass es wirklich ∞^1 Collineationen gibt von der Beschaffenheit, dass in jeder von ihnen den oben angenommenen sieben Tangenten G' von F' Gerade G'' durch die auf ihnen angegebenen Punkte x' entsprechen. Folgende Überlegung, welche wir weiterhin zu einem vollkommen strengen Beweise unserer Behauptung ausgestalten werden, mag dies zunächst plausibel machen: Es gibt in der Ebene E im Ganzen ∞^8 Collineationen. Verlangt man, dass einer Geraden G' eine Gerade G'' durch einen auf ihr angenommenen Punkt x' entsprechen soll, so ist dies eine einfache Bedingung, welche aus der Mannigfaltigkeit der ∞^8 überhaupt vorhandenen Collineationen eine Mannigfaltigkeit nächst niederer Stufe, also von ∞^7 Collineationen, ausscheidet. Sollen nun in einer Collineation Q den sieben Geraden G'_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ Gerade G''_i durch die auf ihnen angenommenen Punkte x'_i entsprechen, so hat man sieben zu erfüllende einfache Bedingungen; demgemäss wird es noch immer eine Mannigfaltigkeit von ∞^1 Collineationen geben, welche das Verlangte leisten.

3. Die Existenz der genannten Schaar von Collineationen (Q) wird über jeden Zweifel erhaben sein, wenn es gelingt, eine Methode ausfindig zu machen, nach welcher man sich diese Schaar wirklich herstellen kann.

Bevor wir jedoch dazu übergehen können, ist es nothwendig, Einiges vorauszuschicken über den Begriff einer linearen Mannigfaltigkeit von Collineationen. Genau so, wie bei den Kegelschnitten der Ebene unter dem Begriffe: »Lineare Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten« etwas Anderes zu verstehen ist, wenn man die Kegelschnitte als Örter von Punkten, etwas Anderes, wenn man sie als Örter von Strahlen ansieht (nämlich im ersten Falle die Büschel, im zweiten die Schaaren von Kegelschnitten), genau so ist der Begriff: »Lineare Mannigfaltigkeit von Collineationen« ein anderer, wenn die Collineation als Transformation von Punkten, ein anderer, wenn sie als Transformation von Geraden aufgefasst wird; die erstere lineare Mannigfaltigkeit wird zweckmässig als »Büschel«, die letztere als »Schaar« von Collineationen zu bezeichnen sein.

Die oben eingeführte Mannigfaltigkeit von ∞^1 Collineationen Q verdient auch in diesem Sinne, wie wir unten sehen werden, den Namen einer »Schaar«, welchen Namen wir ihr oben, ohne einen bestimmten Sinn damit zu verbinden, beigelegt haben.

Um den Begriff der »Schaar«[1] von Collineationen — denn nur diesen benöthigen wir für die folgenden Auseinandersetzungen[1] — klarzustellen, bedienen wir uns, um Weitschweifigkeiten zu vermeiden, der analytischen Ausdrucksweise. Sind zwei Collineationen Q_1 und Q_2 gegeben, durch welche irgend eine beliebige Gerade U, deren trimetrische Coordinaten u_1, u_2, u_3 seien, in die Gerade $U'(u'_1, u'_2, u'_3)$, beziehungsweise $U''(u''_1, u''_2, u''_3)$ übergeführt wird, so können wir aus diesen beiden Collineationen eine neue dadurch ableiten, dass wir jeder Geraden U jene Gerade $\mathfrak{U}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3)$ als entsprechend zuweisen, deren Coordinaten

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_1 &= \lambda' u'_1 + \lambda'' u''_1 \\ \mathfrak{u}_2 &= \lambda' u'_2 + \lambda'' u''_2 \\ \mathfrak{u}_3 &= \lambda' u'_3 + \lambda'' u''_3 \end{aligned}$$

sind, wobei λ' und λ'' beliebige Zahlengrössen sind.

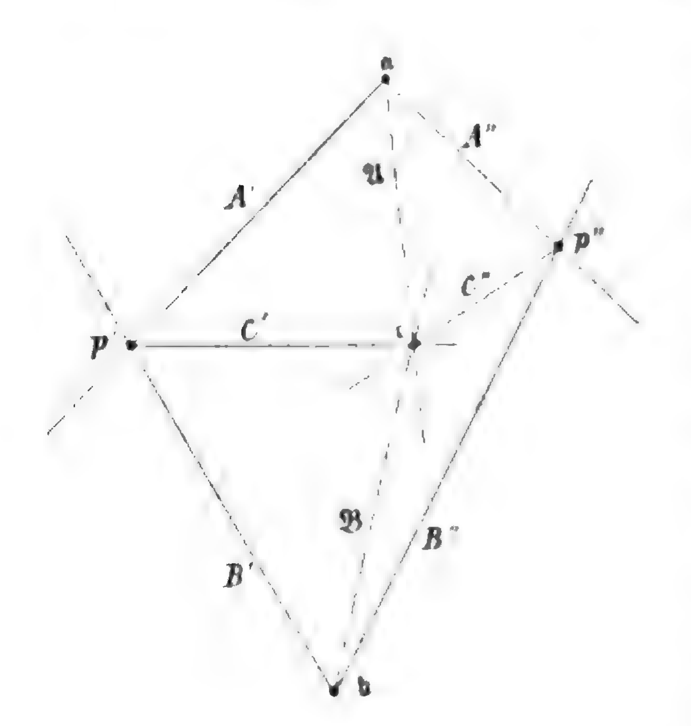
Entsprechend den ∞^1 Werthen, deren das Verhältniss $\lambda' : \lambda''$ fähig ist, erhalten wir so ∞^1 verschiedene Collineationen, deren Gesammtheit wir als die aus den Collineationen Q_1 und Q_2 linear ableitbare Schaar von Collineationen bezeichnen wollen; als passendes Symbol einer Collineation dieser Schaar verwenden wir den Ausdruck: $(\lambda' Q_1 + \lambda'' Q_2)$, die Schaar selbst mag einfach durch (Q_1, Q_2) dargestellt werden.

4. In den Collineationen der Schaar (Q_1, Q_2) entspricht jeder Geraden — wofern diese nicht eine von den drei Geraden ist, deren collineare Bilder in beiden Collineationen Q_1 und Q_2 zusammenfallen — ein Strahlenbüschel, dessen Centrum ein-

[1] Der Begriff eines »Büschels« von Collineationen, dessen wir erst viel später in einem anderen Zusammenhange bedürfen werden, entspricht dem Begriffe einer »Schaar« nach dem Principe der Dualität. Mit Hilfe dieses Princips können ohne weiteres alle Sätze über »Schaaren« in solche über »Büschel« von Collineationen umgewandelt werden.

fach als Schnittpunkt der collinearen Bilder dieser Geraden in Q_1 und Q_2 erhalten wird. Und zwar beschreiben die den Geraden $U_1, U_2, \ldots$ der Ebene entsprechenden Geraden, wenn man die Geraden $U_1, U_2, \ldots$ der Reihe nach allen Collineationen der Schaar unterwirft, ihre Strahlenbüschel projectiv zu einander.

Weist man einer Geraden A, deren collineares Bild in Q_1: A', in Q_2: A'' ist, eine bestimmte Gerade $\mathfrak{A}^{(0)}$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ von $A'A''$ als entsprechend zu, so ist durch diese Zuweisung eine ganz bestimmte Collineation $\mathfrak{C}_0$ der Schaar (Q_1, Q_2) definirt; und es fragt sich nun, wie man zu irgend einer Geraden B der Ebene die ihr in dieser Collineation $\mathfrak{C}_0$ entsprechende Gerade $\mathfrak{B}^{(0)}$ construirt. Denken wir uns die Geraden A und B der Reihe nach den sämmtlichen Collineationen der Schaar (Q_1, Q_2) unterworfen, so werden nach dem oben Gesagten die ihnen entsprechenden Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den Punkten $\mathfrak{a} = [A'A'']$ und $\mathfrak{b} = [B'B'']$ projective Strahlbüschel beschreiben.



In dieser Projectivität werden (siehe Figur) die Geraden A', B' und A'', B'' homologe Strahlen darstellen; um die Projectivität vollkommen zu bestimmen, ist noch ein drittes Paar homologer Strahlen nöthig. Ein solches erhält man in nachstehender Weise: Man bestimmt zu einer Geraden C, welche beliebig durch den Schnittpunkt p von A und B hindurchgelegt wird, ihr collineares Bild C' in Q_1 und C'' in Q_2; die beiden Geraden C' und C'', von denen die erste offenbar durch den Punkt $p' = [A'B']$, die zweite durch den Punkt $p'' = [A''B'']$ hindurchgehen muss, schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{c}$.

In jeder Collineation der Schaar (Q_1, Q_2) wird der C eine Gerade durch den Punkt $\mathfrak{c}$ entsprechen müssen. Es gibt nun in

der Schaar sicher eine und nur eine Collineation, in welcher auch der Geraden A eine durch $\mathfrak{c}$ gehende Gerade, nämlich die Gerade $[\mathfrak{ac}]$ entspricht; in dieser Collineation muss dann offenbar auch der B eine durch $\mathfrak{c}$ gehende Gerade entsprechen, also die Gerade $[\mathfrak{bc}]$. Es bilden somit die beiden Geraden $[\mathfrak{ac}]$ und $[\mathfrak{bc}]$ ein Paar homologer Strahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den projectiven Strahlbüscheln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; die Projectivität der beiden Strahlenbüschel ist jetzt vollkommen bestimmt. Bestimmt man jene Gerade durch $\mathfrak{b}$, welche in dieser Projectivität der Geraden $\mathfrak{A}^{(0)}$ durch $\mathfrak{a}$ entspricht, so erhält man die gesuchte Gerade $\mathfrak{B}^{(0)}$.

5. Durch die angestellten Betrachtungen sind wir in den Stand gesetzt, den Begriff einer »Schaar« von ∞^1 Collineationen, den wir ursprünglich analytisch formulirt haben, von der Verquickung mit einem Coordinatensystem loszulösen und rein geometrisch, ohne alles analytische Beiwerk, zu erfassen. Nichtsdestoweniger erscheint es geboten, auch fernerhin die analytische Formulirung sich stets vor Augen zu halten, weil diese über Dinge gleichsam mit einem Schlage Auskunft gibt, welche in anderer Weise nur vermittelst langwieriger Betrachtungen zu erkennen wären. Hat man drei Collineationen Q_1, Q_2, Q_3 gegeben, von denen keine aus den beiden anderen linear abgeleitet werden kann, welche also — wie man sagt — linear unabhängig sind oder welche — nach Grassmann'scher Ausdrucksweise — in keiner Zahlbeziehung stehen, so kann man aus ihnen mit Hilfe dreier Parameter $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Collineationen linear ableiten: Entspricht einer beliebigen Geraden $U(u_1, u_2, u_3)$ in Q_1 die Gerade $U'(u'_1, u'_2, u'_3)$, in Q_2 die Gerade $U''(u''_1, u''_2, u''_3)$, in Q_3 die Gerade $U'''(u'''_1, u'''_2, u'''_3)$, so erhält man aus ∞^2 Collineationen dadurch, dass man jeder Geraden U jeweilig jene Gerade $\mathfrak{U}(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3)$ als entsprechend zuweist, deren Coordinaten sind:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_1 &= \lambda' u'_1 + \lambda'' u''_1 + \lambda''' u'''_1 \\
\mathfrak{u}_2 &= \lambda' u'_2 + \lambda'' u''_2 + \lambda''' u'''_2 \\
\mathfrak{u}_3 &= \lambda' u'_3 + \lambda'' u''_3 + \lambda''' u'''_3 .
\end{aligned}$$

Die so entstehende Mannigfaltigkeit von ∞^2 Collineationen bezeichnen wir sinngemäss als »Schaar zweiter Stufe«

(Q_1, Q_2, Q_3). Aus vier Collineationen, welche in keiner Zahlbeziehung stehen, kann in analoger Weise eine »Schaar dritter Stufe« linear abgeleitet werden; überhaupt aus n Collineationen, welche in keiner Zahlbeziehung stehen — es darf hiebei das n die Zahl 9 nicht übersteigen — eine »Schaar $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe«.

Sämmtliche Collineationen, die in der Ebene möglich sind, lassen sich — wie man sich leicht überzeugt — aus neun linear unabhängigen Collineationen linear ableiten; die Gesammtheit aller Collineationen der Ebene ist in diesem Sinne als »Schaar achter Stufe« anzusehen. Dies ist der Grund, warum zwischen zehn Collineationen, die in der Ebene irgendwie angenommen werden, stets mindestens eine Zahlbeziehung bestehen muss und lineare Mannigfaltigkeiten höherer als achter Stufe von Collineationen der Ebene nicht existiren.

6. Mit den eben auseinandergesetzten Begriffen ausgerüstet, können wir nunmehr an die Lösung des oben gestellten Problems gehen: Auf sieben Tangenten G_i' $(i = 1, 2, \ldots 7)$ des Kegelschnittes F' sind die sieben Punkte x_i' $(i = 1, 2, \ldots 7)$ gegeben; man soll jene Collineationen Q bestimmen, in welchen den Geraden G_i' Gerade durch die zugehörigen Punkte x_i' entsprechen.

Wir geben dem Problem eine noch allgemeinere Fassung, indem wir vorläufig ganz davon absehen, dass die Geraden G_i' Tangenten desselben Kegelschnittes F' sind und also ganz allgemein von sieben Geraden I, II, III, IV, V, VI, VII der Ebene ausgehen, von denen nur vorausgesetzt wird, dass keine drei von ihnen in einem Punkte sich schneiden. Auf diesen sieben Geraden sind die zugehörigen Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gegeben, und es handelt sich also jetzt darum, jene Collineationen Q zu finden, in welchen den Geraden I, II, III, ... VII Gerade durch die Punkte 1, 2, 3, ... 7 entsprechen.

Da wir nach einer früher angestellten Betrachtung erwarten müssen, dass es im Ganzen ∞^1 solcher Collineationen gibt,[1] so können wir — vorbehaltlich einer etwa später zu machenden

[1] In gewissen »ausgearteten Fällen« gibt es mehr als ∞^1 solcher Collineationen.

Einschränkung — unbeschadet der Allgemeinheit der Geraden VII eine von ihr verschiedene Gerade VII' durch den Punkt 7 willkürlich als entsprechend zuweisen, indem durch diese Zuweisung jedenfalls unter den ∞^1 Collineationen, welche der Aufgabe überhaupt genügen, eine bestimmte Anzahl, und zwar, wie sich zeigen wird, eine einzige[1] Collineation Q' definirt wird.

7. Es hat gar keine Schwierigkeit, zunächst drei in keiner Zahlbestimmung stehende Collineationen q_1, q_2, q_3 sich herzustellen, in welchen nicht nur der Geraden VII die Gerade VII' durch 7 entspricht, sondern auch den Geraden I, II, III, IV jeweilig irgend welche Gerade durch die zugehörigen Punkte 1, 2, 3, 4 entsprechen. Die Collineation q_1 erhält man in folgender Weise: Weist man den Geraden I und II die Geraden I' und II' durch die zugehörigen Punkte 1 und 2 als entsprechend zu (der Geraden VII ist bereits ein für allemal die Gerade VII' als entsprechend zugewiesen), lässt aber jene Gerade durch 3, welche der III entsprechen soll, einstweilen unbestimmt, so ist durch diese Zuweisungen zunächst offenbar eine Schaar von ∞^1 Collineationen bestimmt; in den Collineationen dieser Schaar entspricht der Geraden IV ein ganzes Strahlbüschel von Geraden. Denn würde der IV in allen Collineationen der Schaar etwa dieselbe Gerade entsprechen, so hätte man im Ganzen vier Gerade, bei denen dies der Fall ist und von denen keine drei sich in einem Punkte schneiden, nämlich ausser IV noch die Geraden VII, I und II; dies ist aber unmöglich. Unter den Strahlen des Büschels, welches der IV in den Collineationen der Schaar entspricht, gibt es sicher einen[2] Strahl, der durch 4 geht; wir erhalten dementsprechend eine[2] bestimmte Collineation q_1 der Schaar, in welcher den Geraden VII, I, II, III, IV Gerade durch die zugehörigen Punkte: 7, 1, 2, 3, 4 entsprechen. — Wiederholt man den eben angegebenen Vorgang, indem man nur der Geraden I eine andere Gerade als oben:

---

[1] In ausgearteten Fällen trifft dies, wie wir noch sehen werden, nicht mehr zu.

[2] Unendlich viele Strahlen dann, wenn zufällig das Centrum des Strahlenbüschels in den Punkt 4 fällt; dann kann q_1 jede beliebige Collineation der Schaar sein.

I″ zuweist, der II aber wieder die II′ entsprechen lässt, so erhält man schliesslich eine von q_1 verschiedene Collineation q_2, in der wieder den Geraden VII, I, II, III, IV Gerade durch die zugehörigen Punkte 7, 1, 2, 3, 4 entsprechen. Eine dritte Collineation q_3 endlich, welche dasselbe leistet, findet man analog, indem man der I wieder die I′ durch 1 zuweist, dafür aber der II eine andere Gerade II″ durch 2 entsprechen lässt.

Man erkennt, dass die drei so gewonnenen Collineationen unmöglich einer und derselben Schaar erster Stufe angehören können, dass also zwischen ihnen keine Zahlbeziehung bestehen kann. Für das Folgende ist es wichtig zu betonen, dass diese drei Collineationen auch mit der identischen Collineation, welche jede Gerade in sich selbst überführt, durch keine Zahlbeziehung verbunden sein können; denn in allen Collineationen der Schaar zweiter Stufe (q_1, q_2, q_3) entspricht der Geraden VII die von ihr verschiedene Gerade VII′, und es kann daher die identische Collineation in dieser Schaar nicht enthalten sein.

8. Nunmehr kann man leicht zwei von einander verschiedene Collineationen q'_1 und q'_2 aufstellen, in welchen nicht nur den Geraden VII, I, II, III, IV Gerade durch die zugehörigen Punkte 7, 1, 2, 3, 4 entsprechen, sondern auch noch der Geraden V eine Gerade durch den zugehörigen Punkt 5 entspricht.

In den obigen Collineationen q_1 und q_2 mögen den Geraden V, beziehungsweise VI die Geraden V′ und V″, beziehungsweise VI′ und VI″ entsprechen; es kann unmöglich zugleich V′ = V″ und VI′ = VI″ sein, weil sonst in beiden Collineationen den Geraden VII, II, V, VI die nämlichen Geraden entsprechen würden, was wegen der Verschiedenheit der beiden Collineationen ausgeschlossen ist. Sei also V′ von V″ verschieden (was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, da es ja in unserer Hand liegt, welche Gerade wir mit V und welche wir mit VI bezeichnen wollen); dann ist es noch immer möglich, dass der Geraden V in der Collineation q_3 eine Gerade V‴ entspricht, welche mit einer der Geraden V′ oder V″, etwa mit V′, zusammenfällt. In letzterem Falle ersetzen wir für das Folgende die Collineation q_3 durch irgend eine der

Collineationen $(\lambda'' q_2 + \lambda''' q_3)$ der Schaar (q_2, q_3), wobei λ'' und λ''' als von Null verschieden vorausgesetzt werden; eine solche Collineation — wir bezeichnen sie mit $\bar{q}_3$ —, wird offenbar ebensowenig wie die Collineation q_3 mit q_1 und q_2 in Zahlbeziehung stehen können, es wird auch in der Collineation $\bar{q}_3$ der Geraden VII die ein- für allemal angenommene VII′ entsprechen; dagegen bietet diese Collineation gegenüber der Collineation q_3 den Vortheil, dass in ihr der Geraden V eine Gerade entspricht, welche von V′ und V″ verschieden ist.

Wir können also jetzt ohne weiteres annehmen, dass in den Collineationen q_1, q_2, q_3 der Geraden V die von einander verschiedenen Geraden V′, V″, V‴ entsprechen. Setzen wir zunächst voraus, dass keine von den letzteren drei Geraden mit der Geraden V zusammenfällt, so haben wir in jeder der beiden Schaaren (q_1, q_3) und (q_2, q_3) sicher eine[1] Collineation: q'_1 in der ersten und q'_2 in der zweiten Schaar: von der Beschaffenheit, dass in ihnen der V je eine Gerade durch den zugehörigen Punkt 5 entspricht; fällt hingegen eine der Geraden V′, V″, V‴, etwa V′, mit V zusammen, so ist die Collineation q_1 selbst schon eine Collineation der verlangten Beschaffenheit, eine zweite q'_2 liefert die Schaar (q_2, q_3). Auf jeden Fall erkennt man, dass die so gewonnenen Collineationen q'_1 und q'_2 von einander nothwendig verschieden sind, während anderseits aus der Entstehungsweise dieser Collineationen unmittelbar hervorgeht, dass in ihnen den Geraden VII, I, II, III, IV, V Gerade durch die zugehörigen Punkte 7, 1, 2, 3, 4, 5 entsprechen.

9. Entsprechen der Geraden VI in den beiden so gefundenen Collineationen q'_1 und q'_2 die von einander verschiedenen Geraden VI′ und VI″, so gibt es in der Schaar (q'_1, q'_2) sicher eine Collineation Q', in welcher der VI eine durch den Punkt 6 gehende Gerade entspricht: Diese Collineation ist dann schon eine der gesuchten: Q, da in ihr der Geraden VII die willkürlich durch 7 gelegte VII′, den Geraden I, II, III, IV, V, VI jeweilig Gerade durch die zugehörigen Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 entsprechen.

[1] In ausgearteten Fällen (wenn V′ und V‴, beziehungsweise V″ und V‴ beide durch 5 gehen) unendlich viele.

Fallen aber die der Geraden VI in q'_1 und q'_2 entsprechenden Geraden VI' und VI'' zusammen, so ist eine besondere Überlegung nöthig. Würden die Geraden VI' = VI'' etwa selbst schon durch 6 hindurchgehen, so könnte jede Collineation der Schaar (q'_1, q'_2) als eine Collineation Q' angesehen werden;[1] es bleibt daher nur der Fall zu untersuchen übrig, dass VI' = VI'' nicht durch 6 durchgeht. In diesem Falle ersetzen wir die Collineation q'_2 durch eine beliebig aus der Collineation q'_2 und der identischen Collineation, welche jede Gerade in sich selbst überführt, linear abgeleitete Collineation $\bar{q}'_2$; in $\bar{q}'_2$ wird der Geraden VI eine sowohl von ihr selbst, als von der Geraden VI' verschiedene Gerade durch 6 entsprechen.[2] In der Schaar (q'_1, q'_2) kann die identische Collineation nicht vorkommen, da man sonst auf eine Zahlbeziehung zwischen der identischen Collineation und den früher betrachteten Collineationen q_1, q_2, q_3 geführt würde, was nach dem Obigen eine Unmöglichkeit ist; wohl aber wird es in dieser Schaar sicher eine Collineation $\underset{\sim}{Q}$ geben, in welcher die Gerade VI sich selbst entspricht.

In dieser Collineation entspricht in der That jeder der Geraden I, II, III, IV, V, VI, VII je eine durch den zugehörigen Punkt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 hindurchgehende Gerade; die der VII entsprechende Gerade wird jetzt freilich eine andere sein als die ursprünglich angenommene VII'.

10. Aus dem Gesagten geht hervor, wie man sich stets eine Collineation Q' herstellen kann von der Beschaffenheit, dass irgend welche sieben Gerade, von denen keine drei in einem Punkte sich schneiden, von den ihnen in Q' entsprechenden Geraden in gegebenen Punkten geschnitten werden; es geschieht dies durchwegs mit Hilfe linearer Constructionen. Hat man aber einmal eine solche Collineation Q', so erhält man ∞^1 solche Collineationen Q, die genau dasselbe leisten, indem man die aus der Collineation Q' und der identischen Collineation, welche symbolisch mit [1] bezeichnet sei, ableitbare Schaar $(1, Q')$ bildet.

---

[1] Auch dieser Fall ist unter die sogenannten »ausgearteten« zu zählen.

[2] Der Geraden VII wird in der Collineation $\bar{q}'_2$ eine Gerade durch 7 entsprechen, welche sowohl von ihr selbst als von der ursprünglich angenommenen verschieden ist.

In besonderen Fällen (solche sind die in den oben gemachten Anmerkungen hervorgehobenen »ausgearteten«) kann es sich wohl ereignen, dass es im Ganzen eine noch höhere Mannigfaltigkeit von Collineationen gibt, die das Verlangte leisten, z. B. eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Collineationen oder eine Mannigfaltigkeit noch höherer Stufe.

Wir wissen also jetzt, wie man jene Collineationen Q bestimmen kann, in welchen den sieben Tangenten G_i' des Kegelschnittes F' Gerade G_i'' durch die zugehörigen Punkte x_i' entsprechen.

Beschränken wir uns zunächst auf den im Allgemeinen eintretenden Fall, dass es nur eine Schaar $(1, Q')$ von ∞^1 Collineationen der verlangten Art gibt, und zwar eine solche, welche die identische Collineation in sich enthält. Man findet dann sämmtliche Punkte x' der Curve C_4', indem man sämmtliche Tangenten G' von F' mit den ihnen in einer Collineation der Schaar $(1, Q')$ entsprechenden Geraden G'' schneidet.

11. Gibt es eine Mannigfaltigkeit höherer als der ersten Stufe von Collineationen der verlangten Art, so ist dies, wie weiter unten bewiesen werden wird, ein Zeichen, dass durch die auf den sieben Geraden G_i der einpunktigen Regelschaar der Fläche F angenommenen sieben Punkte x_i nicht eine einzige Raumcurve C_4 vierter Ordnung zweiter Art bestimmt ist, sondern dass es vielmehr unendlich viele solcher Curven gibt, die alle auf F liegen und von den Geraden G je in einem Punkte getroffen werden. Dass dies im Besonderen eintreten kann, lehrt folgende Überlegung: Zwei Curven vierter Ordnung zweiter Art, welche beide auf derselben Fläche zweiter Ordnung F liegen und von den Geraden der Schaar G in je einem Punkte getroffen werden, schneiden sich — wie man sich leicht überzeugt — im Ganzen in sieben Punkten. Werden diese Punkte jetzt mit x_i, die durch sie gehenden Geraden der Schaar (G) mit G_i entsprechend bezeichnet, so ist klar, dass durch diese sieben Geraden G_i mit diesen zugehörigen Punkten x_i nicht eine einzige C^4 bestimmt sein kann, sondern vielmehr ein ganzes Büschel von solchen Curven.

Der oben bezeichnete Ausnahmsfall kann also wirklich eintreten. Die Curve C_4' ist in diesem Falle natürlich auch nicht eindeutig bestimmt, man erhält vielmehr ebenfalls ein ganzes Büschel von solchen Projectionscurven. Dementsprechend werden die Collineationen Q, von denen oben die Rede war, nicht bloss aus den Collineationen einer Schaar erster Stufe vom Typus $(1, Q')$ bestehen können, sondern werden mindestens eine Schaar zweiter Stufe $(1, Q', Q'')$ bilden.

Ist aber durch sieben Gerade G_i der einpunktigen Schaar G und die zugehörigen Punkte x_i nur **eine** einzige Curve C_4 bestimmt — was fortan stets vorausgesetzt werden soll —, so gibt es — wie sich im folgenden Abschnitte von selbst ergeben wird — nur ∞^1 Collineationen einer Schaar vom Typus $(1, Q')$ und **weiter keine** von der Beschaffenheit, dass in ihnen den Geraden G_i' $(i = 1, \ldots 7)$ Gerade durch die zugehörigen Punkte x_i' entsprechen.

II.

12. Als feststehendes Ergebniss der Betrachtungen des vorigen Abschnittes ist hervorzuheben: Man kann die Centralprojection der C_4 aus einem der Fläche zweiter Ordnung F nicht angehörenden Punkte p auf eine Ebene E: die ebene Curve C_4': in einfacher Weise dadurch construiren, dass man die Tangenten des Kegelschnittes F' mit den ihnen jeweilig in einer Collineation Q einer gewissen Schaar $(1, Q')$ entsprechenden Geraden schneidet, wobei die genannte Schaar durch eine Reihenfolge linearer Constructionen gefunden wird. Dass es ausser den Collineationen der Schaar $(1, Q')$ weiter keine mehr gibt, die dasselbe leisten, wird sich unten von selbst ergeben. Es gibt im Allgemeinen drei Gerade D_1, D_2, D_3 in der Ebene E, welche in der Collineation Q' und daher auch in allen Collineationen der Schaar $(1, Q')$ sich selbst entsprechen. Seien d_1, d_2, d_3 beziehlich die den Seiten D_1, D_2, D_3 gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiseits $(D_1 D_2 D_3)$, so ist klar, dass diese drei Punkte in den Collineationen der Schaar $(1, Q')$ sich selbst entsprechen. Lassen wir die Gerade G' das System der Tangenten von F' durchlaufen, so wird sie hiebei

zweimal jeden der drei Punkte d_1, d_2, d_3 passiren; dementsprechend wird offenbar der zu G' gehörige Punkt x' je zweimal in jeden dieser Punkte hineinrücken. Daraus geht hervor, dass die Punkte d_1, d_2, d_3 die Doppelpunkte der von den Punkten x' gebildeten Curve C'_4 sind. Von den drei Punkten d_1, d_2, d_3 können insbesondere zwei, z. B. die auf D_1 liegenden Punkte d_2 und d_3, unendlich nahe zusammenrücken, der Punkt d_1 liegt hiebei sicher ausserhalb D_1; in diesem Falle berührt die C'_4 sich selbst im Punkte $d_2 = d_3$ längs der Geraden D_1. Es kann sich auch ereignen, dass alle drei Punkte d_1, d_2, d_3 unendlich nahe zusammenrücken, wobei man sich die Art und Weise, wie dieses Zusammenrücken erfolgt, durch die drei unendlich benachbarten Schnittpunkte zweier sich osculirender Kegelschnitte gegeben denken kann; die Curve C'_4 osculirt in diesem Falle sich selbst im Punkte $d_1 = d_2 = d_3$. Hingegen kann man **niemals** durch Centralprojection der C_4 aus einem der Fläche F nicht angehörenden Punkte p eine ebene Curve C'_4 mit einem dreifachen Punkt erhalten; denn sonst müsste durch p eine Trisecante der C_4 gehen, was unmöglich ist, da jede Gerade durch p mit der F, also auch mit der C_4, nicht mehr als zwei Punkte gemein haben kann.

Hat man nun irgend eine Collineation Q von der Beschaffenheit, dass in ihr den Tangenten G' von F' Gerade durch die zugehörigen Punkte x' entsprechen, so ist jetzt unschwer einzusehen, dass sie nothwendig in der Schaar $(1, Q')$ enthalten sein muss. Denn die drei Geraden, welche in den fraglichen Collineationen Q sich selbst entsprechen, können wiederum keine anderen sein, als die Seiten D_1, D_2, D_3 des Doppelpunktsdreieckes der C'_4; ferner muss irgend einer der Tangenten G' eine Gerade durch den zugehörigen Punkt x'_i entsprechen. Den eben angegebenen Bedingungen genügen aber eben nur die ∞^1 Collineationen der Schaar $(1, Q')$.

13. Wir wollen uns jetzt etwas näher mit der Curve C'_4 beschäftigen, indem wir die punktweise Construction derselben aus den Tangenten des Kegelschnittes F' mit Hilfe einer Collineation Q der obigen Schaar zum Ausgangspunkte der Betrachtung nehmen; die zu gewinnenden Ergebnisse

werden ganz allgemein Geltung haben für alle rationalen ebenen Curven vierter Ordnung, ausgenommen jene mit einem dreifachen Punkte, indem sich zeigen wird, dass alle derartigen Curven in der oben angegebenen Weise erzeugt gedacht werden können. Die folgenden Überlegungen berühren sich zum Theil mit einer Abhandlung von Adolf Ameseder: »Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten«;[1] sie behandeln den Gegenstand von einem anderen Gesichtspunkte, der tiefer ins Wesen der Sache blicken lässt.

Construction der vier Schnittpunkte der C_4' mit einer Geraden P'.

Soll ein Punkt x' von P' der C_4' angehören, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass einer der durch x' gehenden zwei Tangenten G' von F' in der Collineation Q eine Gerade G'' entspreche, welche ebenfalls durch x' geht. Der Punkt x' entspricht dann, da er auf G'' liegt, in der Collineation Q einem Punkte $x_{{\prime\prime}}$ der Geraden G'; umgekehrt entspricht der Punkt $x_{{\prime\prime}}$ auf G' dem Punkte x' in der zu Q inversen Collineation Q^{-1}. Die Punkte x' der C_4' haben, wie man also sieht, allgemein die Eigenschaft, dass ihre Verbindungslinien mit den ihnen jeweilig in der Collineation Q^{-1} entsprechenden Punkten $x_{{\prime\prime}}$ Tangenten von F' sind; und nur die Punkte der C_4' haben diese Eigenschaft: Denn hat man irgend einen Punkt x', der mit dem ihm in Q^{-1} entsprechenden Punkte $x_{{\prime\prime}}$ eine Tangente G' von F' gibt, so muss der Geraden $x'x_{{\prime\prime}} = G'$ (da sie durch $x_{{\prime\prime}}$ geht) in der Collineation Q nothwendig eine Gerade G'' durch x' entsprechen, womit gezeigt ist, dass der Punkt x' auf der C_4' liegt.

Um also die Schnittpunkte der Geraden P' mit der C_4' zu finden, hat man nur nach jenen Punkten der Geraden zu fragen, welche mit den ihnen jeweilig in der Collineation Q^{-1} entsprechenden Punkten verbunden Tangenten von F' geben. Nun umhüllen die Verbindungslinien der sämmtlichen Punkte a' von P' mit den ihnen in der Collineation Q^{-1} jeweilig entsprechenden Punkten $a_{{\prime\prime}}$ einen gewissen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; die

[1] Diese Sitzungsberichte, 79. Bd., II. Abth., S. 241—267.

Geraden D_1, D_2, D_3, welche auch in der Collineation Q^{-1} sich selbst entsprechen, gehören auch zu diesen Verbindungslinien entsprechender Punkte a' und $a_{\prime\prime}$ und sind daher Tangenten von $\mathfrak{K}$; ferner sind Tangenten von $\mathfrak{K}$ die Gerade P' selbst und die ihr in Q^{-1} entsprechende Gerade $P_{\prime\prime}$.

Sucht man die vier gemeinsamen Tangenten des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, welcher durch die obigen Angaben vollständig bestimmt ist, mit dem Kegelschnitte F' auf und bestimmt ihre vier Schnittpunkte mit P', so erhält man offenbar die gesuchten Schnittpunkte von C'_4 mit P'.

14. Den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ nennen wir der Geraden P' »zugeordnet«. Die den sämmtlichen Geraden der Ebene »zugeordneten« Kegelschnitte bilden eine Schaar zweiter Stufe, indem jeder Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die drei festen Geraden D_1, D_2, D_3 berühren muss. (Man vergleiche hiezu in der Abhandlung von Ameseder: Art. 1 *a)* und Art. 6, woselbst eine in gewisser Hinsicht analoge, aber viel verwickeltere Auffassung des hier behandelten Gegenstandes dargelegt wird.)

Dreht sich die Gerade P' um einen ihrer Punkte a'_0, von welchem wir zunächst annehmen, dass er nicht auf der C'_4 liegt, so werden die »zugeordneten« Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ die Verbindungslinie $a'_0 a_{0\prime\prime}$ des Punktes a'_0 mit dem ihm in Q^{-1} entsprechenden Punkte $a_{0\prime\prime}$ zur Tangente haben und ausserdem natürlich die Geraden D_1, D_2, D_3; sie werden also die durch die vier Tangenten $a'_1 a_{0\prime\prime}$, D_1, D_2, D_3 bestimmte Schaar erster Stufe durchlaufen, wobei offenbar der der Geraden P' zugeordnete Kegelschnitt von dieser selbst stets berührt wird. Hiedurch ist zu jedem Strahl P' des Strahlenbüschels (a'_0) der zugeordnete Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ohne weiteres gegeben; die vier gemeinsamen Tangenten von $\mathfrak{K}$ und F' durchlaufen, wenn P' das Strahlenbüschel (a'_0) beschreibt, eine biquadratische Tangenteninvolution auf F' projectiv zu P'. Die Curve C'_4 kann als Erzeugniss des Strahlenbüschels (a'_0) und der auf dieses projectiv bezogenen biquadratischen Tangenteninvolution aufgefasst werden.

Liegt der Punkt (a'_0) selbst auf der C'_4, aber nicht in einem Doppelpunkte derselben, so bleibt das eben Gesagte in Geltung; nur werden in diesem Falle alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ die feste

Tangente $a'_0 a_{0//}$ mit F' gemein haben; die obige biquadratische Involution zerfällt daher hier in die feste Gerade $a'_0 a_{0//}$ und in eine cubische Tangenteninvolution, welche auf das Strahlenbüschel a' projectiv bezogen ist und mit ihr die Curve C'_4 erzeugt.

15. Fällt der Punkt a'_0 mit einem Doppelpunkte der C'_4, etwa mit d_1, zusammen, so zerfallen die den Strahlen P' des Büschels (a'_0) zugeordneten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$. Durchläuft nämlich ein Punkt a' einen Strahl P' dieses Büschels, so durchläuft der ihm in der Collineation Q^{-1} entsprechende Punkt $a_{//}$ auf der Geraden $P_{//}$ eine zu a' perspective Punktreihe, da in dem Punkte d_1, der in Q^{-1} sich selbst entspricht, zwei zusammengehörige Punkte a' und $a_{//}$ vereinigt liegen. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher von den Verbindungslinien entsprechender Punkte $a'a_{//}$ umhüllt wird, zerfällt also hier in zwei Strahlbüschel: in das Strahlbüschel (d_1) und in ein zweites Strahlbüschel (α), dessen Centrum α das Perspectivitätscentrum der beiden Punktreihen a' und $a_{//}$ ist und auf der Geraden D_1 liegen muss, da diese zwei zusammengehörige Punkte a' und $a_{//}$ verbindet. Um die Beziehung, welche zwischen den Strahlen P' des Büschels (d_1) und den »zugeordneten« Punkten α besteht, zu erkennen, stellen wir folgende Betrachtung an: Sei M' eine beliebige Gerade, $M_{//}$ die ihr in der Collineation Q^{-1} entsprechende Gerade; die Punkte, welche die Strahlen P' auf M ausschneiden, seien mit m', die ihnen in der Collineation Q^{-1} entsprechenden Punkte mit $m_{//}$ bezeichnet. Die Verbindungslinien $m'm_{//}$ umhüllen nach dem Obigen einen Kegelschnitt, der die Geraden M', $M_{//}$, D_1, D_2, D_3 zu Tangenten hat. Um zu einem Strahl P' des Büschels (d_1) den »zugeordneten« Punkt α zu finden, hat man nur die Linie $m'm_{//}$, welche ja zwei entsprechende Punkte $a' = m'$ von P' und $a_{//} = m_{//}$ von $P_{//}$ verbindet, mit der Geraden D_1 zu schneiden. Da die Geraden M' und D_1 Tangenten des von den Verbindungslinien $m'm_{//}$ umhüllten Kegelschnittes sind, so sind die von diesen Verbindungslinien auf M' und D_1 ausgeschnittenen Punktreihen: m' und α projectiv; in Folge dessen sind auch die zu m' perspectiven Strahlen P' und die ihnen zugeordneten Punkte α projectiv zu einander. Rückt insbesondere der Strahl P' des

Büschels (d_1) in die Gerade D_2 oder D_3 hinein, so erkennt man, dass die zugeordneten Punkte α in die Punkte $[D_2 D_1] = d_3$, beziehungsweise $[D_3 D_1] = d_2$ hineinfallen. Zwischen den Strahlen P' des Büschels (d_1) und den zugeordneten Punkten α auf der Geraden D_1 besteht also eine projective Beziehung, in welcher insbesondere den Strahlen D_2 und D_3 die beziehlich von ihnen auf D_1 ausgeschnittenen Punkte entsprechen.

Auf irgend einem Strahl P' durch den Doppelpunkt d_1 der Curve C'_4 werden die auf ihm liegenden zwei einfachen Punkte der Curve durch jenes Paar von Tangenten des Kegelschnittes F' ausgeschnitten, welches durch den zugeordneten Punkt α auf D_1 hindurchgeht.

Durchläuft P' das Büschel d_1, so beschreiben die aus den zugeordneten Punkten α (auf der Geraden D_1) an F' gezogenen Tangentenpaare eine quadratische Involution mit D_1 als Involutionsaxe, welche auf die Strahlen P' des Büschels (d_1) projectiv bezogen ist und mit ihnen die Curve C'_4 erzeugt.

16. Wir sind hier zu derjenigen Erzeugungsweise gelangt, welche Ameseder seiner oben citirten Abhandlung zu Grunde gelegt hat; sie stellt, wie sich zeigen wird, einen speciellen Fall derjenigen Erzeugungsweise dar, welche wir zum Ausgangspunkte genommen haben. Nach der letzteren wird auf jeder Tangente G' von F' der zugehörige Punkt x' jeweilig von der ihr in irgend einer Collineation Q der Schaar $(1, Q')$ entsprechenden Geraden G'' ausgeschnitten; unter den Collineationen dieser Schaar gibt es nun drei sogenannte »ausgeartete« Collineationen, welche man erhält, wenn man einer Tangente G'_i eine Gerade durch den zugehörigen Punkt x'_i und einen der drei Punkte d_1, d_2, d_3 als entsprechend zuweist. Die so definirten drei Collineationen haben das Eigenthümliche, dass in ihnen jeder Geraden der Ebene eine Gerade durch d_1, beziehungsweise d_2 oder d_3 entspricht. Weisen wir etwa der Geraden G'_i die Gerade durch den zugehörigen Punkt x'_i und den Punkt d_1 als entsprechend zu, so wird in der so definirten Collineation q_1 der Schaar $(1, Q')$ den sämmtlichen ∞^1 Geraden, welche durch einen Punkt α der Geraden D_1

hindurchgehen, eine Gerade P' durch den Punkt d_1 entsprechen, welche, wenn α die D_1 durchläuft, projectiv zu α das Strahlenbüschel (d_1) beschreibt, rückt insbesondere der Punkt α nach d_2 oder d_3, so fällt die entsprechende Gerade P' in die Gerade $[d_1 d_2] = D_3$, beziehungsweise $[d_1 d_3] = D_2$. Auf jeder Tangente G' von F' wird der zugehörige Punkt x' der C'_4 gefunden, indem man sie mit derjenigen Geraden P' durch d_1 schneidet, welche ihrem Schnittpunkte α mit D_1 in der obigen Projectivität entspricht. Es ergibt sich also die von Ameseder zu Grunde gelegte Erzeugungsweise der C'_4 aus der hier zum Ausgangspunkte genommenen einfach durch Specialisirung, indem man von den ∞^1 Collineationen der Schaar $(1, Q')$ die ausgeartete q_1 auswählt und zur Construction verwendet.

Aus der ganzen Entwickelung ist klar, dass die C'_4 statt durch projective Beziehung des Strahlbüschels d_1 auf eine quadratische Involution von Tangenten des Kegelschnittes F' mit D_1 als Involutionsaxe gerade so gut durch projective Beziehung des Strahlenbüschels d_2 auf eine Involution mit der Axe D_2 oder des Strahlenbüschels d_3 auf eine Involution mit der Axe D_3 erzeugt werden kann. (Bei Ameseder muss dies erst besonders bewiesen werden; siehe Art. 2 der citirten Abhandlung.)

Von den drei Doppelpunkten d_1, d_2, d_3 der C'_4 ist sicher einer, etwa d_1, und die Verbindungslinie der beiden anderen: $d_2 d_3 = D_1$ reell. Von den eben genannten drei Erzeugungsweisen ist also sicher die eine mit Hilfe des Strahlenbüschels d_1 reell durchführbar.

17. Durch Angabe der drei Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 und fünf weiterer Punkte ist bekanntlich eine **allgemeine** rationale Curve vierter Ordnung vollständig bestimmt. (Die Curven, deren drei Doppelpunkte zusammenfallen, die also einen dreifachen Punkt besitzen, schliessen wir hier wie oben von der Betrachtung aus.) Es fragt sich nun, ob und wie man einen Kegelschnitt F' finden kann von der Beschaffenheit, dass durch projective Beziehung einer auf ihm befindlichen quadratischen Tangenteninvolution auf das Strahlenbüschel d_1 (beziehungsweise d_2 oder d_3) eben die durch die Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 und die fünf weiteren Punkte x $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ bestimmte Curve erzeugt werden kann.

Weist man der Geraden $P'_1 = d_1 x'_1$ den »zugeordneten« Punkt α_1 auf $D_1 = [d_2 d_3]$ willkürlich zu, so ist hiedurch zu jedem Strahl P' durch d_1 der zugeordnete Punkt α bestimmt, da man ja auch zu den Geraden D_2 und D_3 durch d_1 die zugeordneten Punkte: $d_3 = [D_2 D_1]$ und $d_2 = [D_3 D_1]$ von vornherein kennt. Insbesondere findet man ohne weiteres die den Strahlen $P'_2 = d_1 x'_2$, $P'_3 = d_1 x'_3$, $P'_4 = d_1 x'_4$, $P'_5 = d_1 x'_5$ zugeordneten Punkte: α_2, α_3, α_4, α_5. Durch die fünf Geraden $[\alpha_i x'_i]$ $(i = 1, \ldots 5)$ als Tangenten ist ein Kegelschnitt F' bestimmt, welcher offenbar die verlangte Beschaffenheit hat: Schneidet man die aus einem veränderlichen Punkte α von D_1 an F' gelegten Tangenten mit dem jeweilig dem Punkte α entsprechenden Strahle P' durch d_1, so entsteht die durch die drei Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 und die fünf weiteren Punkte x'_i bestimmte rationale ebene Curve vierter Ordnung. Man kann die nämliche Curve sich auch erzeugt denken, indem man jede Tangente G'_i von F' mit der ihr in einer Collineation Q einer gewissen Schaar $(1, Q')$ entsprechenden Geraden G'' schneidet, wobei die genannte Schaar dadurch bestimmt ist, dass in den in ihr enthaltenen Collineationen die Seiten D_1, D_2, D_3 des Doppelpunktsdreieckes sich selbst entsprechen, der Tangente $G'_1 = [\alpha_1 x'_1]$ von F' aber irgend eine Gerade durch den Punkt x'_1 entspricht.

Durch das Gesagte ist dargethan, dass eine allgemeine rationale ebene Curve vierter Ordnung, welche keinen dreifachen Punkt hat, ganz in derselben Weise erzeugt gedacht werden kann, wie unsere C'_4, die durch Centralprojection der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4 aus einem der Fläche F nicht angehörenden Punkte abgeleitet worden ist. Alle Eigenschaften der C'_4 lassen sich daher ohne weiteres auf eine allgemeine rationale ebene Curve vierter Ordnung, welche keinen dreifachen Punkt besitzt, übertragen.

18. Ist eine C'_4 durch die drei Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 und fünf weitere Punkte x'_i gegeben, so gibt es nicht nur einen Kegelschnitt F', aus dessen Tangenten die C'_4 in der oben angegebenen Weise erzeugt werden kann, sondern es gibt vielmehr im Ganzen ∞^1 solcher Kegelschnitte. Es wurde ja bei der obigen Bestimmung eines Kegelschnittes F' von der



verlangten Beschaffenheit dem Strahle $P'_1 = d_1 x'_1$ der zugeordnete Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf D_1 willkürlich zugewiesen; und entsprechend den ∞^1 Lagen, die man dem Punkte $\mathfrak{x}_1$ auf D_1 geben kann, erhält man ∞^1 Kegelschnitte der verlangten Beschaffenheit. Es sind dies jene Kegelschnitte, welche dem gefundenen Kegelschnitte F' in den ∞^1 Collineationen der Schaar $(1, Q')$ entsprechen. In der That, ist etwa F'' der Kegelschnitt, welcher dem gefundenen F' in der Collineation Q der genannten Schaar entspricht, so kann man ja die C'_4 auch aus den Tangenten (G'') des Kegelschnittes F'' entstanden denken, indem man sie jeweilig mit jenen Geraden G' schneidet, welche ihnen in der zu Q inversen Collineation Q^{-1} entsprechen; schliesslich kann man hiebei die Collineation Q^{-1} durch irgend eine Collineation der Schaar $(1, Q^{-1})$ ersetzen. Aus den Tangenten von F'' lässt sich also wirklich die C'_4 in ganz analoger Weise erzeugen, wie aus den Tangenten des ursprünglich gefundenen Kegelschnittes F', was zu beweisen war.

19. Jede C'_4 kann man sich auch durch ein- und dreideutige Beziehung der Tangenten[1] eines der ∞^1 Kegelschnitte F' erzeugt denken; jeder von den ∞^1 Kegelschnitten F' kann auf ∞^7 verschiedene Arten als Centralprojection von Flächen zweiter Ordnung F angesehen werden. Zwischen den Geraden der beiden Regelschaaren einer solchen Fläche entsteht eben durch diese Projection eine ein-dreideutige Beziehung, wobei es in unserem Belieben steht, welche der beiden Regelschaaren es sein soll, deren Geraden G je eine Gerade Γ der anderen Schaar zugehört; die sämmtlichen Geraden G der einen Schaar erzeugen mit den zugehörigen Geraden Γ der andern Schaar eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4, deren Centralprojection eben die gegebene C'_4 ist. Jede rationale ebene Curve vierter Ordnung, welche keinen dreifachen Punkt besitzt, lässt sich hiernach auf $\infty^{1+7} = \infty^8$ verschiedene Arten als Centralprojection von Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art C'_4 darstellen.

Nun haben wir früher gezeigt, dass die Centralprojection einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4, welche auf

[1] Man vergleiche diesbezüglich die in Nr. 2 gegebene Ableitung.

der Fläche zweiter Ordnung F liegt, von der Centralprojection F' dieser Fläche in vier Punkten berührt wird. Jetzt erkennen wir hieraus, dass irgend eine C_4' allgemein von den ∞^1 Kegelschnitten F' in vier Punkten berührt wird. Diese Eigenschaft der C_4' wird sich weiter unten durch eine Überlegung, die das Gebiet der Ebene nicht verlässt, von neuem ergeben.

20. Eine ebene Curve vierter Ordnung C_4', welche einen dreifachen Punkt besitzt, kann auch auf ∞^8 verschiedene Arten als Centralprojection von Raumcurven vierter Ordnung dargestellt werden, nämlich als Centralprojection aus einem Punkte, welcher der einzigen, durch die betreffende Raumcurve gehenden Fläche zweiter Ordnung F angehört: Der dreifache Punkt der gegebenen Curve muss auf der eben genannten Fläche F liegen (und ausserdem noch zwei weitere Punkte derselben). Es gehen nun im Ganzen ∞^8 solcher Flächen zweiter Ordnung durch diesen dreifachen Punkt; wählen wir eine bestimmte Fläche F unter diesen aus, so ist das Centrum p der Projection offenbar nur auf jener Geraden Γ_0 zu suchen, welche der Regelschaar Γ der Fläche F angehört und durch den gegebenen dreifachen Punkt geht. Auf dieser Geraden kann aber das Projectionscentrum keineswegs willkürlich angenommen werden; es muss nämlich die durch das Projectionscentrum p gehende Gerade G_0 der anderen Regelschaar (G) die C_4' treffen (in einem der beiden Punkte, welche die C_4' ausser dem dreifachen Punkt noch mit der F gemein hat). Man erhält zwei Punkte p auf Γ_0, welche der eben genannten Bedingung genügen und von denen man leicht zeigen kann, dass aus jedem von ihnen eine gewisse, auf F liegende Curve vierter Ordnung zweiter Art gerade in die gegebene ebene Curve projicirt wird: Die Punkte der gegebenen Curve bestimmen zwischen dem Ebenenbüschel (Γ_0) und dem Ebenenbüschel (G_0) eine ein-dreideutige Beziehung; die entsprechenden Ebenen dieser beiden Büschel erzeugen denjenigen Kegel, welcher die gegebene ebene Curve aus dem Punkte $(\Gamma_0\, G_0) = p$ projicirt.

Die Geraden G und Γ, in welchen die Fläche F von entsprechenden Ebenen der beiden Büschel (Γ_0) und (G_0) geschnitten wird, stehen ebenfalls in ein-dreideutiger Beziehung zu einander, indem zu jeder G eine Γ, zu jeder Γ aber drei G

gehören. Die entsprechenden Geraden G und Γ schneiden sich in den Punkten einer gewissen Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4, als deren Centralprojection von $p = [\Gamma_0 G_0]$ aus die gegebene ebene Curve mit dem dreifachen Punkte erscheint. Wie man sieht, kann man also auch eine Curve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkt im Ganzen auf ∞^8 verschiedene Arten als Centralprojection einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art auffassen.

21. Eine ebene Curve C'_4 mit einem dreifachen Punkte d ist im Allgemeinen durch Angabe des dreifachen Punktes und weiterer acht Punkte x'_i $(i = 1, 2, \ldots 8)$ vollständig bestimmt.

Die ∞^1 Kegelschnitte F' existiren bei einer solchen C'_4 nur als zerfallende Kegelschnitte, bestehend aus dem Strahlenbüschel im dreifachen Punkte d und einem zweiten Strahlenbüschel in irgend einem einfachen Punkte x' der Curve.

Um eine in der obigen Weise durch den dreifachen Punkt d und acht weitere Punkte x'_i bestimmte C'_4 punktweise zu construiren, hat man die ein-dreideutige Beziehung, welche zwischen denjenigen Strahlen, welche die Punkte der C'_4 einerseits aus dem dreifachen Punkte d, anderseits aus einem der gegebenen Punkte x'_i, etwa aus x'_1 projiciren, besteht, zu vervollständigen. Diese ein-dreideutige Beziehung der beiden Strahlenbüschel (d) und (x'_1) ist durch die sieben Paare entsprechender Strahlen, welche nach den gegebenen Punkten $x_2, x_3, \ldots x_8$ gehen, bestimmt. Um sie zu vervollständigen, schneide man die beiden Strahlenbüschel mit einem beliebig durch die Punkte (d) und x'_1 hindurchgelegten Hilfskegelschnitte K, etwa einem Kreise; man erhält so auf diesem zwei Punktreihen, welche ebenfalls ein-dreideutig auf einander bezogen sind. Die zwischen diesen beiden krummen Punktreihen auf K bestehende ein-dreideutige Beziehung zu vervollständigen, das ist eine Aufgabe, welche der im ersten Abschnitte gelösten Aufgabe: »Eine ein-dreideutige Beziehung zwischen den Tangenten eines Kegelschnittes zu vervollständigen, wenn sieben entsprechende Paare gegeben sind«, dual entspricht. Demgemäss brauchen wir die dort gegebene Lösung nur nach dem Principe der Dualität zu übertragen, um die Lösung der hier gestellten Aufgabe zu erhalten.

Seien t' und τ' zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen auf K, so zwar, dass dem Strahle dt' des Büschels (d) der Strahl $x'_1\tau'$ des Büschels (x'_1) entspricht, so findet man durch eine Reihenfolge linearer Constructionen — dual entsprechend dem im ersten Abschnitte Dargelegten — eine Collineation $\mathfrak{Q}'$ von der Beschaffenheit, dass zu jedem Punkte t' die zugehörige Verbindungslinie $t'\tau'$ mit dem entsprechenden Punkte τ' einfach durch Verbindung des Punktes t' mit dem ihm in der Collineation $\mathfrak{Q}'$ entsprechenden Punkte t'' erhalten wird.

Geradeso, wie im ersten Abschnitte ∞' Collineationen der Schar $(1, Q')$ genau dasselbe leisten wie die Collineation Q' selbst und diese daher vertreten können, geradeso kann hier die Collineation $\mathfrak{Q}'$ durch jede beliebige Collineation des Büschels $\{1, \mathfrak{Q}'\}$ ersetzt werden. (Zur Bezeichnung eines »Büschels« von Collineationen wählen wir eine geschlungene Klammer zum Unterschiede von einer Schaar.)

Aus dem Gesagten ist klar, wie man von einer ebenen Curve vierter Ordnung C'_4, welche durch ihren dreifachen Punkt d und acht weitere Punkte x'_i gegeben ist, in linearer Weise beliebig viele Punkte sich construiren kann.

Am einfachsten gestaltet sich die Vervollständigung der Punktreihen t' und τ', also auch die Construction beliebiger Punkte der C'_4, wenn man von den ∞' Collineationen des Büschels $\{1, \mathfrak{Q}'\}$ eine der drei darin enthaltenen ausgearteten Collineationen verwendet; doch erfordert dies die vorgängige Auflösung einer wesentlich cubischen Aufgabe, nämlich der Aufgabe, die drei in der Collineation $\mathfrak{Q}$ sich selbst entsprechenden Punkte zu finden.

22. Nunmehr kehren wir wieder zur Untersuchung jener Curven C'_4 zurück, welche keinen dreifachen Punkt besitzen, bei denen also die ∞^1 Kegelschnitte F' als eigentliche, nicht zerfallende Kegelschnitte vorhanden sind. Auf irgend einer Tangente G' eines solchen Kegelschnittes F' wird der zugehörige Punkt x' der C'_4 gefunden, indem man die G' mit der ihr in irgend einer Collineation Q einer gewissen Schaar $(1, Q')$ entsprechenden Geraden schneidet.

Definirt man eine reciproke Verwandtschaft zwischen den Geraden A' und den Punkten a' der Ebene dadurch, dass man

jeder A' ihren Schnittpunkt a' mit der ihr in einer Collineation Q der Schaar $(1, Q')$ entsprechenden Geraden A'' als zugehörig zuweist, so entsprechen in dieser Verwandtschaft den Tangenten von F' die Punkte der C'_4; überhaupt den Tangenten irgend eines Kegelschnittes im Allgemeinen[1] die Punkte einer rationalen ebenen Curve vierter Ordnung. Die so definirte quadratische Verwandtschaft ist zweckmässig als ein Nullsystem zweiten Grades zu bezeichnen. Um zu $\left\{\begin{matrix}\text{jeder Geraden } A' \\ \text{jedem Punkte } a\end{matrix}\right.$ $\begin{matrix}\text{ihren »Nullpunkt« } a' \\ \text{seine »Nullgerade« } A'\end{matrix}\Big\}$ zu finden, bedient man sich am einfachsten der in Nr. 15 und 16 betrachteten projectiven Beziehung zwischen den Strahlen P' durch d_1 und den Punkten α auf D_1: $\left\{\begin{matrix}\text{Der Nullpunkt } a' \text{ der Geraden } A' \\ \text{Die Nullgerade } A' \text{ des Punktes } a'\end{matrix}\right\}$ wird erhalten, indem man $\left\{\begin{matrix}\text{die Gerade } P' \\ \text{den Punkt } a\end{matrix}\right\}$, welche in der genannten projectiven Beziehung $\left\{\begin{matrix}\text{dem Schnittpunkte } \alpha \text{ der Geraden } A' \\ \text{der Verbindungsgeraden } P' \text{ der Punkte } a'\end{matrix}\right.$ $\begin{matrix}\text{und } D_1 \\ \text{und } d_1\end{matrix}\Big\}$ entspricht, $\left\{\begin{matrix}\text{mit } A' \text{ schneidet} \\ \text{mit } a' \text{ verbindet}\end{matrix}\right\}$; man gelangt zu dieser einfachen Construction, indem man — wie dies in Nr. 16 geschehen ist — aus den Collineationen der Schaar $(1, Q')$ die »ausgeartete« q_1 auswählt. Es geht aus dieser Construction unmittelbar hervor, dass wirklich zu jedem Punkte a' nur eine Nullgerade A' gehört, die in Rede stehende Verwandtschaft also ein- und eindeutig ist.

23. Die »Nullgerade« A' eines Punktes a' kann allgemein auch dadurch gefunden werden, dass man den Punkt a' mit jenem Punkte $a_{\prime\prime}$, welcher ihm in der zu Q inversen Collineation Q^{-1} entspricht, verbindet; in der That erkennt man sofort, dass die Gerade $a' a_{\prime\prime} = A'$ den Punkt a' zum Nullpunkte hat.

Nehmen wir für Q der Reihe nach andere und andere Collineationen der Schaar $(1, Q')$, so bilden die zu Q inversen

---

[1] Im Besonderen, wenn der Kegelschnitt eine, zwei von den Geraden D_1, D_2, D_3 oder gar alle drei berührt, erniedrigt sich die Ordnung der entsprechenden Curve um eins, zwei, drei (durch den Ausfall der betreffenden berührenden Geraden).

Collineationen Q^{-1} ein Büschel, wie denn überhaupt durch Inversion einer Schaar von Collineationen stets ein Büschel von solchen entsteht. Dass dem so ist, ergibt sich ohne weiteres aus der analytischen Formulirung der genannten Begriffe, durch Heranziehung der bekannten Thatsache, dass, wenn in einer Collineation Q irgend einem Punkte (x_1, x_2, x_3) der Punkt (x_1', x_2', x_3'), einer Geraden (u_1, u_2, u_3) die Gerade (u_1', u_2', u_3') entspricht, das Gleichungssystem, welches die x_i durch die x_i' ausdrückt, ganz dieselben Coëfficienten — nur transponirt — enthält, wie jenes Gleichungssystem, welches die u_i' durch die u_i ausdrückt; sind die Coëfficienten des letzteren Gleichungssystemes linear-homogen in den Parametern λ', λ'', so gilt also das nämliche von den Coëfficienten des ersteren Systemes, womit die obige Behauptung erwiesen ist. Die zu den Collineationen Q der Schaar $(1, Q')$ inversen Collineationen Q^{-1} bilden daher ein Büschel $\{1, (Q')^{-1}\}$.

Die Reciprocität zwischen den Geraden A' und den Punkten a' kann nach dem Gesagten auch so definirt werden: Jeder Geraden A' gehört das Centrum jenes Strahlenbüschels zu, welches ihr in den Collineationen der Schaar $(1, Q')$ entspricht. Jedem Punkte ist die Trägergerade jener Punktreihe zugeordnet, welche ihm in den Collineationen des zur genannten Schaar inversen Büschels entspricht.

Es empfiehlt sich, die Redeweise einzuführen, dass der Geraden A' der Punkt a' »zugehört«, dem Punkte a' die Gerade A' »zugeordnet« ist; im Einklange mit der in Nr. 14 gebrauchten Ausdrucksweise nach welcher derjenige Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher von den einem Punkte a' zugeordneten Geraden $A = a' a_{{\prime\prime}}$ umhüllt wird, wenn a' eine gerade Linie P' beschreibt, als der der Geraden P' »zugeordnete« Kegelschnitt bezeichnet worden ist.

24. Es ist für die weitere Entwicklung zweckdienlich, sich klar zu machen, wie man zu einem gegebenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher natürlich — nach Nr. 14 — die drei Geraden D_1, D_2, D_3 berühren muss, die zugehörige Gerade P' finden kann, welcher er zugeordnet ist. Dass es nicht mehr als eine solche Gerade geben kann, geht aus dem Umstande hervor, dass den Tangenten

von $\mathfrak{K}$ ihre Schnittpunkte mit P' »zugehören«. Die Gerade P' ist — nach Nr. 14 — jedenfalls nur unter den Tangenten von $\mathfrak{K}$ selbst zu suchen; um sie unter diesen ausfindig zu machen, bestimmen wir zu irgend einer Tangente T' von $\mathfrak{K}$ den zugehörigen Punkt t, und ziehen aus diesem an $\mathfrak{K}$ die zweite Tangente. Die letztere ist die gesuchte Gerade P', denn der ihr zugeordnete Kegelschnitt muss ausser ihr noch die Geraden T', D_1, D_2, D_3 berühren und ist daher mit dem gegebenen Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ identisch.

Das eben Gesagte findet Anwendung bei der Construction von Tangenten unserer C_4', insbesondere auch bei der Construction der Doppel- und Wendetangenten derselben.

Die Tangenten der C_4' sind dadurch ausgezeichnet, dass die ihnen zugeordneten Kegelschnitte den Kegelschnitt F' berühren; die Doppeltangenten insbesondere dadurch, dass die ihnen zugeordneten Kegelschnitte den Kegelschnitt F' in zwei Punkten berühren; die Wendetangenten dadurch, dass die ihnen zugeordneten Kegelschnitte den Kegelschnitt F' oskuliren.

Um in einem Punkte x' der C_4', welcher die Tangente G' von F' zugehört, an die C_4' die Tangente zu legen, hat man nur zu demjenigen Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, welcher die Gerade G' in dem nämlichen Punkte wie der Kegelschnitt F' berührt, die zugehörige Gerade P' zu construiren; man erhält also nach dem obigen die gesuchte Tangente der C_4', indem man aus x' an den genannten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die zweite Tangente zieht, was natürlich in linearer Weise bewerkstelligt werden kann. — In der durch die drei Geraden D_1, D_2, D_3 als Tangenten bestimmten Kegelschnittschaar zweiter Stufe gibt es im Allgemeinen vier Kegelschnitte, welche F' in zwei Punkten berühren, sechs Kegelschnitte, welche F' osculiren. Die ihnen zugehörigen Geraden geben uns die Doppel-, beziehlich die Wendetangenten der Curve C_4'. Die Doppeltangenten lassen sich, wie eine nähere Erörterung zeigt, nach der angegebenen Methode mit Hilfe des Lineals und Zirkels wirklich construiren; nicht so die Inflexionstangenten.

Zu ganz analogen Resultaten führen schliesslich alle jene Betrachtungen, welche in irgend einer Weise die Punkte der C_4' aus den Punkten oder Tangenten eines Kegelschnittes durch

eine quadratische Verwandtschaft ableiten. Es ist da insbesondere zu nennen die Steiner'sche Verwandtschaft, welche von Durège in seiner Abhandlung: »Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten« (Wiener Sitzungsberichte, 72. Bd.) verwendet worden ist, sowie eine von Bobek in seiner Abhandlung: »Über ebene rationale Curven vierter Ordnung« (Wiener Sitzungsberichte, 80. Bd.) benützte quadratische Verwandtschaft.

Das hier verwendete »Nullsystem« dürfte gegenüber den anderen quadratischen Verwandtschaften mancherlei Vortheile darbieten, z. B. den Vortheil, dass bei demselben die grundlegenden Constructionen ganz unabhängig sind davon, ob die drei Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 alle reell oder zwei von ihnen conjugirt imaginär sind.

25. Aus der Erzeugungsweise unserer C'_4 durch die Tangenten eines der ∞^1 Kegelschnitte F' geht unmittelbar hervor, dass im Innern irgend eines dieser Kegelschnitte keine reellen Punkte der C'_4 liegen können, dass solche also nur ausserhalb der sämmtlichen Kegelschnitte F' zu suchen sind. In Nr. 19 wurde gezeigt, dass jeder der ∞^1 Kegelschnitte F' die C'_4 in je vier Punkten berührt; im Anschlusse an die Ausführungen in Nr. 17 findet man leicht[1] ein einfaches Verfahren, zu jedem Punkte x'_1 der C'_4 denjenigen Kegelschnitt F' zu construiren, welcher die C'_4 in x'_1 (und noch in drei weiteren Punkten) berührt. Die Curve C'_4 kann hiernach als Enveloppe der ∞^1 Kegelschnitte F' aufgefasst werden. [Die ∞^1 Kegelschnitte F' sind nicht zu verwechseln mit den ∞^1 Kegelschnitten V in der oben citirten Abhandlung von Bobek, welche Kegelschnitte die Curve vierter Ordnung nur in einem Punkte berühren, deren Enveloppe daher nicht die Curve vierter Ordnung allein, sondern eine aus dieser Curve und einer gewissen anderen Curve zusammengesetzte Linie ist.]

---

[1] In Nr. 17 wird die Construction eines Kegelschnittes F' angegeben, wenn der dem Strahle $P = [d_1 x_1]$ durch d zugeordnete Punkt α willkürlich angenommen wird; $[x_1 \alpha]$ ist dann eine Tangente des Kegelschnittes F'. Wählen wir insbesondere den Punkt α auf D_1 so, dass $[x_1 \alpha]$ in die Tangente der C'_4 im Punkte x_1 hineinfällt, so erhalten wir einen Kegelschnitt F', der die C'_4 im Punkte x_1 berührt.

Bestimmung der vier Punkte, in welchen ein Kegelschnitt F' die C'_4 berührt: Man denke sich die C'_4 aus den Tangenten von F' mit Hilfe der in Nr. 15 und 16 eingeführten projectiven Beziehung zwischen den Geraden P' des Strahlenbüschels (d_1) und den Punkten $\mathfrak{x}$ der Geraden D_1 erzeugt; die Polare $\mathfrak{A}$ des Punktes $\mathfrak{x}$ in Bezug auf F' erzeugt mit der zugehörigen Geraden P', wenn letztere das Büschel (d_1) durchläuft, einen Kegelschnitt K, welcher F' in den gesuchten vier Berührungspunkten schneidet. Beweis: Zieht man in einem der vier so erhaltenen Schnittpunkte, z. B. in x'_1 an F' die Tangente, und bestimmt den Schnitpunkt $\mathfrak{x}_1$ derselben mit D_1, so wird die diesem Punkte $\mathfrak{x}_1$ entsprechende Gerade P'_1 des Strahlbüschels (d_1) offenbar die Gerade $[d_1 x'_1]$ sein, woraus hervorgeht, dass der Punkt x'_1 jedenfalls auf der C'_4 liegt; bestimmt man nach der Regel die Tangente der C'_4 im Punkte x'_1, so findet man dieselbe identisch mit der in x'_1 an F' gelegten Tangente. Damit ist nicht nur gezeigt, wie man auf jedem Kegelschnitte F' die vier Berührungspunkte der C'_4 finden kann, sondern auch von neuem die oben aus räumlichen Betrachtungen erschlossene Thatsache bewiesen, dass die ∞^1 Kegelschnitte F' die C'_4 vierfach berühren.

26. Auf die angegebene Weise gelangt Ameseder in seiner oben citirten Abhandlung zur Erkenntniss, dass die ∞^1 Kegelschnitte F' die C'_4 vierfach berühren; in einer späteren Abhandlung: »Über vierfach berührende Kegelschnitte der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten« [1] führt derselbe Autor den Nachweis, dass es ausser den ∞^1 Kegelschnitten F' weiter keine vierfach berührenden Kegelschnitte einer C'_4 gibt.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, dass specielle Arten einer ebenen rationalen Curve vierter Ordnung sich durch eine specielle Lage der ∞^1 vierfach berührenden Kegelschnitte F' gegen das Doppelpunktsdreieck d_1, d_2, d_3 auszeichnen: Besitzt die C'_4 Spitzen, welche natürlich nur in den Punkten d_1, d_2, d_3 auftreten können, so gehen sämmtliche ∞^1 Kegelschnitte F' durch die betreffenden Punkte hindurch und berühren die C'_4 nicht noch in vier weiteren Punkten,

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 80.

sondern in der um die Zahl der Spitzen verminderten Anzahl von Punkten. Man überzeugt sich davon ohne Schwierigkeit; am anschaulichsten aber kann man es sich klar machen, wenn man die C_4' durch Centralprojection einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art entstehen lässt.

Eine rationale ebene Curve vierter Ordnung C_4', deren Tangenten im Doppelpunkte d_1 Inflexionstangenten sind, zeichnet sich dadurch aus, dass die Polare des Punktes d_1 in Bezug auf jeden der ∞^1 Kegelschnitte F' mit der Geraden $D_1 = [d_2 d_3]$ identisch ist.[1] Beweis: Sind P_1' und P_2' die beiden Doppelpunktstangenten der C_4' im Punkte d_1, so werden die ihnen zugeordneten Kegelschnitte — da die genannten beiden Geraden nach Voraussetzung Wendetangenten sind — den Kegelschnitt F' osculiren; anderseits ist klar, dass die den Geraden P_1' und P_2' zugeordneten Kegelschnitte gemäss den Ausführungen in Nr. 15 zerfallen, und zwar der erste Kegelschnitt in das Strahlenbüschel (d_1) und in ein Strahlenbüschel (α_1), der zweite Kegelschnitt in das Strahlenbüschel d_1 und in ein Strahlenbüschel (α_2), wobei die Punkte α_1 und α_2 auf D_1 liegen (und den Geraden P_1' und P_2' in der in Nr. 15 eingeführten projectiven Beziehung zwischen den Geraden P' durch d_1 und den Punkten α auf D_1 entsprechen). Dass diese beiden zerfallenden Kegelschnitte den Kegelschnitt F' osculiren, kann nur dadurch geschehen, dass die Punkte α_1 und α_2 erstens auf F' liegen, und zweitens die in diesen Punkten an F' gelegten Tangenten durch d_1 gehen. Letzteres ist aber gleichbedeutend mit der Aussage, dass der Punkt d_1 der Pol der Geraden $\alpha_1\alpha_2 = D_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt F' ist. — Aus dieser Überlegung geht zugleich die Richtigkeit der Umkehrung[2] der obigen Behauptung unmittelbar hervor: Ist $D_1 = [d_2 d_3]$ die Polare des Punktes d_1 in Bezug auf einen der ∞^1 Kegelschnitte F', so

---

[1] Dies wird in der Abhandlung von Ameseder »Über vierfach berührende Kegelschnitte« (Bd. 80 der Sitzungsberichte) auf einem umständlicheren Wege bewiesen.

[2] Die erwähnte Umkehrung beweist Ameseder gesondert in einer früheren Abhandlung: »Über rationale Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen« (Bd. 79 der Sitzungsberichte).



sind die Doppelpunktstangenten der C_4' in d_1 Wendetangenten, und die Gerade D_1 in Folge dessen Polare von d_1 in Bezug auf alle ∞^1 Kegelschnitte F'.

Aus dem soeben bewiesenen Satze ergibt sich auch, dass eine C_4', deren Doppelpunktstangenten im Punkte d_1 Wendetangenten sind, die Eigenschaft hat, durch die central-involutorische Collineation, welche d_1 zum Centrum und D_1 zur Achse hat, in sich selbst übergeführt zu werden. Hieraus fliesst eine Reihe von Eigenschaften der betrachteten Curve, welche Ameseder in den beiden zuletzt citirten Abhandlungen darlegt.

Sind die Doppelpunktstangenten in zweien der drei Doppelpunkte Wendetangenten, so ist $d_1 d_2 d_3$ ein Poldreieck aller Kegelschnitte F' und daher sind auch die Tangenten im dritten Doppelpunkte Wendetangenten der C_4'. Eine derartige Curve wird durch die central-involutorischen Collineationen, deren Centren und Axen beziehlich sind: $d_1 D_1$, $d_2 D_2$, $d_3 D_3$, in sich selbst übergeführt. Bezüglich der daraus fliessenden Sätze sei wieder auf die oben citirten Abhandlungen von Ameseder verwiesen.

III.

27. Wir kehren nunmehr wieder zum Ausgangspunkte unserer Untersuchung zurück: Wir stellen uns die ein-dreideutige Beziehung zwischen den Geraden der beiden Regelschaaren G und Γ der Fläche zweiter Ordnung F vor, welche Beziehung durch die auf F liegende Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4' vermittelt wird. Durchläuft die Gerade Γ die Schaar der dreipunktigen Secanten (Γ), so beschreiben die zugehörigen drei Geraden G_1, G_2, G_3 der anderen (einpunktigen) Schaar (G) in dieser Schaar eine cubische Involution. Projicirt man nun — wie dies am Eingange unserer Untersuchung geschehen ist — aus einem der Fläche F nicht angehörenden Punkte p die sämmtlichen genannten Gebilde auf eine Ebene E, und bezeichnet die Projectionen der einzelnen Gebilde einfach durch Beisetzung eines Accentes zu ihrem Namen, so werden die drei Geraden G_1', G_2', G_3', welche mit Γ' die Centralprojection C_4' der C_4 erzeugen, wenn Γ' das System der Tangenten des Kegelschnittes F' durchläuft, im System der Tangenten des nämlichen Kegelschnittes eine cubische

Involution beschreiben. Wir bezeichnen die cubische Involution, welche von den ∞^1 Tripeln G_1, G_2, G_3, beziehungsweise G'_1, G'_2, G'_3 gebildet wird, als die »erzeugende cubische Involution« der Raumcurve C_4, beziehungsweise der ebenen Curve C'_4.

Die ∞^1 dem Kegelschnitt F' umschriebenen Dreiseite G_1, G_2, G_3 sind — nach einem bekannten Satze über cubische Involutionen — alle einem und demselben Kegelschnitte, dem Involutionskegelschnitte[1] J, eingeschrieben. Wir behaupten, dass diese ∞^1 Dreiseite zugleich sämmtlich Poldreiseite eines gewissen Kegelschnittes $\varkappa$ sind.[2]

Beweis: Wenn die Seite G'_1 des Dreiseits G'_1, G'_2, G'_3 das System der Tangenten des Kegelschnittes F' durchläuft, beschreibt der gegenüberliegende Eckpunkt $[G'_2G'_3] = g'_1$ des Dreiseits die krumme Punktreihe auf dem Kegelschnitt J projectiv zu G'_1; dass nämlich die Punktreihe g'_1 auf J zum Systeme der Tangenten G'_1 auf F' projectiv ist, erhellt aus dem Umstande, dass die beiden Gebilde ein- und eindeutig auf einander bezogen sind. Diese projective Beziehung zwischen den Geraden G'_1 an F' und den Punkten g_1 auf J kann — und zwar nur in ganz bestimmter Weise — erweitert werden zu einer linearen reciproken Verwandtschaft zwischen den Geraden und Punkten der Ebene überhaupt. Diese reciproke Verwandtschaft ist nun, wie sich zeigen wird, wesentlich eine polare Reciprocität in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt $\varkappa$. Um dies darzuthun, genügt es, ein Dreiseit in der Ebene nachzuweisen, dessen Seiten die gegenüberliegenden Eckpunkte in der Reciprocität entsprechen; gelingt dies, so ist die polare Natur der Reciprocität ausser Zweifel gesetzt. Nun

---

[1] Man vergleiche hiezu etwa die Abhandlung von Weyr (Emil): »Die Theorie der cubischen Involutionen«. Abh. der böhm. Gesellsch. der Wissensch., Prag, 1871.

[2] Der Gedanke, ausser dem Involutionskegelschnitt J zur besseren Übersicht einer cubischen Involution den Kegelschnitt $\varkappa$ einzuführen, ist keineswegs neu. Er spielt eine wichtige, ja grundlegende Rolle in der Abhandlung von Adler: »Über Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art« (diese Sitzungsber., Bd. 80); genauer ausgedrückt, nicht der Kegelschnitt $\varkappa$ selbst, sondern ein ihm dual entsprechender, da Adler Involutionen von Punkten auf einem Kegelschnitte betrachtet.



kennen wir aber in der That unendlich viele solcher Dreiseite, nämlich die ∞^1 Dreiseite (G'_1, G'_2, G'_3).

28. Durch zwei von den ∞^1 Dreiseiten (G'_1, G'_2, G'_3) ist der Kegelschnitt $\varkappa$, wir nennen ihn den »Polarkegelschnitt« der erzeugenden cubischen Involution, bestimmt; mit Hilfe dieses Kegelschnittes kann man sich ebensogut wie mit Hilfe des Involutionskegelschnittes J die cubische Involution vervollständigen. Wichtig ist für unsere Untersuchung, dass — wie sich gleich herausstellen wird — das Doppelpunktsdreieck (d_1, d_2, d_3) der Curve C'_4 ebenfalls ein Poldreieck des genannten Kegelschnittes $\varkappa$ ist.

Rückt die Gerade Γ', welche mit den zugehörigen Geraden G'_1, G'_2, G'_3 die Curve C'_4 erzeugt, in eine der beiden Tangenten $\mathrm{T}^{(1)}$ oder $\mathrm{T}^{(2)}$ hinein, welche vom Doppelpunkte d_1 aus an den Kegelschnitt F' gehen, und bezeichnet man das zugehörige Tripel G'_1, G'_2, G'_3, welches diesen beiden Lagen der Geraden Γ' entspricht, beziehlich mit $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}$ und $T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, T_3^{(2)}$, so wird sicher eine der drei Geraden $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}$, etwa $T_1^{(1)}$ mit $\mathrm{T}^{(2)}$, desgleichen eine der drei Geraden $T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, T_3^{(2)}$, etwa $T_1^{(2)}$ mit $\mathrm{T}^{(1)}$ identisch sein; es ergibt sich dies eben daraus, dass d_1 ein Doppelpunkt der C'_4 ist, denn die zwei in einem Doppelpunkte der C'_4 zusammentreffenden Tangenten von F' entsprechen sich in der zwischen den Tangenten G' und Γ' bestehenden ein-dreideutigen Beziehung wechselseitig. Vergegenwärtigen wir uns anderseits die Erzeugung der C'_4 durch projective Beziehung der Strahlen P' des Büschels (d_1) auf eine quadratische Tangenteninvolution auf dem Kegelschnitte F': rückt P' in eine der beiden Tangenten $\mathrm{T}^{(1)}$ oder $\mathrm{T}^{(2)}$, so entsprechen diesen beiden Lagen von P' in der quadratischen Tangenteninvolution auf F' die Tangentenpaare $T_2^{(1)}, T_3^{(1)}$, beziehungsweise $T_2^{(2)}, T_3^{(2)}$; man erkennt ja ohne weiteres, dass die den Tangenten der genannten Paare »zugehörigen« Punkte x' der C'_4 thatsächlich auf diesen durch die Strahlen T_1, beziehungsweise T_2 des Büschels (d_1) ausgeschnitten werden. Die Involutionsaxe der obigen quadratischen Tangenteninvolution ist nun — wie wir von vornherein wissen — die Gerade $D_1 = d_2 d_3$; aus dem eben Gesagten geht hervor, dass die nämliche Involutionsaxe auch als die Verbindungsgerade der Punkte $t_1 = [T_2^{(1)} T_3^{(1)}]$ und $t_2 = [T_2^{(2)} T_3^{(2)}]$

erhalten wird. Die Punkte t_1 und t_2 sind aber nach dem Früheren nichts Anderes als die Pole der Geraden $T_1^{(1)} = T_2$ und $T_1^{(2)} = T_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa$, ihre Verbindungslinie $[t_1 t_2]$ daher nichts Anderes als die Polare des Schnittpunktes d_1 der Geraden $T^{(1)}$ und $T^{(2)}$ in Bezug auf $\varkappa$. Wir sind also jetzt zu dem Ergebnisse gelangt, dass die Gerade $D_1 = [d_2 d_3]$ die Polare des Punktes d_1 in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa$ ist. Dasselbe gilt natürlich auch von D_2 und d_2, sowie von D_3 und d_3; und damit ist die obige Behauptung erwiesen, dass das Doppelpunktsdreieck $(d_1 d_2 d_3)$ ein Poldreieck des Kegelschnittes $\varkappa$ ist.

29. Durch Übertragung des soeben Gefundenen auf die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4 gelangen wir zu der nachstehenden interessanten Eigenschaft der genannten Raumcurve:

Die drei Bisecanten, welche aus einem (der Fläche zweiter Ordnung F nicht angehörenden) Punkte p an eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art gehen, bilden ein Poldreikant desjenigen Kegels zweiter Ordnung K, in Bezug auf welchen auch die ∞^1 Dreikante, welche aus dem Punkte p die Tripel der erzeugenden cubischen Involution (vergl. die Definition in Nr. 26) projiciren, Poldreikante sind.

Es genügt, zwei Tripel der erzeugenden Involution ein- für allemal sich anzumerken, um mit ihrer Hilfe in jedem Punkte p des Raumes den zugehörigen Kegel K angeben zu können.

Die Kegel K in den verschiedenen Punkten p des Raumes bilden einen Complex zweiten Grades H. Dieser Complex hat die besondere Eigenschaft, dass er in sich selbst übergeht, wenn man mit dem Raume jene ∞^3 Collineationen L vornimmt, bei welchen jede Gerade der Schaar G festbleibt, während die Geraden der Schaar Γ unter sich projectiv vertauscht werden. Durch die genannten Collineationen kann man aus einem Kegel des Complexes alle Kegel des Complexes erzeugen.

Das nämliche Verhalten gegenüber den genannten ∞^3 Collineationen L zeigt natürlich auch jener Complex zweiten

Grades, welcher von den Tangentialkegeln der Fläche F in den verschiedenen Punkten p des Raumes gebildet wird. Es ist dies deswegen hervorzuheben, weil daraus folgt, dass die verschiedenen Kegelschnittpaare F' und $\varkappa$, welche von den Centralprojectionen F' der Fläche F aus den verschiedenen Punkten p des Raumes und den jeweilig zugehörigen Polarkegelschnitten $\varkappa$ gebildet werden, sämmtlich unter einander collinear verwandt sind.

30. Die Lage des Polarkegelschnittes $\varkappa$ gegen den Kegelschnitt F' ist keineswegs willkürlich, sondern einer wichtigen Beschränkung unterworfen: Wir haben ja oben gesehen, dass dem Kegelschnitte F' ∞^1 Poldreiseite des Kegelschnittes $\varkappa$ umschrieben sind. Die Kegelschnitte $\varkappa$ und F' sind aus diesem Grunde apolar zu einander, so zwar, dass $\varkappa$ den Kegelschnitt F' stützt, F' auf $\varkappa$ ruht; es ergibt sich dies unmittelbar aus dem Begriffe der Apolarität. Es ist nützlich, den analytischen Ausdruck dieser Lagenbeziehung sich vor Augen zu halten: Ist $\Sigma_i \Sigma_k \alpha_{ik} x_i x_k = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes $\varkappa$ in Punktcoordinaten, $\Sigma_i \Sigma_k b_{ik} u_i u_k = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes F' in den zugehörigen Liniencoordinaten, so ist — wie bekannt — die Relation $\Sigma_i \Sigma_k \alpha_{ik} b_{ik} = 0$ der analytische Ausdruck der zwischen den Kegelschnitten F' und $\varkappa$ bestehenden Apolarität.

Ist $\Sigma_i \Sigma_k \beta_{ik} u_i u_k = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes $\varkappa$ in den obigen Liniencoordinaten, $\Sigma_i \Sigma_k a_{ik} x_i x_k = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes F' in den obigen Punktcoordinaten, und bezeichnen wir die Discriminante der Form $\Sigma_i \Sigma_k \beta_{ik} u_i u_k$ mit Δ, die Discriminante der Form $\Sigma_i \Sigma_k a_{ik} x_i x_k$ mit D, die simultane Invariante $\Sigma_i \Sigma_k a_{ik} \beta_{ik}$ der beiden genannten Formen mit θ, so ist der Ausdruck: $\frac{4\theta^3}{27 D \Delta} = \chi$ eine absolute Invariante der beiden Kegelschnitte $\varkappa$ und F'. Da wir oben erkannt haben, dass die Paare von Kegelschnitten $\varkappa$ und F', welche zu verschiedenen Punkten p des Raumes gehören, sämmtlich unter einander collinear verwandt sind, so ist der Ausdruck $\frac{4\theta^3}{27 D \Delta} = \chi$ — als von der besonderen Lage des Projectionscentrums p ganz unabhängig — zugleich eine absolute Invariante der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art C_4. Man kann

zeigen, dass im Allgemeinen alle jene Raumcurven der betrachteten Art, bei denen die absolute Invariante χ den gleichen Werth hat, und nur solche, durch collineare Transformationen des Raumes in einander übergeführt werden können (wobei den genannten Transformationen auch die sogenannten »Imaginärprojectionen« des Raumes beizuzählen sind); darin ist zugleich enthalten, dass es ausser der absoluten Invariante χ weiter keine derartige Invariante bei den in Rede stehenden Curven gibt.

31. Wir denken uns jetzt wieder die Raumcurve C_4 aus einem bestimmten, der Fläche F nicht angehörenden Punkte p auf eine Ebene E projicirt. Wir nennen jene Tangente G' des Kegelschnittes F', welche man erhält, wenn man die den Punkt x der Raumcurve tragende Erzeugende G der einpunktigen Schaar (G) aus p auf E projicirt das »Bild« des Punktes x. Die Beziehung zwischen den Punkten x der C_4 und ihren Bildern, den Tangenten G' von F', ist offenbar eine ein- und dreideutige. (Über den Zusammenhang des in dieser Nummer behandelten Gegenstandes mit anderen Publicationen wird die folgende Nummer Aufschluss geben.)

Als »Bild« einer Bisecante der C_4, welche die C_4 in den zwei Punkten x_1 und x_2 trifft, ist der Schnittpunkt der Bilder G_1' und G_2' der beiden Punkte x_1 und x_2 anzusehen; die Bisecanten der C_4 erscheinen hiedurch ein- und eindeutig auf die Punkte der Ebene E abgebildet.

Die Bilder von zwei Bisecanten, die sich — in irgend einem Punkte p_1 das Raumes — schneiden, sind c o n j u g i r t e P o l e d e s z u m P u n k t e p g e h ö r i g e n K e g e l s c h n i t t e s $\varkappa$.

B e w e i s: Zu irgend einer Bisecante Δ der Raumcurve C_4 wird (nach der Definition der Abbildung) der zugehörige Bildpunkt δ gefunden, indem man über jene zwei Geraden der Schaar (G), welche von Δ getroffen werden, aus dem Punkte p eine Transversale legt; die Letztere schneidet die Ebene E im gesuchten Bildpunkte δ. Unter den oben eingeführten ∞^3 Collineationen L, in welchen jede Gerade der Schaar (G) sich selbst entspricht, während den Geraden der Schaar (Γ) wiederum Gerade derselben Schaar entsprechen, gibt es eine Collineation L_1, in welcher insbesondere dem Punkte p_1 der Punkt p entspricht.

In dieser Collineation L_1 entsprechen den beiden, in p_1 sich schneidenden Bisecanten Δ_1 und Δ_2 die Verbindungslinien $p\delta_1$ und $p\delta_2$ ihrer Bildpunkte δ_1 und δ_2 mit dem Punkte p.

Da die Bisecanten Δ_1 und Δ_2 nach Nr. 29 conjugirt sind in Bezug auf den durch p_1 gehenden Kegel K_1 des Complexes H, der genannte Kegel aber (nach Nr. 29) durch die Collineation L_1 in den durch p gehenden Kegel K desselben Complexes H übergeführt wird, so folgt, dass die Geraden $p\delta_1$ und $p\delta_2$ in Bezug auf den Kegel K und daher die Punkte δ_1 und δ_2 in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa$ conjugirt sind, was zu beweisen war.

Man überzeugt sich auch leicht von der Richtigkeit der Umkehrung des eben bewiesenen Satzes: Irgend zwei, in Bezug auf den Kegelschnitt $\varkappa$ conjugirte Punkte sind Bilder von zwei sich schneidenden Bisecanten.

Die Bilder der drei aus irgend einem[1] Punkte p_1 des Raumes an die C_4 gehenden Bisecanten bilden nach dem obigen ein Poldreieck des Kegelschnittes $\varkappa$, welches Poldreieck sinngemäss als »Bild« des Punktes p_1 zu bezeichnen ist; umgekehrt ist in diesem Sinne jedes Poldreieck[2] von $\varkappa$ das »Bild« eines und nur eines zugehörigen reellen Raumpunktes.

32. In der vorigen Nummer haben wir die Punkte der Raumcurve C_4 auf die Tangenten des Kegelschnittes F' abgebildet und die wichtige Rolle, die der Kegelschnitt $\varkappa$ hierbei spielt, hervorgehoben. Es ist ein Verdienst Adler's, welcher — wie vor ihm E. Weyr[3] — zur Untersuchung der C_4 eine Abbildung der Punkte dieser Curve auf die Punkte eines Kegelschnittes verwendete, zuerst erkannt zu haben,[4] dass bei einer solchen Abbildung die Bilder von irgend zwei sich schneidenden Bisecanten in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt conjugirt sind; dabei ist zu bemerken, dass als Bilder von Bisecanten bei Adler nicht wie in unserer Darstellung

---

[1] Die Punkte der Fläche zweiter Ordnung F nehmen eine Ausnahmsstellung ein.

[2] Von einem solchen Poldreieck braucht nur eine Ecke reell zu sein, die beiden anderen können conjugirt imaginär sein.

[3] Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1875, 1876.

[4] In der Abhandlung: »Über Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art«. Diese Sitzungsber., Jahrg. 1882 (Bd. 86).

Punkte, sondern vielmehr — da die von ihm verwendete Abbildung der hier betrachteten dual entspricht — Gerade auftreten.

Der tiefere Grund, warum bei einer Abbildung der Punkte unserer Raumcurve auf die Tangenten oder Punkte eines Kegelschnittes die Bilder von sich schneidenden Bisecanten in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt conjugirt sind, liegt eben in der in Nr. 29 beschriebenen Eigenschaft des C_4, dass die drei in irgend einem Raumpunkte p sich schneidenden Bisecanten der Raumcurve conjugirt sind in Bezug auf den durch p gehenden Kegel K des Complexes H; dies ist Adler, weil er die Sache von einem anderen Gesichtspunkte behandelte, verborgen geblieben.

Die Folgerungen, welche Adler aus der von ihm gefundenen Beziehung in der citirten Abhandlung und in weiteren Abhandlungen[1] zieht, lassen sich natürlich ebenso gut ableiten, wenn man die Punkte der C_4, anstatt sie auf die Punkte eines Kegelschnittes abzubilden, wie Weyr und Adler, auf die Tangenten des Kegelschnittes F' abbildet, wie dies in Nr. 31 geschehen ist.

33. Im Sinne der letzteren Abbildung ist das den beiden Kegelschnitten F' und $\varkappa$ gemeinsame Poldreieck das »Bild« eines bestimmten reellen Punktes o des Raumes, in welchem drei Bisecanten sich schneiden, welche in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung F conjugirt sind. Die drei durch den Punkt o, welcher »der Hauptpunkt unserer Raumcurve« heisst, gehenden Bisecanten A_1, A_2, A_3 bestimmen zusammen mit der Polarebene U des Punktes o in Bezug auf F ein Poltetraëder von F, das »Haupttetraëder der C_4«. Durch je eine der »Axen« A_1, A_2, A_3 und die ihr gegenüberliegende Kante des Haupttetraëders ist eine geschaarte Involution des Raumes bestimmt, in welcher die C_4 sich selbst entspricht. Die Axen A_1, A_2, A_3 sind zugleich Schnittgerade von je zwei Schmiegungsebenen der Curve. (Damit hängt zusammen, dass die ebenen Curven, welche durch Projection der C_4 aus o entstehen, von der am Schlusse des zweiten Abschnittes gekennzeichneten

---

[1] Ebenfalls in den Wiener Sitzungsberichten.

besonderen Beschaffenheit sind, nämlich dass alle ihre Doppelpunktstangenten zugleich Wendetangenten sind.)

Adler war der erste, welcher den eben dargelegten Sachverhalt vollständig erkannt und klar ausgesprochen hat (in der oben citirten Abhandlung). Er hat auch zuerst eine Eintheilung der Raumcurven vierter Ordnung in verschiedene Formen gegeben, wobei ihm allerdings einzelne[1] Ungenauigkeiten unterliefen. Die genannten Ungenauigkeiten lassen sich indess ohne Schwierigkeit beheben, wenn man nur gehörig in Betracht zieht, dass die Kegelschnitte F' und $\varkappa$ keineswegs eine beliebige Lage gegen einander haben können, sondern apolar sind, so zwar, dass F' auf $\varkappa$ ruht. Man kommt dann vollständig in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Arbeit von Rohn: »Die Raumcure vierter Ordnung zweiter Species« im 42. und 43. Bande der Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

34. Sowohl Adler, als auch Rohn gründen ihre Eintheilung auf das Reell- oder Imaginärsein gewisser charakteristischer Bestimmungsstücke der Raumcurve. Die Eintheilung Rohn's unterscheidet sich von jener Adler's — abgesehen von der Richtigstellung der oben erwähnten Ungenauigkeit — nur dadurch, dass Rohn die vier von Adler aufgestellten Formen zweckmässiger numerirt und noch eine fünfte Form hinzufügt, bei welcher die Fläche F (und in Folge dessen auch die Raumcurve) ganz imaginär ist.

Was das Verhältniss der von Rohn unterschiedenen fünf Typen zu einander anbelangt, so kann man zeigen, dass — vom projectivischen Standpunkte aus betrachtet — es zweckmässig ist, den ersten, zweiten, dritten und den fünften Typus alle in eine Gruppe zusammen zu fassen, den vierten Typus aber als zweite Gruppe der genannten ersten Gruppe nebenzuordnen. Die erste Gruppe zeichnet sich durch das reelle Vorhandensein der drei »Axen« A_1, A_2, A_3 aus; bei der zweiten Gruppe ist nur eine Axe, etwa A_3, reell, die beiden anderen, A_1 und A_2, conjugirt imaginär.

---

[1] Von diesen Ungenauigkeiten ist nur eine von Belang, welche sich bezieht auf die Merkmale der von Adler als »vierte« bezeichneten Form.

Die verschiedenen Typen, welche in der ersten Gruppe enthalten sind, lassen sich durch geeignete imaginäre Collineationen des Raumes in einander überführen; hingegen ist es niemals möglich, zwei Raumcurven, von welchen die eine der ersten, die andere der zweiten Gruppe angehört, durch Collineation in einander überzuführen. Dieser wesentliche Unterschied der beiden Gruppen ist darin begründet, dass den Curven der ersten Gruppe Werthe der Invariante $\chi = \frac{4\Theta^3}{27D\Delta}$ zugehören, welche < -1 sind, während den Curven der zweiten Gruppe Werthe der absoluten Invariante χ entsprechen, welche > -1 sind. Zu jedem Werthe der absoluten Invariante, welcher kleiner ist als (-1), gehören Curven des ersten, zweiten, dritten und fünften Typus (nach der Rohn'schen Bezeichnungsweise); dabei sind Curven, welche dieselbe Invariante haben, durch reelle Collineationen in einander überführbar, wenn sie zu demselben Typus gehören, hingegen durch imaginäre Collineationen dann, wenn ihr Typus verschieden ist. Zu jedem Werthe der absoluten Invariante, welcher grösser ist als (-1), gehören Curven des vierten Typus, welche ebenfalls alle collinear verwandt sind. Die Werthe von χ: $\chi = \infty$ und $\chi = -1$ stellen Curven dar, welche den Übergang zwischen der ersten und der zweiten Gruppe vermitteln.

Es wird nunmehr unsere Aufgabe sein, den hier behaupteten Sachverhalt nachzuweisen und näher auszuführen:

35. Für die Beurtheilung der besonderen Beschaffenheit einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art ist maassgebend die gegenseitige Lage der Kegelschnitte F' und $\varkappa$. Das den beiden Kegelschnitten gemeinsame Poldreieck $e_1 e_2 e_3$ kann entweder 1. ganz reell sein oder aber 2. einen reellen Eckpunkt e_3 und zwei conjugirt imaginäre Eckpunkte e_1 und e_2 besitzen; den Fall, dass die beiden Kegelschnitte einander berühren, in welchem Falle zwei Ecken des gemeinsamen Poldreieckes unendlich nahe zusammenrücken, schliessen wir zunächst von der Betrachtung aus. Nehmen wir das gemeinsame Poldreieck der beiden Kegelschnitte zum Coordinatendreieck, so werden

auf dieses bezogen die Kegelschnitte F' und $\varkappa$ beziehlich nachstehende Gleichungen (in Punktcoordinaten) haben:

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0 \;\; (F') \quad \text{und} \quad \Sigma \alpha_i x_i^2 = 0 \;\; (\varkappa).$$

Dabei ist zu bemerken, dass in dem mit 1 bezeichneten Falle die Grössen a_i und α_i sämmtlich reell zu denken sind. hingegen im Falle 2 nur die Grössen a_3 und α_3 reell. die Grössen a_1 und a_2 und ebenso α_1 und α_2 conjugirt imaginär zu denken sind; es ist dies deshalb nothwendig, weil sonst die beiden Kegelschnitte, auf irgend ein reelles Coordinatendreieck bezogen, Gleichungen mit imaginären Coëfficienten haben würden, was hier unbedingt ausgeschlossen ist, da wir uns in dieser Arbeit nur mit solchen Flächen und Curven beschäftigen, bei welchen die imaginären Punkte, wo sie vorkommen, stets nur conjugirt auftreten.

Setzen wir $\mu_i = \frac{a_i}{\alpha_i}$, so werden nach dem Gesagten im Falle 1 die Grössen μ_i alle drei reell sein, im Falle 2 nur μ_3 reell, μ_1 und μ_2 aber conjugirt imaginär.

Die Thatsache, dass F' auf $\varkappa$ ruht, spricht sich in der Gleichung aus:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 0. \qquad \ldots A)$$

Dass die absolute Invariante $\frac{4\Theta^3}{27D\Delta}$ den Werth χ hat, gibt uns die Gleichung:

$$\frac{4(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^3}{27\,\mu_1\mu_2\mu_3} = \chi. \qquad \ldots B)$$

Durch die beiden Gleichungen $A)$ und $B)$ sind die Grössen μ_i bis auf einen willkürlichen Factor bestimmt, der natürlich ganz gleichgiltig ist, da es ja nur auf die Verhältnisse der Grössen μ_i zu einander ankommt. Setzen wir etwa noch:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = h,$$

so werden, da aus $A)$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = 0,$$

aus B)

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = \frac{4h^3}{27\chi}$$

folgt, die Grössen μ_i offenbar die Wurzeln der nachstehenden cubischen Gleichung sein:

$$\mu^3 - h\mu^2 - \frac{4h^3}{27\chi} = 0.$$

Für h kann man hierin jede beliebige Zahl setzen, das Verhältniss der Wurzeln zu einander bleibt dasselbe. In dem besonderen Falle, dass $\chi = 0$ ist, nimmt die cubische Gleichung die Form an: $\mu^3 - f = 0$, wenn $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = f$ gesetzt wird.

Die Discriminante unserer cubischen Gleichung:

$$\mu^3 - h\mu^2 - \frac{4h^3}{27\chi} = 0$$

lautet, nach Beseitigung gleichgiltiger Factoren $\frac{1}{\chi} \cdot \left(\frac{1}{\chi} + 1\right)$. Man findet, dass sowohl für $\chi = \infty$, als auch für $\chi = -1$ zwei von den drei Grössen μ_i einander gleich werden; für $\chi < -1$ hat obige cubische Gleichung drei reelle Wurzeln, für $\chi > -1$ aber sind zwei von den drei Wurzeln conjugirt imaginär. Daraus folgt mit Rücksicht auf früher Gesagtes, dass bei denjenigen Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art, bei welchen $\chi < -1$ ist, die Kegelschnitte F' und $\varkappa$ ein reelles gemeinsames Poldreieck haben; im Falle $\chi > -1$ aber sind zwei Ecken des den beiden Kegelschnitten gemeinsamen Poldreieckes conjugirt imaginär. Da nach Nr. 33 die Ecken e_1, e_2, e_3 des genannten gemeinsamen Poldreieckes Bilder der Axen der Raumcurve sind, so sehen wir, dass den Werthen von $\chi < -1$ Raumcurven zugehören, deren Axentripel reell ist, den Werthen $\chi > -1$ aber Raumcurven, bei denen zwei von den drei Axen conjugirt imaginär sind. Hiedurch ist die oben angegebene Unterscheidung der betrachteten Raumcurven in zwei Gruppen gerechtfertigt.

36. Die Zahlen μ_1, μ_2, μ_3, welche den Eckpunkten $e_1 e_2 e_3$ des gemeinsamen Poldreieckes zugehören, die ihrerseits Bilder der drei Axen A_1, A_2, A_3 sind, nennen wir die den entsprechenden Axen zugehörigen »Hauptzahlen«.

Nunmehr sind wir im Stande, den Beweis zu geben, dass zwei Curven, deren Invariante χ denselben Werth hat, stets durch Collineation in einander übergeführt werden können. (Der Beweis wird geführt mit Ausschluss des Falles, dass die Kegelschnitte F' und $\varkappa$ einander berühren, welcher in der That, wie sich zeigen wird, ein Ausnahmsfall ist.)

Wenn bei zwei Raumcurven die Invariante χ denselben Werth hat, so sind offenbar auch die drei Hauptzahlen der beiden Curven dieselben. Man kann nun durch eine collineare Transformation zunächst erreichen, dass die Axen der beiden Curven, welche die gleichen Hauptzahlen haben, zur Deckung kommen; durch eine zweite Collineation, welche die Lage der Axen ungeändert lässt, kann man sodann auch noch die Trägerflächen zweiter Ordnung, auf denen die Curven liegen, zur Deckung bringen, so zwar, dass die einpunktigen Geradenschaaren der beiden Flächen über einander fallen. Der durch den gemeinsamen Hauptpunkt o der beiden Curven gehende Kegel **K** des Complexes H ist dann — wie ohne Schwierigkeit aus den Betrachtungen in Nr. 35 gefolgert werden kann — bei beiden Raumcurven derselbe, womit gezeigt ist, dass die erzeugende cubische Involution in der einpunktigen Schaar (G) der gemeinsamen Trägerfläche F bei beiden Curven dieselbe ist. Schliesslich sind auch die sechs Punkte, in welchen die gemeinsamen Axen die Trägerfläche F treffen, beiden Curven gemeinsam; zu sechs Gliedern der erzeugenden cubischen Involution in der einpunktigen Schaar (G) gehören also bei beiden Curven jeweilig dieselben Geraden der Schaar (Γ). Es ist also eine und dieselbe ein-dreideutige Beziehung zwischen den Geraden G und Γ, welche die eine und welche die andere Curve erzeugt; hiernach kann kein Zweifel mehr obwalten, dass die Curven in ihren neuen Lagen sich wirklich decken.

37. Wir wenden uns jetzt insbesondere der ersten Gruppe $\chi < -1$ zu. Ist der Werth der absoluten Invariante χ einmal beliebig (aber < -1) festgelegt, so werden wir jetzt sehen, dass die ihm entsprechenden Raumcurven sich noch immer durch das Reell- oder Imaginärsein gewisser Bestimmungsstücke unterscheiden, also verschiedenen Typen angehören können.

A. Nehmen wir an, die Trägerfläche F sei ganz imaginär, so erhalten wir eine Curve vom fünften Typus;[1] dieser Typus kann nur in der hier betrachteten ersten Gruppe auftreten, weil das Imaginärwerden der Fläche F mit Nothwendigkeit die Realität der drei Axen der Curve zur Folge hat.

B. Ist die Trägerfläche F reell, und zwar ein einschaliges Hyperboloid, so sind noch immer verschiedene Lagen der Kegelschnitte F' und $\varkappa$ gegen einander denkbar, denen verschiedene Typen entsprechen. Von den drei Axen A_1, A_2, A_3 treffen zwei, etwa A_1 und A_2, die Fläche F in reellen Punkten, die dritte, A_3, in zwei conjugirt imaginären Punkten. Die zugehörigen Hauptzahlen μ_1, μ_2, μ_3 sind hier — wie bei der ersten Gruppe überhaupt — alle drei reell; je nach der Beziehung, in welcher der absolute Betrag $|\mu_3|$ der zu A_3 gehörigen Hauptzahl zu den absoluten Beträgen $|\mu_1|$ und $|\mu_2|$ der beiden anderen Hauptzahlen steht, sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $|\mu_3| \begin{matrix} > |\mu_1| \\ > |\mu_2| \end{matrix}$

2. $|\mu_1| > |\mu_3| > |\mu_2|$ oder $|\mu_2| > \mu_3 > |\mu_1|$.

3. $|\mu_3| \begin{matrix} < |\mu_1| \\ < |\mu_2|. \end{matrix}$

Aus der Relation $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 0$, welche zwischen den drei Hauptzahlen besteht, folgt, dass in den Fällen 1 und 2 die Hauptzahlen μ_1 und μ_2 entgegengesetztes Zeichen haben, im Falle 3 hingegen μ_1 und μ_2 das gleiche Vorzeichen, μ_3 das entgegengesetzte.

Im Falle 1 sind die vier Schnittpunkte der Kegelschnitte F' und $\varkappa$ reell, die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte imaginär.

Im Falle 2 sind die vier gemeinsamen Tangenten reell, die vier Schnittpunkte imaginär.

Im Falle 3 ist der Kegelschnitt $\varkappa$ ganz imaginär.

Im Falle 1 ist von den Tripeln der erzeugenden cubischen Involution stets nur ein Element reell, die beiden anderen conjugirt imaginär.

---

[1] Nach Rohn'scher Bezeichnungsweise.

Im Falle 2 besteht ein Theil der Tripel der erzeugenden Involution aus drei reellen Elementen, ein anderer Theil aus je einem reellen und zwei conjugirt imaginären Elementen.

Im Falle 3 bestehen alle Tripel aus drei reellen Elementen.

Es hat keine Schwierigkeit, auf Grund der in Nr. 31 eingeführten Abbildung nachzuweisen, dass die den Fällen 1, 2, 3 entsprechenden Curven beziehlich alle charakteristischen Merkmale des ersten, zweiten und dritten Typus (nach Rohn'scher Bezeichnungsweise) besitzen.

C. Von vornherein könnte man auch glauben, dass die Fläche F vielleicht auch ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid sein könnte. Bei näherer Betrachtung zeigt es sich aber, dass bei solchen Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art die imaginären Punkte nicht mehr conjugirt auftreten werden, weshalb diese Curven aus dem Rahmen unserer Untersuchung hinausfallen.

38. Bei den Curven der zweiten Gruppe ($\chi > -1$) ist die Trägerfläche F nothwendig ein einschaliges Hyperboloid. (Dass die Fläche F nicht imaginär sein kann, folgt — wie schon oben hervorgehoben wurde — daraus, dass in diesem Falle die drei Axen der Curve reell sein müssten, was bei der betrachteten zweiten Gruppe ausgeschlossen ist; dass sie nicht ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid sein kann, lehrt dieselbe Überlegung wie oben bei der ersten Gruppe.) Von den vier Schnittpunkten und ebenso von den vier gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte F' und $\varkappa$ sind hier nur je zwei reell, die beiden anderen conjugirt imaginär. Die Curven der betrachteten Gruppe fallen zusammen mit den Curven des vierten Typus bei Rohn; man überzeugt sich leicht auf Grund der in Nr. 31 eingeführten Abbildung, dass thatsachlich die hieher gehörigen Curven alle charakteristischen Merkmale des vierten Typus aufweisen.

Eine besonders ausgezeichnete Gattung von Curven der betrachteten Gruppe, auf welche zuerst Weyr[1] hingewiesen

---

[1] In der Abhandlung: »Über die Abbildung einer rationalen Raumcurve«. Diese Sitzungsberichte, Bd. 72 (Jahrg. 1875).

hat, welche auch Adler[1] bespricht und auch Rohn[2] behandelt, gehört zum Werthe $\chi = 0$ der absoluten Invariante χ. Bei einer Raumcurve dieser Gattung sondern sich die Tangenten in ∞^1 Tripel, welche sich je in einem Punkte des Raumes schneiden, und die Schmiegungsebenen in den drei Punkten, die auf irgend einer Trisecante der Curve liegen, schneiden sich in einem neuen Punkte der Curve.

39. Wir gehen nun an die Untersuchung des oben ausgeschlossenen Falles, dass die Kegelschnitte F' und $\varkappa$ einander berühren. Da sind nun die nachstehenden Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. Die Kegelschnitte berühren sich nur in einem Punkte.
2. Sie berühren sich in zwei Punkten.
3. Sie osculiren einander.
4. Sie haben eine vierpunktige Berührung mit einander.

Allen den aufgezählten Fällen gehört der Werth $\chi = -1$ der absoluten Invariante χ zu; man kann sich überzeugen, dass umgekehrt, wenn die Invariante χ den Werth (-1) hat, nothwendig einer der vier aufgezählten Fälle vorliegt.

Je nachdem, welcher der genannten Fälle eintritt, erhält man Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art von folgender Beschaffenheit:

1. Von den drei Axen A_1, A_2, A_3 der Raumcurve rücken zwei, etwa A_1 und A_2, unendlich nahe zusammen. Die betrachtete Curve besitzt eine stationäre Tangente.

2. Von den drei Axen ist eine, etwa A_3, fest bestimmt; das Paar der beiden anderen Axen A_1 und A_2 kann unter den ∞^1 Paaren einer gewissen quadratischen Strahleninvolution, welche in einem durch den Hauptpunkt o gehenden ebenen Strahlenbüschel liegt, willkürlich ausgewählt werden. Auch diese Curven sind zuerst von E. Weyr untersucht und später auch von Adler und Rohn behandelt worden (in den oben citirten Abhandlungen). Sie besitzen zwei stationäre Tangenten, welche reell oder imaginär sind, je nachdem die beiden

---

[1] In der Abhandlung: »Über specielle Raumcurven vierter Ordnung«. Diese Sitzungsberichte, Bd. 86.

[2] In der oben citirten Abhandlung.

Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte F' und $\varkappa$ reell oder imaginär sind. Die Schmiegungsebenen in den Punkten einer solchen Raumcurve können, wie Adler zuerst gezeigt hat, als Nullebenen der zugehörigen Punkte in Bezug auf ein gewisses Nullsystem aufgefasst werden.

3. und 4.

Was die unter 3. und 4. verzeichneten Fälle anbelangt, so erkennt man bei näherem Zusehen, dass bei diesen der Kegelschnitt $\varkappa$, welcher einerseits den Kegelschnitt F' drei-, beziehungsweise vierpunktig berühren, anderseits den nämlichen Kegelschnitt »stützen« soll, nichts anderes sein kann als eine doppelt gezählte Tangente des Kegelschnittes F'. Dementsprechend zerfallen die zugehörigen Raumcurven in eine doppelt zu zählende Erzeugende der einpunktigen Schaar (G) und in einen Kegelschnitt.

Die Curven der unter 1. angeführten Art sind untereinander alle collinear verwandt, ebenso die Curven der unter 2. angeführten Art; man überzeugt sich davon durch eine analoge Überlegung wie in Nr. 36.

Hingegen kann man nicht mehr sagen, dass die verschiedenen unter 1., 2., 3., 4. angeführten Fälle durch Collineationen in einander überführbar sind, wiewohl bei allen die absolute Invariante χ den nämlichen Werth: -1 hat.

Höchstens kann man aus dem Falle 1 die anderen Fälle durch einen Grenzübergang ableiten, oder besser ausgedrückt: man kann, vom Falle 1 ausgehend, sich den übrigen Fällen beliebig annähern, indem man die betreffenden Curven collinear deformirt, ohne jedoch diese Fälle wirklich zu erreichen. Es muss also festgestellt werden, dass der in Nr. 30 (mit Vorbehalt) ausgesprochene Satz: »Alle Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art, deren absolute Invariante χ denselben Werth hat, sind untereinander collinear verwandt«, für $\chi = -1$ eine Ausnahme erleidet. Eine zweite Ausnahme von diesem Satze bildet der Fall $\chi = \infty$, welcher zusammen mit dem eben betrachteten Falle $\chi = -1$ den Übergang zwischen der ersten und der zweiten Gruppe vermittelt: Der Werth $\chi = \infty$ gehört nämlich jenen Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art zu, welche zerfallen, und zwar entweder:

in eine Gerade der einpunktigen Schaar (G) und in eine cubische Raumcurve,

oder in zwei Gerade der Schaar (G) und in einen Kegelschnitt [wobei der letztere Kegelschnitt selbst wieder zerfallen kann in eine Gerade der Schaar (G) und in eine Gerade der Schaar (Γ)].

Für alle anderen Werthe von χ aber gilt, wie oben gezeigt wurde, der eben angeführte Satz allgemein.

Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes

von

Prof. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juli 1899.)

Herr Battelli hat über die thermischen Eigenschaften der Dämpfe sehr ausgedehnte und sehr sorgfältige Untersuchungen angestellt und unter Anderem auch den in technischer Hinsicht so wichtigen Wasserdampf untersucht.[1] Indem er die Isothermen des Wasserdampfes innerhalb weiter Grenzen von Druck und Temperatur bis über die kritische Temperatur hinaus messend verfolgte, erhielt er für die zusammengehörigen Werthe von Volumen, Druck und Temperatur ein überaus reiches Beobachtungsmaterial, welches sich durch die Clausius-sche Formel

$$p = \frac{RT}{v-\alpha} - \frac{mT^{-\mu} - nT^{\nu}}{(v+\beta)^2} \qquad \ldots (1)$$

wiedergeben liess. In dieser bedeuten T die absolute Temperatur, v das specifische Volumen (Volumen von 1 g in Cubikcentimetern gemessen) und p den Druck (in Millimetern Quecksilbersäule gemessen), und haben die Constanten die folgenden Werthe:

$$R = 3430\cdot92 \quad n = 7711\cdot6 \quad \nu = 0\cdot12235 \quad \beta = 1\cdot137$$
$$m = 57288567 \quad \mu = 0\cdot22015 \quad \alpha = 0\cdot742.$$

Wie man sieht, enthält diese Formel nicht weniger als sieben Constante, und ist ausserdem von sehr verwickelter Form.

---

[1] A. Battelli, »Sulle proprietà termiche dei vapori. Parte IV. Studio del vapor d'acqua«. Memorie della reale accademia delle scienze di Torino. Serie II, t. XLIII, 1893, p. 63—98.

Ich habe nun gefunden, dass die Batelli'schen Messungsergebnisse zwischen der tiefsten Isotherme und derjenigen von $+231 \cdot 41°$ C. sich durch die sehr einfache Gleichung:

$$p(v+0 \cdot 008402) = 3 \cdot 4348\, T \qquad \ldots (2)$$

wiedergeben lassen, worin p und T dieselbe Bedeutung wie früher haben und v das Volumen von 1 *kg*, in Cubikmetern gemessen, bedeutet. Die Zahlen für v sind in diesem Falle 1000mal kleiner als früher.

In der folgenden Tabelle bedeuten »v beob.« das von H. Battelli beobachtete, aber in der jetzigen Volumseinheit ausgedrückte Volumen und »v ber.« das nach der Zustandsgleichung 2) berechnete Volumen. Die letzte Spalte enthält die absolute Grösse der Differenz, ausgedrückt in Procenten des beobachteten Volumens.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
Temperatur = −6·16°.			
2·16	426·153	424·322	0·43
2·41	383·254	380·292	0·77
2·70	340·624	339·454	0·34
2·80	327·246	327·322	0·02
Temperatur = +1·32°.			
3·01	315·662	313·028	0·83
3·34	284·468	282·098	0·83
3·70	256·313	254·651	0·65
4·12	230·468	228·687	0·77
4·34	218·632	217·097	0·70
4·44	214·026	212·207	0·85
4·52	209·802	208·449	0·65
4·59	206·835	205·273	0·75
4·68	202·586	201·324	0·62
4·73	200·156	199·197	0·48
4·77	197·853	197·524	0·17

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
Temperatur = +6·24°.			
4·14	233·351	231·666	0·72
4·82	200·325	198·983	0·67
4·95	195·374	193·756	0·83
5·47	176·431	175·336	0·62
5·72	168·770	167·673	0·65
6·43	149·746	149·158	0·39
6·57	146·314	145·978	0·23
6·70	143·385	143·149	0·16
6·87	139·832	139·602	0.16
Temperatur = +9·72°.			
4·81	203·452	201·878	0·77
5·70	171·458	170·362	0·63
6·42	152·385	151·252	0·74
6·91	141·564	140·525	0·74
7·50	130·283	129·472	0·62
7·68	127·193	126·436	0·59

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
7·85	124·375	123·698	0·55
7·97	122·349	121·835	0·42
8·17	119·318	118·853	0·39
8·40	115·935	115·598	0·29
8·51	114·318	114·102	0·19
8·66	112·283	112·126	0·14

Temperatur = +14·91°.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
7·12	139·941	138·882	0·76
7·47	133·456	132·377	0·81
7·89	126·324	125·329	0·78
8·53	116·834	115·926	0·77
9·02	110·485	109·627	0·78
9·46	105·279	104·526	0·71
10·12	98·3184	97·712	0·61
10·88	91·3480	90·884	0·50
11·42	87·0047	86·586	0·48
11·87	83·6453	83·304	0·41
12·34	80·3114	80·128	0·23

Temperatur = +21·05°.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
7·75	130·584	130·316	0·20
8·12	124·782	124·375	0·33
8·74	115·812	115·552	0·22
9·52	106·414	106·082	0·31
11·08	91·3331	91·147	0·20
11·84	85·4328	85·296	0·16
12·89	78·4318	78·348	0·11
13·24	76·2481	76·275	0·03
14·37	70·1846	70·277	0·13
15·32	65·8143	65·918	0·15
16·19	62·2484	62·375	0·20
16·90	59·6348	59·755	0·20
17·55	57·4185	57·541	0·21
18·07	55·7464	55·885	0·25

Temperatur = +27·15°.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
8·98	114·725	114·797	0·06
9·80	105·235	105·190	0·04
11·17	92·3159	92·290	0·03
13·12	78·4622	78·572	0·14
14·55	70·8182	70·849	0·04
16·45	62·6153	62·663	0·07
17·65	58·2617	58·403	0·24
18·58	55·3165	55·479	0·29
19·52	52·6339	52·807	0·33
20·02	51·3142	51·489	0·34
21·16	48·5462	48·713	0·34
23·44	43·8156	43·974	0·36
24·93	41·1848	41·346	0·39
25·59	40·1163	40·279	0·40
25·96	39·5342	39·705	0·43

Temperatur = +57·01°.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
19·48	58.3353	58·1487	0·32
24·79	45·7413	45·715	0·05
26·90	42·1526	42·130	0·05
28·95	39·1848	39·146	0·10
32·56	34·8164	34·805	0·03
39·57	28·6428	28·636	0·02
44·60	25·4126	25·407	0·02
56·21	20·1583	20·157	0·006
69·27	16·3482	16·355	0·05
79·40	14·2624	14·267	0·03
88·35	12·8146	12·821	0·05
96·33	11·7482	11·759	0·09
108·26	10·4522	10·462	0·09
117·62	9·61594	9·629	0·13
128·00	8·82426	8·847	0·26
129·14	8·73890	8·769	0·34

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
Temperatur = +78·52°.			
67·57	17·8519	17·861	0·05
85·32	14·1326	14·143	0·07
100·27	12·0335	12·033	0·004
110·18	10·9472	10·953	0·03
125·11	9·63348	9·642	0·09
150·20	8·02682	8·030	0 04
161·64	7·45326	7·461	0·10
176·12	6·83792	6·847	0·13
193·12	6·23482	6·244	0·14
222·00	5·42328	5·430	0·12
228·71	5·26132	5·271	0·18
241·50	4·98261	4·991	0·17
250·40	4·80328	4·813	0·21
260·18	4·62341	4·632	0·18
273·10	4·40325	4·413	0·22
282·06	4·26281	4·272	0·21
321·22	3·74253	3·750	0·21
330·78	3·63241	3·642	0·25
Temperatur = +99·60°.			
159·61	7·98645	8·0098	0·29
209·48	6·08432	6·1010	0·27
243·14	5·24327	5·255	0·22
254·19	5·01282	5·026	0·26
263·70	4·83168	4·845	0·27
285·30	4·46625	4·477	0·24
322·26	3·95380	3·963	0·23
359·81	3·54128	3·549	0·22
392·06	3·24876	3·256	0·22
436·33	2·91881	2·925	0·21
461·95	2·75623	2·762	0·21
525·47	2·42119	2·427	0·24
565·20	2·24937	2·256	0·29
598·54	2·12418	2·130	0·27
640·78	1·98136	1·989	0·37
676·44	1·87528	1·883	0·41
727·61	1·74234	1·751	0·49
749·12	1·69046	1·700	0·56
Temperatur = +130·32°.			
352·9	3·897423	3·917	0·50
392·0	3·507266	3·525	0·50
441·0	3·118216	3·133	0·47
531·4	2·587740	2·599	0·43
671·4	2·047326	2·055	0·37
958·9	1·431761	1·436	0·29
1481·7	0·925314	0·9265	0·13
1531·9	0·894101	0·8959	0·20
1601·8	0·854316	0·8564	0·24
1667·0	0·820422	0·82262	0·26
1721·4	0·794185	0·79637	0·27
1769·5	0·772281	0·7745	0·29
1807·8	0·755327	0·7579	0·34
1843·9	0·740256	0·7429	0·35
1872·9	0·728482	0·73125	0·38
1968·0	0·692940	0·6955	0·37
1984·2	0·687158	0·6898	0·38
2030·1	0·671454	0·6740	0·38
2060·1	0·661534	0·66405	0·38
Temperatur = +144·21°.			
393·3	3·620412	3·6352	0·40
417·1	3·415361	3·4273	0·35
471·8	3·019315	3·0289	0·31
540·0	2·634832	2·6454	0·40
596·3	2·387258	2·3948	0·31
665·4	2·137810	2·1452	0·35
788·6	1·804252	1·8088	0·25
988·1	1·437826	1·4419	0·28
1511·4	0·937564	0·9397	0·23
1764·2	0·801271	0·8039	0·32

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
2072·1	0·681374	0·6832	0·27
2756·2	0·510318	0·511523	0·24
2975·5	0·471274	0·4732	0·41
3061·9	0·457233	0·45960	0·52

Temperatur = +182·90°.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
708·7	2·204262	2·2012	0·14
807·3	1·934252	1·9313	0·15
913·5	1·706206	1·7058	0·02
1028·1	1·516814	1·5147	0·14
1098·9	1·416418	1·4166	0·01
1279·8	1·214380	1·2151	0·06
1518·1	1·021215	1·0231	0·18
1809·0	0·856264	0·85722	0·11
2131·2	0·725382	0·72637	0·13
2903·1	0·531649	0·5310	0·12
3683·3	0·418268	0·41674	0·36
4114·1	0·374384	0·3722	0·58
4955·0	0·310416	0·3076	0·91
5990·7	0·256348	0·2530	1·30
6952·2	0·218314	0·21684	0·68
7334·3	0·206348	0·2051	0·60
7599·3	0·198356	0·19766	0·35
7652·6	0·196348	0·19622	0·06
7730·4	0·194368	0·19417	0·10
7809·1	0·192314	0·19213	0·09
7888·8	0·190316	0·19010	0·11
7925·1	0·189264	0·18919	0·04
7949·9	0·188315	0·18863	0·16
7971·4	0·187622	0·18805	0·23

Temperatur = +202·21°.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
943·6	1·725812	1·7214	0·25
966·5	1·689159	1·6805	0·51
1026·5	1·583264	1·5817	0·09
1118·9	1·453268	1·4504	0·19
1216·1	1·334162	1·3337	0·03
1271·9	1·274871	1·2749	0·002
1421·7	1·141616	1·1397	0·17
1714·8	0·941536	0·94348	0·20
2360·2	0·681318	0·68318	0·27
2572·8	0·625116	0·62603	0·14
3111·4	0·515864	0·51620	0·06
3758·6	0·426301	0·42587	0·10
4655·7	0·341818	0·34220	0·11
4980·2	0·318476	0·31935	0·27
5381·6	0·293748	0·29491	0·40
6910·1	0·226418	0·22781	0·61
8149·6	0·191125	0·19189	0·40
10450·2	0·148769	0·14779	0·66
11101·1	0·139818	0·13864	0·85
11373·5	0·136186	0·13512	0·78
11474·0	0·134816	0·13386	0·71
11592·6	0·133169	0·13240	0·58
11764·2	0·131158	0·13035	0·61
11766·5	0·130256	0·13032	0·05
11905·0	0·128474	0·12871	0·18
12090·4	0·126387	0·12661	0·18
12181·1	0·125372	0·12560	0·18

Temperatur = +231·41°.

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
1061·4	1·621374	1·6239	0·15
1123·0	1·531746	1·5344	0·16
1695·5	1·015316	1·0135	0·18
1906·1	0·901156	0·90058	0·06
2184·6	0·784816	0·78468	0·02
2388·5	0·715319	0·71698	0·23
2833·2	0·602462	0·60311	0·11
3191·5	0·534364	0·53446	0·02
4090·3	0·416159	0·41518	0·23
4963·6	0·341264	0·34066	0·17
5570·6	0·302248	0·30262	0·12
5969·8	0·281264	0·28182	0·19
6796·7	0·246368	0·24652	0·06
7890·6	0·211356	0·21117	0·09

p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten	p	v beob.	v ber.	Differenz in Procenten
8725·4	0·190327	0·19016	0·09	18771·5	0·084159	0·08390	0·31
9290·5	0·178426	0·17809	0·19	19140·7	0·082456	0·08212	0·41
10860·3	0·151634	0·15113	0·33	19674·2	0·080115	0·07966	0·57
11804·5	0·138456	0·13837	0·06	20012·4	0·078516	0·07822	0·38
13005·4	0·125348	0·12482	0·42	20302·1	0·077345	0·07694	0·52
15901·8	0·101316	0·10055	0·76	20487·5	0·076452	0·07617	0·35
16874·2	0·094362	0·09427	0·10	20845·0	0·074368	0·07472	0·47
17741·5	0·089183	0·08925	0·07	21272·1	0·072415	0·07305	0·87

Die mittlere absolute Grösse der Differenz zwischen den Rechnungswerthen und den Versuchswerthen beträgt bei den obigen 242 Beobachtungen 0·3131%. Die Differenz übersteigt nur einmal den Betrag von 1% und hat dann den Werth 1·30%. Ebenso kommt es nur einmal vor, dass die Differenz zwischen 0·90% und 1% liegt; sie beträgt dann 0·91%. Sonst sind alle Differenzen kleiner als 0·90%.

Herr Battelli hat aus seiner Formel, um ihren Genauigkeitsgrad zu prüfen, den Druck p berechnet und die so erhaltenen Werthe in seine Tabelle aufgenommen. Ich habe nun für die obigen 242 Beobachtungen die mittlere absolute Grösse der Differenz zwischen den Versuchswerthen und den aus der Battelli'schen Formel sich ergebenden Rechnungswerthen ermittelt und dafür den Betrag 0·3074% gefunden. Dieser Betrag stimmt mit dem früher für unsere Zustandsgleichung erhaltenen Betrage überein, dagegen übersteigt jetzt die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung den Betrag von 1% achtmal (1·01, 1·13, 1·46, 3·12, 1·01, 1·08, 1·03, 1·12) und liegt ferner die Differenz zwischen 0·90% und 1% neunmal (0·997, 0·97, 0·92, 0·901, 0·93, 0·94, 0·98, 0·96, 0·903). Daraus folgt, dass unsere Zustandsgleichung sich an die obigen 242 Beobachtungen gleichmässiger anpasst. Erwägt man ausserdem, dass unsere Zustandsgleichung nur zwei Constante und die denkbar einfachste Form der Function enthält,

so kann es keinem Zweifel unterliegen, dass sie innerhalb der angegebenen Grenzen die wahre Zustandsgleichung des Wasserdampfes ist.

Unsere Zustandsgleichung gilt bis in die Nähe der Condensationsgrenze, dagegen gilt sie nicht mehr für jene Zustände, welche der Wasserdampf bei seiner Entwicklung aus dem siedenden Wasser und bei seiner Verflüssigung hat. Um dies ersichtlich zu machen, sind in der folgenden Tabelle für den gesättigten Wasserdampf diejenigen Werthe v_1 des specifischen Volumens, welche sich aus der Clapeyron'schen Formel ergeben, mit jenen Werthen v_2 verglichen, welche aus unserer Zustandsgleichung durch Einsetzung des Siedepunktes und des dazu gehörigen Druckes hervorgehen. Die Werthe v_1 sind den Tabellen entnommen, welche Herr Zeuner im Anhange des zweiten Bandes seines Werkes »Technische Thermodynamik« (1890) mit strenger Berücksichtigung der Regnault'schen Versuchsergebnisse aufgestellt hat. Das specifische Volumen des Wassers wurde bis 125° gleich 0·0010 gesetzt, für die höheren Temperaturen aber nach der Hirn'schen Formel berechnet.

t	T	p	v_1	v_2	v_1-v_2
—20	253	0·927	994·78	937·43	+57·35
—15	258	1·400	666·59	632·97	+33·62
—10	263	2·093	451·42	431·60	+19·82
— 5	268	3·113	307·33	295·69	+11·64
0	273	4·600	210·68	203·83	+ 6·85
5	278	6·534	150·24	146·13	+ 4·11
10	283	9·165	108·52	106·05	+ 2·47
15	288	12·699	79·355	77·885	+ 1·470
20	293	17·391	58·727	57·863	+ 0·864
25	298	23·550	43·968	43·456	+ 0·512
30	303	31·548	33·270	32·981	+ 0·289
35	308	41·827	25·439	25·284	+ 0·155
40	313	54·906	19·647	19·572	+ 0·075
45	318	71·390	15·317	15·292	+ 0·025

t	T	p	v_1	v_2	v_1-v_2
50	323	91·980	12·051	12·054	— 0·003
55	328	117·475	9·5632	9·5816	— 0·0184
60	333	148·786	7·6548	7·6790	— 0·0242
65	338	186·938	6·1727	6·2020	— 0·0293
70	343	233·082	5·0154	5·0461	— 0·0307
75	348	288·500	4·1038	4·1348	— 0·0310
80	353	354·616	3·3802	3·4107	— 0·0305
85	358	433·002	2·8016	2·8314	— 0·0298
90	363	525·392	2·3356	2·3648	— 0·0292
95	368	633·692	1·9578	1·9863	— 0·0285
100	373	760·000	1·6508	1·6774	— 0·0266
105	378	906·410	1·3989	1·4241	— 0·0252
110	383	1075·370	1·1914	1·2149	— 0·0235
115	388	1269·410	1·0195	1·0414	— 0·0219
120	393	1491·280	0·8763	0·8968	— 0·0205
125	398	1743·880	0·7566	0·7755	— 0·0189
130	403	2030·280	0·6560	0·6734	— 0·0174
135	408	2353·730	0·5710	0·5870	— 0·0160
140	413	2717·630	0·4988	0·5136	— 0·0148
145	418	3125·550	0·4374	0·4510	— 0·0136
150	423	3581·230	0·3850	0·3973	— 0·0123
155	428	4088·560	0·3399	0·3512	— 0·0113
160	433	4651·620	0·3012	0·3113	— 0·0101
165	438	5274·540	0·2676	0·2768	— 0·0092
170	443	5961·660	0·2386	0·2468	— 0·0082
175	448	6717·430	0·2133	0·2207	— 0·0074
180	453	7546·390	0·1912	0·1978	— 0·0066
185	458	8453·230	0·1719	0·1777	— 0·0058
190	463	9442·700	0·1549	0·1600	— 0·0051
195	468	10519·630	0·1401	0·1444	— 0·0043
200	473	11688·960	0·1269	0·1306	— 0·0037

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass unsere Zustandsgleichung von dem gesättigten Wasserdampf nur bei 49·46° C. erfüllt wird. Bei den tieferen Temperaturen hat der gesättigte Wasserdampf ein grösseres, bei den höheren Temperaturen

ein kleineres Volumen, als unserer Zustandsgleichung entspricht.

Wir müssen noch eine wichtige Eigenschaft des Wasserdampfes hervorheben, welche aus unserer Zustandsgleichung folgt. Die Energie eines Körpers hat die Eigenschaft, in einem Zeitraum um ebenso viel anzuwachsen, als die dem Körper während dieses Zeitraumes von aussen zugeführte Arbeit und Wärme beträgt. Ist die einzige Kraft, welche auf den Körper wirkt, ein auf dessen Oberfläche wirkender Druck p, welcher in allen Punkten der Oberfläche gleich stark und überall senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist, so hat das Princip der Energie den Ausdruck

$$dU = dQ - p\,dv, \qquad \ldots (3)$$

wo U die Energie der Masseneinheit des Körpers, v das specifische Volumen und dQ die der Masseneinheit von aussen zugeführte Wärme, gemessen nach mechanischem Maasse, darstellen. Ist die Zustandsänderung umkehrbar, so erhalten wir für dU den Ausdruck

$$dU = -T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp - p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T dp - p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dT + C_p dT, \quad \ldots (4)$$

worin T die absolute Temperatur und C_p die specifische Wärme des Körpers bei constantem Druck, gemessen nach mechanischem Maasse, bedeuten. Und erfolgt im letzteren Falle die Zustandsänderung bei constanter Temperatur, so haben wir $T =$ const. und $dT = 0$ zu setzen und erhalten

$$dU = -\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T\right]dp. \qquad \ldots (5)$$

Wir wollen nun solche Körper betrachten, welche die Eigenschaft haben, dass bei einer umkehrbaren isothermischen Ausdehnung die von aussen zugeführte Wärme ebenso gross ist als die nach aussen abgegebene Arbeit, und dass umgekehrt bei einer umkehrbaren isothermischen Zusammen-

drückung die nach aussen abgegebene Wärme ebenso gross ist als die von aussen zugeführte Arbeit. Ist dies der Fall, so ist

$$dQ = pdv \text{ oder } dU = 0$$

oder

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 0. \qquad \ldots (6)$$

Bei den Körpern, welche diese Eigenschaft haben, gibt es keine innere Arbeit, also auch keine inneren Kräfte. Diese Eigenschaft ist aber das bestimmende Kennzeichen der vollkommenen Gase; somit ist die Gleichung 6) jene Differentialgleichung, welche die Zustandsgleichungen der vollkommenen Gase erfüllen müssen.

Die Lösung der Differentialgleichung 6) ist

$$v = F\left(\frac{T}{p}\right). \qquad \ldots (7)$$

Die einfachste Form dieser Function ist

$$v = R\frac{T}{p}, \qquad \ldots (8)$$

worin R eine positive Constante bedeutet. Es ist dies das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz, welches strenge genommen von keinem in der Natur vorkommenden Gase erfüllt wird.

Eine andere Form der Function ist

$$v + \alpha = R\frac{T}{p}, \qquad \ldots (9)$$

wo R wieder eine positive Constante darstellt und α eine Constante ist, die positiv oder negativ sein kann. Aus den Messungen von Amagat[1] geht hervor, dass in dem Druckintervall von 1 bis 1000 Atmosphären und in dem Temperatur-

[1] Ann. chim. phys. (6) 29, p. 38, 1893. Winkelmann, Handbuch der Physik, II, 2, S. 854, 855, 1896.

intervall von 0 bis 200° C. der Wasserstoff die Zustandsgleichung

$$p(v - 0\cdot 00072769) = 0\cdot 003662\, T \qquad \ldots (9a)$$

erfüllt, wo p den Druck in Atmosphären bedeutet und als Einheit des Volumens v jenes Volumen gilt, welches der Wasserstoff bei 0° C. unter dem Druck einer Atmosphäre einnimmt. Drücken wir den Druck und das Volumen in anderen Einheiten aus, und zwar den Druck in Millimetern Quecksilbersäule und das Volumen in Cubikmetern, so erhält die letzte Gleichung die Gestalt

$$p(v - 0\cdot 0081259) = 31\cdot 079\, T, \qquad \ldots (9b)$$

worin v das Volumen von 1 *kg* Wasserstoff, in Cubikmetern gemessen, darstellt. Da diese Gleichung dieselbe Form wie die Gleichung 9) hat (die Constante α ist hier negativ), so folgt, dass der Wasserstoff innerhalb der angegebenen Grenzen ein vollkommenes Gas ist.

Die Zustandsgleichung, welche wir oben für den Wasserdampf innerhalb der genannten Grenzen angegeben haben, lautet:

$$p(v + 0\cdot 008402) = 3\cdot 4348\, T.$$

Auch diese Gleichung hat dieselbe Form wie die Gleichung 9), und zwar ist hier die Constante α positiv. Daraus folgt, dass der Wasserdampf zwischen der Isotherme von $-6\cdot 16°$ C. und der Isotherme von $+231\cdot 41°$ C. ein vollkommenes Gas ist. Diese Eigenschaft gilt bis in die Nähe der Condensationsgrenze, dagegen nicht mehr für den Zustand der Sättigung.

Dass der Wasserdampf auch für jene Isothermen, welche tiefer als $-6\cdot 16°$ C. liegen, ein vollkommenes Gas ist, unterliegt wohl keinem Zweifel. Schliesslich sei noch auf den Umstand aufmerksam gemacht, dass das Volumen des gesättigten Wasserdampfes unterhalb $49\cdot 46°$ C. grösser als jenes Volumen ist, welches bei demselben Druck und bei derselben Temperatur dem vollkommenen Gaszustande entsprechen würde. Ich habe diesen Umstand schon in einer früheren Abhandlung

(»Die Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze«[1]) hervorgehoben und ihn durch die Annahme erklärt, dass die Wasserdämpfe, wenn sie sich bei den tieferen Temperaturen aus dem siedenden Wasser entwickeln, in statu nascendi zum Theil dissociirt sind und dass diese Dissociation, wenn der Dampf unter demselben Druck und bei derselben Temperatur sich selbst überlassen bleibt, von selbst verschwindet.

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, Abth. II. a, December 1896.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XVI. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Si, Be, Tl, In, Ce, La, Nd, Pr, Ge, Ga)

von

Prof. **Franz Exner,** w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1899.)

XLIV. Silicium.

Das Bogenspectrum des Siliciums wurde vor langer Zeit von Liveing und Dewar[1] gemessen, ausserdem finden sich in Rowland's »Table of standard wavelengths« die meisten Siliciumlinien als solche bezeichnet. Das Funkenspectrum wurde in neuerer Zeit von Eder und Valenta,[2] in älterer Zeit von Hartley[3] gemessen. Wir verwendeten zur Aufnahme krystallisirtes Silicium. Das Spectrum enthält fast durchweg scharfe Linien. Verunreinigt war das Silicium mit Fe und C, die Zahl der Linien beträgt 44.

λ	i	λ	i	λ	i
2208·1	1	2435·22	3	2452·23	1+
10·97	1	38·87	1	78·68	1 C
11·87	1+	43·47	1+	2507·01	6
16·75	1	43·91	1+	14·41	5
96·96	1 C	45·63	1 L?	16·26	10

[1] Liveing und Dewar, Phil. Trans., Bd. 174 (1883).

[2] Eder und Valenta, Diese Sitzungsber., Bd. 107 (1898).

[3] Hartley, Proc. Roy. Soc., XXXV (1883).

λ	i	λ	i	λ	i
2519·30	5	3591·0	1+ L?	4021·0	1+ br.
24·21	6	3791·8	1+ br.	30·1	2+ br.
28·60	8	96·50	2+	96·8	1+ br.
32·45	1	3806·90	3+	4103·2	1+
41·90	2	53·62	1+	03·7	1+
68·8	1+	54·02	1+	28·1	5+ br.
2631·38	3	56·19	5+	4552·75	3+ (L)
2881·73	15	62·80	4+	67·95	1+
2987·77	1	71·60	1 Cy	74·9	1+
3086·6	1+ br.	83·46	1	4764·20	1
93·6	1+ br.	3905·71	5 r.		

XLV. Beryllium.

Das Bogenspectrum des Berylliums wurde von Rowland und Tatnall[1] gemessen; bezüglich des Funkenspectrums liegen nur die alten Messungen Hartley's[2] vor. Die Aufnahmen geschahen mittelst einer wässerigen Lösung von Berylliumchlorid (von Merck) auf Gaskohle. Verunreinigungen liessen sich nicht nachweisen. Die Zahl der zumeist starken Linien beträgt 10.

λ	i	λ	i	λ	i
2348·58	1	2650·71	7 d.	21·51	3
48·72	3	3130·56	20 u.	4572·88	1
2494·69	3 } [3]	31·20	15		
94·84	3 }	3321·23	3		

XLVI. Thallium.

Das Bogenspectrum ist bekannt aus den älteren Messungen von Liveing und Dewar[4] und von Kayser und Runge.[5]

[1] Rowland und Tatnall, Astroph. Journ., Bd. 1 (1895).

[2] Hartley, Nature (1883).

[3] Wahrscheinlich umgekehrt auf 2494·75, $i = 6$.

[4] Liveing und Dewar, Phil. Trans. 174 (1883).

[5] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1892).

das Funkenspectrum aus den Messungen von Hartley und Adeney.[1] Wir verwendeten eine wässerige Lösung von Thalliumchlorid (Merck) auf Elektroden aus Gaskohle. Verunreinigungen waren nicht nachweisbar, die Zahl der zumeist unscharfen Linien beträgt 16.

λ	i	λ	i	λ	i
2298·23	3+	2768·00	2+ u.	3513·42	1+
2452·02	1+	2918·47	1+ br.	19·35	20 u.
2530·94	2+	21·7	1+ br.	29·54	10
80·30	1+	3091·88	2+ br.	3775·89	20 u. r.
2665·8	1+	3229·90	1+		
2709·3	1+ br.	3456·50	2+		

XLVII. Indium.

Das Bogenspectrum ist gemessen von Kayser und Runge,[2] das Funkenspectrum von Hartley und Adeney.[3] Die Aufnahmen geschahen aus Indiumchlorid (von Merck) auf Gaskohle. Das Präparat zeigte sich mit Cu und ziemlich stark mit Sn verunreinigt. Die Zahl der Linien beträgt 30.

λ	i	λ	i	λ	i
2265·08	2	2932·73	1	3610·60	1
2306·18	5	41·39	10	11·20	1
50·84	1	83·51	8+	33·27	1
2429·52	1+ Sn	3008·30	10	3710·45	2
2560·05	1+ br.	34·23	1+ Sn	74·49	1
2602·0	1+ br.	39·45	4+ u.[4]	3835·2	3+ br.
58·7	1+ br. (Sn)	3175·17	1 Sn	4102·01	50 r.
2710·39	2+ br.	87·15	1+	77·69	2
14·1	1+	3256·22	8 u.[4]	4309·72	1
54·03	1+	58·64	3	75·13	2
2840·11	1 Sn	62·48	1 Sn	4511·55	50 r.
90·35	4	3519·33	1 Tl?		

[1] Hartley und Adenay, Phil. Trans., Bd. 175 (1884).

[2] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1892).

[3] Hartley und Adeney, Phil. Trans., Bd. 175 (1883).

[4] Violette Componente stärker.

XLVIII. Cer.

Das Bogenspectrum des Cers ist unbekannt, das Funkenspectrum wurde in dem Intervall von 4000—4700 AE. von Lohse[1] gemessen. Wir verwendeten eine wässerige Lösung von Ceroammonnitrat auf Gaskohle. Verunreinigt war das Präparat schwach mit La, Nd und Pr. Die Zahl der Linien beträgt 1300.

λ	i	λ	i	λ	i
2180·77	1	2497·62	1	3085·19	2
2222·12	1	2532·11	1	3103·52	1
25·28	2	48·88	1+	07·10	1
27·90	2	78·40	1+	07·62	1
28·15	1	2603·72	3	10·65	2
42·53	1	35·3	1+	11·22	1
64·97	1	49·49	1+	21·68	3
87·87	1	51·12	1	30·5	1+ Be?
2300·74	·1	62·95	1	31·05	1
02·20	1	73·00	1	33·47	1+
17·43	1	2730·16	1	41·36	2
18·75	2	43·84	1	44·06	2
24·44	1	49·02	1	44·68	1+
37·80	1+	68·48	1	45·38	1+
50·24	2	2849·45	1	46·50	1+
62·70	1+	2931·67	1	47·15	2
67·90	1+	77·02	1	55·88	1+
72·46	2	95·77	1	64·37	1+
77·25	1	3017·29	1	69·37	1
77·61	1	22·81	1	71·80	1 La?
80·29	2	31·71	3	83·70	1
2431·60	2	52·15	1+	86·33	1
39·40	1	55·71	4	94·98	1
54·46	1	56·66	2+	3201·90	1
70·05	2	57·32	2+	19·11	1
77·40	1+	57·71	2+	21·35	1
79·57	1	63·14	2	27·26	1
83·95	1	84·56	1	28·72	1

[1] Lohse, Berl. Akad. (1897).

λ	i	λ	i	λ	i
3231·43	1	3406·10	1	3493·3	1+
34·35	1	07·37	1	94·0	1+
35·10	1+	16·72	1	96·12	1
36·90	1	17·00	1	96·51	1+
43·55	1	17·58	1	97·92	2+
52 63	1	20·35	1	3500·89	1+
61·2	2+	22·85	2	01·64	1
72·42	2	24·02	1+	03·20	1+
75·01	1	26·32	1	04·75	3
80·00	1	27·45	2+	08·10	1
85·39	1	30·44	1+	08·62	1
95·48	1	31·15	1+	08·86	1
97·05	1	33·22	1	10·9	1+
3300·33	1	39·95	1	11·75	1
05·03	1	40·73	1	13·98	1
12·35	1	41·35	1	15·9	1+ br.
17·48	1+	42·54	1	17·52	2
25·42	1	43·76	3	18·50	1
34·58	1	51·80	1	19·19	1
42,01	1	54·52	4	19·90	1+
44·00	1	56·92	1	20·67	1
44·91	2	59·53	4	22·01	2
53·41	3	63·41	1	24·18	1
57·36	1	63·91	1	26·83	1
60·69	1	64·32	1	27·96	1
61·97	1+	65·08	1	28·18	1
66·70	1	67·98	1	28·75	1
68·90	1	68·26	1	29·2	1+
71·33	1	71·05	5	29·4	1+
73·60	1	74·41	1	30·17	1
73·87	1	77·01	2	31·07	1
75·90	1	80·49	1+	31·74	1
77·31	2	81·16	1+	32·74	1
79·33	1	81·34	1+	33·00	1
81·66	1	82·31	1+	33·75	1+
83·65	1	82·53	1	34·21	2
94·20	1 u.	84·93	1	34·60	1
95·88	1+	85·21	2	35·73	1+
99·1	1+	88·69	1	36·84	1+
3405·1	1+	90·29	1	37·3	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3537·6	1+	3588·61	2	3649·90	1
38·95	1	90·49	1	50·31	1
39·23	2	90·77	2	51·04	2
43·43	1	94·2	1+	51·82	1
44·17	3	94·75	1+	52·27	1
45·79	1	96·27	1	52·40	1
45·93	1	98·36	1	53·27	2
46·35	1	3600·16	1	53·83	2
46·82	1	00·76	1	55·06	1
47·17	1	03·50	1	56·00	3
48·98	1	04·36	1	56·9	1+
49·2	1+	07·80	2	58·4	1+
51·56	1+	09·84	3	59·40	2
51·82	1+	11·12	1	60·13	2
52·88	1	11·51	1	60·30	2
54·79	1	12·50	1	60·82	2
55·15	2	13·86	2	61·90	1
55·25	1+	16·35	1+ d.?	62·08	1
57·05	1+	18·71	1	63·15	1
60·99	4 r.	21·30	1	63·85	1
61·3	1+	22·30	2	64·90	1
63·95	1	22·50	1+	65·17	1+
68·28	1	23·96	3	65·70	1+
69·44	1	28·40	1	67·44	1
72·57	1	30·59	1	68·15	3
73·86	1+	31·35	1	68·89	1
75·4	1+	32·24	1	70·70	1
76·40	1	32·4	1+	70·80	1
77·61	4 r	37·93	1	72·12	1
78·88	1	38·44	1	72·36	1
80·75	1+	40·9	1+	72·96	2
80·95	1+	41·75	1+	73·83	1
83·83	1	41·9	1+	74·30	1
84·49	1	43·0	1+	75·55	1+
84·91	1	44·45	1	76·31	1
86·00	1	45·40	1	77·3	1+
86·90	1	45·61	1	79·00	1
87·37	1	46·80	1	79·31	1
87·80	2	47·13	2	79·58	2
88·27	1	48·13	2	80·27	1

λ	i	λ	i	λ	i
3681·02	1	3722·47	1	3754·66	1
81·55	1	22·95	1	55·57	2
82·25	1	24·83	1	55·86	2
82·83	1	25·85	2	56·44	1
84·4	1+	26·63	1	57·86	2
85·3	1+ br.	27·14	1	58·01	1
86·45	1+	27·55	1	58·67	1
87·96	1	28·17	2	59·33	1+ d. (La)
88·81	1	28·30	1	60·55	1+
89·33	1	28·61	3 r.	60·88	1
93·59	1	29·2	1+	62·47	1+
93·90	1	30·12	1	63·14	3
95·07	1	30·44	1	63·80	1
96·15	1	31·4	1+	64·32	3 r.
96·25	1	32·06	1	64·78	1
97·84	1	32·75	1	65·19	2
98·28	1	33·70	1	66·05	1
98·53	1	35·05	1	66·65	1
98·84	1	36·65	1+	66·8	1+
99·35	1	37·30	1 Fe?	68·15	1+
3700·07	1	37·75	1+	68·43	1+
02·97	1	37·89	2	68·92	2
05·17	2	39·90	1+	69·20	1
07·13	1	40·31	1	70·11	2
07·57	1	41·19	1	70·93	2
07·81	1	41·58	1	71·75	2
09·48	3 r.	41·95	1 d.	71·85	1+
10·13	3	44·22	1	72·30	1+
14·15	1	44·87	1	72·80	1
14·95	1	45·75	1	73·05	1
15·30	1	46·25	1	73·37	1
15·64	1	46·54	2	73·64	1
16·53	3	48·21	3	74·23	1
17·08	1	50·27	2	74·72	1
17·65	1	51·18	1	75·4	1+
18·35	2	51·60	2	76·15	1+
18·56	3	52·51	2+	76·30	1
19·98	1	53·27	1+	76·75	2
20·08	1	53·95	1	77·20	1
22·30	1	54·43	1	77·80	1

λ	i	λ	i	λ	i
3777·98	1	3801·71	8	3824·02	3
78·90	1	02·92	1	24·95	1+
79·9	1+ d.	03·25	3 r.	25·80	1
80·66	1	04·05	1	27·07	1
81·30	1	04·30	1	27·52	2
81·80	3	04·87	1	29·58	2
82·70	3	05·65	1	29·82	2
83·19	1	06·30	1	30·17	2
83·70	2	07·00	1	30·76	2
84·0	1+	07·85	2	31·21	3
84·5	1+	08·25	3 r.	31·9	2+ br.
85·5	1+	08·83	1	32·40	1
85·65	1+	09·36	2	32·60	1
86·81	3	09·63	1	32·86	1
87·33	2	09·87	1	33·20	1
87·68	1 d.	10·28	1	33·95	1
88·06	1 Fe?	10·42	1	34·70	2
88·36	1	10·7	1+	34·90	1
88·65	1 d.	11·09	1	35·30	1 La?
88·93	3 r.	11·50	1	35·49	1
90·1	1+	11·77	1	35·95	1+ d.
90·6	1+	12·2	1+	36·25	2
91·0	1+ La	12·38	2	36·65	2
91·85	1	13·47	1+	37·33	1
92·50	2	13·7	1+	37·50	1
93·0	1+	14·69	2	37·77	1
93·65	1+	15·02	1	38·01	1
93·95	1+	15·12	1	38·71	3
94·51	1+	17·17	1+	39·64	1
94·85	1	17·57	2	42·15	1+
95·44	2	17·80	1+	43·13	2
95·95	1	18·40	1	43·57	1
96·31	1	18·84	1	43·92	1
96·83	1	19·17	2	44·15	1 Cy?
97·05	1	19·37	2	45·17	1
98·05	1 Cy?	21·00	2	45·50	1+
99·2	1+	21·43	2	45·60	2
99·35	1+	21·90	2	46·12	1
3800·20	1	22·45	1	46·65	1
00·47	2	23·2	1+	46·75	1

λ	i	λ	i	λ	i
3848·25	1	3871·03	2	3896·98	2
48·73	2	71·57	2	97·56	1
49·77	1	72·00	1	98·42	2
49·87	1	73·16	1	99·09	1
50·30	2	73·45	1	99·52	1
51·47	1	73·72	1	3900·35	1
51·75	1+	74·30	1	01·47	1
52·31	1	74·89	2	01·85	1
52·57	2	75·21	2	03·40	2
53·32	2	75·50	2+	04·09	1
53·63	1+	76·27	1	04·50	2
54·35	3	76·60	1+	04·72	1+
54·48	3	77·15	2	05·45	1
54·7	1+ br.	77·63	1	07·10	1
55·45	2	78·53	2	07·45	2
57·15	2	79·22	1	07·55	2 r.
57·40	2	79·80	1	08·25	1 Pr
57·83	2	80·55	2	08·55	2 Pr
58·07	2	81·83	2	08·65	2
60·38	1	82·07	2	08·90	1
60·59	1	82·60	3	09·20	1
62.65	2	83·50	3	09·47	1
63·12	1	83·68	2+	09·90	1
64·23	1	84·34	1	10·08	1
64·47	1	84·88	1	10·82	1
64·71	1	85·90	1	11·45	1
65·27	1	86·43	1	12·34	1
66·15	1	86·65	1	12·60	3
66·32	1+	89·14	1	14·12	1
66·63	1+	89·43	1	14·27	1
66·98	1	89·61	1	15·09	1
67·15	1+	90·20	3 r.	15·66	2
67·80		90·67	1	16·27	2
67·95	1	90·91	1	17·01	1
68·29	2	91·16	1	17·36	1
68·69	2	91·95	1	17·75	2
68·95	1+	93·40	1	18·40	3
69·27	1+	94·02	1	19·94	3
69·54	1	94·46	1	21·90	3
69·78	1	95·29	2	23·25	3

λ	i	λ	i	λ	i
3924·78	2	3949·58	2 Pr	3976·90	1
24·95	1	49·98	1	77·68	1
26·4	1+ d.	50·62	1	77·92	2
27·12	1	51·01	1	78·80	3
27·50	1	51·61	1	80·11	1
27·70	1	51·80	1	81·05	3 r.
28·42	1	52·28	1	82·07	1
28·96	1	52·75	7 r.	83·06	3
29·22	1	53·81	2	83·44	3
30·10	1	54·12	1	84·82	3 r.
30·93	1	55·51	2	86·55	1
31·21	2	56·1	1+ d.	89·58	3
31·50	2	56·44	3	90·26	1 Nd
31·96	2	57·05	1	90·85	1
32·31	2	58·12	2	91·45	1
33·15	1	58·40	2	92·30	1
34·89	1	59·01	2	92·52	3
35·4	1+	59·85	1	93·05	2
35·68	1+	59·97	1	93·99	4
36·05	1	60·55	1	96·6	1+
37·30	1	61·08	3	96·9	1+
37·84	1	61·71	2	97·86	2
37·93	1	62·23	2	99·40	6
38·23	2	63·55	1	4000·90	1 d.
38·75	1	64·33	2	01·23	1
39·70	1	64·66	2	01·68	2
39·80	1	67·09	2	01·90	2
40·49	3	67·33	2	03·01	2
40·8	1+	67·70	1	03·10	1
41·14	2	70·19	2	03·35	1
42·35	4	70·59	1	03·95	4 r.
42·90	5	70·80	1	04·73	1
43·30	1	71·83	2 Pr	05·80	2
43·64	1	72·21	2	07·85	2
44·55	3 r.	73·2	1+ br.	08·63	1+
45·04	2	74·1	1+ br.	08·82	1 Pr
46·33	1+	74·35	1	09·25	1
46·85	1	74·67	1	10·30	2
48·14	2	75·69	2	11·75	1
49·08	1+	76·19	1	12·58	10

λ	i	λ	i	λ	i
4015·05	4	4051·00	2	4078·72	3
16·02	2	51·60	2	79·16	1
16·2	1+	52·20	3	79·45	1
17·76	2+	53·25	1	79·85	2
19·20	2	53·70	4	80·65	3
19·64	1	55·13	3	81·40	4
20·05	2	55·35	1+	82·30	1
20·71	1	56·00	1+	83·40	5
22·44	2	56·50	1+	83·8	3+
23·55	1	57·07	2	84·82	1
23·80	1	58·44	1	85·41	3
24·67	5	58·95	1	85·92	1
25·31	2	59·55	1+	86·61	2
26·02	1	60·67	2	86·93	1 La
27·16	1+	60·93	1	87·47	3
27·85	3+	61·63	1	87·70	2
28·0	2+	62·41	4	88·75	1
28·55	4 r.	63·15	3	89·05	2+ r.
29·38	1	64·13	1	89·91	2+
30·35	1+	65·07	1	90·65	2
30·50	2	65·35	2	91·13	2
31·48	4 r.	66·70	2	92·00	1
32·7	1+	67·45	3	92·25	1
33·95	1+ Pr	67·92	1	92·89	2
37·55	1	68·64	2	94·11	2
37·82	3	69·61	3	96·00	1
38·40	3	70·36	3+	99·14	2
40·05	1	71·03	1	99·54	1
40·91	7	71·29	1	99·89	2
41·45	1	71·95	3	4101·92	5
42·32	1	73·20	2	02·54	2
42·73	5	73·61	4	04·60	1
43·6	1+	73·95	3+	05·15	4
45·40	4	74·80	1	06·33	2
46·51	4 r.	75·85	3	07·03	3
47·46	1	76·01	3	07·60	4
48·53	1	76·44	2	07·95	1
49·20	1	77·00	1	08·30	1
49·30	1	77·60	2	08·90	1+
49·98	1	78·45	3	09·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
4110·52	3	4139·99	1	4181·25	3
11·02	1	40·7	1+	82·5	1+
11·54	3	40·95	1+	85·51	3
13·89	2	42·59	5	86·71	10
14·29	2	42·98	2	87·49	3
15·52	5	44·66	3	89·33	1
17·14	3	45·19	7	89·79	1+
17·45	2	46·40	4	90·79	2
17·75	2	48·34	2	91·20	2
18·30	6	49·06	3	91·50	1+
19·15	3	50·09	10	93·21	4
20·00	7	51·09	3	93·45	4
21·00	3	52·13	9	94·02	3
21·76	1	53·10	1	95·04	3
23·35	3 La	53·30	1	95·98	1
23·65	3	54·09	1	96·48	4
24·01	5 r.	55·45	1+	97·75	1
24·92	4	55·69	2	97·83	1
25·57	1	59·20	4	98·15	2
25·95	1	60·35	2	98·58	1
26·80	1	61·34	2	98·85	6
27·06	1+	62·0	1+	4201·45	4
27·51	4	62·1	1+	03·10	5
27·92	2	62·79	2	03·69	1
28·23	2	63·70	4	04·90	1
28·53	3	65·75	10	95·32	1
29·30	2	66·37	1	06·03	1
30·84	4	66·85	1	06·99	1
31·26	4	67·03	5	08·42	1+
31·99	1	67·96	3	08·58	1+
32·45	1	70·00	5	09·59	2
32·80	1	71·2	1+	10·20	1
33·98	10	71·56	1	13·22	1
35·60	3	72·31	1	14·20	2
36·05	2	74·61	1	15·7	1+ Sr ?
37·00	2+	75·40	1	17·71	3 La
37·78	9	76·22	1	19·9	1+
38·25	2	76·83	3	20·75	1+
38·51	2	79·27	1	20·93	1+
39·60	1	79·45	1	21·33	1

λ	i	λ	i	λ	i
4222·80	5 r.	4264·55	1	4314·66	1 Nd
24·07	1	64·87	1	15·59	1
24·73	1	67·45	1+	17·47	1
27·93	4	68·48	1	18·13	1+
28·46	1	69·41	2	18·8	1+
30·35	1+	70·37	3	20·91	3
30·7	1+	70·90	3	21·40	1
31·94	2	73·65	2	22·98	1
32·20	1	74·75	1	24·97	2
32·75	1	75·63	1	27·00	1
33·38	1	75·70	1	30·61	2
34·39	2	77·9	1+	31·95	1
34·92	1	78·41	1	32·1	1+
36·17	1	79·03	2	32·88	2
36·51	1	80·33	1	36·40	2
37·36	1+	81·19	1	37·94	4
40·09	5	81·30	1	39·46	3
41·60	1	83·74	1	40·72	1
42·20	1	85·55	3	42·32	1
42·90	3	88·84	2	42·65	1
43·90	1	89·64	2	44·0	1+
46·09	5	90·11	6	44·45	1+
46·56	1	92·86	1	45·15	1+
46·86	3	92·94	1	46·10	1
47·63	1 Nd?	94·96	1+	46·61	1
48·27	1	96·25	2 La?	49·96	4
48·81	6	96·53	1	52·88	3
51·79	1	96·88	8	53·60	2 d.
52·03	1	99·24	1	55·57	1
53·54	2	99·52	2	56·92	1
54·98	1	4300·50	4	57·17	1+
55·10	1	01·01	1	58·09	1
55·94	3	02·84	1	59·21	1
56·32	2	04·47	1	60·30	1
57·30	1	04·90	1	60·62	1
58·54	1	05·30	3	61·51	1
59·93	1	06·92	4	61·80	1
61·33	1	09·92	3	63·58	1
63·59	2	10·88	1	64·27	1
64·14	1	11·78	1	64·80	4

λ	i	λ	i	λ	i
4367·13	2	4419·48	1	4496·38	1
67·71	1	23·83	2	98·02	1
68·36	1	24·5	1+	4500·52	1
69·38	1	27·24	2	08·25	1
72·54	1	28·07	3	09·30	1
73·39	1	28·60	2	11·83	1
73·97	2	29·42	5 Pr?	16·03	1
75·33	1	32·89	1	19·76	1
76·09	4 (Fe)	33·05	1+	23·25	4
80·24	1	33·90	1+	27·52	4
81·94	1	37·77	1	28·63	5
82·34	5	39·40	1	32·67	1
86·55	1	41·07	1	37·06	1
86·86	2	43·94	1	39·23	1
86·97	2	44·53	3	39·90	4
88·15	2	44·90	4	45·14	1
90·47	1	46·33	1	49·81	1+
91·81	5	49·50	4	50·48	1
93·36	1	49·75	1+ br.	51·49	2
94·95	1	50·92	3	55·60	1
96·77	1	55·20	1	58·80	1
97·45	1+	55·80	1	60·46	4
98·00	1+	57·94	1	61·16	2
98·95	2	60·38	8	62·53	5
99·36	3	61·30	3	66·02	2
4400·70	1	63·56	3	69·90	1
01·05	1	64·37	1	72·46	5
03·49	1	64·87	1	72·98	1
03·7	1+	67·71	2	78·96	1
05·65	1	71·40	6	79·41	1
07·45	1	72·90	2	82·69	2
09·05	1 Pr	79·51	4	91·31	1
09·2	1+	83·57	1	94·12	4
10·84	2	84·04	4	4606·56	2
10·93	2	84·99	1	13·22	1
12·18	1	85·70	1	25·10	3
13·37	1	87·04	4	28·32	5
14·00	1	94·37	1		
18·97	6	95·55	1		

XLIX. Lanthan.

Das Lanthanspectrum wurde im Bogen gemessen von Rowland und Harrison[1] und im Funken in dem Intervalle von $\lambda = 4000—4700$ AE. von Lohse.[2] Das Spectrum ist durch zahlreiche starke Linien ausgezeichnet. Als Verunreinigung der übrigen Elemente der Cergruppe lässt sich daher Lanthan sehr leicht nachweisen. Die Intensitätsverhältnisse der den Elementen dieser Gruppe gemeinsamen Linien sind jedoch derartige, dass man nicht bloss an wechselseitige Verunreinigung denken kann, sondern mit einiger Wahrscheinlichkeit die Existenz weiterer Elemente in dieser Gruppe annehmen muss. Wir geben als Beispiel hiefür die folgenden Linien aus Lanthan, Neodym und Praseodym:

Lanthan		Neodym		Praseodym	
λ	i	λ	i	λ	i
3791·02	50	3791·00	1	3790·99	3
3794·99	50	—		3794·95	3
3835·29	5	3835·33	1	—	
3849·20	10	3849·17	1	3849·17	3
3886·51	15	—		3886·49	1
3995·91	5 r.	—		3995·91	5
4031·86	20	4031·90	10	4031·87	7
4043·18	20 r.	4043·21	2	—	

Dazu ist zu bemerken, dass bei den Aufnahmen das hier in Betracht kommende Intervall immer auf eine einzige Platte fiel, so dass die relativen Intensitätsverhältnisse für jedes der drei Elemente auch angenähert richtig sein müssen. Nach diesem Verhalten des Lanthanspectrums scheint uns die Vermuthung, welche Auer v. Welsbach[3] schon vor längerer Zeit ausgesprochen hat, dass das Lanthan kein einfacher Körper sei, sehr wahrscheinlich gemacht.

---

[1] Rowland und Harrison, Astroph. Journ. VII (1898).

[2] Lohse, Berl. Akad. (1897).

[3] Auer v. Welsbach, Diese Sitzungsber., Bd. 92 (1885).

Wir verwendeten Lanthanammonnitrat auf Gaskohle; verunreinigt zeigte es sich schwach mit Ce. Die Zahl der Linien beträgt 215.

λ	i	λ	i	λ	i
2216·12	2	3302·26	5	3701·9	2+ r.
56·80	1	07·05	1	06·02	5
97·85	7	37·67	15	13·71	6
2317·90	1	44·71	7	15·03	3
19·55	1	76·45	3	15·67	4
28·87	1	81·10	10	25·24	3
79·49	10	3411·95	1+	31·6	1+
99·73	1+	52·35	2	36·02	1
2472·0	1+	53·32	2	36·6	2+ r.
76·80	7+	3510·13	1	48·2	1+ br.
87·65	1	13·06	1	59·33	20
2519·31	2	17·26	50 r.	66·76	1
60·50	1+	30·80	1	73·30	2
96·20	1+	45·0	1+	73·8	2+ br.
2610·46	5	50·98	1	79·88	1
51·78	8	57·88	1	80·70	2
73·03	1	74·60	1	80·85	3+ r.
82·5	1+ br.	79·1	1+ br.	83·67	1
85·1	1+ br.	80·3	1+ br.	84·02	1
95·59	1	82·0	1+ br.	84·95	2
2780·3	1+	3601·20	1	87·31	2
91·60	1	09·4	1+	91·02	50
98·65	1+	10·5	2+	94·99	50
2808·46	3	12·53	2+ r.	3805·57	1
56·0	1+	21·96	1	08·89	2
80·85	1	29·00	1	35·29	5
85·25	2	37·45	3	40·92	5
93·20	2	41·8	2+ br.	46·16	3
2950·70	1+	45·57	8	49·20	10
3104·76	1	49·66	1	55·60	3
42·99	1	50·31	4	64·67	3+ r.
71·79	20	58·7	1+	71·89	20
93·09	1	62·24	3	86·51	15
3245·24	4	65·5	1+ br.	3916·21	10
49·49	3	94·25	1+ r.	21·71	10
65·79	4	3701·47	1	27·72	1

λ	i	λ	i	λ	i
3929·40	15	4123·39	30 r.	4378·24	3
36·40	3	27·5	1+ Ce	83·62	5
49·22	50	32·7	1+ br.	85·37	3
53·2	1+ br.	33·5	1+ br.	4411·45	1+
62·3	1+ br.	37·75	1+ Ce	19·30	2
63·3	1+ br. Nd?	41·90	10	23·37	1+
79·3	1+ br.	52·17	10	24·08	1+
81·55	1+	52·97	5	27·73	5
88·66	30	60·43	1	30·11	8
94·67	2+	63·50	1+	33·15	1
95·91	5 r.	71·88	1	36·02	1
4003·89	1 Ce?	87·49	1	55·99	2
07·82	1+	92·50	8	99·0	1+
12·58	1+ Ce	94·57	2+ r.	4500·4	1+
15·56	1	96·74	10	22·61	8
23·72	4	4204·20	4 r.	25·45	4
26·03	4	17·70	10	26·30	5
31·86	20	31·10	6	58·66	4
35·90	1	38·57	10	59·51	2
36·74	2	50·22	6	68·15	1+
37·35	1	63·73	8	70·28	1
43·18	20 r.	69·65	10	75·08	4
50·25	10	75·80	4	80·28	3
58·30	1	80·44	1	4605·99	2
60·52	1	87·09	20	13·60	4
64·94	1	96·21	8 r.	20·06	5
65·75	1	4300·59	3	36·60	1+
67·52	8	16·04	1	45·46	1
76·89	2	22·19	5	47·64	1
77·51	15	33·97	15	55·71	6
79·37	1	35·18	5	62·73	3
86·90	20	37·95	1+	63·97	4
89·76	1	38·25	1+	69·10	3
99·71	10	54·54	7	72·00	3
4105·07	1	63·25	1+	92·67	3
13·55	1+ br. r.	64·85	3 (Ce)		

L. Neodym.

Das Neodymspectrum ist aufgenommen aus wässeriger Lösung von Neodymammonitrat auf Gaskohle. Messungen der Wellenlängen für Neodym und Praseodym liegen bisher nicht vor. Auer v. Welsbach[1] hat zwar die Funkenspectren dieser beiden Elemente im sichtbaren Theile beobachtet und auch die Hauptlinien gezeichnet, jedoch mit einem sehr unvollkommenen Apparate und ohne Angabe von Wellenlängen. Lohse[2] hat das Funkenspectrum des Didyms zwischen $\lambda = 4000-4700$ AE. gemessen, und wir wollen gleich hier erwähnen, dass dasselbe sowohl nach den Messungen Lohse's, als auch nach unseren eigenen Linie für Linie die Summe des Neodym- und Praseodymspectrums ist. Wir haben diese Vergleichung von $\lambda = 3900$ bis 4300 AE. vorgenommen. Für das Absorptionsspectrum von Lösungen wurde das gleiche Verhalten seinerzeit schon von Auer v. Welsbach nachgewiesen.

Für das Neodym- und Praseodymspectrum, ebenso wie auch für das Cerspectrum ist die relative Armuth an Linien im äussersten Ultraviolett, sowie die Anhäufung derselben gegen das sichtbare Spectrum zu, charakteristisch. Beiden ist eine grosse Zahl von Linien gemeinsam und beide scheinen auf der Sonne in beträchtlichen Quantitäten vorhanden zu sein. Auch hier zeigt sich wieder das merkwürdige Verhalten, dass nicht nur starke Linien des einen Elementes als schwache des zweiten auftreten, woraus man natürlich auf wechselweise Verunreinigung schliessen muss, sondern es treten auch starke und schwache Linien in beiden Spectren mit gleicher Intensität auf, so dass man hier wieder das Vorhandensein noch unbekannter Elemente vermuthen muss. Wir geben dafür die folgenden Zahlen als Beispiele und bemerken, dass diese Linien weder im Cer, noch im Lanthan vorkommen.

[1] Auer v. Welsbach, Diese Sitzungsber., Bd. 92 (1885).

[2] Lohse, Berl. Akad. (1897).

Neodym		Praseodym	
λ	i	λ	i
3645·83	2	3645·81	7
3762·03	1	3762·02	5
3852·92	1+	3852·93	6
3863·52	8	3863·55	2
3951·31	8 r.	3951·33	2
3953·61	5	3953·63	8
4012·40	10	4012·37	1+
4051·31	6	4051·31	6
4061·28	10	4061·29	1
4297·97	5	4297·98	8

Das Neodym war verunreinigt mit La, Ce und Pr. Die Linienzahl beträgt 2007.

λ	i	λ	i	λ	i
2193·97	1	2349·4	1+	2839·83	1
2203·64	1	53·86	1	48·50	1
08·7	1+	58·70	1	64·45	1+
57·4	1+	59·68	1	68·15	1+
79·75	1+	63·95	1	68·97	1+
83·0	1+ br.	68·25	1	71·53	1+
92·6	1+	69·10	1	76·16	1
95·50	1+	73·30	1	85·90	1+
99·95	1	90·04	1	87·70	1+
2307·75	1	94·29	1	88·87	1+
10·96	1	96·22	1	89·31	1
14·46	1	98·49	1	94·25	1+
16·51	1	2408·7	1+	97·05	1+
16·76	1	26·45	1	99·70	2+
23·50	1	29·53	1	99·97	2+
24·00	1	35·62	1	2902·73	1
32·10	1	66·87	1	03·67	2
36·48	1	86·44	1	04·46	2
37·81	1	2810·11	1	06·54	2
41·58	1	38·8	1+	08·27	1

λ	i	λ	i	λ	i
2908·75	1	3014·95	1+	3217·20	1
09·15	1+	20·87	1	17·44	1
11·0	1+	34·42	1	22·62	1
14·63	3	56·88	1	22·92	1
17·35	1+	69·95	1	23·17	1
17·75	1+	71·8	1+	23·88	1
18·20	1+	75·54	1	28·15	1+
21·37	1+	78·6	1+	30·00	2
21·60	1+	79·5	1+	37·83	2
23·54	1+	81·1	1+	45·70	1+
25·49	1	82·3	1+	49·53	1
27·93	1+	92·92	1	51·04	1
28·25	1+	93·05	1	54·20	1
28·38	1+	3105·63	1	54·87	2
28·82	1+	[illegible]	1	56·27	1+
32·31	1	08·1	1+	56·50	1+
34·5	1+	15·33	1	56·98	1+
35·55	1+	16·30	1	59·38	1
38·60	1+	23·22	1	61·54	2
39·75	1+	24·77	1	62·52	2
43·70	1	31·37	1	64·53	1
46·07	2	33·76	1	65·27	1
46·87	2	35·04	1	65·59	1
50·4	1+	37·43	1	66·48	1+
54·49	1	41·63	1	67·40	1
56·10	2	42·55	1	70·99	2
60·4	1+	44·7	1+	71·2	1+
61·61	2	45·00	1	73·4	1+
63·49	1	49·40	1	73·6	1+
63·98	1	49·60	1	74·17	1
65·87	1	59·3	1+	75·37	1
69·65	1+	76·14	1	75·87	1
70·16	2	96·8	1+	80·38	1+
71·00	1	3200·70	1	81·14	1
78·15	2	01·7	1+ br.	81·37	1+
80·70	1+ Pr	03·25	1	82·98	1
85·9	1+ Pr	03·52	1	83·80	2
93·35	1+	05·05	1+	85·25	1
95·05	1+	05·60	1	86·75	1
3008·2	1+	13·52	1	87·55	1+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
3288·2	1+	3331·73	2	3367·65	1+ br.
89·70	1	32·35	1	69·2	1+
90·25	1+	33·20	1	69·80	2
90·80	1	34·61	2	71·50	1
91·6	1+	35·15	1	73·00	1
92·17	1+	37·69	1 La	74·05	1
94·02	1	39·21	1	75·0	1+
94·87	1	39·79	2	75·42	1
96·26	1	39·95	2	76·65	1+
98·77	1	42·1	1+	78·1	1+ br.
3300·31	1	43·52	2	79·35	1+
01·09	2	45·88	1	79·95	1+
02·15	1+	46·05	1+	82·97	1
04·9	1+	46·56	1+	84·3	1+ br.
05·2	1+	47·02	1	85·1	1+ br.
05·48	1+	47·35	1	86·40	1
06·6	1+	47·8	1+	86·60	1
06·85	1+	48·06	2	87·25	1
09·28	2	48·30	1	87·33	1
10·50	1	49·5	1+	88·15	1
11·05	1	49·8	1+	88·30	1
12·91	1	50·73	1+	88·60	1
13·30	1+	51·37	1+	89·45	1
14·6	1+	51·9	1+ d.	91·8	1+
15·13	1	52·40	1+	92·47	1
15·57	1	53·87	2	93·77	2
16·15	1	55·80	1	94·20	1
16·33	1	56·06	1	94·83	1
18·52	1	56·73	1	95·13	1
19·20	1	58·3	1+	95·50	1
20·6	1+ br.	58·9	1+	95·72	1
21·5	1+ br.	59·96	1	97·67	1+
22·07	1	60·80	1+	98·0	1+
22·45	1+	61·75	1+	98·45	1
23·1	1+ br.	61·94	1+	99·03	1
26·02	1	63·4	1+	99·54	1
26·39	2	64·5	1+	3402·50	1
27·33	2+	65·15	1	03·30	1
28·43	2	66·0	1+ br.	03·60	1
30·23	1+	67·00	1	05·00	1 d.

λ	i	λ	i	λ	i
3406·30	1	3447·1	1+	3484·25	1
06·56	1	48·45	1+	84·48	1
07·15	1+	49·55	1	85·03	1
09·44	1	50·00	1	85·11	1
10·38	1	51·5	1+ br.	86·50	1
11·2	1+	52·2	1+ br.	86·99	1
12·6	1+	52·8	1+ br.	87·11	1
15·2	1+ br.	54·53	1	88·50	1
15·72	1	55·2	1+	90·37	1+
17·72	1	55·72	1	91·4	1+
20·3	1+	58·11	1	92·48	1
22·1	1+	58·90	1	94·33	1
22·5	1+	59·05	1	94·87	1+
23·81	1	60·21	1	95·70	2
24·28	1	60·72	1	96·22	1
24·65	1	61·98	1	97·40	1
25·35	1	63·2	1+ br.	99·25	1
27·13	2	64·10	1	99·75	1
29·05	1	65·02	1+	3500·12	1
30·8	1+ br	68·27	1	00·80	1+
31·68	1	68·53	1	01·18	1
33·15	1	69·50	1	01·74	1
33·57	1+	69·95	1	02·00	1
35·60	1	70·3	1+	02·17	1
35·80	1	70·70	1	02·85	1
36·75	1+	71·01	1	03·79	1
38·77	1	72·50	1	04·25	1
39·37	1	73·6	1+	04·65	1+
40·27	1	74·05	1+	05·00	1
40·81	1	75·23	1	06·6	1+ br.
41·17	1	75·60	1	08·45	1+
41·56	1	77·97	1	08·75	1+
42·00	1	78·63	1	10·5	1+
42·38	1	79·15	1	10·87	2
43·02	1	79·57	1	11·65	1+
43·48	1	80·00	1	11·90	1+
43·79	1	81·59	1	12·89	1
45·4	1+ br.	82·30	1	14·1	1+ br.
46·38	1	82·70	1	15·23	1
46·80	1	83·02	1	15·35	1

λ	i	λ	i	λ	i
3517·15	1+	3541·08	1	3574·50	1
17·3	1+ La	41·44	1	75·13	1
17·58	1	41·75	2	75·77	1+
17·86	1	42·40	1	76·30	1
18·45	1	42·50	1	77·6	1+
18·60	1	43·47	3	77·8	1+
19·54	1	44·30	1+	78·29	1
19·92	1	44·6	1+	78·65	1
20·10	1	45·03	1	78·90	1
21·17	1+	45·40	1	79·27	2
22·22	2	46·48	1+	80·11	1
23·14	1	47·3	1+	80·36	1
23·78	1	47·7	1+	80·73	1
24·5	1+	48·0	1+	81·17	1
24·9	1+	48·35	1+	81·77	1
25·55	1+	49·11	1+	82·00	1
25·90	1	49·55	1+	82·84	2
26·54	1	50·5	1+	83·10	2
27·00	1+	50·9	1+	83·59	1
27·15	1+	51·90	1	83·90	1+
27·67	2	52·1	1+	84·10	1+
28·37	1	53·40	1	84·41	1
28·71	1	53·80	1	86·00	1
28·93	1	54·14	1	87·68	2
29·40	1	55·92	2	88·45	1
29·8	1+	56·5	1+	89·15	1
30·4	1+ br.	58·25	1+	90·55	2
30·9	1+ br.	60·88	3	92·25	1
31·56	1	61·78	1	92·89	2
31·93	2	63·24	1	93·34	1
32·63	1+	63·92	1	93·77	1+
32·90	1+	64·10	1+	94·40	1
33·74	2	68·44	1	95·30	1
34·18	1	69·05	2	95·60	1
34·54	1	69·45	1+	96·09	2
34·70	1	69·85	1+	96·73	1+
36·24	1	71·2	1+ br.	97·13	1
36·81	2	72·52	1	97·20	1
39·30	1	72·95	1	97·85	2
39·50	1	73·38	1	98·13	2

λ	i	λ	i	λ	i
3598·87	1+	3624·43	1	3650·1	1+
99·26	1	24·80	1	50·53	2
99·60	1+	24·9	1+	50·85	1
3600·30	1	26·36	1	51·74	2
01·06	1	27·05	1+	52·62	1
01·50	1	27·57	1	52·73	1+
01·74	1	27·93	1	53·23	2
02·03	1	28·75	1	53·96	1
04·20	2	29·08	1	54·31	2
05·75	1+	29·38	1	55·16	1
06·50	1	29·75	2	56·13	1
07·68	1	30·10	1	56·5	1+
07·88	1	31·20	3	56·7	1+
08·10	1+	33·65	1	58·70	1
08·70	1+	34·49	4	59·17	1
09·37	1	35·00	1	59·7	1+
09·63	1	35·30	2	60·15	1
09·95	2	36·62	1	61·16	1
10·90	1	37·14	2	61·5	1+
11·13	1	37·40	2	61·85	1
12·14	1	37·95	2	62·41	3
12·57	3	38·87	1	63·18	1
12·91	1	39·33	1	63·55	1
13·40	1	40·39	2	64·07	1
14·10	1	40·78	1	64·50	1
14·57	1	41·28	1	65·32	3
14·86	1	41·68	2	65·91	1
15·98	2	42·66	1	66·5	1+ br.
16·50	1	42·77	1	67·15	1+
16·90	1	43·5	1+	68·0	1+ d.
17·22	1	43·80	1	68·95	2
18·15	1	44·29	1	69·60	2
19·15	2	44·60	3	69·90	1
19·64	1	45·36	1	70·36	1
20·39	2	45·83	2 Pr	70·67	1
20·94	1	45·93	2	71·10	1
21·40	4	46·50	1	71·61	1
21·93	1	48·21	3 u.	71·85	1
23·12	1	49·1	1+	72·47	2
23·78	1	49·70	1	73·25	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3673·65	3	3697·32	2	3715·54	1
74·21	1	97·67	2	15·83	3
74·75	1	98·10	1	16·70	1
75·35	1	98·16	1	17·05	1
76·00	1	98·97	1	18·71	3
77·89	1	99·6	1+	19·03	1
78·32	2	99·89	1	19·38	1
79·01	1	3700·33	1	19·62	1
79·29	1	00·60	1	20·09	2
79·39	1	00·80	1	20·72	2
80·16	1	01·08	2	21·50	3
81·60	1	01·53	1	21·93	1
82·07	1	01·87	1	22·30	1
82·30	1	02·12	1	22·60	3
82·65	1	02·99	2	23·67	3
83·08	1	03·30	1	25·03	2
83·55	1	04·05	1	25·45	1+
84·45	1	05·10	2	26·51	1
84·75	1	05·29	1	27·05	3
85·05	1	05·71	1	27·50	1
85·43	1	06·20	1	28·00	1
85·60	1	06·95	1	28·27	3
85·91	3	07·37	1	28·60	1
86·65	1	07·60	1	29·29	1
87·44	2	07·90	1	29·65	1
88·19	1	08·12	1	30·4	1+
88·46	1	08·44	1	30·75	3
89·08	1	09·20	1	31·0	1+
89·30	1	09·59	1	31·40	2
89·81	2	09·81	1	31·80	2
90·70	1	10·45	1	32·17	2
90·93	1	10·77	1+	32·91	3
91·65	1+	11·40	1	33·3	2+
91·95	1+	11·60	1	34·55	1
92·55	1+	12·53	1	35·0	2+
93·29	1	12·95	2	35·76	5
94·95	2	13·85	3	36·6	2+ br.
95·58	1	14·34	4	36·90	1
96·30	1+	14·91	3	37·85	1+
96·65	1+	15·20	3	38·20	3

λ	i	λ	i	λ	i
3738·79	1	3759·10	3 r.	3777·59	1
39·33	1	59·95	2	77·80	1
39·62	1	60·52	1	78·05	1
39·80	1	61·14	1	78·30	1
40·30	1+	61·75	1	78·95	1+
40·75	1	62·03	1 Pr	79·62	3
41·15	2	62·30	1	79·94	1
41·50	1	62·50	1	80·55	3
41·60	2	62·76	1	80·97	1
42·38	1	63·23	1	81·50	3
42·75	1	63·62	3	82·45	1+
44·44	2	64·55	1+	83·95	3
44·89	1	64·91	1+	84·41	4
45·23	1	65·54	1	84·90	3 d.
45·72	1	66·11	1	85·24	1
46·10	2	66·75	2	85·56	1
46·65	1	67·4	1+	86·63	1
47·12	1+	67·94	1	87·06	1
47·74	1+	68·35	1+	87·31	1
48·10	1	68·87	1	87·67	1
48·45	1	69·15	1	87·80	1
49·25	1	69·52	1	88·15	1+
49·70	2	69·81	2	88·60	1+
50·09	1	70·14	1	89·11	2
50·50	3	71·25	1	89·4	1+
50·90	1	71·46	1	90·05	1+
51·44	1	71·96	1	90·40	1
51·80	1+	72·24	1	91·00	1 La
52·37	2	72·53	1+	91·66	3
52·66	3	73·12	1	92·50	1
52·82	2	73·37	2+ r.	92·70	1
53·50	1+	74·23	1	92·95	1
54·09	1	74·48	1	93·7	2+ br.
55·00	2	74·80	1	94·51	1
55·74	2	75·07	1	94·86	2
56·40	1	75·4	1+	95·59	2
56·50	1	75·71	4	95·96	1
56·97	1	76·50	2	96·25	1 d.
57·99	2	76·70	1	96·64	1
58·40	1	77·19	1	97·05	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3797·2	1+	3815·02	1	3829·58	1
98·05	2	15·50	1	29·80	1
98·50	1	16·00	1	30·23	1
98·65	1+	16·29	2	30·63	3
99·37	1	16·53	1	31·22	1
3800·16	1	16·81	1	31·59	1
00·45	1	17·51	1	32·00	1
00·76	1	17·84	1	32·56	1
01·26	2	18·08	1	33·00	1
01·50	2	18·41	1	33·23	1
01·65	2+ Ce?	18·85	1	33·78	1
02·12	1	19·00	1	33·90	1
02·41	2	19·30	1	34·5	1+
02·90	1	19·40	1	34·7	1+
03·21	2	19·86	2	35·07	1
03·61	3 r	20·11	1	35·33	1 La
04·25	1	20·59	2	35·62	1
04·9	1+ d.	20·97	2	35·97	1
05·50	3	21·47	1+	36·25	1
05·65	2+	21·95	2+	36·69	3
06·35	1	22·44	1	37·1	1+ br.
06·55	1+	22·65	2	37·59	1
06·86	1	23·40	1	37·80	1
07·36	3	23·95	1	38·06	2
07·95	2+	24·25	1	38·50	1
08·40	2+	24·53	1	38·[illegible]	1
08·[illegible]	2	24·[illegible]	2+	39·13	2
09·19	2	25·43	1	39·63	2
09·62	1	25·83	1	39·95	1 Cy?
09·85	1	26·05	1	42·[illegible]	1
10·06	1	26·30	1	42·57	1
10·64	3	26·56	3	43·15	2
11·21	1	26·92	1	43·65	1+
11·50	1	27·08	1	44·[illegible]	2+
11·92	1	27·30	1	45·3	1+
12·20	1	27·70	1	45·63	1
12·70	2	28·13	2	45·[illegible]	
13·10	1	28·36	2	46·14	1
13·55	1+	28·[illegible]	2	46·[illegible]	1+
14·90	2	29·29	2	47·[illegible]	1

λ	i	λ	i	λ	i
3847·60	1	3875·50	1	3902·60	2
48·01	1 Cy?	75·91	1	03·28	1
48·42	4	76·02	2	03·67	1
48·67	4	76·65	1	04·55	1
49·17	1 La	77·13	1	04·88	1
49·45	1	77·35	1+	05·36	1
49·57	1	78·73	2	05·71	2
50·35	2	79·72	3	06·04	4
51·84	5	80·58	3	06·2	1+
52·52	2	80·95	3	07·15	1+
52·92	1+	81·76	1	07·65	1
53·61	1	83·95	1	07·90	1
54·02	1	84·24	1	08·00	3
54·29	1	84·85	1+	08·57	3
54·8	2+ br.	85·47	1+	09·15	1
55·74	2	86·11	1	09·43	1
56·76	1	86·73	2+	10·22	1
57·1	1+	88·03	2	10·48	1
57·3	1+	89·18	1	10·89	1
58·00	1	89·83	3	11·31	7
58·70	3	90·14	3	12·08	1
59·55	1	90·42	1	12·40	3
60·36	1	90·76	4	13·15	1+
61·05	2	91·15	4	13·85	2+
61·4	1+	91·70	3	15·0	1+ br.
61·72	2	92·25	4	15·32	2+
62·70	2+	92·92	1	16·10	2
63·10	1	93·22	1	16·75	1+
63·52	8	93·88	1	17·79	4
64·20	1+	94·80	3	18·22	1
66·64	2	95·22	2	18·42	1
66·93	1	95·55	2	19·01	3 Pr
67·77	1	96·08	1	19·78	1+
67·90	1	96·33	2	20·07	2
69·17	3	97·82	2	21·11	4
69·50	1	99·05	1+	22·45	1
72·07	1+	99·48	1+	23·25	1+
73·65	2	3900·41	6	23·74	1
74·36	2	01·10	1	24·32	1
74·95	2	02·02	5	24·67	1

λ	i		λ	i		λ	i	
3925·14	2		3950·93	1		3973·40	6	
25·30	1+		51·31	8	r.	73·81	4	
25·61	1	Pr	52·1	1+		74·80	1	
25·78	2		52·35	3		75·34	2	
26·33	1		52·71	1	Ce	75·99	1	
26·75	2		53·02	2		76·30	1	
27·25	3		53·61	5		76·96	4	
28·46	1		54·15	1		77·45	1	
29·40	2	La	54·55	2		78·13	1	
30·10	1		54·8	1+		78·41	1	
30·68	1		55·25	1+		78·62	1	
31·37	1+		55·40	1+		79·16	2	
31·72	1+		55·73	1		79·61	4	r.
33·01	1		56·10	2		80·46	1	
34·25	1		56·50	1		81·13	3	
34·97	3		56·96	1		81·39	3	
36·02	1		57·61	4		82·2	2+	Pr
36·27	3		58·18	5		82·50	3	
36·86	1		59·27	1		83·12	1	
37·16	3		59·66	1		83·4	1+	
37·73	1		60·43	1+		83·60	1	
38·13	1		61·17	1		83·75	1	
39·02	5		61·71	3		84·10	1	
39·67	2		62·35	3		84·37	1	
39·96	1		63·28	6	r.	85·16	1	
41·70	8		64·06	3		86·39	4	
42·31	1		64·37	1	Pr	86·78	1	
42·76	3		65·00	2	Pr	87·40	1+	d.
44·16	1		65·43	2	Pr	87·92	1	
45·05	1+		66·70	1+	Pr	88·6	1+	La
45·55	1		67·30	1		88·7	1+	
45·7	1+		67·48	1		88·98	1	
46·76	1		67·89	2		89·9	1+	br.
46·96	2		69·01	1		90·29	6	
47·80	3	Pr	69·80	1+		91·55	1+	
48·49	2		71·3	1+	br. Pr	91·90	5	
48·97	2		71·82	1	Pr	92·31	1	
49·25	1	La	72·23	1		92·41	1	
49·60	1		72·56	1		92·75	3	
50·58	2		73·00	1		93·2	1+	

λ	i	λ	i	λ	i
3993·70	1	4012·88	2	4033·20	1
94·25	1+	13·39	1	33·42	1+
94·40	1+	13·51	1	33·70	2
94·83	5	14·07	1	34·04	2
96·0	1+	14·34	1+	34·30	2
97·23	1 d.	15·00	1	35·66	1
97·57	1	15·5	1+ Pr	36·16	1
98·05	3	15·70	2	36·65	1
98·32	2	16·76	1	36·8	1+
98·85	3	17·22	1	37·52	1
99·55	1	17·47	1	37·77	1
4000·18	1+	18·26	1	38·27	2
00·70	4	18·44	1	38·6	1+
01·15	1	18·97	3	39·53	3+
01·43	1	19·75	1+	40·52	1+
01·71	1	19·95	2	40·95	7
02·02	1	20·23	2	41·20	2
02·22	1	20·74	1	42·17	1+
02·50	1 d.	21·03	4	42·63	1
03·30	1	21·50	4	43·21	2 La
04·14	4	21·87	3	43·75	2
04·43	3	22·20	1+	44·30	1
04·85	1 Pr	22·46	1	44·55	1
04·95	1	23·18	5	45·00	1 Pr
05·97	1+	23·99	1	46·20	1
06·55	1	24·96	3	46·59	1
06·95	1	25·37	1	46·85	1
07·57	3	25·72	1	47·77	1
08·19	1	26·3	1+ br.	48·6	1+
08·40	1	26·80	1	49·00	4
08·65	1	27·6	1+	49·67	1+
08·90	3 Pr	28·91	2	50·02	1
09·50	1	29·40	1	50·63	1
09·83	1	29·82	1 Pr	51·31	6
10·37	1	30·05	1	52·50	1+
10·62	1	30·66	4	53·11	1
10·80	1	31·21	1	53·44	1+
11·25	2	31·90	10	54·03	1+
11·77	1+	32·75	1	54·59	2
12·40	10	32·83	1	55·05	3 Pr

λ	i	λ	i	λ	i
4055·84	1	4079·18	1	4105·75	1
56·70	3 Pr	79·51	1+	06·12	1
57·04	3	79·97	2+ Pr	06·76	4
57·68	2+	80·42	2	07·6	2+
58·25	1+	80·75	1+	08·14	3
58·40	1	82·06	2+ Pr	09·25	6
58·97	1	82·72	2+	09·62	8
60·14	4	83·45	1+	10·12	3
60·75	1	83·8	1+	11·60	1
61·28	10	84·1	1+	11·96	1
61·90	1	84·46	1	12·80	1
62·40	1	84·84	1	13·27	1+
62·7	1+	85·32	2	13·98	4 v.
63·00	2 Pr	85·60	1	15·3	1+
63·50	1	86·00	2	16·50	1
64·35	1	86·95	2+ La	16·90	4
64·9	1+	88·71	1	17·71	1
65·43	1	89·27	1	18·61	2 Pr
65·96	1+	89·80	3	20·0	1+ Ce
66·74	1	90·46	1	20·80	1
67·70	1	91·18	2	21·12	1+
67·88	1	91·48	1+	21·67	1
68·5	1+ br.	93·3	1+	22·11	3
69·02	2	94·02	1	23·16	2
69·43	4	94·80	2	23·45	1
69·85	2+ br	95·60	2	24·04	1
70·46	1+	95·98	1	25·20	2
71·08	1	96·31	3	25·67	2
71·62	2	96·93	3	26·75	2+
73·76	1	98·24	3	27·33	1 Ce
74·16	1	99·09	2	28·0	1+
74·58	1	99·40	1	28·25	1+
74·90	1	4100·40	3 v.	28·84	2
75·27	3	00·89	5 v. Pr?	29·25	1+ Pr
75·45	2	01·45	1	29·4	1+
75·74	1	01·64	1	30·03	2
76·97	1	01·9	1+	30·55	1
77·33	1	02·73	2	30·89	2 Ba, Pr
77·81	3 r	04·40	2	31·46	1
78·44	1	04·71	2	31·85	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4132·25	1+	4164·60	2+	4187·70	1
32·71	2	65·21	5	88·03	1
33·51	5	65·90	1	88·43	2+ d.
34·87	1	66·36	1+	89·00	1
35·47	7	66·74	1	89·61	4
35·98	1	67·65	1 Ce	90·28	1
36·40	1	67·71	1	90·64	1
36·89	2	68·19	3	91·75	1
38·15	1+	68·91	2	92·13	1+
38·84	1+	69·23	1	93·23	1
40·00	1+	69·7	1+	94·04	1
41·40	3	70·65	2	94·55	1
41·9	1+ La	70·94	2	94·88	1
42·05	1+	71·25	2+ br.	95·20	3
43·30	8	71·97	2+ Pr	95·7	1+
44·0	1+	72·45	2+ Pr	97·89	1
44·71	3	73·26	2+	98·31	2
45·05	1+	73·55	2	98·64	1
46·29	4	74·66	2	98·93	1
46·75	2+ br.	74·85	1+	99·25	2
47·30	1	75·75	5	4200·18	2
47·75	1+ br.	77·50	10	01·4	1+
49·2	1+ br.	78·14	1	02·46	1
50·0	1+ (Ce)	78·60	3	02·8	1+
50·95	2+ br.	78·76	3	03·21	1
51·87	4	79·55	3	03·60	3
52·6	1+ br.	79·73	4	04·51	1
53·94	3	81·08	1	05·41	2
54·65	1+	81·5	1+	05·79	4
55·20	1+	82·00	1	06·90	4+ Pr
56·30	10	82·49	1	07·9	1+ br.
56·90	1+	82·70	2	08·50	1 Pr
57·74	2	83·31	1	09·25	2
58·23	1+	83·87	1	09·95	1
59·00	1+	84·32	1+	11·00	1
59·75	4	85·11	4	11·43	5
60·74	4	85·93	3	12·91	1
61·08	2+	86·15	2	13·33	3 d.
63·6	1+ br.	86·72	1	14·37	1
64·34	2+ Pr	87·23	2	14·78	1

λ	i	λ	i	λ	i
4215·50	1+	4247·07	1	4275·26	5
17·22	1+	47·59	8	75·94	2
17·42	1+	48·32	1	76·45	1+
18·00	1	48·75	1	77·45	3
18·70	2	49·17	1	78·2	2+
19·22	1+	49·6	1+ br.	80·34	2
19·40	1+	50·58	2	80·55	1+
19·83	1	51·65	1+	80·98	1+
20·41	3	52·14	7	81·15	1
21·31	2	53·06	2+	81·54	1
21·90	1	54·07	2	82·66	8
22·24	1	54·55	1+ d. (Pr)	83·21	1
23·19	6 Pr?	55·00	1	84·2	1+
23·35	2+	56·07	1	84·69	7
24·72	1+	56·45	1	87·55	1
25·00	2	56·65	1	88·5	1+
25·48	4 r.	57·00	1	89 52	1 d.
27·1	2+	57·46	1	90·55	1
27·86	3	57·99	3	91·13	3
28·33	2	58·55	1	92·1	1+
28·70	1	59·15	1+	93·36	1
28·99	1	59·80	1	94·35	2
29·63	1	62·06	5	94·90	1
31·30	1	62·45	3	95·42	1
32·52	6	63·63	2	96·51	1
33·30	2	64·13	3	97·52	1
34·35	4	66·02	1+	97·97	5
35·39	4	66·91	3	98·65	1+
36·33	1+	67·62	1+	99·16	2
37·45	1	68·02	1+	99·85	2
37·93	1	68·45	1	4300·1	1+
38·49	1	69·00	1	01·05	1
38·90	1	69·35	1	01·40	2
39·26	1 d.	69·75	1+	02·05	1
40·01	6	70·75	3	02·70	1
41·37	5	71·21	1+	03·77	10
43·3	1+ br.	71·96	1	04·60	5
44·74	2	72·45	1+ Pr?	05·60	1
45·13	1	72·98	3	05·95	1 Pr?
45·8	1+	73·40	2	06·44	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4306·90	2	4341·92	1	4370·48	1
07·35	1+	42·22	3	71·24	1
09·1	1+	43·90	1	72·30	1
09·72	1	44·51	2+ Pr?	72·42	1
09·95	1+	47·04	1	72·90	3
10·66	2	48·68	2	73·85	1+
11·43	1	49·2	2+	74·63	1+
12·25	1+	50·35	1	75·20	6 r.
13·53	2	50·6	1+ Pr?	76·61	2
14·63	8	51·41	8	77·28	1
15·47	1	52·05	1+	77·58	2
16·26	1	52·62	1	79·30	1
16·61	1	53·2	1+	80·55	1
17·86	1	53·4	1+	81·53	2
18·57	1	53·78	1+	82·95	3
18·80	1	54·0	1+	84·71	1
19·14	1	54·50	1+ La	85·85	7
19·49	1	55·04	1	86·77	1+
21·94	1	55·53	2	87·53	1+
22·2	1+	56·15	5	89·06	1+
22·70	1	57·08	1	90·22	1+
23·00	1	57·38	1	90·86	6
23·38	1	58·34	8	91·31	1
23·60	1+	58·85	2	92·28	2
24·06	2	59·40	1	94·38	3
24·3	1+	60·00	1+	95·20	1
25·35	1	61·00	3	95·67	1
25·91	7	61·59	3	97·83	1
26·49	1	62·0	2+ br.	98·20	2
27·05	1	63·61	1	99·73	1
28·09	6	64·31	3	4400·27	1+
29·2	1+	65·09	1	00·99	5
29·55	1+	65·40	1	03·2	1+
30·55	1+	66·52	4	03·8	1+
30·85	1+	67·30	1	05·4	1+
31·03	1+	67·60	1	06·00	2 Pr?
34·08	2+	68·47	1+	07·2	2
34·73	1+	68·80	4	08·95	5
35·36	1+	69·62	1+	09·69	1
38·83	8	70·30	1	10·41	1

λ	i	λ	i	λ	i
4411·17	7	4453·8	1+	4488·8	1+ br.
12·42	2	54·86	1	89·33	1
13·50	1	55·82	1	90·98	1
13·91	1	56·06	1	91·80	1
14·56	1	56·58	5	92·22	1
16·11	1	57·07	1	92·65	1
16·68	1+	57·36	1	93·60	3
17·00	2	58·73	1	95·89	1
18·18	1	59·15	1	96·11	2+ d.
19·2	1+ br.	59·56	1	97·47	2
19·7	1+ br.	60·1	1+	98·09	2
20·2	1+ br.	60·37	1+ Ce	98·46	1
20·65	1	61·05	1	99·4	1+
23·37	1+	62·59	4	4501·13	1
24·45	1	63·17	9	02·00	4
26·22	1	65·24	2	06·86	3
26·95	1	65·75	3	08·17	1
28·00	1	66·05	1	10·33	1+ Pr
28·30	1	67·51	1	11·02	1
29·32	3+	68·01	3	11·45	1
30·17	1+	68·82	2 d. (Pr)	12·05	1+
30·68	1	69·43	3	12·7	1+
31·9	1+ br.	70·7	1+ br.	13·51	2
32·41	1	71·14	3	14·36	1
33·97	1+	71·66	2	15·6	1+
34·46	1	73·55	1+	16·51	4
35·63	2+	74·06	1	16·80	1
36·77	1+	74·50	1	18·55	1+
37·9	1+	74·96	1	23·04	2+
38·25	1+	75·75	1	23·76	1
39·10	2	77·62	1	24·15	1+
43·50	1+	78·06	1	26·30	1
44·25	1+	78·75	1+	26·55	1+
44·39	1	81·12	1+	27·41	1
46·51	8	82·08	1	28·4	1+ br.
48·12	1	84·4	1+	30·53	1
50·00	1	85·13	1	31·20	1
51·75	10	86·13	1	32·48	1+ br.
52·20	3	86·74	1+	34·35	1+ Pr
52·90	1	87·80	1	36·09	1

λ	i	λ	i	λ	i
4538·1	1+ br.	4563·42	4	4513·50	1
39·4	1+	65·17	1+	22·15	1
41·46	4	67·80	2	24·40	1
42·78	5	70·00	1	28·15	1
43·80	1	71·25	1+	30·06	1
43·92	1	79·05	3	32·85	1
45·49	1	79·46	4	34·41	2
48·43	1+	84·20	1	36·73	1+
49·17	1	86·82	1	37·40	1+
51·45	1+	90·69	1+	38·87	2
52·55	1+ br.	91·92	1	39·5	1+ br.
55·3	2+ d.	94·64	1	41·30	1
56·34	1	94·95	1	42·51	1
56·94	1	97·18	3	45·93	3
57·61	1	4603·98	1	46·54	1
59·85	1+	09·5	1+	47·96	1
61·37	1	10·07	1+	49·90	1+
62·05	1	12·66	1		

LI. Praseodym.

Über die ultravioletten Spectren des Praseodyms liegen keine Messungen vor. Wir verwendeten eine Lösung von Praseodymperoxyd, das wir der Güte des Herrn Professors P. T. Cleve in Upsala verdanken, in Salpetersäure. An Verunreinigungen waren nur Lanthan und Neodym nachweisbar. Die Zahl der Linien beträgt 1544.

λ	i	λ	i	λ	i
2194·4	1+	2273·48	1	2301·74	1+
2205·57	1+	84·77	1	03·92	1
14·65	1+	86·8	1+ br.	05·21	1
15·25	1+	88·3	1+ br.	07·88	2+
23·36	1	90·39	1	11·5	1+ br.
30·48	2	94·72	2+	13·32	1
73·30	1	97·89	2 La	18·27	1

λ	i	λ	i	λ	i
2318·96	2+	2438·74	1	2610·55	1+
19·53	1	45·08	1	14·61	1
20·48	1+	45·66	1	15·95	1+
25·93	1	46·90	1	25·06	1
28·67	1	48·33	1+	40·0	1+ br.
36·30	1	53·00	1	44·75	1+
37·55	2	54·98	2	51·75	1+ La
39·81	2	60·00	1	54·84	1
46·85	1	60·86	1	56·05	1+
50·20	3	62·35	1	67·66	1
52·72	1	63·08	1	79·67	1
53·85	2	68·33	2	84·3	1+
55·15	1+	69·12	1	99·0	1+
65·64	1	81·17	1+	2707·45	1
68·89	2	85·24	1	08·15	1+
71·48	1	88·84	3	10·45	1
72·27	1+	2511·26	2	18·86	1+
73·40	1	17·54	1+	24·20	1
76·22	1	21·1	1+ br.	26·55	1+
77·75	1	30·6	1+ br.	75·93	1+
78·19	1	31·45	1	83·40	1
79·04	3	34·0	1+ br.	91·1	1+ br.
79·47	3 La	35·00	1+	2822·93	1+
94·22	1	36·86	1+	42·08	1+
99·83	1	38·51	1	61·95	1
2400·9	1+ br.	39·93	1+	2911·82	2+
05·70	2	46·05	2+	14·65	2+ Nd?
08·35	1	51·66	2+	30·20	1+
10·00	1	55·85	1+	35·55	1+
12·49	1	58·70	1+	42·41	1+
14·0	1+	59·25	1+	53·65	2+
14·67	1+	69·40	1+	54·6	1+
17·80	1	70·1	1+ br.	61·17	1+
19·07	1	72·00	1+	63·45	1+
26·99	1	75·2	1+ br.	64·95	2
30·48	1	80·3	1+ br.	68·96	2
31·4	1+	87·92	1	69·50	1+
31·9	1+	90·55	1	69·95	1+
34·50	1	95·46	1+	76·00	1+
37·1	1+ br.	97·00	1	76·44	1+

λ	i	λ	i	λ	i
2977·11	3	3078·72	1+	3295·07	1+
80·65	4	80·36	2	95·73	1
81·8	1+	3111·48	1	96·19	2
82·65	1+	21·75	1+	98·67	1+
85·91	4	29·32	1	99·92	1+
91·6	1+	30·5	1+ br.	3300·47	1+
94·25	1+	35·5	1+	02·03	1+
97·23	2	46·55	1+	02·80	1+
98·47	1+	47·25	1+	03·32	1+
98·94	1+	47·87	1+	06·43	2+
3000·63	2	51·65	1	14·57	1
03·30	2	53·96	1	17·7	1+
05·05	1+	60·18	1+	20·2	1+ br.
06·65	1+	63·89	1	22·4	1+ br.
07·37	1+	65·0	1+	25·87	1+
08·10	2	68·41	3	27·6	1+ br.
10·80	2	70·33	1+	30·85	1
13·33	1+	71·81	3 La	33·30	2+
14·62	1+	72·50	1	37·70	2 La
15·25	1+	73·05	1+	40·70	1+
16·27	1+	82·64	1	41·55	5
18·77	1+	84·95	1+	44·86	1
21·80	1+	91·58	1	45·55	1+
24·46	1+	91·79	1+	50·47	1
25·35	2+	96·21	2	51·3	1+ br.
27·47	1+	99·23	1	53·8	1+ br.
29·50	2+	3204·94	1	54·99	4
33·43	2+	08·06	1+	55·84	1
34·33	2+	19·63	1	56·00	1
42·00	1+	34·45	1+	57·82	5
42·40	1+	39·07	1+	58·72	1+
45·94	2	45·29	1	59·61	5
47·14	2	45·62	1	62·43	1+
50·49	2	63·43	1+	63·41	2+
55·41	1+	63·83	1+	64·75	1+
59·07	2	64·66	1+	65·08	1
66·86	1	76·87	1+	65·97	1+
68·49	1+	78·98	1+	67·5	2+
69·3	1+ br.	81·07	2+	67·69	5
73·30	1+	92·70	1+	69·10	1

λ	i	λ	i	λ	i
3370·50	1	3454·73	1+	3517·30	3 La
72·17	2+	56·14	1	19·33	1
77·20	2+	58·39	1	22·26	2+
79·08	1+	60·80	1+	22·87	2+
79·95	1	61·22	1	24·60	1
80·25	1+	63·30	1+	25·65	1+
81·12	2 La	66·25	1+	28·85	1+
81·35	2	66·90	1	29·83	1+
81·93	2	67·21	1	31·02	1+
82·82	1	67·95	1+	31·80	1+
83·55	1	68·20	1+	32·94	1+
83·90	1	74·02	1	33·95	1
87·20	1+	74·60	1+	34·70	1
91·14	2+	78·17	1+	35·06	1
94·41	2+	79·55	1+	35·7	1+ br.
94·64	1	81·20	1	37·49	1
96·71	4	83·71	1	37·62	1
97·71	4	84·50	1	38·50	1·
3403·20	1+	85·00	1	39·00	1
03·77	1+	86·65	1	39·81	1
13·34	3	87·6	1+	40·11	1
15·21	3	87·72	1	42·52	1+
15·82	1	89·17	1	42·84	1
19·38	1+	91·71	1	43·17	1
20·10	2+	92·15	1	44·3	1+ br.
22·43	3	92·87	1	45·13	1+
27·15	3	94·45	1	46·45	1+
27·75	1	96·4	1+	48·30	1+
30·44	1	98·50	1+	49·86	1+
30·65	1	99·21	1	50·36	1+
31·85	1	99·71	1	51·23	1
33·68	1	3501·20	1+	51·60	2
34·96	1	03·23	1	52·21	1
36·60	3	04·43	1	52·90	1
48·32	1	07·54	1	53·51	1
49·98	1	08·39	1	53·77	1
50·6	1+ br.	10·56	2+	54·55	1
51·7	1+ br.	11·65	1	55·5	1+ br.
53·1	1+ br.	12·37	1	57·32	1+
54·20	1+	13·48	1+	57·93	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3558·20	1+	3584·43	3	3619·30	1+
59·27	1+	86·40	1	19·79	1+
61·5	1+	86·68	1	20·60	1+
61·89	1	87·27	1	21·25	1+
62·45	1	87·49	1	22·55	2
62·76	1	88·04	1	22·9	1+ br.
63·07	1	88·45	1	23·75	1
63·61	1	88·75	1	24·46	1
63·95	1	89·67	1	24·93	1
64·64	1+	90·10	1	25·40	1+
65·96	1+	90·52	2 (Cy)	25·55	1+
66·20	1+	93·18	1+	25·97	1+
66·90	1+	93·8	1+ br.	26·66	1
68·46	1	95·92	1+	27·20	1
68·88	1	96·39	2	27·42	1
69·23	1	99·12	1	27·99	1
69·72	1	99·62	1+	28·35	1
70·76	2	3600·94	1	28·72	1
72·4	1+ br.	01·18	1	28·98	1
72·95	1+	02·05	1+	29·86	1
75·10	2	03·36	1+	31·16	3
75·73	1	03·90	1+	32·3	1+ br.
76·47	1+	04·5	1+ br.	33·00	1
76·93	1	05·25	3	33·50	1+
77·63	2	06·13	2	34·62	1
78·01	1	07·00	1	35·45	2
78·27	1	07·30	1+	36·64	1
78·55	1	07·40	1+	37·05	1+
78·74	1	08·04	1+	37·33	1
78·91	1	08·65	1	37·83	2
79·27	1	10·88	1	37·90	1
80·10	1	11·37	1	38·49	1
82·00	1	11·98	1	38·78	1
82·46	1	12·15	2	39·01	1
82·89	1	12·90	1	39·92	1
83·20	1	13·9	2+ br.	41·05	1
83·35	1	15·34	1	41·30	1
83·63	1	16·20	1	41·80	3
83·90	1	16·82	2	42·04	1
84·15	1	18·23	1	43·11	1

λ	i	λ	i	λ	i
3643·49	2	3674·30	1	3704·46	1+
44·71	2	75·06	1	05·12	1
45·08	1	76·04	1	05·48	1
45·32	1	76·96	1	06·03	2
45·81	7	77·57	1	07·36	1
46·50	4	77·87	1	09·9	1+ br.
47·03	1	81·0	1+ br.	10·15	1+
47·70	1	82·1	1+ br.	10·80	1+
48·45	3	83·20	1+	11·25	3
49·55	1	83·38	1+	12·50	2
50·32	1	84·05	1+	13·44	2
51·23	1	84·40	1+	14·20	3
51·88	1+	84·88	1	14·85	1+
52·55	1	85·07	1	15·72	1
53·05	1+	85·44	2	16·35	2
54·52	1	85·82	1	17·15	1+
55·30	1	86·62	2	18·00	1
56·49	1	87·29	3	18·15	1
57·60	1	87·35	3	19·02	1
57·79	1	89·53	1	19·55	1
58·40	1	89·85	1	20·4	1+
58·50	1	90·1	1+	20·96	1
59·22	2	90·61	1	21·42	1
60·26	1	91·65	3	21·65	1
60·55	3	92·45	1+	22·23	1+
61·81	2	93·18	1	23·75	1+
62·55	1	93·65	1	24·99	1+
64·80	1+	94·48	1+	25·17	1+
67·34	1	94·83	1+	26·45	1
67·84	2 r	95·3	1+ br.	29·23	1
69·01	4	96·18	1+	29·55	1
69·72	1+	96·82	1+	30·72	2
70·02	1	98·20	2	31·05	1+
70·40	1	99·05	1	31·65	2
70·96	1	3700·10	1+	32·70	1+
71·53	1	00·80	1+	33·05	1
71·77	1	01·16	1	33·57	2
72·09	1	01·60	1	34·45	4
72·8	1+	01·95	2	35·16	1+
73·67	1+	03·02	1+	35·90	2

λ	i		λ	i		λ	i	
3736·63	3		3764·23	1		3785·57	2	d.
37·8	1+		64·45	1		86·10	1	
39·35	4		64·94	3		87·00	3	
41·15	2		65·05	2		87·31	3	
41·95	1+		65·78	1+		88·20	1	
42·40	1+		66·13	1		88·65	1	
44·15	3		66·61	1		89·08	1	
46·17	1		68·41	2		89·15	1	
47·40	1		69·06	3	r.	90·12	1+	
47·64	1		69·83	2		90·70	1+	
48·21	1		70·35	1		90·99	3	La
48·67	1+		70·63	1		92·30	1	
48·98	2		71·53	1		92·62	2	
49·92	1		71·92	1		92·71	2	
50·31	2		72·23	2		93·09	1	
50·65	2		72·67	1		93·58	1	
51·17	3		72·96	2		93·94	1	
51·8	1+	br.	73·34	1		94·53	2	
52·43	2		73·72	1		94·95	3	La
52·87	1		74·22	3		95·09	2	
53·7	1+	br.	74·70	1		95·50	1	
54·52	2+		75·36	1		95·92	2	
55·12	1		76·68	3		96·34	1	
55·22	1		77·24	2		96·45	1	
55·66	1		77·75	2		97·07	1	
56·45	1		78·00	2		97·37	1+	
56·80	1		78·89	2		98·06	2	
56·96	1		79·45	1		98·70	1	
59·27	2	r. (La)	79·60	1		99·52	1	
59·75	2		79·89	1		99·81	2	d.
60·21	2		80·44	2		3800·25	1+	
60·45	1+		80·82	3		00·46	5	
61·13	1		81·57	1		01·51	3	
61·54	1		81·80	1		01·70	2+	Ce?
61·72	1		82·07	1		02·46	1	
62·02	5		82·45	2		02·91	1	
62·50	1		83·5	1+		03·25	3	
62·68	1		83·85	3	u.	04·96	8	
63·20	1		84·46	1		05·63	1	
63·70	1		85·07	1+		06·30	2	

λ	i		λ	i		λ	i	
3806·55	2		3830·51	1		3859·32	1	
07·00	1+		30·85	6		59·56	1	
07·76	1+		32·80	1		61·00	1	
08·07	1		33·15	2		61·45	1	
08·28	1		33·75	2		62·20	1	
08·85	1		34·34	2		63·09	1	
09·30	3		34·72	1		63·55	2	Nd
10·10	2		35·05	2		64·20	2	
10·71	1+		36·23	1		64·69	2	
10·90	1+		36·65	3		65·29	1	
11·50	2		37·58	1		65·62	10	
12·00	2		37·79	1		66·12	1	
12·16	2		38·48	1		66·98	1	
13·10	1		38·86	1		67·13	1	
13·44	1		41·15	4		67·70	2	
13·77	1		42·07	1	Nd	68·3	1+	
14·04	1		42·51	3		68·68	2	
15·01	1		43·55	1		68·90	2	
16·73	10		44·20	1		69·29	2	
17·17	1+		44·71	2		69·50	2	
17·50	1		45·15	1		70·88	3	
18·00	2		46·00	1		71·51	3	(Cy)
18·41	7		46·10	1		72·86	1	
18·85	1		46·76	5		73·15	1	
19·22	1		49·17	3	La	73·56	1	
19·33	1	Cy?	49·93	1		73·69	1	
20·56	1		50·05	1		74·60	1	
20·95	2		50·96	6		74·90	2	
21·94	5		51·71	5		75·46	2	
22·46	2	Cy?	52·25	1		76·30	6	
22·95	1		52·93	6		77·81	10	
23·32	2+		53·62	3		78·06	2	
23·71	1		54·73	2		78·45	2	
24·22	1		56·04	2		79·34	5	
24·50	1		56·53	1		79·76	2	
25·84	2		57·15	1+		80·56	5	
26·36	2		57·26	1+		84·19	1+	
26·85	2	Cy?	58·02	1		84·74	1	
29·58	2		58·40	1		84·86	1	
29·85	2		58·77	1		85·31	3	

λ	i		λ	i		λ	i	
3885·60	1		3917·36	2		3943·90	1	
86·49	1	La	18·1	1+	br.	44·28	3	
88·20	1		19·01	10		44·74	1	
88·44	1		19·75	4		45·07	2	
89·47	5		20·66	3		45·57	2+	
90·12	1+		21·70	1+	La	45·76	3	
90·33	1+		22·40	1		47·10	4+	
91·87	1+		23·11	1		47·78	8	
92·69	1		23·70	1		48·77	1	
94·3	1+		23·97	1		49·23	6	La?
95·15	2		24·28	2		49·59	8	
97·0	1+		25·16	1		50·77	2+	
97·20	1		25·61	8		51·33	2	Nd
97·40	3		26·12	1		52·05	1+	
97·82	1		26·56	1		52·24	4	
98·96	4		26·72	1		52·5	2+	br.
99·70	1+		27·60	4		53·3	2+	br.
3900·27	1+		27·87	3		53·63	8	
01·83	1		28·43	1		55·35	2+	
02·60	4		28·76	2		56·88	6	
04·04	2		29·0	1+		57·81	1	
04·96	1		29·41	7	La?	58·30	2	
06·23	2		30·02	1		58·63	2	
07·45	1		30·76	1		59·59	4	
08·21	6+		31·10	1		60·70	5+	
08·53	10		32·30	1		61·45	2+	
09·46	1		33·14	2		62·35	1	
09·76	2		33·47	1		62·57	4	
11·43	2		34·40	1		63·30	3	Nd?
11·98	1+		35·28	2		63·85	1	
12·14	1		35·97	2		64·40	5	
12·41	1		36·80	1		64·96	8	
12·75	1		37·15	1+		65·40	6	
13·08	5	d.?	37·82	1+		65·76	1	
13·70	3		38·45	4		65·95	1+	
14·94	3		40·52	1		66·70	7	
15·57	2		41·63	1+	(Nd)	67·29	2	
16·19	1	La	42·41	3		67·83	1	
16·60	1		43·05	2		68·28	2	
16·95	1		43·54	3		69·67	1	

λ	i	λ	i	λ	i
3969·91	1	3997·15	5 d.?	4026·95	2
70·20	1	98·07	2	27·70	3+
71·27	7	98·52	1	28·76	1
71·81	5	98·83	1	29·10	3
72·29	6	99·16	4 d.?	29·83	5
74·07	1	4000·31	4	30·61	2+
74·45	2+	00·56	2	31·20	3
75·00	4 r.	01·00	1	31·87	7 La, Nd
75·79	1	01·60	1	32·60	4
76·42	2	02·00	1	33·05	3
76·70	2	02·46	1	33·30	1
76·96	2	04·82	7	33·96	6
77·55	2	06·80	2	34·29	2
77·9	2+	07·86	2	34·73	1
78·7	1+ br.	08·85	15	35·18	1
79·44	1	09·36	1	35·50	1
79·80	1+	10·04	1	35·90	1
80·35	2	10·37	1	36·26	1+
81·01	2	10·72	5 r.	37·29	1
81·31	2+	12·26	1+	38·35	3+
82·20	10	12·37	1+ Nd	38·55	4
82·67	2+	13·02	1+	39·01	1
83·73	1	13·35	1	39·42	3
84·43	1	13·52	2	40·8	1+ br.
85·77	2	14·41	1	42·02	1
86·30	1	14·76	1	43·04	2
86·70	1	15·48	6	44·96	8
87·48	3	16·82	2+	46·85	3
88·14	2	17·65	2+ br.	47·25	4
88·62	4 La	19·54	1	48·30	3
89·24	1	19·95	2	49·75	1
89·71	9	20·39	1	50·02	1
91·3	3+ br.	21·10	6	51·31	6
92·03	3+	22·31	3	52·02	1
92·25	4	22·87	7	52·76	3
93·0	2+	24·20	1	53·63	2
94·13	1	24·53	1+	54·12	2+
94·92	8	25·39	2	55·02	10 r.
95·91	5	25·95	5	55·88	1+
96·80	1	26·47	1	56·30	1

λ	i	λ	i	λ	i
4056·69	10 r.	4089·03	1+	4119·90	2
58·35	2	89·63	1	20·15	2+
58·96	3	90·1	2+ br.	21·08	1
59·55	2	90·90	3	22·36	1
61·29	1 Nd	91·44	1	23·37	4 La
61·54	1	91·80	1	24·18	2
62·45	6+	92·79	2+	24·47	2
62·98	10 r.	93·0	2+ br.	25·16	2
64·92	1	93·95	1	26·25	2
66·2	1+	95·11	2	26·99	1
67·52	1 La	96·05	2	28·1	1+
68·26	1	96·50	2	28·75	1+
68·94	4	96·96	7	29·23	6
70·42	3	98·52	7	30·89	6
71·53	1	98·80	2+	31·90	1
72·15	1	4100·05	1	32·30	2
72·37	1	00·36	2	33·72	5
72·68	1	00·89	20	34·30	1+
73·50	1	01·66	1+	37·27	2+
74·10	1	03·34	1	38·25	2+
75·01	2	04·63	1	40·40	2+
75·49	1	05·00	2	40·9	2+
76·02	3+	05·85	3+	41·34	10
76·25	2+	07·21	1	42·11	1
77·49	4 La	07·85	2+	43·23	20
77·83	1	08·46	2	44·31	1
78·12	1	09·20	1	44·80	1
78·25	1	09·52	1	46·03	1
79·92	8	10·15	2+	46·67	7
81·18	6	10·59	1	47·23	1
82·09	10	11·03	1	47·65	1
82·95	1	12·02	3+	48·12	1
83·50	5	12·89	2	48·53	7
84·88	2	13·99	4	49·39	1
85·30	2	14·40	1	50·16	1
85·46	2+	14·94	2	50·54	1
86·39	1	15·93	2	51·20	1
86·87	5 La	17·32	1	52·14	1 La
87·35	5	18·60	15	52·48	1
88·52	1+	19·42	2+	52·90	1

λ	i	λ	i	λ	i
4154·20	2	4185·36	2	4219·87	2
56·68	4	86·0	1+ br.	20·36	1
57·05	1+	86·61	1	21·7	1+ br.
57·92	1+	87·95	1	23·20	20
58·23	1+	89·70	20 r.	23·7	1+ br.
59·64	1	90·90	1	25·54	20
59·99	1	91·85	6	25·8	3+ br.
60·61	1	92·69	1	26·94	4
61·02	1	94·08	1	28·70	1+
61·49	1	94·47	1	29·30	1+
61·80	1	94·87	1	29·99	1
62·68	1	95·28	1	30·80	1
63·17	1	95·75	2+	32·25	1
63·60	1	96·16	1	32·59	1
64·36	15	96·79	2 La	32·90	1
66·53	1	97·00	2	33·35	3
67·0	1+	97·22	2	36·36	2
67·85	1+	99·8	1+ br.	36·82	2
68·25	1	4200·75	1	37·29	1
69·68	4+ v.	01·40	3	38·60	2 La
71·2	1+	01·65	2+ br.	39·69	1
72·02	8	02·6	1+	40·30	4
72·47	8 r.	02·9	1+ br.	41·29	15
73·93	1	03·75	1+	43·73	4
74·83	1	05·95	1+	44·71	1
75·52	4	06·94	20	45·37	1
75·83	5	08·00	2	45·69	1
76·54	2	08·52	5	46·38	1
77·64	1	10·8	1+ br.	47·85	8
78·05	1	11·48	1+	49·29	1
78·83	3	12·10	2 d.	49·68	1
79·60	20 r.	12·89	1	50·56	4
80·59	1	13·52	1	51·75	3+
80·90	1	13·81	2	53·29	1
81·05	1	14·19	1	54·59	6
82·52	1	14·78	1	55·13	1+
82·85	1	15·35	1	55·88	1+
83·16	1	15·73	1	56·46	1+
84·40	1	17·40	1	56·98	1
84·79	1	18·04	4	57·82	1

λ	i	λ	i	λ	i
4260·27	1	4297·98	8	4341·60	1
61·2	1+	99·16	5	42·97	2+ d.
62·50	4	4301·7	1+ br.	44·13	1
63·00	2	02·3	1+ br.	44·55	8
63·35	2	03·37	1	45·10	1
63·99	3+	03·82	5	46·48	1+
67·95	2	04·92	1+	47·10	1+
69·27	3	05·99	10	47·71	6
69·75	2+ br.	06·73	1	48·40	1
70·60	1	07·86	1	50·64	5
71·99	4	09·13	2	52·11	7
72·49	7	11·31	1	53·97	1+
73·13	1	12·15	1	54·63	1
74·52	1	14·52	1	55·13	4
75·40	1	14·99	1	57·73	1
75·48	1	15·73	2	59·81	2
76·00	2	16·80	2	60·01	4
76·38	2	17·26	3+	61·50	1
78·23	3	18·02	3+	61·77	1
78·8	1+	18·87	1	62·05	1
79·20	2	19·23	2	63·20	2
80·30	7	20·4	2+	63·43	2
82·66	7	21·03	1	67·45	2+ br.
83·20	1	21·58	1	68·55	10
84·0	1+	21·97	1	71·03	2
84·69	1 Nd	23·77	3	71·45	1
85·60	2	24·13	1	71·83	5
87·15	3	25·6	1+	74·01	2
88·64	1+	28·61	3	74·66	2
89·64	2	29·19	2	75·95	1+
90·09	2	29·62	3	78·45	1+
90·68	2	30·65	1+	79·58	1+
91·24	1	31·50	2	80·55	3
91·85	1+	32·7	1+	82·64	3
92·6	1+	33·37	1+	83·0	2+ br.
93·35	3	34·18	10 d. (La?)	84·31	3
93·83	3	34·83	1	85·06	2
94·95	4	35·97	3	85·55	2+
95·31	3	38·92	3	87·95	1+
96·30	3	39·98	1+	88·9	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4390·32	1+	4450·10	5	4526·30	1
91·76	1	52·15	2	34·00	1
92·2	1+ br.	54·93	3	34·39	6
93·77	1	58·52	2+	36·11	4
95·25	5	61·5	1+ br.	39·45	1+
96·03	3+	63·30	1	42·75	1 Nd?
96·29	5	65·3	1+	43·80	1
97·12	1	66·20	3	44·19	1
98·55	2	68·88	7	45·4	1+ br.
99·57	2	69·90	1	48·74	2
4400·22	2	73·15	1	50·1	1+ br.
00·45	2+	74·07	1	51·1	1+
03·51	2	75·1	1+	55·00	1
03·81	3	77·46	3	58·69	1
05·35	3	79·78	1	63·34	3
06·02	8	81·61	2	70·75	1
06·85	1	83·30	1	71·81	1
08·0	1+	83·71	1	72·6	1+
08·40	1	85·75	2	75·0	1+
09·01	10	88·0	1+ br.	76·51	1
12·37	1+	88·37	2	78·4	1+
13·95	4	92·65	1+	81·75	1+
14·60	1	93·35	1+	87·3	1+
16·75	1+	93·91	1	92·40	1
19·23	3	96·68	10	97·20	1+
19·84	3	4500·70	1	98·26	1
21·44	3+	02·02	1	4600·62	1
24·44	1	04·80	1	07·85	1
24·81	3	06·1	1+	12·31	2
29·41	12	07·12	1	18·25	1+
30·11	1 La	08·55	1	20·0	1+ br.
32·06	1+	10·37	10	28·98	3
32·55	2	13·46	1	46·25	1
35·15	1+	14·38	1	51·77	2
37·95	1+	16·64	1	64·87	2
38·40	2	17·80	2+ d.	72·29	2
44·30	1	21·00	1		
46·12	2	22·59	2 La		

LII. Germanium.

Das ultraviolette Funkenspectrum des Germaniums wurde bisher noch nicht untersucht. Den sichtbaren Theil hat schon vor längerer Zeit Kobb[1] gemessen, allerdings mit geringer Genauigkeit. Das Bogenspectrum wurde von Rowland und Tatnall[2] untersucht. Beide Spectren zeigen grosse Unterschiede. Wir haben die Aufnahmen mit Elektroden aus metallischem Germanium gemacht, die wir der besonderen Güte des Herrn Professors Clemens Winkler in Freiberg verdanken. Nachweisbar waren noch Spuren von Ca, Ag, Cu, Pb und Fe Die Zahl der Linien im Ultraviolett beträgt 62.

λ	i	λ	i	λ	i
2138·7	1+ br.	2558·62	4+	3280·83	3 Ag
98·81	2+ u.	85·96	1	3383·06	3 Ag
2246·50	1	89·31	5	3639·78	1 Pb ?
56·06	1	92·65	15 u. [3]	83·67	1 Pb ?
2314·29	3	2618·53	1	3798·43	1
17·12	1+ Ag	44·35	2+ r.	3845·67	1
24·75	1+	51·21	15 u.	83·4	1+
28·01	3	51·62	15 u.	3933·81	2 Ca
38·8	1+ br.	91·50	15	38·0	1+ 3 AE
79·22	3	2709·69	20 u. [4]	68·62	2 Ca
89·56	1	40·53	7	4008·93	1
94·18	1	54·68	20 u. [3]	58·02	2 Pb
94·63	1	94·06	2	74·51	1
98·02	1+ br.	2829·09	2	88·3	1+ 3 AE
2416·21	1	31·9	3+ 2 AE	99·9	1+ 2 AE
17·43	10	45·5	4+ 2 AE	4179·20	20
27·06	1+ br.	3039·20	20 u.	4226·76	50 r.
36·45	1+	67·18	1	60·97	10
37·85	2 Ag	86·18	1+ br.	91·72	3+ br.
78·67	1 C ?	3124·98	5	4602·35	1+
98·08	7	3247·67	2 Cu	86·09	10 r.
2533·34	6	55·6	2+ 2 AE	4744·0	2+ 4 AE
42·36	2+	69·70	10 r.		
56·43	1+	74·10	2 Cu		

[1] Kobb, Wied. Ann. 29 (1886).

[2] Rowland und Tatnall, Astroph. Journ. I (1895).

[3] Rothe Componente starker.

[4] Mitte der nicht umgekehrten Linie auf 2709·76.

LIII. Gallium.

Das ultraviolette Funkenspectrum des Galliums ist bisher unbekannt, das sichtbare wurde schon von Lecoq de Boisbaudran[1] gemessen, allerdings mit sehr geringer Genauigkeit, da die beiden charakteristischen violetten Hauptlinien um Angström-Einheiten falsch bestimmt erscheinen. Im Bogenspectrum haben Hartley und Ramage[2] die Wellenlängen der umgekehrten Hauptlinien zu 4033·125 und 4172·214 gemessen und ihre Coincidenz mit Sonnenlinien wahrscheinlich gemacht. Die Wellenlängen der Linien im Funkenspectrum sind nicht angegeben. Diese zwei Linien sind auch die einzigen kräftigen, welche wir in dem von uns gemessenen Bereiche aufzufinden vermochten. Ausser diesen ergaben sich nur wenige ganz schwache und fast durchwegs verwaschene Linien, deren Zugehörigkeit zu irgend welchen anderen, bisher gemessenen Elementen nicht constatirt werden konnte, und die sonach mit grosser Wahrscheinlichkeit auch dem Gallium angehören. Auch das Gallium verdanken wir der Güte des Herrn Professors Clemens Winkler. Da bei dem niederen Schmelzpunkt des Galliums von einer Verwendung metallischer Elektroden Abstand genommen werden musste, so benützten wir es in Form des Chlorides auf Elektroden aus Gaskohle. Verunreinigungen waren nicht nachweisbar; die Zahl der Linien betrug 16.

λ	i	λ	i	λ	i
2481·1	1+	3361·4	1+ br.	4051·18	1
2780·28	1+	3703·00	1+	79·2	1+ br.
2874·32	2+	06·5	1+	85·45	1+
2943·81	2+	07·40	1+	4172·25	20 r.[3]
44·31	1+	10·46	1		
3349·5	1+	4033·19	10 r.[3]		

[1] Lecoq de Boisbaudran, C. R. 114 (1892).

[2] Hartley und Ramage, Astroph. Journ. IX (1899).

[3] Als Verunreinigung gemessen zu 4033·15 und 4172·21.

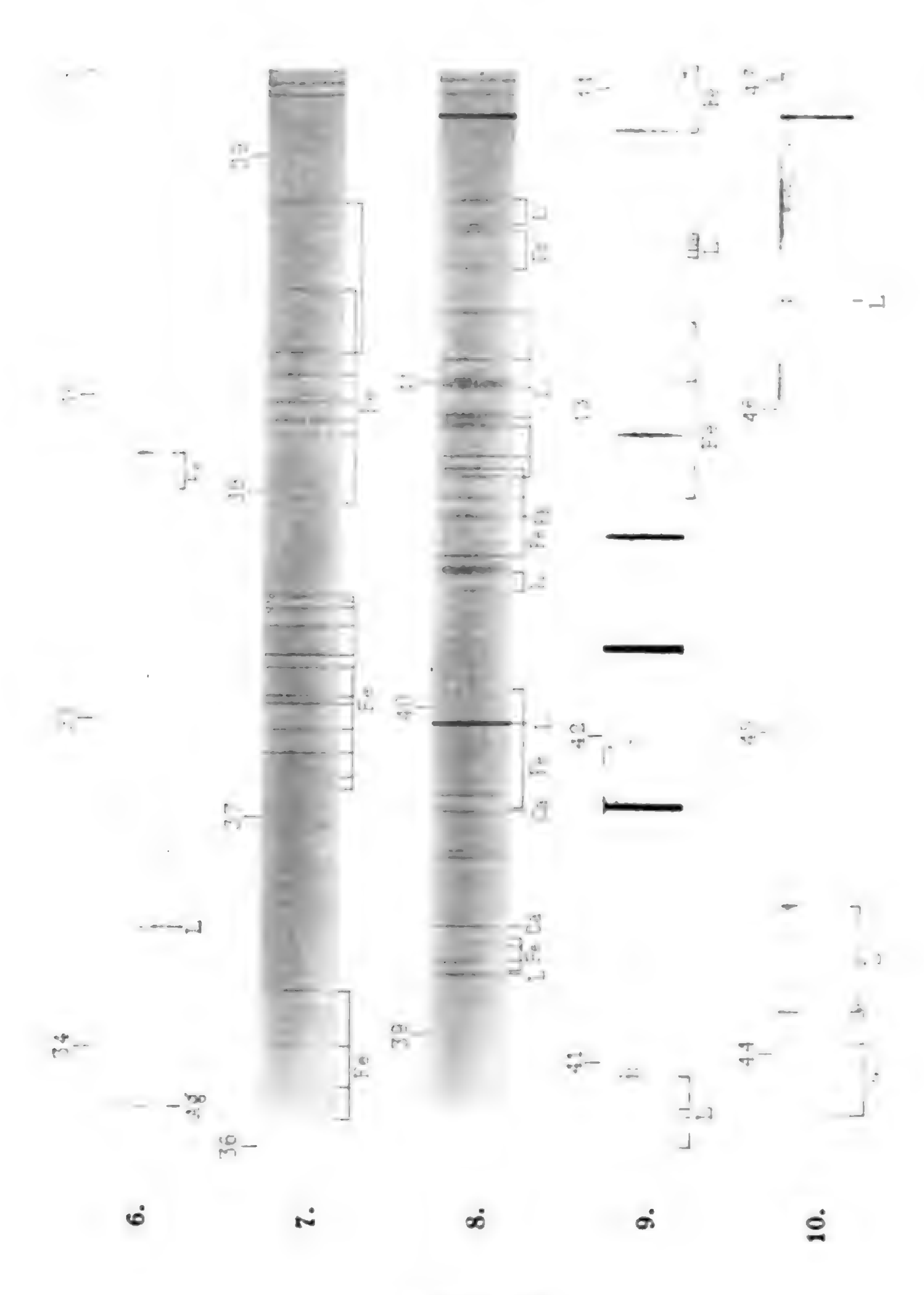
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XVI.



Germanium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente. XVI.



6. 7. 8. 9. 10.

Germanium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XVII. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Y, Er, Yb)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek**.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juli 1899.)

LIV. Yttrium.

Das ultraviolette Spectrum des Yttriums wurde im Bogen zwischen $\lambda = 3900-4000$ AE von Lockyer[1] und im Funken zwischen $\lambda = 4000$ und 4500 AE von Lohse[2] gemessen. Das Spectrum zeichnet sich durch viele starke und charakteristische Linien aus; leider war es uns nicht möglich, ein reines Yttriumpräparat zu erhalten, doch da wir alle anderen Elemente dieser Gruppe in ausgezeichnet reinen Proben zur Verfügung hatten, so war es nicht schwer, die den Verunreinigungen des Yttriums angehörenden Linien als solche zu erkennen. Unser Präparat (Yttriumchlorid) war von Merck bezogen und zeigte sich stark mit Er und Yb, schwach mit Be, Nd, Sa und Gd verunreinigt. Bezüglich der Elemente Sa, Sc und Gd ist zu bemerken, dass wir von diesen vorläufig nur einige der stärksten Linien gemessen haben; es wäre also möglich, dass noch mehrere der im Yttrium angeführten Linien in Wirklichkeit dem Gd oder Sa angehören. Sc konnte im Y nicht nachgewiesen werden. Die Zahl der Linien im Yttriumspectrum beträgt 523.

[1] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).

[2] Lohse, Astroph. Jour. Bd. 6 (1897).

λ	i	λ	i	λ	i
2191·39	2	2652·33	2	2867·2	1+ Yb
2236·24	1 Yb	53·84	3 Yb	91·55	3
40·16	1 Yb	57·91	1	95·07	1 Yb?
43·15	3	64·8	1+ Fe?	97·87	1+
57·12	1	65·12	1	2910·50	1
62·32	1 Yb	66·20	4 Yb	11·55	2
65·75	1	67·06	4	14·37	1+ Yb
83·07	2	72·74	1	19·49	2
84·10	2+	77·49	1	46·15	20
2305·40	2	84·90	1	63·5	1+ br. Yb
09·35	1 Yb	91·1	1+ Yb	64·65	1+
14·5[illegible]	2	92·75	1+	70·72	1
27·42	5	98·5	1+	80·8	1+ br.
41·0	1+ br.	2701·81	1	3005·93	2 Yb
57·02	1+	12·45	1+ Yb	26·8	1+
67·30	20	32·8	1+	31·3	1+ br. Yb
98·28	1+	35·05	1+	55·5	2+ br.
2412·45	1+	48·77	1+	58·03	1+ Yb
14·07	2+	50·60	4 Yb	77·79	1
14·78	15	54·25	1+	82·2	1+
17·48	1+	59·35	1+	87·13	2+ br.
19·9	1+	72·71	1 Yb	94·0	1+ br. Yb
22·32	8	76·38	1+	96·04	1
24·23	1	85·32	2+	3100·75	1
58·85	1+ Fe?	85·8	1+	12·2	1+
60·73	4+	92·65	1+	14·6	1+ br.
64·72	1+	2800·30	2	18·00	1+
65·98	1+	03·6	2+ Yb	22·88	1
76·13	1	17·14	30	26·20	1+ Yb
2516·91	1	18·88	2 Yb	29·05	3+ br.
67·70	2	20·0	1+ br.	30·20	4+
79·66	1	21·3	1+ Yb	30·52	3+ Be?
2603·40	2 Yb	26·53	2	31·21	1 Be?
13·52	1	31·05	1 Yb	31·42	1
15·49	3	51·26	1	35·30	1
21·24	1	54·61	2	41·1	1+
27·23	1+	56·47	1+	45·15	1 Yb
38·20	1	59·51	1	53·99	1
42·64	2 Yb	59·93	1 Yb	54·45	1+
51·83	2	61·45	1+	56·18	1

λ	i	λ	i	λ	i
3161·52	1+	3362·37	4	3455·03	1+
73·40	5+ r.	62·75	1	56·20	2
93·06	1 Yb?	64·27	1 Er	56·73	1
95·80	8	68·20	1 Er	57·35	1+ br.
3200·44	8	72·93	3 Er	58·44	1 Yb
01·27	1 Yb	74·37	1 Er	61·15	2
03·51	8	75·66	1 Yb	61·53	1+ br.
16·87	10	80·1	1+ br.	62·40	1
30·76	1 Er	85·22	3 Er	64·17	1
42·49	20	92·15	1 Er	64·56	1
54·55	1 Yb	93·74	1	67·45	1
59·25	1+ Er	95·3	1+	68·05	2
61·7	1+ br.	96·33	1+	69·17	1
64·95	1 Er	97·25	1 Yb	71·89	1 Er
67·3	1+ Er	99·10	1	72·66	2 Yb
69·55	1+ Er	3407·96	1	73·40	1
81·14	2+	13·95	1+	74·50	1
82·7	1+ br.	16·62	1+	76·51	1
82·95	1+	17·10	1+	77·27	1
89·56	8 Yb	18·91	1	79·01	3 Yb
3304·15	1+ Er	19·79	1	79·58	1 Er
08·65	1+	22·64	3	81·50	2
08·95	1+	24·10	1	81·97	1
12·58	1 Er	25·25	1	85·02	1+
16·54	1 Er	28·60	1 Yb	86·01	1+ Er
18·9	1+ br.	33·2	1+	92·17	1+
19·3	1+ Yb	34·57	1	92·76	1+
20·1	2+ r.	39·00	1+ Yb	94·63	3
23·40	1	39·35	1+	96·25	10
24·7	1+ br.	40·0	1+	99·26	3 Er
28·11	20	40·18	1	3504·70	1
31·25	2+ br.	41·35	1+	05·67	1
31·55	2+ br.	41·70	1+	07·00	1
32·90	1 Er	45·75	1+	07·55	1+ d. Yb
36·4	1+	48·98	4	08·1	1+ (Yb)
46·20	1 Er	50·60	1	08·3	1+
50·3	1+ Er?	51·40	1	08·5	1+ Er
50·66	2	53·87	1	09·32	1
58·76	2	54·23	2 Yb	12·43	1
62·20	4	54·49	1	12·70	1

λ	i		λ	i		λ	i	
3512·80	1		3592·00	1		3648·93	1	
15·10	1+		92·3	1+		50·56	1	Er
15·77	1+		92·85	1	Sa	52·69	1	
18·35	1	Er	93·11	2		53·00	1	
20·44	2	Yb	95·22	1		54·77	2	
24·15	2		98·50	1+		56·30	2	
25·04	1	Er	99·69	1		61·50	1	
31·88	4		3600·03	1		62·43	1	
35·13	2		00·90	50		64·76	20	
36·17	2		02·12	20		68·67	5+[1]	
38·66	2		05·05	1		71·37	1	
42·51	1		05·6	1+		72·48	1	
45·08	2		06·32	1		74·25	1	
47·00	1		07·62	1+		75·26	1	
49·21	20		09·67	1		75·85	1+	
50·36	1		11·19	30		76·52	1	
51·79	1		13·57	1		76·73	1	
54·60	2	Yb	14·81	1		82·85	1	
56·3	1+	br.	16·72	3	Er	85·2	1+	br.
58·37	1		17·30	1		86·50	1	
60·03	1	Er	18·01	1		87·90	1	
60·51	1	Yb	19·09	1		90·73	1+	Yb
60·86	2		19·97	1	Yb	92·84	4	Er
63·33	1		21·12	4		94·37	10	Yb
64·15	1+		28·89	10		94·95	2	
68·46	1		29·60	1		96·42	1	Er
74·05	1		30·40	2		96·9	3+	br.
74·33	1		32·26	1		97·88	1	
74·98	1+		33·28	30		98·32	1	
76·43	2		34·41	1		99·89	1	
77·05	1		35·6	2+	br.	3700·42	1	Er
80·72	1	Er	36·88	1+		01·52	1	
82·11	1		37·91	1	Yb	01·73	1	
84·71	10		40·42	1		03·01	1	
85·17	2		41·50	1+		03·55	1+	
85·63	1	Yb	45·54	4		07·78	1	
87·93	1		46·09	1	Er	10·41	100	
91·61	1		46·35	3	Sa	12·56	1	Er

[1] Kante eines Bandes, das bis 3669·20 reicht.

λ	i		λ	i		λ	i	
3712·86	2		3788·88	30		3890·79	1	Er
19·60	2		91·32	1		91·13	2	d.?
20·07	1	Fe?	92·02	1	Er	92·85	1	
24·60	1	Er	92·65	2		94·86	1	
25·62	1		92·73	2		95·99	1	
29·66	1	Er	94·56	1		96·40	2	
30·98	1		95·95	2		97·0	2+	br.
31·40	1	Er, Cy	3801·1	1+	br.	98·78	2	
33·24	1		01·50	2	(Cy?)	3900·95	1	
34·27	1		02·96	1		02·54	1	
36·10	1		05·70	1		02·90	1	
38·28	1	Er	09·90	1	Cy?	04·72	1	
39·27	1		14·12	2		05·0	1+	Yb
40·19	1		16·85	1	Cy?	06·57	4	
40·44	1	Er	18·49	10		15·10	1	
41·3	1+	Er	23·00	1		15·75	1	
42·00	1		26·00	1		16·66	2	
44·05	1		29·13	1+		22·57	1	
47·70	8		30·60	2		23·51	1	
53·93	1		33·00	20		28·45	1	
56·55	1+		37·02	1		29·45	1	
57·54	2		39·80	1		30·84	5	
59·2	1+	br.	42·36	1		31·70	1	
60·88	1		44·82	1		32·44	1	Er
61·52	1	Er	46·62	1		33·9	3	[1]
62·10	1		48·18	2		35·00	1	
68·56	3		50·85	2		37·23	1	
71·3	1+	br.	51·13	2		38·80	1	Er
74·51	100		53·16	1		39·03	1	
75·80	1	Er	54·3	1+		42·7	1+	
76·73	8		56·0	1+		43·40	1	
79·40	1		63·02	1		44·87	3	
81·2	1+	Er	63·24	1		47·12	1	
81·85	1+		72·25	3		49·25	1+	
82·50	6	r.	78·47	5		50·51	20	v.
86·34	1		80·84	2		51·76	3	
87·00	1	Er	85·44	1		57·87	1	
87·73	1		89·10	1+		59·64	1	

[1] Zum Theil von einer Ca-Linie gedeckt.

λ	i	λ	i	λ	i
3968·1	2+ br.	4055·62	1	4174·31	3
71·90	1	60·00	1	77·65	50
74·90	1	61·25	1+ Nd	81·01	1 Yb
78·74	2	62·76	1	84·41	3 Yb, Gd
82·10	1	63·54	2	86·98	1
82·75	20 r.	64·72	1	87·74	1
83·80	1	65·20	1	88·18	1
84·32	1	73·30	2	91·24	1
86·8	1+	73·94	2	95·02	1
87·4	1+	77·54	4	97·82	1
88·17	4 Yb?	78·13	3	99·46	3
91·50	1	78·60	1	4202·78	1
96·47	1	81·45	1 Er	03·20	1
96·84	1	83·89	3	04·84	6
4000·61	3	85·76	2	11·85	2
01·40	1	86·92	1	12·14	1 Gd?
08·14	1	87·85	1	15·20	1+
09·1	1+	98·79	3	17·34	1
09·36	1+	4100·77	1	18·25	1
11·46	1	02·60	6 r.	18·70	1+ Yb
12·42	1	03·49	2	20·81	1
15·77	1	03·99	1	21·20	1
20·65	1 Er	06·00	1	25·33	1+
21·02	1	09·63	1 Nd	25·43	1+
27·9	1+	11·56	1	26·00	1
28·5	1+	25·10	6	29·95	1+
31·9	1+	28·49	7	35·94	10
32·60	1	30·56	2 Gd	38·95	1
37·51	2	31·68	1+	42·32	1
38·10	1	32·46	1	44·9	1+
40·00	2	35·25	1+ Yb	46·77	1
45·64	1+	43·03	7 r.	47·53	1 Nd
47·81	3	51·35	1	51·39	1
47·98	1+	62·9	1+	51·90	2
49·63	2	63·3	1+	52·05	1+
50·02	2	65·2	1+	52·65	1+ br.
50·72	1	67·81	4	53·45	1
53·42	1	68·21	1	53·76	1
54·03	1+	70·32	1+	56·64	1
55·25	1	71·94	1+	62·25	2

λ	i	λ	i	λ	i
4262·85	1	4334·30	1	4436·37	1
76·7	1+ Er	39·8	1+	38·45	1+
79·4	1+ br.	41·43	1	43·83	1+
79·85	1+	42·32	2	44·43	1+
80·67	1	46·65	1+	49·86	1
86·93	1	48·91	1	51·75	1+ Nd
95·17	1	58·91	8 r.	54·77	1
96·25	1	64·4	1+ br.	58·70	1+
96·48	1	66·30	1+	65·50	4 r.[1]
97·32	1	69·97	1	67·52	1
4301·78	1 Er	75·11	100 u.	75·9	1+
02·45	2	84·93	1+ Er	77·10	1
03·70	1	87·84	1	77·59	1
05·03	1	91·05	1	78·85	1+
08·78	1	98·21	15	83·50	1
09·81	20	4406·81	1+	87·61	2
16·22	1+	08·4	1+	4500·95	1 Er
19·09	1	09·48	1	06·12	2
21·23	1+	19·18	1	14·70	1+
22·4	1+	19·78	1 Er	15·35	1+ Yb
23·47	1+	20·70	1	19·83	1
24·25	1+	21·35	1+	22·16	1+
25·3	1+	22·80	10	24·10	1
27·29	1	24·52	1	27·43	3
29·14	1	34·08	1	27·98	2
30·85	1+	34·49	1	40·3	1+

LV. Erbium.

Das ultraviolette Erbiumspectrum ist bisher ganz unbekannt; Lohse[2] hat zwar eine Messung desselben versucht, ist aber wegen Unreinheit der Präparate zu keinem Resultate gekommen. Mit einem von Merck bezogenen Präparat ist es uns nicht besser ergangen, indem das Spectrum desselben sich mit dem des Merck'schen Yttriums als fast identisch erwies.

[1] Violette Kante eines nach Roth abschattirten Bandes, das bis 66·2 reicht und über einer Luftlinie liegt.

[2] Lohse, l. c.

Durch die Güte des Prof. P. T. Cleve in Upsala kamen wir aber in den Besitz eines ausserordentlich reinen Präparates von Erbinerde, die wir, in Salpetersäure gelöst, auf Elektroden aus Gaskohle untersuchten. Es waren darin nur die zwei stärksten Ytterbiumlinien und vielleicht Spuren von Y und La nachweisbar. Die Linien des Erbiumspectrums zeichnen sich durch grosse Schärfe aus. Die Zahl derselben beträgt 1560.

λ	i	λ	i	λ	i
2277·74	1	2374·58	1	2399·00	3
96·30	1+	75·62	1	2402·2	1+ d
2311·30	1	76·1	1+ br.	03·47	4
23·8	1+	77·25	2	03·86	1
26·53	1	77·92	1	04·68	3
28·08	1	78·98	1	05·70	2
29·7	1+ br.	80·9	1+	06·65	1+
31·92	1	81·41	3 d.?	07·13	1
34·[illegible]	1+	81·86	1	07·45	1
38·48	1	82·20	1	08·02	3
41·9	1+	82·72	1+	08·88	1
[illegible]	1+	83·40	1 (Fe)	09·18	1
[illegible]	1+	83·99	1	09·44	1
46·7	1+	84·23	1	10·81	4 (Fe)
[illegible]	1	86·73	1	11·48	1
[illegible]	1+	87·30	1	12·12	1+
54·[illegible]	1	87·70	1	12·37	1+
54·[illegible]	1+	88·[illegible]	1	13·13	1+
[illegible]	1	89·00	1	14·47	1+
[illegible]	1+	90·25	1	15·23	1+
[illegible]	[illegible]	91·75	2	16·64	1+
[illegible]	2	92·1	1+	17·23	1+
[illegible]	2	94·20	2	18·50	1+
[illegible]	1	94·57	2	19·89	3
[illegible]	1+	94·76	1	20·35	2
[illegible]	1	95·20	1	22·11	4
[illegible]	1	95·52	1 (Fe)	23·67	1
[illegible]	1+	95·9	2+	24·25	1
67·71	1	96·32	5	25·15	2+
[illegible]	1	97·38	1	26·30	1
[illegible]	1	97·69	1	26·68	1+
[illegible]	1	98·41	2	27·15	1

λ	i	λ	i	λ	i
2427·39	1	2504·93	1+	2586·40	1
28·45	1+ Fe?	07·74	1	86·86	2
31·27	1+	08·73	3	87·16	1
31·67	2	10·05	2	89·1	1+
32·50	1+	13·60	2	89·7	1+
35·46	1	14·00	1	90·88	2
36·56	1	15·55	1+	91·99	3
39·50	1	19·98	1+	92·69	1
40·5	1+ br.	20·42	1+	95·18	1
41·3	1+ br.	24·03	2	95·67	1+
42·1	1+	26·36	1+	2601·1	1+ br.
43·54	1	29·15	2	01·63	1+
44·63	1	31·17	1+	01·83	1+
45·5	2+ br.	32·50	2	02·23	1
46·49	2	35·07	1	03·77	2
46·93	1	36·9	2+	05·05	2
50·05	1+	39·03	1	14·65	1
51·67	1	41·09	2	16·99	1
54·65	1	44·80	1	18·95	1+
58·13	1	46·06	1	21·23	1
58·41	1	47·37	1	21·82	1
58·87	1	48·72	2	24·20	1
60·2	1+	49·2	1+	24·38	1
61·45	1+	50·80	1+	26·51	1
61·99	1+	52·63	1+	33·0	1+
64·28	1	55·06	2	34·4	1+
64·72	4	57·38	2	37·15	1+
66·0	1+	58·11	1+	37·60	1
70·8	1+	61·2	1+	37·89	3
73·33	1+	61·8	1+	39·98	1
76·2	1+	64·15	1	40·76	1
77·0	1+	65·32	1	47·2	1+
79·8	1+	70·89	2	48·0	1+
80·42	1	72·5	1+	49·7	1+ br.
82·65	1+	73·2	1+	51·54	1+
85·22	3	77·5	1+	53·83	1
88·06	1+	78·8	1+	54·21	1
89·57	1+	79·69	2	57·12	1
93·90	2	80·16	2	59·00	1
2503·9	1+	81·70	1	60·15	1

λ	i	λ	i	λ	i
2666·7	1+	2725·28	1	2775·9	1—
[illegible]	[illegible]	29·10	1	76·2	1+
69·[illegible]	[illegible]	30·17	1	79·06	2
[illegible]	[illegible]	31·[illegible]	1+	79·43	1
71·[illegible]	1+	32·25	1+	79·72	1
72·[illegible]	2	33·2[illegible]	1+	81·39	1
[illegible]	1+	36·4	1+	81·76	1+
[illegible]	1	36·9	1+	82·6	1+
76·7	1+	37·80	1	83·25	1
[illegible]	1+	38·1	1+	83·85	1
[illegible]	1+	[illegible]	2	85·08	1
[illegible]	1	39·[illegible]	1	86·20	1
[illegible]	1	41·5	1+ br.	87·49	1
[illegible]	1	43·[illegible]	1+	87·79	1
[illegible]	1	44·24	2	92·62	3
83·[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	93·[illegible]	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	97·34	1
[illegible]	[illegible]	51·[illegible]	1	98·15	1+
[illegible]	1	[illegible]	1+	99·61	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1+	2803·61	1
[illegible]	1	[illegible]	1+	04·43	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	05·99	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	06·75	1+
[illegible]	1+	[illegible]	1	18·94	1
01·84	1	[illegible]	1	19·95	1
04·11	[illegible]	[illegible]	3	20·30	2
[illegible]	[illegible]	62·[illegible]	2	22·4	1+
[illegible]	1+	62·7	1+	24·43	1
[illegible]	1+	63·50	1	24·9	1+ d
[illegible]	1	64·[illegible]	1	28·00	1
[illegible]	[illegible]	65·75	1	30·46	2
[illegible]	1	66·[illegible]	1	31·3	1+
[illegible]	[illegible]	67·1	1+	33·18	1
[illegible]	1+	[illegible]	1+	34·0	1+ br.
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	38·82	2
[illegible]	[illegible]	69·53	1+	40·98	1
[illegible]	[illegible]	70·[illegible]	2	41·47	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1+	45·44	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1+	45·94	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1+	46·3	1+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2848·44	1	2928·49	1	2989·69	1
48·97	1	29·35	2	94·61	1
50·76	1	31·7	1+ br.	95·6	1+
55·51	2	32·6	1+ br.	96·5	1+
58·68	1	33·3	1+ br.	98·1	1+
59·43	1	34·67	1+	3002·53	3
59·94	2	36·10	1	02·80	2
69·33	1	39·6	1+ br.	05·25	1
72·98	1+	41·3	1+	08·3	1+
73·94	1+	41·80	1+	11·33	1
74·95	1	42·34	1	12·64	2
77·38	1	45·36	1	13·9	1+ br.
78·7	1+	46·72	2	15·47	1
79·0	1+	48·89	1	16·98	1
79·35	1+	49·33	1	17·85	1
79·50	1+	51·38	1	19·9	1+
81·2	1+	55·5	1+	20·5	1+
86·2	1+	56·55	1+	20·8	1+
87·2	1+	57·08	1	22·90	1+
88·25	1	59·00	1+	26·05	2
93·60	1+	60·22	1	27·93	1+
94·03	1+	62·65	1+	28·40	1+
96·05	1+	63·83	1	31·42	1
96·70	1	64·00	1	36·34	2
97·07	2	64·64	3	38·40	1+
97·62	3	65·99	1	42·8	1+ br.
2903·60	1	66·30	1	47·95	1+
04·58	3	68·05	1	48·52	1+
06·63	1+	68·52	1	49·41	1
09·70	1	68·87	1	50·18	1
10·48	4	71·1	1+	51·0	1+
12·95	1+	71·8	1+	53·9	1+
15·72	1	72·5	1+	54·53	2
19·0	1+	73·85	1+	55·05	1+
19·4	1+	74·61	1	56·2	1+
23·33	1	75·80	1	61·45	1+
26·81	1	83·3	1+ d.	61·85	1+
27·44	1	83·95	2	62·98	1+
27·81	1	86·6	1+ br.	63·47	1+
28·38	1	89·43	1	65·10	1

λ	i	λ	i	λ	i
3066·34	1	3119·1	1+	3159·3	1+
67·63	1	20·85	1+	59·76	1
69·34	1	21·5	1+	60·33	1
70·4	1+	22·00	1	60·47	1
70·89	2	22·80	5	61·51	1
72·64	3	23·20	1+	63·38	1
73·2	1+	23·7	1+	64·66	1
73·48	1	25·00	1	65·6	1+
78·36	1+	25·29	1	66·45	1+
78·97	1	25·76	3	67·23	1
81·5	1+	27·6	1+	69·43	1
82·22	3	31·37	3	71·38	1
84·15	3	32·17	2	71·68	1
87·20	1+	32·64	1	72·48	1
87·9	1+	32·91	3	72·80	1
88·87	1	34·01	1	73·00	1
89·15	1+	35·72	1	75·00	1
89·90	1	36·40	1	75·65	2
90·68	1	36·9	1+	77·35	1+
93·3	2+	37·95	1	78·7	1+
93·85	1+	38·60	1	79·7	2+ (Ca)
94·75	1+	40·32	1	81·83	2+
95·95	2	41·25	2	82·07	2
99·30	3	41·95	1+	83·55	2
99·71	1	42·93	1	85·36	1
3102·81	1	43·36	1	86·97	1
04·56	1	44·44	2	87·90	1
04·9	1+	44·60	2	92·78	2
05·67	1	46·2	1+	94·2	1+
06·91	1	46·7	1+	95·02	1
08·30	1	48·5	1+	95·43	1
11·01	2	50·65	1+	95·8	1+
12·07	1+	51·17	1	98·75	1+
13·65	2	52·49	1	99·15	1
15·21	1	54·40	3	3200·69	2
15·62	1	55·7	1+	02·43	1
17·04	1	57·00	1+	02·98	1+
17·60	1	57·50	1+	03·55	1
18·45	1+	57·65	1+	04·08	1
18·95	1	59·10	1+	04·66	1

λ	i	λ	i	λ	i
3205·27	2	3261·55	1+	3304·12	4 r.
07·42	1	61·83	1+	05·75	2
08·17	1	62·99	2	07·64	1
08·50	1	63·40	1	09·98	1
11·44	1	63·66	1	11·35	1+
14·58	2	64·98	5	12·61	5
15·78	1+	66·81	1	13·67	1
19·11	1+	67·30	4	13·85	2
20·87	2	69·00	1	14·59	2
21·79	1	69·14	1	15·04	1
23·45	2	69·59	3	16·22	1
24·3	1+	72·27	1	16·55	5
26·40	1	73·28	1	17·61	3
27·32	1	73·60	2	18·40	1
30·07	1	74·54	1	18·91	1
30·28	1	74·95	1	19·26	1
30·73	5	75·60	1	19·70	1
31·43	1	75·36	1	19·92	1
32·17	2	76·96	1	23·46	4
34·4	1+	77·89	1	24·85	1+
35·53	1+	78·38	2	27·02	1
36·95	1	79·51	4	27·73	1+
38·10	2	80·42	3	28·5	1+
40·40	1	83·57	1	29·80	3
40·64	2	84·20	1	31·20	1
41·68	1	85·78	1	32·88	4
43·42	1	86·34	2	34·0	1+
43·60	1	86·95	2	34·1	1+
45·0	1+	88·15	1	35·02	1
46·35	1+	89·54	2 Yb	35·50	1 d.
48·60	1	91·20	2	36·60	1
49·48	2	91·45	1	36·93	1
50·00	1	92·50	1	37·40	2
54·6	1+ br.	92·9	1+	37·94	2
55·95	1	95·4	1+	38·1	1+
56·51	1	99·60	1	39·28	1
57·9	1+	3300·8	1+	40·19	2
58·23	1	01·24	1	40·66	2
58·67	1	02·11	1	41·74	1
59·26	4	02·65	1	42·00	2

λ	i	λ	i	λ	i
3342·29	1	3383·06	1	3417·77	2
43·5	1+	83·37	1	20·10	1
43·86	1	84·27	1	20·34	2
44·52	1	84·45	1	21·20	1
44·93	1	85·26	7	22·52	1
45·63	1	86·57	1+	23·00	1
46·19	3	87·9	1+	24·75	1
46·50	1	89·74	1	25·24	3
47·12	1	89·90	1	25·77	1
47·73	2+ d.	92·16	5	28·2	1+
48·01	1	93·18	1	28·52	3
48·20	1	93·31	1	30·04	2
48·92	1	93·70	1	31·25	1+ d.
50·23	3	94·27	1	33·27	2
50·44	2	94·53	1	36·48	1
51·50	1	95·03	2	37·75	2
56·39	1	95·45	1	38·45	1
60·6	1+ br.	96·24	3	38·56	1+
61·22	2	97·01	2	41·29	3
61·85	1	97·65	1	41·64	2
62·79	2	98·20	1	42·3	1+
64·26	3	98·44	1	42·49	1
64·63	1	99·1	1+	42·76	1
66·49	1	3401·36	1	43·46	1
66·86	1	01·99	4	43·87	2
67·86	1	03·00	1	46·52	1
68·22	4	03·83	1	47·00	1
69·18	1	07·10	1	47·68	1
69·76	1	07·96	1	48·21	2
70·75	3	08·62	1	48·72	1
72·91	10	08·83	2	51·34	1+
73·80	1	09·40	1	52·44	1
74·34	3	10·01	2	53·06	1+
76·24	1	12·03	1+	53·25	1+
77·14	1	13·55	1	53·81	2
78·55	1+	13·84	1	56·15	2 d.
79·15	1	14·93	1	57·3	1+
81·25	1	16·26	1	57·40	2
81·49	1	16·65	1+	58·83	1+
82·24	1	17·41	2	59·00	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3459·52	1	3508·53	4	3551·44	1
61·55	2	10·97	1	51·95	2
62·36	3	12·05	1+	52·44	1
64·67	2	12·86	1+	53·33	2
69·24	1	13·2	1+	54·45	2+
69·90	3	15·06	3	54·81	1
71·08	1	16·15	1	56·98	1
71·27	1	16·83	1	57·95	2
71·90	4	17·09	1	58·16	2
74·12	1	18·03	1	58·86	1
74·3	1+ br.	18·32	3	60·05	3
74·86	1	19·28	1+	61·4	1+
78·10	1	20·19	2	62·05	1+
79·56	3	20·88	1+	62·73	1+
80·61	3	24·13	1	63·56	1
82·8	1+	24·70	1	64·05	1
84·71	2	25·06	3	64·6	1+
85·05	1	26·67	2	66·02	1
85·34	2	26·95	2	66·61	1
86·03	3 r.	27·29	1	67·70	1
86·99	2	28·60	1+	68·8	1+
89·53	1	30·48	1	69·40	1
90·24	1	31·41	2+	70·90	1
90·36	1	34·85	2	71·85	1
92·70	1	35·0	1+ br.	72·30	1
93·35	1	35·66	2	73·26	1
93·86	1	36·13	1	74·05	2+
94·30	1	36·33	1	74·88	1+
97·02	2	36·70	1	75·9	1+ br.
97·18	1+	37·4	1+	76·45	1+
98·9	1+	38·65	1	77·55	1+
99·29	10	39·63	3	80·69	3
3501·31	1	43·16	3	84·6	1+
02·95	1	44·5	1+	85·31	2+
03·54	1	47·70	2	85·91	2+
04·20	1	48·40	2	86·78	2
04·66	1	49·71	1	87·12	1
05·24	2	50·01	3	87·38	1
07·65	1	50·37	1	87·90	2
07·80	1	51·03	1+	88·43	1

λ	i	λ	i	λ	i
3588·85	2	3620·30	1	3652·10	1+
89·01	1	21·07	2	52·74	3
89·37	1	21·43	1	53·05	3
89·50	1	22·30	1	53·76	1
90·87	1	23·30	1	55·91	1
92·15	2	24·42	1	56·54	2
93·27	1+	24·74	1	59·00	1
94·05	1+	25·40	2	59·28	1
94·25	1+	26·51	2	59·70	1
95·2	1+	26·99	2	60·95	2
95·62	1	28·15	2	62·17	2
95·96	1	29·07	1	62·70	1
96·35	1	29·55	1	64·59	1
97·90	1	30·00	2+	65·05	1
98·99	1	30·20	3	65·41	1
99·60	5	30·40	2+	65·97	1
99·93	7	32·31	4	68·23	1
3600·87	1 Y?	32·92	2	68·69	1
01·68	1	33·69	5	68·80	1
02·10	1 Y?	34·81	1	69·17	3
04·83	3	35·46	1	71·45	1
05·01	4	36·4	1+	73·27	2
06·15	1	37·30	3	75·33	1
07·18	1	38·83	1	75·94	1
07·51	1	39·20	3	76·65	2
08·29	1	40·02	1+	78·15	2
08·99	1	41·42	4	79·03	2
09·6	1+ br.	42·07	1	79·97	1+
11·6	1+ br.	43·80	1	82·25	1
12·5	1+ br.	44·20	1+	82·86	3
13·1	1+ br.	44·85	1+	84·18	1
14·75	2	45·55	1 La?	84·44	3
16·17	1	46·10	7	85·03	1
16·70	7	46·96	1	85·32	1
17·20	1	47·87	1	85·78	1
17·92	5	47·93	1+	87·24	1
18·46	1	49·12	1	87·90	1
19·02	3	49·4	1+	89·25	2
19·54	1	50·58	4	90·46	1
20·06	1	51·90	1	91·25	1

λ	i	λ	i	λ	i
3692·80	10	3725·18	1	3759·47	1
94·39	2 d.? Yb	25·50	1	61·49	5
94·95	1	26·9	1+	62·05	3
95·26	2	28·15	1	63·39	1
96·02	1	28·98	1	64·27	1
96·40	3	29·69	5	65·20	1
97·06	3	30·80	1	66·32	3
97·82	1	31·45	4	67·90	2
98·30	1	31·95	2+	68·94	2
98·58	1+	32·94	2	70·05	1+
3700·02	1	33·73	1	71·26	2
00·40	3	34·27	2	72·63	2
00·87	3	34·60	2	75·80	4
01·52	2	34·72	2	77·24	1
01·70	2	38·30	4	77·76	2
02·01	1	39·63	1	78·46	2
02·65	1	40·43	3	79·1	1+
03·44	1	41·25	3	79·97	2
05·03	1+	42·80	4	81·20	3
06·75	1+	43·72	1	83·70	1
07·70	5	44·21	1	84·04	2
10·42	1 Y?	45·15	2	86·36	1
10·94	1	45·24	2	87·00	4
11·73	1	45·73	1	87·58	1
11·97	2	45·83	1	88·03	3
12·55	3	46·20	1	90·1	1+
14·00	1	46·79	1	90·42	1
14·21	1	47·56	2	90·69	1
15·26	1	48·22	2	91·00	1 La?
16·15	1	48·83	1	92·00	3
17·37	2	50·65	3	94·99	1 La?
18·05	2	52·14	1	95·52	1
18·74	1	55·06	1	95·91	4
19·44	2	55·61	1	97·24	3
20·57	1+	56·17	1	3807·23	2
21·62	2	56·53	2	08·12	1
23·78	2	57·02	1	08·88	1
24·09	1	57·20	1	10·47	2
24·59	4	57·7	1+	15·61	1
25·05	1	59·30	1+ La?	17·82	2 (Cy)

λ	i	λ	i	λ	i
3818·85	2	3896·00	2	3951·63	1
24·92	1	96·49	8 r.	56·52	1
25·40	3	98·72	1	57·56	2
28·31	2	99·20	1	58·24	2
30·22	1	3900·98	1	60·03	1
30·69	6	02·97	5	61·38	1
36·64	2	04·06	3+	63·49	2
37·58	1	04·74	3	64·64	2
37·81	2	05·26	1	65·90	1
38·35	1	05·60	2	66·49	1
38·5	1+	06·51	10	69·55	2
40·88	1	08·64	2	73·18	2
41·68	1	09·75	1	73·81	2
41·90	2	11·73	2	74·83	5
47·13	1	12·10	1	75·40	1
47·46	1	12·63	2	76·85	1
48·16	3	15·26	1	77·15	1
49·15	1	15·88	1	78·16	1+
50·36	1	16·64	1	78·68	1+
53·40	1	17·36	1	79·25	2
54·6	1+	18·22	1	80·27	3
56·11	1	18·52	1	80·75	1
58·55	3	18·73	1	81·22	1
63·26	1	22·05	2	81·36	1
64·96	2	23·97	1	82·46	2
68·35	1	29·77	1+	83·27	2
70·50	1	31·53	1+	83·77	1
72·30	2+	31·70	1	84·35	1+
80·85	3	32·46	4	87·77	1
85·57	1	37·18	3	88·11	1
87·34	2	37·8	1+	89·53	1
87·50	1+	38·80	4	92·37	1
88·29	2	39·1	2+	96·64	1
89·16	1+	39·50	1	98·18	1
90·00	2	43·33	2	99·31	2
90·82	4	44·56	2	4000·58	2
91·2	2+ br.	44·82	1	01·74	1
92·51	1	45·6	1+	02·85	1+
92·87	2	48·20	1	04·21	1
94·8	1+ d.	50·5	1+ Y?	04·70	1

λ	i	λ	i	λ	i
4008·10	4	4094·83	2	4198·86	1
08·31	3	97·0	2+ br.	4200·07	1
09·30	3	98·26	2	00·82	1
10·69	1	4100·72	4	01·40	1
12·76	2	04·0	1+	03·89	2
13·13	1	04·15	1+	11·88	2
14·25	1+	06·02	2	18·57	3
15·73	3	06·80	2	21·17	1
17·48	1	08·77	1+	21·55	1+
17·74	1	12·80	3	23·86	2
18·60	1	16·00	1	28·03	1+
20·66	3	16·49	1	30·35	3
21·72	1	17·02	1	32·16	1+
22·17	4	20·99	1	33·3	1+
27·9	1+	25·76	1	34·25	1+
32·65	1+	28·82	1	34·91	2
37·85	1	31·70	1	42·30	3
43·20	2 La?	35·88	1+	44·7	1+ br.
45·59	2+	36·45	1+	52·12	5
47·11	1	38·52	1	54·5	1+
48·49	3	38·90	1	55·3	1+
49·65	2	39·75	1+	56·5	1+
54·05	1	41·85	1+ La?	57·95	1+
55·20	1	43·10	5	65·07	1
55·61	5	47·5	1+ br.	72·19	1
56·05	1+	48·7	1+ br.	72·66	1+ r.
58·00	1	50·92	1+	75·35	1
59·70	1	51·27	1	76·68	3
59·96	4	51·44	1	76·95	3
62·15	1	51·95	1	78·1	1+
63·13	1	56·41	1	81·09	2
65·22	1	57·60	1	81·54	1+
68·48	1	63·16	1	82·95	1
73·32	1	64·98	1	85·80	1+
74·17	2	68·15	1	85·95	1+
78·10	1	78·72	2	86·76	2
81·43	3	86·90	1	88·5	1+
87·79	3	87·76	2	90·41	3
90·3	1+	90·14	4	92·4	1+
94·35	2	90·86	2	95·3	1+

λ	i	λ	i	λ	i
4296·5	1+	4386·59	1	4489·1	1+
97·5	1+	87·10	1+	89·3	1+ d.
99·12	1	88·55	3	90·33	1
4301·79	4	98·17	1	93·85	1+
03·98	2	98·99	1	95·71	1
06·03	1+	4402·04	1	96·56	1
07·1	1+	03·34	3	98·05	1+
08·81	1	04·00	1+	99·6	1+
10·78	1+	09·50	2	4500·2	1+
15·95	2	11·57	1	00·93	6
16·56	1	18·86	1	02·44	1
20·15	2	19·81	8	03·38	2
22·1	1+	20·75	2	03·95	1
22·84	1	22·68	4	10·43	1
24·4	1+	24·85	1	13·29	1
27·9	1+	26·94	1	16·70	1
29·02	1	32·80	1	19·63	2
30·00	1	37·51	1	20·85	2
30·46	1	37·80	1	22·81	2 d.
31·1	1+	38·94	1+	24·47	1+
31·55	1+	39·85	1+ d.	27·11	2
34·0	1+ La?	41·40	1	29·55	1+
37·17	1+ br.	46·00	1	30·55	2+
39·17	2	46·46	1	34·15	1+
41·10	1	48·77	2	40·38	1
42·00	1	58·15	1+	41·85	1+
48·51	1	59·06	1	47·8	1+
51·80	2+	59·44	2	52·31	4
56·80	1+	62·15	1+	57·09	1
57·08	1	64·80	2	61·35	1
60·07	1	68·82	1+	63·43	4
60·52	1	72·86	1	65·00	2
62·35	1+	73·70	4	66·59	2
67·92	1	74·66	1	69·00	2
69·55	2	80·38	1	69·83	1
69·7	2+	81·46	1	73·20	1
73·5	1+	82·25	1+	75·2	1+ br.
78·51	2	83·85	1+	77·98	1
82·39	1	84·67	1	81·3	1+ br.
84·90	3	86·02	1	81·90	1

λ	i	λ	i	λ	i
4584·50	1	4625·73	1	4667·80	1
87·1	1+	31·09	3	73·40	1
89·52	1	36·9	1+	75·78	6
94·87	1	38·0	1+	79·26	2
4606·80	2	40·79	2	84·8	1+
11·48	2	50·1	1+	88·81	1
12·3	1+	52·16	1	97·87	2
16·10	2	56·87	1		
24·98	1	65·61	3		

LVI. Ytterbium.

Das ultraviolette Spectrum des Ytterbiums ist bisher ganz unbekannt. Wir verdanken der Güte des Herrn Prof. L. F. Nilson in Stockholm eine ausserordentlich reine Probe von Yb_2O_3. Dieselbe wurde in Salpetersäure gelöst und auf Kohlenelektroden untersucht. Das Spectrum zeigt viele und scharfe Linien. An Verunreinigungen waren möglicherweise Spuren von Y und La vorhanden. Es muss bemerkt werden, dass den Spectren von Y, Er und Yb, in ähnlicher Weise, wie wir es schon in der Gruppe La, Nd und Pr zu beobachten Gelegenheit hatten, zahlreiche Linien mit gleicher oder angenähert gleicher Intensität gemeinsam sind, und zwar in der Weise, dass dieselben je zweien der genannten Elemente mit Ausschluss des dritten, oder allen dreien gleichzeitig zukommen. Dass man es im Ytterbium nicht mit einem einheitlichen Körper zu thun hat, dürfte auch aus dem Umstande hervorgehen, dass von 140 Linien, deren Intensität > 3 ist, im Yttriumspectrum 80 sich wiederfinden, während 60 davon fehlen; unter letzteren sind 5, deren Intensität grösser als $i = 6$ ist, obwohl viele schwächere im Y auftreten.

Die Zahl der Ytterbiumlinien beträgt 897. Auf der Sonne scheint Yb vorzukommen.

λ	i	λ	i	λ	i
[illegible]	1	2362·95	2	2363·45	1+
[illegible]	1	63·65	1+	64·05	1
[illegible]	1+	65·56	2	64·72	1
[illegible]	1	66·89	1	66·73	2
[illegible]	1	67·7	1+	69·38	1
[illegible]	1	69·54	1	81·90	2+
[illegible]	2	73·29	1	82·79	1
[illegible]	4	74·[illegible]	2	84·25	1
[illegible]	1	77·35	1+	84·99	1
[illegible]	1	80·[illegible]	1	86·43	1 Fe?
[illegible]	1	82·84	4 (Fe)	88·22	1
[illegible]	1	85·07	1	89·54	1
[illegible]	1	[illegible]	1	90·55	3 r.
[illegible]	1+	92·29	1	93·74	1
[illegible]	1	95·71	3 (Fe)	95·8	1+
[illegible]	1	98·03	1+ d.	98·43	1
[illegible]	1	99·39	2 (Fe)	2502·10	3
[illegible]	1	2404·2	1+ br.	05·55	2
[illegible]	1+	09·67	1	06·35	1+
[illegible]	1	11·62	1	10·58	1
[illegible]	1+	12·49	2	12·66	1+
[illegible]	1+	17·09	1	15·70	1
[illegible]	1	19·1	2+ br.	16·13	1
[illegible]	1+ br.	21·51	3	16·45	2
[illegible]	5 r.	22·9	1+	16·91	3
[illegible]	5	29·10	1	18·10	1
[illegible]	1	31·9	1+ br.	21·16	1
[illegible]	2	36·3	1+ br.	22·53	2
[illegible]	1	37·39	1+	25·09	1
[illegible]	1+	38·41	2	27·95	2
[illegible]	1	39·40	2	28·43	2
[illegible]·57	2+	40·7	1+ br.	29·65	2 (Fe)
[illegible]	5 (Fe)	44·64	1	36·10	2
[illegible]	1+ br.	45·36	1	37·04	1
[illegible]	2+	51·8	2+ br.	37·74	3
[illegible]	1	56·13	1+	38·26	2
[illegible]	1+	58·88	1+	38·78	2
[illegible]	1+	62·33	3	48·80	1
		64·9	1+ br.	49·47	1+
[illegible]		64·97	1	50·16	1

λ	i	λ	i	λ	i
2550·55	1	2621·24	7	2677·42	5
52·26	3	23·30	1	80·53	1
52·80	3	27·12	3	83·52	2
55·41	3	28·16	1	84·83	4
57·36	1	28·87	1+	86·1	1+
60·7	1+	32·77	1+	87·06	2
63·66	3	34·40	2	91·10	5
65·67	1	35·50	1+	92·10	1
66·95	1	36·6	1+	92·8	1+
67·74	10	38·19	6	95·52	1
71·37	2	39·53	2	96·71	1
71·46	2	40·62	3	2700·90	2
73·26	1	42·04	2	01·81	5
77·85	1+	42·69	10	04·61	1
78·86	4	43·76	2	08·95	1
79·71	8	44·41	5	09·80	1
82·35	1+	46·55	2	10·64	5 d.?
86·40	1	47·35	1+	11·91	1
88·73	1	47·58	2	12·41	4
91·16	1+	48·89	2	12·72	3
94·30	1	49·90	3	16·05	1
94·57	1	50·83	1	17·3	1+ br.
96·25	2	51·82	8	17·75	1+
96·40	2	52·33	7	18·42	5
96·83	1	53·82	10	19·10	1
97·35	3	56·21	2	22·26	2
99·25	3	56·91	1	32·84	4
2600·30	1	57·90	5	34·20	1
00·92	1+	59·85	1	36·67	1
03·40	10	60·10	2	37·72	1
04·10	1	63·55	1+	41·81	2
07·92	1	65·11	7	45·2	1+
09·18	1	66·20	15	45·8	1+
10·95	2	67·08	15	47·67	3
11·7	1+	68·81	3	48·11	1
13·48	4	72·1	1+	48·74	6
15·48	15	72·73	7	49·76	1
17·10	2	73·47	1	50·06	3
19·31	3	74·98	1	50·62	10
19·99	1	76·72	1	51·57	3

λ	i		λ	i		λ	i
2753·41	1		2823·70	1		2897·03	2
54·26	4		24·30	1+		98·46	2
55·04	1		25·09	3		99·83	2
55·86	2		28·00	1		2900·43	5
56·12	1		31·09	5		02·53	1
56·91	1		32·35	1		03·06	1
59·12	2		35·06	2		06·50	4
59·65	1		38·7	1+		06·99	1
60·91	3		41·44	1		08·22	1+
61·51	3		42·68	1		08·44	1+
64·52	2		43·11	2		09·30	1
65·67	2		47·30	2+		09·60	2
68·39	1		47·63	3		11·53	10
71·45	4		48·52	3		12·98	1
72·71	8		49·42	2		14·32	5
74·46	1		51·25	8		15·40	3
75·60	1		51·96	2		16·53	1
76·40	5		53·51	2		19·48	7
80·2	1+		53·8	1+		21·25	2
84·77	4		54·21	3		24·34	2
88·40	2		54·60	2		27·96	1
93·43	2		58·51	3	d.	35·23	2
94·56	2		59·50	4		37·32	1
94·91	1		59·92	5		38·30	1
95·20	1		60·53	3		39·64	1
95·74	5	(Mg)	61·39	9		40·68	3
96·75	4		66·28	1		42·17	1+
97·91	1		67·16	5		42·97	1+
98·30	2		70·18	2		44·57	1+
99·48	1		76·01	2		46·02	5
2800·15	3		79·26	1		46·44	2
03·56	10		82·03	1		46·86	1
04·35	1		82·17	1+		50·42	1
08·39	1		83·9	1+	br.	51·14	1
08·7	1+		86·06	1		51·80	2
10·80	1+		86·37	3		53·11	1
14·62	2		88·12	4		55·43	1
17·05	5		91·52	8		60·95	1
18·87	10		93·74	2		61·93	1
21·27	4		95·02	7	r.	62·63	2

λ	i	λ	i	λ	i
2963·49	8	3034·0	1+	3116·17	1
64·53	1	34·76	2	16·60	1
64·87	4	36·97	1+	16·77	2
65·32	1	38·10	1+	17·90	4
66·87	2	39·77	2	23·65	1
69 96	3	40·65	1+	26·20	4
70·71	3	42·30	3	27·99	1
70·95	2+	44·15	1+	29·42	1
77·63	1	44·98	1+	31·37	1
79·08	1	46·61	2	32·70	1
80·01	1	47·17	1	36·84	3
81·73	1	54·13	1	38·71	2
82·62	2	55·27	1	41·02	5
82·72	1+	56·83	5	41·82	3
83·82	1+	58·04	8	45·17	4
84·11	5	63·35	1	45·63	1
85·20	3	63·79	1	46·25	1+
85·98	1	65·17	4	49·09	1
90·51	2	67·47	1	53·30	1
92·00	2	68·40	1	53·98	4
94·06	1	71·71	1	55·30	2
94·96	5	73·80	1	58·41	3
95·99	1	74·65	1+	63·91	3
98·16	2	76·12	1	65·33	3
3000·60	5	77·71	8	69·16	4
01·42	1+	80·75	1+	71·32	1
02·17	1+	81·1	1+	73·94	1
02·74	2	84·49	1	75·88	1
05·91	10	85·90	1	81·05	4
07·00	1	87·07	1	86·72	1+
09·51	4	89·17	3	91·53	1
10·75	3	92·65	4	93·02	7
14·59	3	93·49	1	94·38	1
17·69	5	93·98	4	94·87	1
19·72	4+	95·05	1+	95·71	2
22·58	1	3101·49	2	96·16	1
23·74	1	02·17	2	96·46	1
26·78	5	07·91	5 u, r.	98·22	4
29·68	5	09·84	1	98·75	4
31·27	4	15·43	4	99·89	1

λ	i	λ	i	λ	i
3201·29	6	3312·27	1	3415·00	1+
04·80	1	15·53	2	15·20	1+
06·25	1	16·98	1	16·12	1
10·24	2	19·32	4	17·01	1
16·03	1	20·46	1	18·55	1
17·29	3	23·62	2	19·75	1+
18·42	3	24·32	2	25·24	1
21·35	1+	25·71	2	26·19	1
21·63	1+	27·90	1	28·62	4
25·97	3	31·35	1	31·27	1
26·83	1	33·18	3	34·75	2
28·70	2	37·31	1	36·60	3
29·91	1	43·19	3	38·82	3
32·09	2	47·69	4	39·00	4
36·23	2	50·10	1	41·65	1
39·27	2	51·25	1+	42·49	1
42·18	1+	52·64	1	47·02	2
54·52	6	53·88	1+	48·15	1+
59·27	2	56·03	2	54·25	15
61·67	3	57·11	2	56·37	1
61·85	2+	59·72	2	58·43	5
65·1	1+	61·75	1	59·35	1+
65·2	1+	62·79	1	60·44	1
71·36	1+	66·11	3	61·87	2
71·71	1	75·67	5	62·36	1
75·95	2	76·65	1	64·53	3
78·5	1+ br.	78·54	1	67·20	2
79·15	1	79·93	3	70·06	1
81·91	1	84·21	2+	70·95	1
87·10	2	85·70	1	72·66	10
89·52	100	87·7	1+	74·95	2
91·13	1	91·26	3	76·48	3
94·50	1	92·53	1+	78·99	20
97·99	1	94·62	2	85·90	3
3304·83	2	96·51	2	87·36	1
04·95	3	97·25	10	88·49	1
05·89	5	3401·16	3	88·96	1
06·96	2	02·43	1+	91·81	1
09·51	2	04·26	3	3502·35	2
09·65	1	08·7	1+ br.	03·87	1+

λ	i	λ	i	λ	i
3506·28	2	3606·61	8	3699·96	3
07·56	6 d.	08·62	2	3700·38	1
08·01	4	10·38	3	00·69	1
08·55	1	11·46	4	01·50	1
16·02	3	14·20	1	03·54	3
18·31	3	18·20	1	08·77	2
20·48	8	19·99	10	10·47	4 (Y?)
29·22	1	21·15	3	14·34	1
31·39	1	24·12	4	18·04	1
34·23	1	24·78	2	21·12	2
34·68	1	30·06	2	22·47	6
34·99	1	31·22	1	24·39	6
35·67	1+	32·6	1+	29·92	2
39·50	1	32·73	2	30·54	2
41·50	1+	34·67	1	32·70	1+ Cy?
42·55	2+	36·38	1	34·25	1
43·29	2+	37·90	6	37·8	1+ d.
44·25	1+	44·36	3	40·5	1+
50·00	5	47·93	1	41·77	1
51·11	1+	48·59	2	42·4	1+
52·49	2	49·90	2	44·20	1+
54·60	10	50·9	1+	44·85	1+
60·50	5	53·07	1+	48·22	1
60·90	10	53·70	1+	48·40	1
62·84	1	55·85	1+	49·87	4
64·11	3	64·70	2	50·32	1
67·29	4	64·90	2	51·9	1+
68·00	2	66·75	1	53·25	1
70·73	5	68·2	1+	54·06	1
72·66	1+	69·18	1+	54·43	1
75·71	1	69·83	5 r.	55·63	1
77·18	4	70·85	5	56·75	1
85·62	6	75·23	10	57·45	1
85·96	1	78·15	1+	59·30	1+ La?
86·96	1	87·25	2	60·10	1+
96·68	1	87·73	2	60·50	1
3600·53	2+	90·70	6	61·26	3
00·90	3 Y?	91·63	3	61·51	2
02·05	1+	94·35	200	62·08	2
03·99	2	98·71	6	62·81	3

λ	i	λ	i	λ	i
3763·89	1	3864·70	3	4051·12	1+
64·75	1	76·82	3+	51·52	1+
64·99	1	87·48	4	52·46	1
66·24	2	91·05	1+	53·05	1+
67·70	1	95·0	1+ br.	53·43	1+
68·48	2	96·3	1+ br.	54·63	1
69·96	1	96·8	1+ br.	56·32	4
70·31	3	99·85	1+	58·8	1+
73·13	1	3901·03	2	60·38	1
73·63	3	05·02	6	64·96	1+
74·49	1 Y?	06·05	2	74·85	1+
74·75	1	11·48	1	77·41	5
76·20	2 d.	13·55	1+	86·77	1
78·94	2	14·5	1+ br.	87·9	1+
79·45	2	16·05	1+	88·95	1+
81·82	2	31·50	1+	89·85	2
82·78	6	32·80	1+	91·67	2
84·20	2	34·49	2+	94·35	1+
88·64	2	37·85	1+	98·05	1
89·10	2+ d.	38·41	3	4106·02	1
90·10	2+	38·70	3	13·21	3
91·25	1	47·10	1	16·01	1
91·90	1	48·37	1+	16·35	1
94·55	3	49·74	1	23·01	2
95·95	2	58·24	1	24·89	2
99·31	1	85·8	1+	26·15	1+
3800·47	1	87·15	1+	26·30	1+
01·95	1	88·16	10	30·3	1+ br.
05·99	1	91·05	6	30·81	1
06·13	1	96·09	1	32·9	2+ br.
10·44	2	4002·80	1+	35·24	10
12·30	1	04·08	2+	41·68	1+ br.
[illegible]	1	07·10	1+	42·70	1
[illegible]	1	19·52	3	44·40	1
24·20	1	24·18	1	44·94	1
30·30	1	28·41	1+	46·90	1+
32·90	2	40·50	2	47·32	1
34·11	1	43·27	2	47·75	1+
35·50	2	47·55	2	48·05	1+
45·10	2	50·18	1+ La?	49·23	3

λ	i	λ	i	λ	i
4152·44	1	4262·2	1+	4434·35	1
67·80	1	70·8	1+	35·1	1+
70·27	3	73·55	1	39·37	2
81·01	5 r.	81·25	1+	87·48	1
84·41	10	4302·72	1	94·20	1
87·1	1+ br.	06·16	1	4515·39	4
90·48	5	17·15	5 r. (L)	18·76	3
4216·87	1+	22·38	2	41·54	1+
18·71	5	25·47	1+	53·80	3
28·10	2	39·26	1+	58·2	1+
30·36	1	42·25	2+	76·40	2
32·15	1	63·46	1+	82·55	1
34·70	2	70·98	4	98·45	3
42·31	1	79·8	2+ br.	4641·45	3+
48·10	1	89·91	1	58·20	1
52·72	3	93·01	1	70·8	1+
54·98	1	96·75	1+	84·00	2
55·98	2	4402·46	3	4713·01	1+
57·84	2	09·53	1	26·31	5

Über die Temperaturverhältnisse in der Flamme

von

Dr. **Heinrich Mache** in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juli 1898.)

Die Verbrennungserscheinungen in Gasgemischen sind von Bunsen, Berthelot und anderen Chemikern wiederholt studirt worden. Doch erstrecken sich die Arbeiten dieser Forscher nur auf homogene Gasgemische, d. h. auf solche, welche überall die gleiche chemische Zusammensetzung aufweisen. Es soll im Folgenden der Versuch gemacht werden, an die Verbrennungserscheinungen vom physikalischen Standpunkt aus heranzutreten. Doch möge auch hier die Annahme gestattet sein, dass das verbrennende Gasgemisch homogen ist. Ist hiedurch wohl im voraus die Giltigkeit unserer Schlüsse an einen bestimmten Flammentypus geknüpft, so wird doch die Behandlung dieses einfachsten Falles allen weiteren Betrachtungen vorausgehen müssen.

In einer nicht zu engen Röhre sei ein derartiges homogenes Gasgemisch enthalten, und die Explosion an dem einen Ende der Röhre eingeleitet; sie schreitet dann mit einer bestimmten Geschwindigkeit, der Explosionsgeschwindigkeit, in der Röhre fort. Der Vorgang ist hiebei der folgende: Die Schichte, in welcher die Explosion eben vor sich geht, hat eine hohe, aus der frei werdenden Verbindungswärme resultirende Temperatur, die Verbrennungstemperatur. Ist nun die angrenzende Schichte durch Leitung bis auf die Entzündungstemperatur erhitzt, so

explodirt auch diese Schichte und ebenso alle folgenden, bis die Verbindung im ganzen Gemisch erfolgt ist.

Die gleichen Verhältnisse bestehen aber überhaupt in jeder Flamme eines homogenen Gasgemisches. So sei z. B. ein Knallgas in einem Gassack enthalten und ströme unter entsprechendem Überdruck aus einem Brenner beliebiger Form in eine neutrale Atmosphäre. Man erhält eine stationäre Flamme, deren Gestalt mit dem Gasdruck und der Form des Brenners variirt. Aber auch hier findet ein fortwährendes Explodiren des ausströmenden Gases statt. Die Brennfläche bezeichnet die Stelle, an welcher die Explosion vor sich geht. Dass die letztere scheinbar nicht fortschreitet, rührt davon her, dass sich hier das explodirende Gasgemisch selbst der Explosion entgegenbewegt, und zwar offenbar mit derselben Geschwindigkeit, mit welcher die Explosion fortschritte, wenn das Gasgemisch in Ruhe wäre. Diese Geschwindigkeit ist aber die Explosionsgeschwindigkeit. Es ist also die Brennfläche einer homogenen Flamme für das strömende Gasgemisch stets eine Fläche gleicher Geschwindigkeit, d. h. die Normalcomponente der Geschwindigkeit des in die Brennfläche einströmenden Gases ist überall die gleiche, und zwar gleich der Explosionsgeschwindigkeit des betreffenden Gasgemisches.

Je grösser daher diese Explosionsgeschwindigkeit ist, desto näher wird unter sonst gleichen Umständen die Brennfläche an die Ausströmungsöffnung heranrücken. Es erklärt sich hieraus das Kleiner- und Grösserwerden der Flamme bei Vermehrung, respective bei Verminderung des Sauerstoffgehaltes des ausströmenden Gemisches, eine Erscheinung, die sich bekanntlich auch leicht an den inhomogenen Gebläseflammen beobachten lässt.

Wir wollen versuchen, auf Grund der bisher entwickelten Anschauung die Temperaturen im Innern einer homogenen Flamme zu berechnen.

MN sei die Brennfläche. Das Gasgemisch ströme von rechts in der Richtung des Pfeiles gegen dieselbe. Die Brennfläche sei stationär. Dann ist die Geschwindigkeit dieser Strömung gleich der Explosionsgeschwindigkeit c. Ferner wissen wir, dass sich das Gas, bis es die Brennfläche passirt, durch Wärme-

leitung erwärmt hat, und zwar genau bis zur Entzündungstemperatur τ. Es ist dann auch offenbar die Explosionsgeschwindigkeit als diejenige Geschwindigkeit zu definiren, mit welcher das Gasgemisch sich gegen die Brennfläche von der Verbrennungstemperatur T bewegen muss, um dieselbe mit der Entzündungstemperatur τ zu passiren. Die Temperaturvertheilung rechts von der Brennfläche wird während des ganzen Processes stationär sein, d. h. zu jeder Abscisse x gehört stets eine ganz bestimmte Temperatur U. Diese Temperaturen sollen auf die absolute Temperaturscala bezogen werden. Ist t die Anfangstemperatur des Gases, so ist für $x = \infty$, $U = t$. Weiters ist für $x = 0$, $U = \tau$.

Man greife jetzt zwei Schichten heraus, die aneinander stossen. Die erste Schichte habe die Temperatur U, die zweite



die Temperatur $U+dU$. Ist k die Wärmeleitungsconstante, so ist $-k\frac{\partial U}{\partial x}$ die durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit fliessende Wärmemenge. Hievon bleibt $k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ in der Raumeinheit der Schichte zurück. Sollen nun die Temperaturverhältnisse stationär sein, so muss das Gas von der Temperatur U, welches sich in der Schichte befindet, von rechts her so oft durch Gas von der Temperatur $U+dU$ ersetzt werden, dass die Wärmemenge $k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}dx$ eben hinreicht, um das nachströmende Gas auf die Temperatur U zu bringen. Ist also ρ die Dichte,

C die specifische Wärme des Gases bei constantem Druck und muss die Schichte in der Zeiteinheit n-mal erneuert werden, so gilt die Gleichung

$$-n dx \rho C dU = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx.$$

Es ist aber ndx gleich dem von einer Partie des Gases in der Zeiteinheit zurückgelegten Wege, also gleich der Explosionsgeschwindigkeit c. Dann gilt für den stationären Zustand auch die Beziehung

$$\frac{k}{C} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho c \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Hierin sind aber noch die Grössen k, C, ρ und c als Functionen der Temperatur U auszudrücken.

Was zunächst das Product ρc anbelangt, so ist dasselbe offenbar von der Temperatur unabhängig, da die in der Zeiteinheit passirende Masse des Gases für alle Querschnitte die gleiche sein muss. Wir schreiben also $\rho c = \rho_0 c_0$, wo sich ρ_0 und c_0 auf den Eispunkt beziehen. Ferner setzen wir in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von Mallard und Le Chatelier[1] $C = \gamma + \beta U$. Endlich führen wir für die Abhängigkeit der Wärmeleitungsconstanten von der Temperatur diejenige Beziehung ein, welche sich übereinstimmend mit den Schlüssen der Gastheorie aus den Experimentaluntersuchungen von Winkelmann, Grätz und Christiansen[2] ergibt, nämlich $k = K\sqrt{U}$, eine Beziehung, welche freilich nur für Gase einfacher Constitution gelten dürfte. Die Gleichung für den stationären Zustand lautet dann

$$\frac{K\sqrt{U}}{\gamma + \beta U} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho_0 c_0 \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

---

[1] C. R. 104, p. 1780, 1887.

[2] Winkelmann, Handbuch der Physik, II, 2, S. 317.

und deren allgemeine Lösung

$$x = -\frac{1}{2}\frac{K}{\rho_0 c_0}\int\frac{dU}{\frac{\beta}{3}U\sqrt{U}+\gamma\sqrt{U}+C_1}+C_2,$$

wo die Constanten C_1 und C_2 aus den oben erwähnten Grenzbedingungen zu bestimmen sind.

Um einen concreten Fall zu geben, soll diese Formel auf eine homogene Flamme angewendet werden, die durch Wasserstoffknallgas gespeist wird. Hier sind wir berechtigt, die specifische Wärme constant, d. h. $\beta = 0$ zu setzen. Es haben dies nämlich Mallard und Le Chatelier[1] für die Gemische zweiatomiger Gase bis zu den hohen Verbrennungstemperaturen nachgewiesen. Dass dasselbe für niedrigere Temperaturen gilt, ist bereits oft gezeigt worden. Auch gelangen Valerius und Quesneville,[2] jeder für sich, zu dem Schlusse, dass alle Gase bei genügend hoher Temperatur diese Constanz der specifischen Wärme aufweisen. Man wird also umso weniger Bedenken tragen, dies für Gase anzunehmen, die schon bei niedrigeren Temperaturen eine solche Constanz zeigen. Für diesen Fall wird, wie man sich leicht durch Rechnung überzeugt,

$$x = -\frac{K}{c_0\rho_0\gamma}\left[\sqrt{U}+C_1\log(\sqrt{U}-C_1)-C_2\right].$$

Hierin ist $C_1 = \sqrt{t}$, $C_2 = \sqrt{\tau}+\sqrt{t}\log(\sqrt{\tau}-\sqrt{t})$.

Für Wasserstoffknallgas ist nach J. Plank[3] $K = 0\cdot00001176$, wenn man das Leitungsvermögen der Luft bei 0° C. gleich $0\cdot0000525$ setzt. Nach Regnault ist weiters $\rho_0 = 0\cdot0005347$ und $\gamma = 0\cdot2801$. Ferner findet Bunsen[4] $c_0 = 3400\,cm/\text{sec.}$ und $\tau = 1017$ (744° C.). Endlich setzen wir $t = 273$, d. h. wir nehmen an, dass das Gas die Anfangstemperatur von 0° C. besitze. Die folgende kleine Tabelle gibt dann ein Bild von der Temperaturvertheilung im Inneren der Knallgasflamme.

[1] L. c.

[2] Beibl. IV, S. 350 und 353.

[3] Diese Sitzungsber., Bd. 72, S. 269, 1875.

[4] Gasometrische Methoden, 2. Aufl., S. 306 ff

Temperatur in Celsiusgraden	Abstand von der Brennfläche in Centimetern
744	0·00000
600	12
400	33
200	65
100	94
50	122
20	141

Man sieht, dass die Temperaturen mit der Entfernung von der Brennfläche ungemein rapid abnehmen, was in Anbetracht der grossen Explosionsgeschwindigkeit des betrachteten Gasgemenges und der geringen Wärmeleitungsfähigkeit der Gase überhaupt nicht überraschen wird.

Wir wenden uns noch zur Betrachtung der Temperaturverhältnisse in der Brennfläche selbst. In ihr stossen nach der obigen Auseinandersetzung zwei Schichten unmittelbar aneinander, von denen die erste die Entzündungstemperatur τ, die zweite die Verbrennungstemperatur T besitzt. In Wirklichkeit wird dies freilich nie ganz der Fall sein können, da es in der explodirenden Schichte einer gewissen Zeit bedürfen wird, ehe in ihr die Verbindung völlig vor sich gegangen ist. Immerhin zeigt es sich, dass wenigstens bei rasch explodirenden Gasgemengen dieser Grenzfall nahezu erreicht ist.

Wir können nämlich zunächst einen Ausdruck für die Wärmemenge ableiten, welche durch die Brennfläche in der Zeiteinheit passiren würde, falls der Grenzfall vollkommen erreicht wäre. Anderseits lässt sich aber die Wärmemenge angeben, welche thatsächlich durch die Brennfläche passirt. Ein Vergleich dieser beiden Grössen gestattet ein Urtheil über die erreichte Annäherung an den Grenzfall.

Um den ersten Ausdruck zu gewinnen, bedienen wir uns der Betrachtungsweise Meyer's.[1] Hiebei gelte die Brennfläche

[1] O. E. Meyer, Theorie der Gase, §. 141.

als eine feste, undurchdringliche Wand von der Eigenschaft, dass sie alle aufliegenden Molekel festhält und deren lebendige Kraft aufnimmt. Die Differenz der so von links und rechts her auf die Brennfläche gelangenden lebendigen Kräfte liefert die gesuchte Wärmemenge im Arbeitsmaass. Es gelangt zu einem Elemente df der Trennungsfläche etwa von links her, also im Sinne der wachsenden Abscissen, eine gewisse Anzahl Molekel, welche mit dem Geschwindigkeitsvector ω aus dem durch die sphärischen Coordinaten r, s, φ bestimmten Volumelemente $r^2 dr \sin s ds d\varphi$ in der Zeiteinheit herausfliegen. Diese Zahl ist $N\left(\frac{km}{\pi}\right)^{3/2} B e^{-B\frac{r}{\omega}} e^{-km\omega^2} \omega^2 d\omega df \cos s \sin s ds dr d\varphi$. Hierin ist m die Masse einer Molekel, N deren Anzahl in der Raumeinheit, ferner B die Zahl der Zusammenstösse in der Secunde, endlich $k = \frac{3}{2mG^2}$, wo G^2 das mittlere Geschwindigkeitsquadrat bedeutet.

Um die lebendige Kraft zu erhalten, welche auf df durch diese Molekel übertragen wird, ist der obige Ausdruck mit $\frac{m}{2}\omega^2$ zu multipliciren. Um endlich die gesammte von links her in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit übertragene Energie zu erhalten, ist nur noch zu integriren; und zwar nach df über die Flächeneinheit, nach s von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, nach φ von 0 bis 2π, nach ω und r von 0 bis ∞. Es ist nach Ausführung der ersten drei Integrationen

$$E = NB\left(\frac{km}{\pi}\right)^{3/2} \frac{m\pi}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega dr e^{-B\frac{r}{\omega}} e^{-km\omega^2} \omega^4 =$$

$$= Nm\left(\frac{km}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{k^3 m^3}.$$

Setzt man für k seinen Werth und berücksichtigt, dass $Nm = \rho$ gleich der auf Wasser von 4° C. bezogenen Dichte des Gases ist, so wird auch auch $E = \sqrt{\frac{2}{27\pi}}\rho G^3$. Analog ist die von

rechts her übertragene Energie $E' = \sqrt{\frac{2}{27\pi}}\rho' G'^3$. Die Differenz dieser beiden Ausdrücke liefert uns die gesuchte Wärmemenge

$$W = \sqrt{\frac{2}{27\pi}}(\rho G^3 - \rho' G'^3).$$

Anderseits ist es aber leicht, die Wärmemenge zu berechnen, welche thatsächlich durch die Brennfläche im Sinne der wachsenden Abscissen passirt; denn da es sich um einen stationären Vorgang handelt, ist diese gesuchte Wärmemenge W' auch gleich der Wärmemenge, welche in entgegengesetzter Richtung die Brennfläche passirt. Es ist also

$$W' = Ac_0\rho_0\gamma\tau,$$

wo A das Arbeitsäquivalent der Wärme bezeichnet.

Die Realisirung des oben besprochenen Grenzfalles wird somit an die Erfüllung der Gleichung $W = W'$ gebunden sein.

Wir wollen wieder untersuchen, inwieweit die Flamme des Wasserstoffknallgases dieser Bedingung genügt. Die Brennfläche trennt hier Wasserdampf und Knallgas. Der erstere hat die Verbrennungstemperatur, welche nach Bunsen etwa 2800° C. beträgt, das letztere die Entzündungstemperatur, welche wir zu 744° C. angenommen haben.

Wir setzen ferner

$$\rho = 0\cdot0000716, \quad \rho' = 0001435$$
$$G = 206100, \quad G' = 145400.$$

Es ist dann $W = 285.10^8$. Dagegen ist nach den oben für c_0, ρ_0 und γ gemachten Annahmen $W' = 158.10^8$. Es sind also die beiden Werthe nicht nur der Grössenordnung nach gleich, sondern auch numerisch nicht allzu verschieden. Zudem ist W aus zwei Gründen noch zu gross. Es stossen nämlich erstens die beiden Schichten auch im Grenzfalle nicht in einer Fläche, sondern in einer Schichte von den Dimensionen der molecularen Weglänge zusammen. Zweitens aber ist die Verbrennungstemperatur zu hoch gegriffen. Die hiefür gewählte Temperatur

von 2800° C. bezieht sich nämlich auf Gas, welches bei constantem Volumen verbrennt. In unserem Falle kann sich jedoch das Gas ungehindert ausdehnen.

Nach Allem findet somit thatsächlich in der Brennfläche eine so ungemein rapide Steigerung der Temperatur von der Entzündungstemperatur zur Verbrennungstemperatur statt, dass bei Gasgemischen von grosser Explosionsgeschwindigkeit die Continuität des Temperaturgefälles nur innerhalb molecularer Dimensionen erhalten bleibt. Die Temperaturverhältnisse in der Brennfläche haben somit — wie wir es vorausgesetzt haben — wirklich den Charakter eines Temperatursprunges. Derselbe tritt hier an der Grenze zweier Gase auf. Für Wasserstoffknallgas ist der Coëfficient dieses Temperatursprunges

$$\gamma = \frac{(T-\tau)k}{c_0 \rho_0 \gamma \tau} = 0 \cdot 002.$$

Beiträge zur Kenntniss des verschiedenen Verhaltens der Anode und Kathode bei der elektrischen Entladung

von

Karl Przibram.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 1 Doppeltafel.)

Bei der Fülle von Beobachtungen, welche aus diesem Gebiete vorliegen, erscheint es fast anmassend, hier noch etwas Neues bieten zu wollen. Doch hoffe ich, dass diese Arbeit eher dazu beitragen wird, die Erscheinungen etwas zu klären, als sie zu verwirren, da es mir, wie ich glaube, gelungen ist, einen Zusammenhang zwischen bis jetzt getrennten Beobachtungsgebieten festzustellen. Die Versuche, bei welchen sich die polaren Unterschiede der elektrischen Entladung geltend machen, lassen sich im Wesentlichen in folgende Gruppen fassen:

1. Der Lullin'sche Versuch;
2. die elektrischen Figuren (Hauchbilder, Lichtenberg'sche Figuren, Elektrographien);
3. die Lichterscheinungen der elektrischen Entladung in Gasen;
4. der Faraday'sche Verzweigungsversuch (Ventilwirkung);
5. die Himstedt'schen Versuche über das Ausströmen der Elektricität an Teslapolen.

Es schien nun wünschenswerth, zu untersuchen, wie Änderungen der Versuchsumstände auf diese einzelnen Erscheinungsgruppen wirken.

Was zunächst den Lullin'schen Versuch betrifft, so wird er durch Änderung der Elektrodendistanz, des Luftdruckes und der chemischen Natur des umgebenden Gases kaum beeinflusst.[1] Die Erscheinung ist hauptsächlich vom festen Isolator abhängig. Hieraus kann man einen für die elektrischen Figuren wichtigen Schluss ziehen. Bei diesen ist zweierlei zu untersuchen: der Vorgang im Gase und der Einfluss des festen Isolators. Letzterer wird, wie der Lullin'sche Versuch zeigt, die Erscheinung gegen Änderungen, die von verschiedener Beschaffenheit des Gases herrühren, stabiler machen. Können nun solche Änderungen in den Figuren beobachtet werden, so werden sie eher in stärkerem Maasse auftreten, wenn kein fester Isolator zugegen ist, d. i. bei der Entladung im freien Gase. Es dürfte daher gestattet sein, die elektrischen Figuren, wie sie im Folgenden beschrieben werden sollen, als Abbildungen der Gasentladung zu betrachten und die aus ersteren gewonnenen Schlüsse auf letztere zu übertragen. Ich werde bei der Beschreibung der Figuren Gelegenheit haben, auf ähnliche Beobachtungen an Gasentladungen hinzuweisen.

Elektrische Figuren auf photographischen Platten.

Als Recipient dient ein Glascylinder von 11 *cm* Durchmesser und 9 *cm* Höhe, dessen Mantel in mittlerer Höhe mit drei Bohrungen im Abstande von je 90° versehen ist. Die zwei gegenüber liegenden dienen zur Aufnahme der Elektroden, die dritte zur Verbindung mit der Luftpumpe. Die Elektroden sind stumpfe Kupferdrähte von 1 *mm* Durchmesser und sind so gerichtet, dass sie leicht auf der am Boden des Cylinders liegenden Platte aufruhen. Der Cylinder wird oben durch einen Zinkdeckel geschlossen, der mit einem der Gaszufuhr dienenden Schlauchansatz versehen ist. Als Elektricitätsquelle dient eine kleine Wimshurstmaschine, deren Pole mit Zwischenschaltung je einer kleinen Leydenerflasche mit den Elektroden in Verbindung stehen, so dass jedesmal, wenn ein Funke zwischen

[1] Reitlinger (Wiener Ber., 41 [1860], S. 759) kann eine von Tremery bei 5" Druck beobachtete Umkehrung des Lullin'schen Versuches nicht bestätigen. Mach und Doubrava (Wien. Ber., 80 2, S. 334) finden, dass sich der Versuch in CO_2 nicht umkehrt.

den Polen der Maschine überspringt, eine Entladung über die Platte geht. Die Zuleitungen sind so gewählt, dass Schwingungen möglichst vermieden werden, ohne dass die Entladung den disruptiven Charakter verliert.

Aufnahmen in Luft.

1. Bei normalem Drucke.[1] Elektrodendistanz circa 40 *mm* (Tafel, Fig. 1). Von der positiven Elektrode gehen nach allen Richtungen gezackte und verästelte (geweihförmige) Zweige aus, die zum grösseren Theile frei in einer Spitze endigen, zum Theile (und zwar die, deren Richtung mit der Verbindungslinie der Pole einen kleinen Winkel einschliessen) sich nach einwärts krümmen und mit den näher an der Mittellinie verlaufenden Ästen zu wenigen breiteren Strängen verschmelzen. Diese Stränge münden dann weiter in den runden, in Sectoren getheilten Fleck ein, welcher die negative Elektrode umgibt. Der Verlauf der positiven Lichtfäden ist ganz ähnlich den Kraftlinien für zwei entgegengesetzt geladene Punkte, wenn man dabei berücksichtigt, dass während der Entladung der Schwerpunkt der negativen Ladung sich gegen den positiven Pol zu verschiebt. Daraus erklärt sich die stärkere Krümmung der Zweige in der Nähe des negativen Poles.

Die Strecke von der positiven Elektrode zur Stelle, wo die beiden Figuren sich berühren, verhält sich in diesem Falle zu der von der negativen Elektrode bis ebendahin etwa wie 5 : 1. Nimmt nun die Elektrodendistanz ab, so reichen mehr Stränge bis an die negative Figur. Zugleich nimmt das oben angeführte Verhältniss (der Kürze halber möge es Entladungsverhältniss genannt werden) ab, d. h. die Berührungsstelle der beiden Figuren rückt gegen die positive Elektrode.[2]

---

[1] Die prächtigsten derartigen Figuren in freier Luft sind enthalten in: Lord Armstrong, Electrical movement in air and water, 1897.

[2] O. Lehmann (Elektr. Lichterscheinungen, S. 216) beschreibt eine Entladung im elektrischen Ei, in welchem bei Vergrösserung, respective Verkürzung der Elektrodendistanz das negative Büschel unverändert bleibt und nur das positive wächst, respective sich verkürzt. Also wächst auch hier das Entladungsverhältniss mit der Elektrodendistanz.

Die folgende Tabelle zeigt inwieweit dies richtig ist:

Elektrodendistanz	49	48	46	41	40	39	36	34 *mm*
Entladungsverhältniss	7·16	5	4·2	5	6·5	4·57	4·75	4·66

Elektrodendistanz	32	31	28	25	21	17	12	11 *mm*
Entladungsverhältniss	3·7	3·35	3·5	3·07	2·29	2·1	1·8	1·66

Bei einer bestimmten Elektrodendistanz (32 der Tabelle) tritt ein Funken auf, der jedoch den Charakter der auf demselben Bilde sichtbaren Büschel nicht wesentlich verändert. Nur zeigt sich auf solchen Bildern oft eine auffallende Erscheinung (Fig. 2): einzelne Äste des positiven Büschels erscheinen auf der Photographie dunkel auf hellem Grunde, und zwar die dem Funken abgewandte Seite dunkler, so dass die ganze Figur reliefartig hervortritt.

2. Bei Verdünnung der Luft beobachtet man eine Abnahme der Zahl der positiven Zweige, dagegen eine Zunahme ihrer Breite.[1] Zwischen den einzelnen Zweigen treten Seitenentladungen auf in Form dünner Fäden mit stärkerer Lichtentwicklung an den Vereinigungsstellen mit den Zweigen. Diese Seitenentladungen ordnen sich bisweilen in regelmässigen Curven an (Fig. 3, 300 *mm*). Die Hauptzweige des positiven Büschels weisen manchmal abwechselnd hellere und dunklere Stellen auf, die etwas an die in Geissler'schen Röhren beobachteten Schichten erinnern. Die hellen Stellen bilden in der Regel die Abzweigstelle eines Seitenzweiges (Fig. 4, 400 *mm*). Bei fortgesetzter Verdünnung verschmelzen die mittleren Zweige der Entladung in ein einziges Lichtband, die äusseren positiven Zweige nehmen die Form breiter Lappen an, die an der Anode einen verschwommenen Fleck zur gemeinsamen Basis haben. Wie bei Verkürzung der Elektrodendistanz, so nimmt auch bei Erniedrigung des Druckes das Entladungsverhältniss ab. Von 200 *mm* an werden die Figuren verschwommen, so dass sich die Vereinigungsstelle der beiden Figuren nicht mehr feststellen lässt. Sonst ist sie meist leicht kenntlich durch die Verengung des Entladungsgebietes, sowie der einzelnen Zweige,

[1] Dies stimmt uberein mit den Zeichnungen einer Büschelentladung bei verschiedenem Drucke in »Elektrische Lichterscheinungen« von O. Lehmann, Tafel I.

auf manchen Bildern ist sie sogar durch eine dunkle Zickzacklinie markirt. Verbindet man die Stellen, an denen sich die Zweige des positiven Büschels mit den Sectoren der negativen Figur vereinigen, so erhält man eine gegen die negative Elektrode concave Curve (die Begrenzung der negativen Figur). Nimmt man daher das Entladungsverhältniss nicht für die Mitte, sondern für einen Seitenzweig, so erhält man einen grösseren Werth. Diese Zweige entsprechen also ihrer grösseren Länge gemäss einer Entladung von grösserer Elektrodendistanz. (Fig. 5, 300 *mm*; Fig. 6, 200 *mm*.)

Elektrodendistanz 39 *mm*:

Druck in Millimetern Hg	760	500	400	300
Entladungsverhältniss	4·57	3·3	2	1·6

Aufnahmen in CO_2.

Schon bei normalem Drucke sind die beiden Figuren einander in Grösse und Form viel ähnlicher als in Luft. Dem grösseren Widerstande entsprechend sind beide von geringerer Ausdehnung. Die positive stimmt der Form nach mit der in Luft überein, die negative Figur dagegen besteht aus zerfaserten Ästen, von denen die längsten sich mit den positiven Strängen vereinigen (Fig. 7, 600 *mm*). Das Entladungsverhältniss wurde für 44 *mm* Elektrodendistanz und bei normalem Drucke zu 3·7 gefunden. Wie in Luft, so nimmt es auch hier mit dem Drucke ab. Diese Abnahme geht so weit, dass bei einem der jeweiligen Elektrodendistanz entsprechenden Druck (37 *mm* Elektrodendistanz, 100 *mm* Druck) die negative Figur die positive an Grösse übertrifft. Dann erscheint auch die Gestalt der Figuren vertauscht; die positive ist ein abgerundeter Fleck, höchstens mit kurzen stumpfen Fortsätzen, die negative dagegen weist lange verzweigte Äste auf.[1] (Fig. 8, 100 *mm*.)

Aufnahmen in Wasserstoff.

Die Figuren sind, dem geringen Widerstand entsprechend, ausgedehnter als in Luft, die positiven Zweige geringer an

---

[1] Reitlinger (Wien. Ber., 43/2, 1861) fand in CO_2 den Durchmesser der negativen Lichtenberg'schen Figur grösser als den der positiven, dass aber der

Zahl und von grösserer Breite. Für Wasserstoff eigenthümlich sind kleine haarfeine Büschel an den freien Enden der positiven Äste. Die negative Figur ist mehr zertheilt als in Luft. Das Entladungsverhältniss ist für 48 *mm* Elektrodendistanz:

Druck	760	360	260
Entladungsverhältniss	3	1·8	1.

Aufnahmen in Sauerstoff.

Figuren kleiner als in Luft, sonst sehr ähnlich. Innerhalb der negativen Figur sieht man auf allen Bildern eine kleine positive Figur, nämlich einen Kranz von kurzen, spitzendigenden, bisweilen gekrümmten Strahlen. Solche Figuren erhält man auch in Luft, wenn im Entladungskreise nicht genügend Widerstand eingeschaltet ist; sie rühren daher von einer zweiten Stromschwankung in entgegengesetzter Richtung her. Das Entladungsverhältniss ist in der Richtung der Entladung genommen (Elektrodendistanz = 36, Druck 760 *mm*) = 5 (für Luft 4·7), dagegen senkrecht zur Entladungsrichtung = 4·4 (für Luft 4·8).

Aufnahmen in Stickstoff zeigen nichts Bemerkenswerthes.

Eine andere Art von Figuren auf lichtempfindlichen Platten, die ihrem Aussehen nach ganz den Lichtenberg'schen Figuren entsprechen, erhält man, wenn man nur eine Elektrode auf die Platte aufsetzt. Vergleichung der Grösse der so erhaltenen Figuren in Luft von verschiedenem Drucke[1] ergab:

Formunterschied derselbe blieb wie in Luft. Eine ähnliche Erscheinung scheint nach einer Beobachtung von Holz (vergl. O. Lehmann, Elektrische Lichterscheinungen) in Leuchtgas stattzufinden. Er fand, dass bei Ersetzung der Luft durch Leuchtgas das bei Anwendung einer Spitze als Elektrode auftretende lange positive Buschel sich verkürzt und tellerartig wird, während der an einer Kugel gebildete negative Lichtkegel in ein langes Büschel übergeht.

[1] Reitlinger fand für das Verhältniss der Lichtenberg'schen Figuren (Wiener Ber., 41 [1860], S. 358):

bei einem Drucke von	20″ 10·8‴	20″	15″	10″
die Werthe	2·08	1·7	1·66	1·64.

Ähnliche Zahlen von Bezold (vergl. Wiedemann, Elektricität). Dagegen findet Sieben (Berl. Ber., 25, S. 395), dass die positive Figur auf der photographischen Platte rascher wächst als die negative. Die Platte lag in diesem Falle auf einer Metallplatte.

Druck 760 560 360
Verhältniss der Durchmesser der positiven
und negativen Figur.................4·5 5 4·8,

jedenfalls geringere Änderungen als die, welche die zweipoligen Figuren aufweisen. Die isolirende Platte übt hier wohl einen stärkeren Einfluss, als wenn sich zwei Elektroden auf derselben Seite der Platte befinden.

Analoges Verhalten der Gase bei den elektrischen Figuren und den Himstedt'schen Versuchen.

So wie die elektrischen Figuren im Wesentlichen mit den Lichterscheinungen der ungestörten Gasentladung übereinstimmen, so stehen sie auch in einer bemerkenswerthen Beziehung zu den Himstedt'schen Versuchen. Ordnet man nämlich die untersuchten Gase nach der Grösse ihres Entladungsverhältnisses, so erhält man eine Reihe, die mit der von Prof. Himstedt[1] für die Ausströmung eines Teslapoles aufgestellten ziemlich übereinstimmt.

Gas	Zahl der Aufnahmen	Mittlere Elektrodendistanz	Entladungsverhältniss	Ausschlag eines Elektroskopes unter Einfluss eines Teslapoles
Luft	6	39	4·5	+1000 bis 1200
O	4	36	4·1	+ 300 » 400
H	3	49	3·5	— 100 » 200
N	7	41	3·2	— 200 » 300
CO_2	10	40	2·6	— 600 » 700

Hier ist das Entladungsverhältniss senkrecht zur Entladungsrichtung genommen und die angegebenen Zahlen sind Mittelwerthe aus mehreren Aufnahmen.

Der Faraday'sche Verzweigungsversuch.

Auch bei diesem Versuche lassen sich gewisse Analogien mit den elektrischen Figuren auffinden. Werden der elektrischen

[1] Wied. Ann., 52, S. 473.

Entladung zwei Wege geboten: einer von einer Kugel zu einer Spitze und einer von Spitze zu Kugel, so geht die Entladung bei normalem Luftdruck und grösserer Elektrodendistanz zwischen der positiven Spitze und der negativen Kugel über. Dieses Verhalten kehrt sich jedoch um, wenn entweder die Elektrodendistanz[1] oder der Luftdruck[2] vermindert wird. Auch kann man beobachten, dass, je näher man der Umkehrstelle kommt, die Erscheinung umso weniger stabil ist, d. h. die Entladung springt leicht auf den anderen Zweig über. Es entspricht dies der Abnahme des Entladungsverhältnisses, d. i. dem Ähnlicherwerden der beiden elektrischen Figuren.

In CO_2 scheint die Umkehrung des Verzweigungsversuches früher, d. h. schon bei grösserer Elektrodendistanz einzutreten als in Luft; dies würde wieder dem Verhalten bei den Himstedtschen Versuchen entsprechen.

Doch konnte der Versuch zur Vergleichung verschiedener Gase noch nicht genügend exact angestellt werden.

Versuch einer Erklärung der Unterschiede der elektrischen Figuren.

Es soll nun auf Grund der angeführten Beobachtungen eine Erklärung der verschiedenen Ausdehnung der beiden elektrischen Figuren versucht werden. Dabei will ich zunächst über den eigentlichen Mechanismus der Entladung keine nähere Annahme machen, nur soviel glaube ich sagen zu dürfen, dass die beiden Figuren durch wesentlich gleiche Vorgänge (nicht etwa Gasentladung einerseits, fortgerissene Metalltheilchen anderseits) hervorgerufen werden, da ja die negative Figur ganz allmälig positiven Charakter annehmen kann und umgekehrt. Die Frage, ob wir in den beiden Elektricitäten überhaupt zwei qualitativ verschiedene Dinge vor uns haben, wird hievon nicht berührt und soll auch hier nicht weiter behandelt werden. Zur Erklärung der verschiedenen Ausdehnung bestehen zunächst folgende Möglichkeiten:

---

[1] Marianini (vid. Righi, Nuovo Cimento, Serie 2, Tom. XVI), p. 106) und Dubrava (vergl. Wiedemann's »Elektricität«, §. 1060).

[2] Hagenbach (Wied. Ann., Bd. 63) beobachtete bei fortgesetzter Verdünnung mehrere Umkehrungen.

1. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Entladungsvorgang sich von den beiden Elektroden aus fortpflanzt, ist verschieden;

2. die Entladung beginnt an einem Pole früher als an dem anderen. Die grössere Ausdehnung der positiven Figur erklären folgende Combinationen:

a) Die Entladung breitet sich bei gleichzeitigem Beginne mit grösserer Geschwindigkeit vom positiven Pole aus fort;

b) sie beginnt am positiven Pole früher als am negativen, bei gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit;

c) es findet *a)* und *b)* statt;

d) die Entladung beginnt am positiven Pole früher und breitet sich langsamer aus;

e) sie beginnt am positiven Pole später und breitet sich rascher aus.

Um zwischen diesen fünf Fällen zu entscheiden, muss man die von den beiden Figuren zu gleichen Zeiten erreichten Ausdehnungen vergleichen. Dies dürfte, wenn auch nur roh, möglich sein durch die Untersuchung von Figuren, bei denen der Widerstand des Gases verschieden ist. Man kann nämlich annehmen, dass, je geringer der Widerstand ist, die beiden Figuren umso früher in Berührung kommen, wodurch ihre Weiterentwicklung verhindert wird; sie werden also so zu sagen auf einem früheren Stadium ihrer Entwicklung aufgehalten. Freilich ist hier noch nicht berücksichtigt, was für eine Wirkung die Änderung des Entladungspotentiales ausübt. Nun zeigt die Untersuchung, dass die negative Figur sowohl bei Verkürzung der Elektrodendistanz, als auch bei Verminderung des Druckes rascher wächst als die positive. Dadurch ist *b), c)* und *d)* schon ausgeschlossen. *a)* könnte die Erscheinung erklären, würde aber für CO_2, in welchem eine Umkehrung der Figuren eintritt, eine zunächst nicht weiter zu erklärende Umkehrung der Geschwindigkeiten verlangen. Dagegen kann man mittelst Annahme *e)*[1] auch die Umkehrung in einheitlicher

---

[1] Dass die Entladung früher an der negativen Elektrode eintritt, ist eine schon vielfach gemachte Annahme, vergl. Wiedemann, Elektricität, Bd. 4/1, S. 577 ff. (höherer Ton des negativen Büschels; Lage der Ausgleichsstelle nach Autolik [Wied. Ann., 3, 1878, S. 489]). O. Lehmann (Elektrische Lichterscheinungen, S. 170) schliesst unter Anderem auch aus dem Umstande, dass sich

Weise erklären. Solch eine Umkehrung sollte immer dann eintreten, wenn die beiden Figuren sich so bald vereinigen (sei es in Folge geringeren Druckes oder geringerer Elektrodendistanz), dass die vom positiven Pol ausgehende Entladung keine Zeit hat, wenn ich mich so ausdrücken darf, ihren Verzug wieder einzubringen. Dass die Umkehrung gerade in CO_2 leicht zu erhalten ist, stimmt vollkommen mit ihrem Verhalten bei den Himstedt'schen Versuchen. Nach der entwickelten Anschauung ist das analoge Verhalten der Gase für die elektrischen Figuren und die Himstedt'schen Versuche nicht nur erklärlich, sondern zu erwarten. Die raschen Potentialschwankungen am Teslapole bewirken dasselbe, wie die Verkürzung der Elektrodendistanz bei den elektrischen Figuren, nämlich eine Begünstigung der von der Kathode ausgehenden Entladung, die sich in einem Falle als stärkere negative Ladung eines nahen Leiters, im anderen als eine Abnahme des Entladungsverhältnisses zu erkennen gibt.

Das Verhalten des Sauerstoffes bedarf noch einer weiteren Besprechung. Das Entladungsverhältniss ist in der Tabelle senkrecht zur Entladungsrichtung genommen, da zum Vergleiche mit der einpoligen Entladung des Teslaapparates die beiden elektrischen Figuren ihre volle Ausdehnung erhalten müssen, was in der Entladungsrichtung nicht der Fall ist. Dass dies erforderlich ist, zeigt sich am auffallendsten bei Sauerstoff. Senkrecht zur Entladungsrichtung ist, wie die Tabelle zeigt, das Entladungsverhältniss kleiner als in Luft, in der Richtung dagegen grösser. Letzteres lässt nach den früher entwickelten Ansichten darauf schliessen, dass die Entladung leichter an der Anode eintritt als in Luft. Eben dieses leichtere Auftreten

---

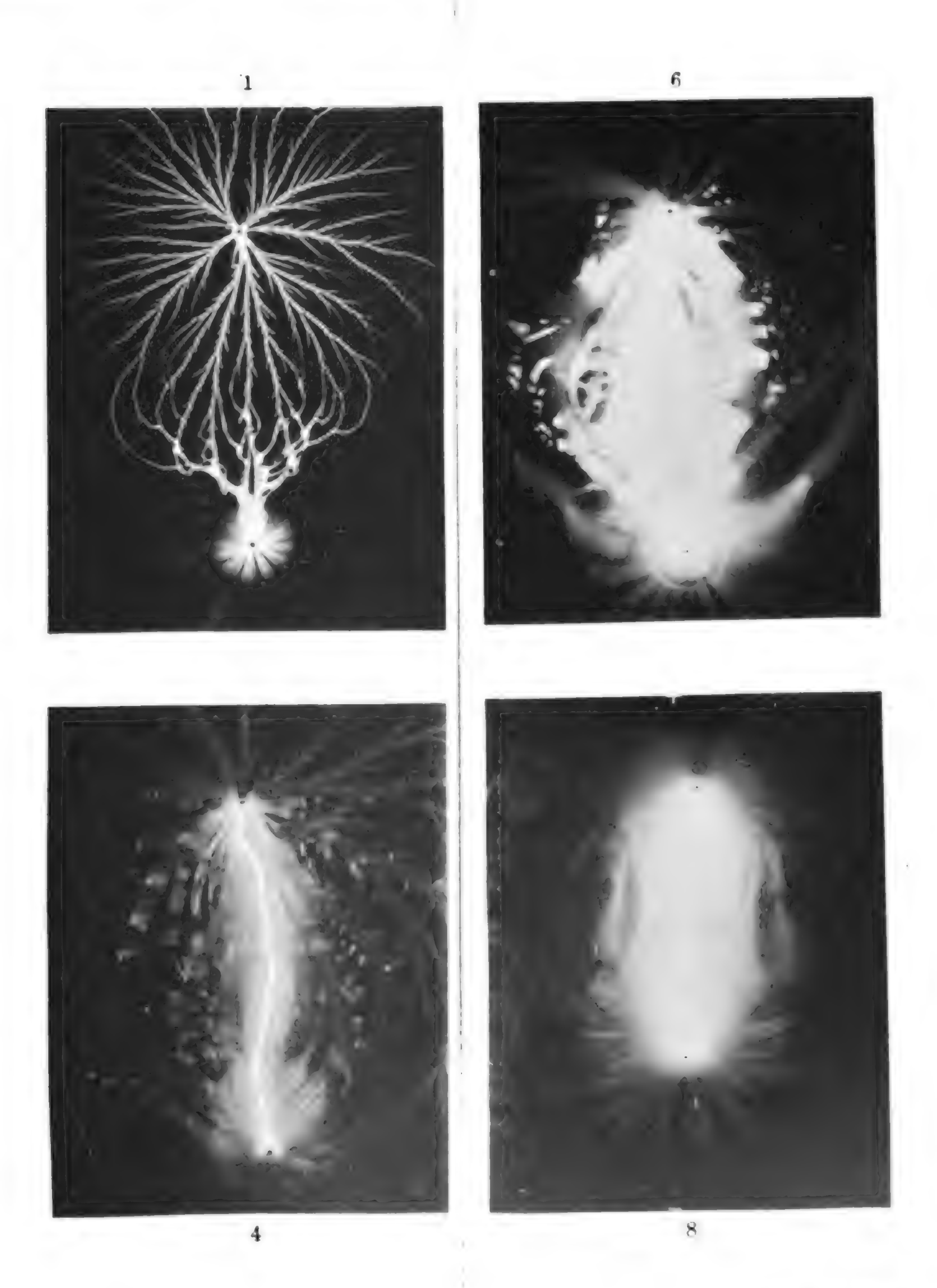
beim Drehen der Kathode die Glimmlichtflecken auf der Anode verschieben und nicht umgekehrt, dass das Entladungsgefälle an der Kathode früher erreicht wird.

A. Blümel (Wissenschaftl. Beilage zum Jahresber. der VII. städt. Realschule zu Berlin, Ostern 1898) gelangt zu demselben Resultate durch Untersuchung der Figuren, die auf photographischen Platten entstehen, welche mit der Schichtseite auf einem Metalltischchen liegen, während auf der Glasseite eine Spitze aufgesetzt wird und Spitze und Tischchen mit einem Inductorium verbunden werden.

bedingt eine Abnahme der Ausbreitungsgeschwindigkeit, woraus die relativ geringere Ausdehnung der positiven Figur senkrecht zur Entladungsrichtung erklärlich scheint. Man sieht auch, dass für das Entladungsverhältniss ein Maximum möglich ist. Denn es wächst 1. mit der Abnahme des positiven Entladungsverzuges, 2. mit der Geschwindigkeit, mit der sich die Entladung von der Anode aus fortpflanzt. Diese zwei Bedingungen sind aber selbst von einander abhängig, so zwar, dass das Wachsen der einen eine Abnahme der anderen bewirkt. Mischt man nun ein Gas, welches einen grösseren positiven Entladungsverzug zeigt, mit einem von geringerem, so kann es eine günstigste Mischung geben, für welche bei weiterer Beimengung des einen Bestandtheiles in Folge Verminderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit, bei weiterer Beimengung des anderen in Folge des grösseren Verzuges das Entladungsverhältniss abnimmt. Es wäre dies eine Erklärung der von Prof. Himstedt beobachteten Erscheinung, dass Luft die positive Ausströmung mehr begünstigt als Sauerstoff und Stickstoff getrennt. Das Analogon hiezu auf dem Gebiete der elektrischen Figuren bildet die Thatsache, dass für Luft das Entladungsverhältniss grösser gefunden wurde als für die anderen Gase.

Der letzten Veröffentlichung Prof. Himstedt's (Wied. Ann., 15. Juni 1899, Nr. 6), von welcher ich erst nach Abschluss der Arbeit Kenntniss erhielt, entnehme ich, dass eine Metallplatte in grösserer Entfernung vom Teslapole auch in Luft negativ geladen wird, dagegen in den anderen Gasen auch positive Ladung zeigen kann, wenn sie nur nahe genug gebracht wird. Es scheint mir dies mit ziemlicher Sicherheit darauf hinzuweisen, dass die von einer Kathode ausgehende Entladung vor der von der Anode einen Vorsprung hat, und dass dieser Vorsprung umso grösser ist, je tiefer das Gas in der angegebenen Reihe steht.

Karl Przibram: Verhalten der A



1 6

4 8

Lichtdruck v. Max Jaffé, Wien.

Zur Theorie der Elimination

(I. Theil)

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

1.

Die Bildung der Resultante n allgemeiner Formen von n Veränderlichen und der Beweis ihrer wichtigsten Eigenschaften lässt sich, wie ich gezeigt habe,[1] ohne Inanspruchnahme des Fundamentalsatzes der Algebra auf blosse Identitäten gründen. Der Fundamentalsatz der Algebra erweist sich erst bei den Anwendungen als nothwendig.

Ich will hier noch einmal auf diesen Gegenstand zurückkommen, da er eine einfachere Darstellung zulässt, und zugleich die wichtigsten Anwendungen hinzufügen.

2.

Unter einer allgemeinen Form der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ werde eine ganze homogene Function dieser Veränderlichen mit unbestimmten Coëfficienten verstanden.

Eine ganze Function von Unbestimmten $u', u'', \ldots$, welche in der Gestalt

$$\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \ldots + \varphi_\nu\psi_\nu$$

erscheint, wo

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu$$
$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\nu$$

[1] Diese Sitzungsberichte, II. Abth., 1886.

ganze Functionen derselben Unbestimmten $u', u'', \ldots$ bedeuten, werde kurz mit

$$[\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\nu]$$

bezeichnet, wenn es auf die Kenntniss der Ausdrücke $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu$ nicht weiter ankommt.

Es seien

$$f_1, f_2, \ldots$$

allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Der Grad von f_i in $x_1, x_2, \ldots x_n$ soll in der Regel mit m_i, der Coëfficient von $x_k^{m_i}$ in f_i mit a_{ik} und der Ausdruck, in welchen $f_i - a_{ik} x_k^{m_i}$ für $x_k = 1$ übergeht, mit $f_i^{(k)}$ bezeichnet werden.

Ersetzt man in einer ganzen Function F der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots$ und der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Veränderliche x_k durch 1 und die Unbestimmten $a_{1k}, a_{2k}, \ldots$ beziehungsweise durch $-f_1^{(k)}, -f_2^{(k)}, \ldots$, so ergibt sich ein von $a_{1k}, a_{2k}, \ldots$ freier Ausdruck F_0, welcher der Rest von F in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots$ und die Veränderliche x_k genannt werden soll.

3.

Sind

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

n allgemeine Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so soll von einer ganzen Function Θ der Coëfficienten dieser Formen, welche die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthält, gesagt werden, dass sie die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ besitzt, wenn ihr Product in eine Potenz einer der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ in der Gestalt

$$[f_1, f_2, \ldots f_n]$$

darstellbar ist.

Wenn für irgend einen Werth von i identisch

$$\Theta x_i^r = [f_1, f_2, \ldots f_n]$$

ist, so verschwindet der Rest Θ_0 von Θ in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ und eine beliebige Veränderliche x_k identisch. Denn es wird für $x_k = 1$

$$\Theta = [a_{1k} + f_1^{(k)}, a_{2k} + f_2^{(k)}, \ldots a_{nk} + f_n^{(k)}]$$

oder

$$\Theta x_i^r = [a_{1k}+f_1^{(k)},\ a_{2k}+f_2^{(k)}, \ldots a_{nk}+f_n^{(k)},$$

je nachdem $k = i$ ist oder nicht.

Nach Ersetzung von $a_{1k}, a_{2k}, \ldots a_{nk}$ durch $-f_1^{(k)}, -f_2^{(k)}, \ldots$ $\ldots -f_n^{(k)}$ folgt hieraus $\Theta_0 = 0$, beziehungsweise $\Theta_0 x_i^r = 0$, also in beiden Fällen

$$\Theta_0 = 0.$$

Verschwindet umgekehrt der Rest von Θ in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ und x_k, so sei zur Abkürzung

$$a_{1k}+f_1^{(k)} = t_1,\ a_{2k}+f_2^{(k)} = t_2, \ldots a_{nk}+f_n^{(k)} = t_n.$$

Ersetzt man in Θ die Unbestimmten

$$a_{1k},\ a_{2k}, \ldots a_{nk}$$

beziehungsweise durch

$$a_{1k}-t_1,\ a_{2k}-t_2, \ldots a_{nk}-t_n,$$

so verschwindet einerseits das Resultat nach der Annahme und nimmt anderseits, nach $t_1, t_2, \ldots t_n$ entwickelt, die Gestalt

$$\Theta+[t_1, t_2, \ldots t_n]$$

an. Es ist also

$$\Theta+[t_1, t_2, \ldots t_n] = 0$$

und man hat die Identität

$$\begin{aligned}\Theta &= [t_1, t_2, \ldots t_n] \\ &= [a_{1k}+f_1^{(k)},\ a_{2k}+f_2^{(k)}, \ldots a_{nk}+f_n^{(k)}].\end{aligned}$$

Macht man dieselbe durch Wiedereinführung der Veränderlichen x_k homogen in $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ergibt sich

$$\Theta x_k^r = [f_1, f_2, \ldots f_n].$$

Θ besitzt demnach die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Wenn Θ_1, Θ_2 die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ besitzen, so besitzt auch die Summe $\Theta_1+\Theta_2$ dieselbe.

Wenn Θ die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ besitzt und M eine ganze Function der Coëfficienten von

$f_1, f_2, \ldots f_n$ ist, welche die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthält, so besitzt auch das Product $M\Theta$ die Grundeigenschaft.

Wenn das Product $M\Theta$ die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ besitzt, M aber nicht, so muss Θ dieselbe besitzen.

4.

In dem Folgenden soll die Aufgabe behandelt werden, die allgemeine Gestalt aller ganzen Functionen zu ermitteln, welche in Bezug auf n allgemeine Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

von n Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

die Grundeigenschaft besitzen.

Die Gradzahlen von $f_1, f_2, \ldots f_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ sollen mit $m_1, m_2, \ldots m_n$, ihr Product mit p und die Zahlen

$$\frac{p}{m_1}, \frac{p}{m_2}, \ldots \frac{p}{m_n}$$

mit

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

bezeichnet werden. Das Potenzproduct

$$P = a_{11}^{p_1} a_{22}^{p_2} \ldots a_{nn}^{p_n},$$

in welchem a_{ii} den Coëfficienten von $x_i^{m_i}$ in f_i bedeutet, soll das Hauptpotenzproduct der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ genannt werden.

Die Lösung der Aufgabe ist in folgenden zwei Sätzen enthalten:

I. Jede ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche die Grundeigenschaft besitzt und kein durch das Hauptpotenzproduct P theilbares Glied enthält, verschwindet identisch.

II. Es gibt immer ganze rationalzahlige Functionen R der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen besitzen, in Bezug auf die Coëfficienten von f_i homogen und vom Grade p_i sind und das Haupt-

potenzproduct P mit dem Coëfficienten 1 enthalten oder, was dasselbe ist, für

$$f_1 = x_1^{m_1}\; f_2 = x_2^{m_2} \ldots f_n = x_n^{m_n}$$

den Werth 1 annehmen.

Wenn diese Sätze für n Formen bestehen, so ist jeder ganze Ausdruck Θ der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$, welcher die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen besitzt, durch jede Function R algebraisch theilbar.

Enthält Θ kein durch das Hauptpotenzproduct P von $f_1, f_2, \ldots f_n$ theilbares Glied, so ist identisch $\Theta = 0$, also Θ durch R theilbar.

Enthält dagegen Θ durch P theilbare Glieder, so suche man unter allen solchen Gliedern diejenigen heraus, welche in $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ die höchste Dimension h aufweisen, und es sei TP der Inbegriff dieser Glieder. Setzt man

$$\begin{aligned} \Theta &= PT + N_1 \\ R &= P + N \\ \Theta &= TR + \Theta_1, \end{aligned}$$

so wird

$$\Theta_1 = \Theta - TR = N_1 - TN,$$

und der Ausdruck Θ_1 besitzt wieder die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Enthält Θ_1 noch durch P theilbare Glieder, so sind dieselben in Bezug auf $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ von geringerer als der Dimension h. Denn sowohl in N_1, als auch in TN können nur solche P als Factor enthaltende Glieder stehen, welche in $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ die Dimension h nicht erreichen, da die Glieder von T die Dimension $h - (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$ aufweisen und die von N die Dimension $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ nicht erreichen.

Enthält Θ_1 noch durch P theilbare Glieder, so kann wieder

$$\Theta_1 = T_1 R + \Theta_2$$

gesetzt werden, wo Θ_2 die Grundeigenschaft besitzt und entweder gar keine durch P theilbare Glieder mehr enthält oder doch nur solche von geringerer Dimension in $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ als Θ_1.

So kann fortgefahren werden, bis man auf einen Ausdruck Θ_m stösst, welcher keine durch P theilbaren Glieder

mehr enthält. Dies muss eintreten, da die durch P theilbaren Bestandtheile der Ausdrücke $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ in $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ abnehmende Dimensionen aufweisen. Es ist dann identisch $\Theta_m = 0$ und daher

$$\Theta = (T + T_1 + \ldots + T_{m-1}) R.$$

Aus dieser Eigenschaft der Functionen R ergeben sich wichtige Folgerungen.

Es kann nur eine einzige Function geben, welche die für die Functionen R vorgeschriebenen Eigenschaften besitzt. Ist nämlich R eine bestimmte und R' irgend eine Function dieser Art, so muss R' nach dem bewiesenen Satze durch R algebraisch theilbar sein, also die Gestalt GR haben, wo G eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ bedeutet. Wegen Übereinstimmung der Gradzahlen von R, R' in Bezug auf die Coëfficienten jeder der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ kann aber G diese Coëfficienten nicht mehr enthalten und muss ein blosser Zahlenfactor sein. Dieser Zahlenfactor muss den Werth 1 haben, weil sowohl R' als R für

$$f_1 = x_1^{m_1}\ f_2 = x_2^{m_2} \ldots f_n = x_n^{m_n}$$

den Werth 1 annimmt.

Die Function R wird die Resultante der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ genannt und soll durch das Symbol

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}$$

bezeichnet werden. Das Hauptpotenzproduct P möge das Hauptglied von R genannt werden.

Die allgemeine Gestalt aller Functionen Θ, welche die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ besitzen, ist

$$\Theta = G . R,$$

wo R die Resultante von $f_1, f_2, \ldots f_n$ und G eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ bezeichnen.

Eine ganze Function F der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ ist durch die m^{te} Potenz der Resultante R von $f_1, f_2, \ldots f_n$ theilbar, wenn

$$F, \frac{\partial F}{\partial a_{nn}}, \frac{\partial^2 F}{\partial a_{nn}^2}, \ldots \frac{\partial^{m-1} F}{\partial a_{nn}^{m-1}}$$

die Grundeigenschaft besitzen.

Denn es ist zunächst

$$F = QR,$$

wo Q eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ bezeichnet. Hieraus folgt

$$Q \frac{\partial R}{\partial a_{nn}} = \frac{\partial F}{\partial a_{nn}} - R \frac{\partial Q}{\partial a_{nn}}.$$

$Q \frac{\partial R}{\partial a_{nn}}$ besitzt also die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$, wenn $\frac{\partial F}{\partial a_{nn}}$ dieselbe besitzt. Da aber der Ausdruck $\frac{\partial R}{\partial a_{nn}}$ dieselbe nicht besitzen kann, weil er kein durch P theilbares Glied enthält und nicht identisch verschwindet, wie das Glied $\frac{\partial P}{\partial a_{nn}}$ zeigt, so muss Q die Grundeigenschaft besitzen. Dann ist aber

$$Q = Q_1 R$$
$$F = Q_1 R^2.$$

Hieraus folgt wieder

$$2\left(\frac{\partial R}{\partial a_{nn}}\right)^2 Q_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial a_{nn}^2} + [R]$$

und daher, wofern $m > 2$ ist,

$$Q_1 = Q_2 R$$
$$F = Q_2 R^3.$$

U. s. f.

5.

Die zwei für Functionen, welche die Grundeigenschaft besitzen, aufgestellten Sätze gelten für eine Form

$$f_1 = a_{11} x_1^{m_1}$$

einer Veränderlichen x_1. Denn jede ganze Function Θ von a_{11}, welche die Grundeigenschaft in Bezug auf f_1 besitzt und in a_{11} den Grad 1 nicht erreicht oder kein durch das Hauptpotenzproduct a_{11} theilbares Glied enthält, muss der Identität

$$\Theta x_1^r = [f_1] = [a_{11}]$$

zufolge identisch verschwinden. Ferner besitzt a_{11} die für die Functionen R vorgeschriebenen Eigenschaften, da

$$a_{11} \cdot x_1^{m_1} = f_1 = [f_1]$$

ist.

Für irgend eine Anzahl n von Formen sollen die genannten Sätze unter der Annahme bewiesen werden, dass sie für $n-1$ Formen bereits feststehen. Der Beweis ist dann allgemein, da die Sätze auf diesem Wege zunächst für $n=2$, dann für $n=3$ u. s. w. festgestellt werden.

Es soll also als feststehend angenommen werden, dass jede ganze Function der Coëfficienten von $n-1$ allgemeinen Formen, welche die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen besitzt und kein durch das Hauptpotenzproduct derselben theilbares Glied enthält, identisch verschwinden muss und dass man für $n-1$ solche Formen die Resultante aufstellen kann.

1. Es ist zu zeigen, dass jeder Ausdruck, welcher die Grundeigenschaft in Bezug auf die n allgemeinen Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

besitzt und kein durch das Hauptpotenzproduct P derselben theilbares Glied enthält, identisch verschwindet.

Es sei Θ irgend ein Ausdruck dieser Art, $a_{kk}^h A$ der Inbegriff aller Glieder von Θ, welche die höchste Potenz von a_{kk} enthalten, und man bezeichne die Ausdrücke Θ, A als Functionen von $a_{11}, a_{21}, \ldots a_{nn}$ mit

$$\Theta(a_{ki}, a_{\alpha i}, a_{\beta i}, \ldots a_{\varepsilon i}), \quad A(a_{ki}, a_{\alpha i}, a_{\beta i}, \ldots a_{\varepsilon i}),$$

wo k, i irgend zwei verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots n$ und $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ die Zahlen $1, 2, \ldots n$ nach Weglassung von k bedeuten.

Nach der Annahme verschwindet der Rest von Θ in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ und die Veränderliche x_k identisch. Es ist also

$$\Theta(-f_k^{(i)}, -f_\alpha^{(i)}, -f_\beta^{(i)}, \ldots -f_\varepsilon^{(i)}) = 0$$

und daher

$$\Theta(a_{ki}, -f_\alpha^{(i)}, -f_\beta^{(i)}, \ldots -f_\varepsilon^{(i)}) = Q(a_{ki} + f_k^{(i)}).$$

Der die höchste Potenz von a_{kk} enthaltende Bestandtheil von $\Theta(a_{ki}, -f_\alpha^{(i)}, -f_\beta^{(i)}, \ldots)$ ist

$$a_{kk}^h A(a_{ki}, -f_\alpha^{(i)}, -f_\beta^{(i)}, \ldots -f_\varepsilon^{(i)}),$$

und es erhellt, dass Q entweder in a_{kk} den Grad $h-1$ nicht übersteigt, wenn $h > 0$ ist, oder aber identisch verschwindet, wenn $h = 0$ ist. In beiden Fällen ergibt die Gleichsetzung der Coëfficienten von a_{kk}^h in der vorstehenden Identität, dass der Ausdruck

$$A^0 = A(a_{ki}, -f_\alpha^{(i)}, -f_\beta^{(i)}, \ldots -f_\varepsilon^{(i)})$$

durch $x_k^{m_k}$ theilbar ist.

Gehen $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$ für $x_k = 0$ in $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varepsilon$ und die Ausdrücke

$$g_\alpha - a_{\alpha i} x_i^{m_\alpha}, \; g_\beta - a_{\beta i} x_i^{m_\beta}, \ldots$$

für $x_i = 1$ in

$$g_\alpha^{(i)}, g_\beta^{(i)}, \ldots$$

über, so ist

$$f_\alpha^{(i)} = g_\alpha^{(i)} + [x_k], \; f_\beta^{(i)} = g_\beta^{(i)} + [x_k], \ldots$$

und A^0 ergibt für $x_k = 0$ die Gleichung

$$A(a_{ki}, -g_\alpha^{(i)}, -g_\beta^{(i)}, \ldots -g_\varepsilon^{(i)}) = 0.$$

Hienach verschwindet der Rest von A in Bezug auf die Formen $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varepsilon$ und die Veränderliche x_i. A besitzt also die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen, und da dieselben allgemein sind, so muss A durch die Resultante derselben

$$R_k = \begin{bmatrix} g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varepsilon \\ x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\varepsilon \end{bmatrix}$$

algebraisch theilbar sein. Es sei

$$A = R_k A_1.$$

Der Rest R_k^0 von R_k in Bezug auf $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$ und x_i ist durch x_k theilbar, da er für $x_k = 0$ in den identisch verschwindenden Rest von R_k in Bezug auf $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varepsilon$ und x_i übergeht. R_k^0 kann aber nicht durch x_k^2 theilbar sein. Ist nämlich b der Coëfficient von $x_k x_i^{m_i-1}$ in f_i, so kommt b in R_k nicht vor und steht also in R_k^0 nur in dem Ausdrucke $f_i^{(i)}$. Wird also der Rest von $\frac{\partial R_k}{\partial a_{ii}}$ in Bezug auf $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$ und x_i mit R_k' bezeichnet, so ist

$$\frac{dR_k^0}{db} = R_k' \frac{d(-f_i^{(i)})}{db} = -x_k R_k'.$$

Der Ausdruck $\frac{\partial R_k}{\partial a_{ii}}$ verschwindet nicht identisch, wie das Glied

$$\frac{\partial}{\partial a_{ii}} \left(a_{\alpha\alpha}^{\frac{r_k}{m_\alpha}} a_{\beta\beta}^{\frac{r_k}{m_\beta}} \ldots a_{\varepsilon\varepsilon}^{\frac{r_k}{m_\varepsilon}} \right)$$

zeigt, und kann daher auch nicht die Grundeigenschaft in Bezug auf $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varepsilon$ besitzen, weil er kein durch das Hauptpotenzproduct von $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varepsilon$ theilbares Glied enthält. R_k' kann also nicht für $x_k = 0$ verschwinden oder nicht durch x_k theilbar sein. Dann ist aber $\frac{dR_k^0}{db}$ und daher auch R_k^0 selbst nicht durch x_k^2 theilbar.

Ist nun $m_k > 1$ und A_1^0 der Rest von A_1 in Bezug auf $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$ und x_i, so ist

$$A^0 = A_1^0 R_k^0$$

und A_1^0 muss durch x_k theilbar sein, weil A^0 durch x_k^2, R_k^0 aber nur durch x_k theilbar ist. Der Rest von A_1 in Bezug auf $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\varepsilon$ und x_i verschwindet also und A_1 ist durch R_k theilbar. Setzt man $A_1 = A_2 R_k$, so wird

$$A = A_2 R_k^2.$$

Ist $m_k > 2$, so kann wieder von A_2 der Factor R_k abgelöst werden, und es ergibt sich durch Fortsetzung dieser Schlüsse

$$A = T . R_k^{m_k}.$$

Enthält nun Θ Glieder, in welchen höhere Potenzen von a_{kk} als die $p_k - 1^{te}$ vorkommen, so müssen sich dieselben alle fortheben. Denn es ist dann $h \geqq p_k$ und die algebraische Theilbarkeit von A durch $R_k^{m_k}$ kann nur so stattfinden, dass A und T identisch verschwinden. R_k enthält nämlich das Glied

$$a_{\alpha\alpha}^{\frac{p_k}{m_\alpha}}\, a_{\beta\beta}^{\frac{p_k}{m_\beta}} \dots a_{\varepsilon\varepsilon}^{\frac{p_k}{m_\varepsilon}},$$

also $R_k^{m_k}$ das Glied

$$a_{\alpha\alpha}^{p_\alpha}\, a_{\beta\beta}^{p_\beta} \dots a_{\varepsilon\varepsilon}^{p_\varepsilon}$$

und der Bestandtheil $a_{kk}^h A$ von Θ würde, wenn T nicht identisch verschwände, unforthebbare, durch das Hauptpotenzproduct P theilbare Glieder enthalten, was der Annahme widerspricht.

Da k beliebig gewählt werden kann, so erhellt also zunächst, dass in Θ Glieder, welche durch eine der Potenzen

$$a_{11}^{p_1},\, a_{22}^{p_2}, \dots a_{nn}^{p_n}$$

theilbar sind, entweder gar nicht vorkommen oder sich fortheben müssen. Nimmt man dann $k = n$, so erhellt, dass der Ausdruck A identisch verschwinden muss. Denn derselbe erreicht in a_{11} den Grad p_1 nicht und ist anderseits durch den Ausdruck $R_n^{m_n}$ vom Grade p_1 in a_{11} algebraisch theilbar. In Θ müssen sich also alle Glieder fortheben, welche die höchste Potenz von a_{nn} enthalten, also überhaupt alle Glieder.

II. Es ist die Resultante für n allgemeine Formen aufzustellen.

Für zwei Formen kann die Resultante unmittelbar in bekannter Weise mit Hilfe der Theorie der symmetrischen Functionen gebildet werden.

Es sei behufs Vereinfachung

$$m_1 = n \qquad m_2 = m$$

$$f_1 = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n$$

$$f_2 = b_0 x_1^m + b_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots \qquad\qquad + b_m x_2^m$$

$$f_2(x) = f_2(x, 1) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m;$$

n wird von 0 verschieden angenommen, während für m auch der Werth 0 zugelassen wird. Es seien ferner

$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

Unbestimmte und

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

$$\sigma_2 = z_1 z_2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_n = z_1 z_2 \ldots z_n$$

ihre elementaren symmetrischen Functionen.

Man stelle das Product

$$E = f_2(z_1) f_2(z_2) \ldots f_2(z_n)$$

als ganze Function $F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ der Ausdrücke $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ dar. Diese Function ist in $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ vom Grade m und daher $a_0^m F$ eine ganze homogene Function

$$G(a_0, a_0\sigma_1, a_0\sigma_2, \ldots a_0\sigma_n)$$

m^{ten} Grades von $a_0, a_0\sigma_1, a_0\sigma_2, \ldots$. Setzt man dann

$$R = G(a_0, -a_1, a_2, \ldots \pm a_n),$$

so ist R die gewünschte Resultante.

Denn R ist eine ganze Function der Coëfficienten von f_1 und f_2, welche in denen von f_1 homogen und vom Grade $m = p_1$, in denen von f_2 homogen und vom Grade $n = p_2$ ist. Die Potenz b_m^n kommt in E oder F mit dem Coëfficienten 1, also in G mit dem Coëfficienten a_0^m vor, so dass das Hauptpotenzproduct $a_0^m b_m^n$ von f_1, f_2 in R den Coëfficienten 1 hat.

R besitzt die Grundeigenschaft. Ersetzt man nämlich b_m in F durch $b_m - f_2(z_i)$, so verschwindet das Resultat identisch,

weil $F = E$ ist, und nimmt anderseits, nach $f_2(z_i)$ entwickelt, die Gestalt

$$F - F_1(z_i) f_2(z_i)$$

an, wo F_1 eine ganze Function von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, z_i$ und in $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ vom Grade m ist. Bringt man daher den Ausdruck

$$F - F_1(x) f_2(x)$$

durch Division mit

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots \pm \sigma_n$$

auf die Form

$$J(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots \pm \sigma_n) + J',$$

wo J' in x den Grad n nicht erreicht, so verschwindet J' für $x = z_1, z_2, \ldots z_n$ und daher identisch. Es ist also identisch in $x, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$

$$E = F_1(x) f_2(x) + J(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots \pm \sigma_n).$$

Ist $m > 0$, so kann J in $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ den Grad $m-1$ nicht übersteigen und $a_0^m F_1, a_0^{m-1} J$ sind ganze homogene Functionen

$$\psi(a_0, a_0\sigma_1, a_0\sigma_2, \ldots), \quad \varphi(a_0, a_0\sigma_1, a_0\sigma_2, \ldots)$$

von $a_0, a_0\sigma_1, a_0\sigma_2, \ldots$ vom Grade m und $m-1$. Nach Multiplication der vorstehenden Identität mit a_0^m wird daher

$$G = \varphi(a_0, a_0\sigma_1, \ldots)(a_0 x^n - a_0\sigma_1 x^{n-1} + \ldots \pm a_0\sigma_n)$$
$$+ \psi(a_0, a_0\sigma_1, \ldots) f_2(x)$$

und die Ersetzung der Ausdrücke $a_0\sigma_1, a_0\sigma_2, \ldots$ durch $-a_1, a_2, \ldots$ ergibt

$$R = \varphi(a_0, -a_1, \ldots) f_1(x, 1) + \psi(a_0, -a_1, \ldots) f_2(x, 1).$$

Für $m = 0$ ist $\varphi = 0$, $\psi = b_0^{n-1}$ zu setzen.

Es ist also in der That, wenn man x durch x_1 ersetzt und die Identität durch Einführung von x_2 homogen macht,

$$R x_2^r = [f_1, f_2].$$

Die Resultante R hat ganzzahlige Coëfficienten.

Das Potenzproduct $a_{12}^{p} a_{21}^{p}$ hat in R den Coëfficienten $(-1)^p$, weil F, G sich für

$$f_2 = b_0 x_1^m$$

auf $b_0^n \zeta_n^m$, $b_0^n (a_0 \zeta_n)^m$ also R auf

$$b_0^n ((-1)^n a_n)^m = (-1)^p a_n^m b_0^n$$

reduciren.

Die Differenz

$$G(a_0, -a_1, a_2, \ldots) - G(a_0, a_0 \zeta_1, a_0 \zeta_2, \ldots)$$

ist als ganze Function der Ausdrücke

$$a_1 + a_0 \zeta_1,\ a_2 - a_0 \zeta_2, \ldots a_n \pm a_0 \zeta_n$$

darstellbar, welche dieselben mindestens in der ersten Dimension enthält. Wird eine solche Function allgemein mit

$$\Gamma(a_1 + a_0 \zeta_1,\ a_2 - a_0 \zeta_2, \ldots)$$

bezeichnet, so ist identisch

$$R = a_0^m f_2(z_1) f_2(z_2) \ldots f_2(z_n)$$
$$+ \Gamma(a_1 + a_0 \zeta_1,\ a_2 - a_0 \zeta_2, \ldots).$$

Die Resultante der Formen

$$a_0 (x_1 - z_1 x_2)(x_1 - z_2 x_2) \ldots (x_1 - z_n x_2)$$

und f_2 ist:

$$a_0^m f_2(z_1) f_2(z_2) \ldots f_2(z_n).$$

Es sei jetzt $n > 2$.

Man kann die Resultante von n allgemeinen Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ zunächst in dem Falle aufstellen, wo die letzte Form f_n linear ist. Es sei

$$f_n = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = u_x$$

und zur Abkürzung

$$m_1 m_2 \ldots m_{n-1} = p_{n-1} = \nu.$$

Man setze, unter t eine Unbestimmte verstanden,

$$u_n + t u_{n-1} = U$$
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_{n-2} x_{n-2} = u$$
$$f_i(Ux_1, Ux_2, \dots Ux_{n-2}, -tu + u_n x_{n-1}, -u - u_{n-1} x_{n-1}) = g_i.$$

Da nach der Annahme die Resultante von $n-1$ allgemeinen Formen bekannt ist, so kann die Resultante L der Formen $g_1, g_2, \dots g_{n-1}$ in Bezug auf $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ gebildet werden. L ist in Bezug auf die Coëfficienten von f_i homogen und vom Grade $\frac{\nu}{m_i}$, wenn $i < n$, in Bezug auf die Coëfficienten von f_n oder die Unbestimmten $u_1, u_2, \dots u_n$ homogen und vom Grade $\nu(n-1)$ und genügt der Identität

$$Lx_1^{r} = [g_1, g_2, \dots g_{n-1}].$$

Ersetzt man x_{n-1} durch $x_{n-1} - tx_n$, so geht g_i in

$$f_i(Ux_1, Ux_2, \dots Ux_{n-2}, Ux_{n-1} - tf_n, Ux_n - f_n)$$
$$= U^{m_i} f_i + [f_n]$$

über, und es wird

$$Lx_1^{r} = [U^{m_1} f_1 + [f_n], U^{m_2} f_2 + [f_n], \dots]$$
$$= [f_1, f_2, \dots f_n].$$

L besitzt also die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \dots f_n$.

Da L in t den Grad $\nu(n-1)$ nicht übersteigt, so kann mittelst algebraischer Division des Productes $u_{n-1}^{\nu(n-1)} L$ durch $U^{\nu(n-2)}$ eine ganze Function B von t und der Coëfficienten von $f_1, f_2, \dots f_n$ so bestimmt werden, dass der Ausdruck

$$\Delta = u_{n-1}^{\nu(n-1)} L - U^{\nu(n-2)} B$$

in t den Grad $\nu(n-2)$ nicht erreicht.

Dieser Ausdruck muss identisch verschwinden. Denn der Rest von Δ in Bezug auf $f_1, f_2, \dots f_n$ und x_1 erscheint durch $U^{\nu(n-2)}$ theilbar und erreicht in t den Grad $\nu(n-2)$ nicht. Derselbe muss also identisch verschwinden und Δ besitzt die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \dots f_n$. Ist ferner Δ_0 der

Inbegriff aller Glieder von Δ, welche das Potenzproduct $a_{11}^{r_1} a_{22}^{r_2} \ldots a_{n-1\,n-1}^{r_{n-1}}$ als Factor enthalten, so reducirt sich Δ auf diese Glieder, wenn man

$$f_1 = a_{11} x_1^{m_1},\ f_2 = a_{22} x_2^{m_2}, \ldots f_{n-1} = a_{n-1\,n-1} x_{n-1}^{m_{n-1}}$$

setzt. Dadurch wird aber L zur Resultante der Formen

$$a_{11} U^{m_1} x_1^{m_1}, \ldots a_{n-2\,n-2} U^{m_{n-2}} x^{m_{n-2}},\ a_{n-1\,n-1}(-tu + u_n x_{n-1})^{m_{n-1}},$$

also durch $U^{\nu(n-2)}$ theilbar. Daher ist auch der Ausdruck Δ_0 durch $U^{\nu(n-2)}$ theilbar und somit identisch 0, weil er in t den Grad $\nu(n-2)$ nicht erreicht. Δ enthält also keine durch das Hauptpotenzproduct von $f_1, f_2, \ldots f_n$ theilbaren Glieder.

Aus der Identität

$$\Delta = u_{n-1}^{\nu(n-1)} L - U^{\nu(n-2)} B = 0$$

folgt, dass B durch $u_{n-1}^{\nu(n-1)}$ theilbar ist. Setzt man demgemäss

$$B = u_{n-1}^{\nu(n-1)} \Theta(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

so wird

$$L = U^{\nu(n-2)} \Theta$$

und Θ ist die gesuchte Resultante der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$. Denn Θ ist eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$, besitzt die Grundeigenschaft, da der Rest von L in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ und x_1 und daher auch der von Θ identisch verschwindet. Θ ist in Bezug auf die Coëfficienten von f_i für jedes i homogen und vom Grade p_i. Für $f_n = x_n$ wird L und daher auch Θ zur Resultante R_n der Formen

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, 0),\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, 0), \ldots f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, 0)$$

und Θ enthält somit die Potenz u_n^{ν} mit dem Coëfficienten R_n, also das Hauptpotenzproduct $a_{11}^{r_1} a_{22}^{r_2} \ldots u_n^{\nu}$ mit dem Coëfficienten 1, weil $a_{11}^{r_1} a_{22}^{r_2} \ldots a_{n-1\,n-1}^{r_{n-1}}$ das Hauptglied von R_n ist.

Es sei f eine allgemeine Form von $x_1, x_2, \ldots x_n$ von beliebigem Grade m und zur Abkürzung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i} = \Theta_i$$

$$v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_nx_n = v_x$$
$$w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n = w_x,$$

wo $v_1, v_2, \ldots w_1, w_2, \ldots$ Unbestimmte bezeichnen. Gibt man der Identität

$$\Theta x_n^r = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x]$$

die Gestalt

$$\Theta x_n^r = Qu_x + [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}],$$

wo Q eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ und der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, so folgt durch Differentiation nach u_i

$$\Theta_i x_n^r = Qx_i + [f_1, f_2, \ldots f_n]$$

und die Einsetzung der Ausdrücke

$$\Theta_1 x_n^r, \Theta_2 x_n^r, \ldots \Theta_n x_n^r$$

in die Form f führt zu der Identität

$$\begin{aligned} f(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n) x_n^{mr} &= Q^m f + [f_1, f_2, \ldots f_n] \\ &= [f, f_1, f_2, \ldots f_n]. \end{aligned}$$

Bezeichnen daher

$$g, g'$$

die binären Formen der Veränderlichen X, Y vom Grade ν und $m(\nu - 1)$, welche aus Θ und $f(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n)$ nach Ersetzung von $u_1, u_2, \ldots u_n$ durch

$$Xv_1 + Yw_1, Xv_2 + Yw_2, \ldots Xv_n + Yw_n$$

hervorgehen, und

$$H = \begin{vmatrix} g, g' \\ X, Y \end{vmatrix}$$

die Resultante dieser Formen in Bezug auf X, Y, so bestehen die Identitäten

$$\begin{aligned} x_n^r g &= [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, Xv_x + Yw_x] \\ x_n^{mr} g' &= [f, f_1, \ldots f_{n-1}, Xv_x + Yw_x] \\ HY^\rho &= [g, g']. \end{aligned}$$

Aus denselben folgt

$$\begin{aligned} HY^{\rho} x_n^{mr} &= [x_n^{mr} g, x_n^{mr} g'] \\ &= [f, f_1, \ldots f_{n-1}, Xv_x + Yw_x] \end{aligned}$$

und die Ersetzung von X, Y durch $-w_x, v_x$ ergibt

$$Hv_1^{\rho} x_n^{mr} = [f, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}].$$

Dieser Identität zufolge verschwindet der Rest von H in Bezug auf $f, f_1, \ldots f_{n-1}$ und x_n. H besitzt also die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f, f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$.

Wird für f eine allgemeine lineare Form

$$s_x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n$$

genommen, so muss H durch die Resultante $\Theta(s_1, s_2, \ldots)$ der Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, s_x$ algebraisch theilbar sein. Es sei

$$H = M\Theta(s_1, s_2, \ldots).$$

Da H die Unbestimmten $s_1, s_2, \ldots$ homogen und im Grade ν enthält, so kommen dieselben in M nicht mehr vor.

Der Ausdruck M verschwindet nicht identisch. Denn er nimmt schon für gewisse besondere Formen und für

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{n-1} = 0 \qquad v_n = 1$$
$$w_n = 0$$

einen von Null verschiedenen Werth M_0 an. Man wähle etwa die Formen

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1 + \xi_1 x_n)(x_1 + \xi_2 x_n) \ldots \\ f_2 &= (x_2 + \eta_1 x_n)(x_2 + \eta_2 x_n) \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1} &= (x_{n-1} + \vartheta_1 x_n)(x_{n-1} + \vartheta_2 x_n) \ldots, \end{aligned}$$

in welchen $\xi_1, \xi_2, \ldots m_1$ Unbestimmte, $\eta_1, \eta_2, \ldots m_2$ andere Unbestimmte u. s. w. bezeichnen.

Für diese Formen folgt aus der Identität

$$\Theta x_n^{r} = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x],$$

wenn

$$x_1 = -\xi_\alpha,\ x_2 = -\eta_\beta, \ldots x_{n-1} = -\vartheta_\varepsilon \qquad x_n = 1$$

gesetzt wird, dass Θ durch den Ausdruck

$$u_n - \xi_\alpha u_1 - \eta_\beta u_2 - \ldots - \vartheta_\varepsilon u_{n-1}$$

algebraisch theilbar ist. Bezeichnen daher

$$U_1,\ U_2, \ldots U_\nu$$

die ν Werthe, welche der Ausdruck

$$\xi_\alpha u_1 + \eta_\beta u_2 + \ldots + \vartheta_\varepsilon u_{n-1}$$

annimmt, wenn α die Zahlen

$$1,\ 2, \ldots m_1,$$

β die Zahlen

$$1,\ 2, \ldots m_2$$

u. s. w., ε die Zahlen

$$1,\ 2, \ldots m_{n-1}$$

durchlaufen, so ist Θ durch jede der Differenzen

$$u_n - U_1,\ u_n - U_2, \ldots u_n - U_\nu,$$

also auch durch ihr Product theilbar. Θ ist aber in u_n vom Grade ν und u_n^ν hat als Hauptpotenzproduct (S. 16) der Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x$ in Θ den Coëfficienten 1. Daher ist

$$\Theta = (u_n - U_1)(u_n - U_2) \ldots (u_n - U_\nu).$$

Wird nun

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-1} = 0 \qquad s_n = 1$$

gesetzt, so wird

$$\Theta(s_1, s_2, \ldots) = 1 \qquad H = M_0,$$

und M_0 erscheint als Resultante der Formen

$$g = (X - W_1 Y)(X - W_2 Y) \ldots (X - W_\nu Y)$$

$$g' = \frac{\partial g}{\partial X},$$

wo W_i aus U_i durch Verwandlung von $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ in $w_1, w_2, \ldots w_{n-1}$ hervorgeht. Daher wird

$$M_0 = g'(W_1, 1) g'(W_2, 1) \ldots g'(W_\nu, 1).$$

Je nachdem also $\nu > 1$ oder $\nu = 1$ ist, ergibt sich

$$M_0 = (-1)^{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)} \Pi (W_\lambda - W_\mu)^2$$

oder

$$M_0 = 1,$$

wo das Productzeichen über alle Combinationen zweiter Classe λ, μ der Zahlen $1, 2, \ldots \nu$ zu erstrecken ist.

Es sei jetzt f_n von beliebigem Grade m_n.

Nimmt man $f = f_n$, so hat man in H eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche die Grundeigenschaft besitzt. Dieselbe muss also die gesuchte Resultante als Factor enthalten, und es gilt nur noch H von überflüssigen Factoren zu befreien.

Es seien

$$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{\nu 1} & y_{\nu 2} & \ldots & y_{\nu n} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{matrix}$$

Unbestimmte, und man setze zur Abkürzung

$$s_1 y_{i1} + s_2 y_{i2} + \ldots + s_n y_{in} = S_i$$
$$t_1 y_{i1} + t_2 y_{i2} + \ldots + t_n y_{in} = T_i$$
$$f_n(y_{i1}, y_{i2}, \ldots y_{in}) = f_{ni}$$
$$S_1 S_2 \ldots S_\nu = S = S_1 Q_1 = S_2 Q_2 = \ldots = S_\nu Q_\nu.$$

Das Product

$$K = S^{p - m_n} f_{n1} f_{n2} \ldots f_{n\nu}$$

ist als ganze homogene Function p^{ten} Grades $N(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots)$ der Coëfficienten

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$$

darstellbar, welche in S bei den verschiedenen Potenzproducten der Unbestimmten $s_1, s_2, \ldots s_n$ stehen, und mit Hilfe dieser Darstellung gelingt die Ablösung der gesuchten Resultante von H.

Das Product K lässt sich als Product der ν Ausdrücke

$$Q_1^{m_n} f_{n1},\; Q_2^{m_n} f_{n2}, \ldots Q_\nu^{m_n} f_{n\nu}$$

mittelst der Newton'schen Formeln zunächst durch die ν ersten Potenzsummen

$$\begin{aligned} M_1 &= Q_1^{m_n} f_{n1} + Q_2^{m_n} f_{n2} + \ldots + Q_\nu^{m_n} f_{n\nu} \\ M_2 &= Q_1^{2m_n} f_{n1}^2 + Q_2^{2m_n} f_{n2}^2 + \ldots + Q_\nu^{2m_n} f_{n\nu}^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_\nu &= Q_1^{\nu m_n} f_{n1}^\nu + Q_2^{\nu m_n} f_{n2}^\nu + \ldots + Q_\nu^{\nu m_n} f_{n\nu}^\nu \end{aligned}$$

dieser Ausdrücke darstellen, und zwar als Aggregat von Gliedern

$$\mathfrak{G} = c M_1^{\mathfrak{a}} M_2^{\mathfrak{b}} \ldots M_\nu^{\mathfrak{n}},$$

in welchen c ein Zahlencoëfficient und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{n}$ ganze nicht negative, der Gleichung

$$\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + \ldots + \nu\mathfrak{n} = \nu$$

genügende Zahlen sind.

Um $M_1, M_2, \ldots M_\nu$ durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ auszudrücken, sei

$$Q_1^k T_1^k + Q_2^k T_2^k + \ldots + Q_\nu^k T_\nu^k = L_k$$

und, nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ entwickelt,

$$f_n^k = \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\varepsilon,$$

wo $C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ eine ganze ganzzahlige homogene Function k^{ten} Grades der Coëfficienten von f_n und die Summe über alle ganzen nicht negativen der Gleichung

$$\alpha + \beta + \ldots + \varepsilon = k m_n$$

genügenden Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ zu erstrecken ist. Da

$$x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\varepsilon = \frac{1}{(km_n)!} \frac{\partial^{km_n} (t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n)^{km_n}}{\partial t_1^\alpha \partial t_2^\beta \ldots \partial t_n^\varepsilon}$$

ist, so wird

$$f_n^k = \frac{1}{(km_n)!} \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial^{km_n}(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots)^{km_n}}{\partial t_1^\alpha \partial t_2^\beta \ldots \partial t_n^\varepsilon}$$

und daher

$$Q_i^{km_n} f_{ni}^k = \frac{1}{(km_n)!} \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial^{km_n} Q_i^{km_n} T_i^{km_n}}{\partial t_1^\alpha \partial t_2^\beta \ldots \partial t_n^\varepsilon}.$$

Die Summation nach i von $i = 1$ bis $i = \nu$ ergibt

$$M_k = \frac{1}{(km_n)!} \Sigma C_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \frac{\partial^{km_n} L_{km_n}}{\partial t_1^\alpha \partial t_2^\beta \ldots \partial t_n^\varepsilon}.$$

L_{km_n} ist als Potenzsumme der Ausdrücke

$$Q_1 T_1,\ Q_2 T_2, \ldots Q_\nu T_\nu$$

durch die elementaren symmetrischen Functionen

$$V_1, V_2, \ldots V_\nu$$

derselben darstellbar, und zwar als Aggregat von Gliedern

$$c V_1^\rho V_2^\sigma \ldots V_\nu^\tau,$$

in welchen c ein Zahlencoëfficient und

$$\rho + 2\sigma + \ldots + \nu\tau = km_n$$

ist. Bezeichnet aber $\left(t \frac{\partial}{\partial s}\right)$ die Operation

$$t_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \ldots + t_n \frac{\partial}{\partial s_n},$$

so ergibt sich

$$V_i = \frac{1}{i!} S^{i-1} \left(t \frac{\partial}{\partial s}\right)^i S.$$

V_i ist also eine ganze homogene Function i^{ten} Grades der Coëfficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$, und L_{km_n} erscheint daher als ganze homogene Function km_n^{ten} Grades dieser Coëfficienten, welche die Unbestimmten $t_1, t_2, \ldots$ homogen und im Grade km_n, die

Unbestimmten $s_1, s_2, \ldots$ homogen und im Grade $k(p-m_n)$ enthält.

Nach Ausführung der Differentiationen nach $t_1, t_2, \ldots t_n$ ergibt sich M_k als ganzer homogener Ausdruck km_nten Grades von $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots, k(p-m_n)$ten Grades von $s_1, s_2, \ldots s_n$ und $k$ten Grades der Coëfficienten von f_n.

Die Einsetzung der für $M_1, M_2, \ldots$ erhaltenen Ausdrücke in die Glieder $\mathfrak{G}$ von K führt dann zu der gewünschten Darstellung

$$K = N(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots),$$

wo N eine ganze homogene Function $p$ten Grades der Coëfficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ ist, welche in ihren Coëfficienten die Unbestimmten $s_1, s_2, \ldots$ homogen und im Grade $p(\nu-1)$ und die Coëfficienten von f_n homogen und im Grade ν enthält.

Es sei nun, nach Potenzen von X entwickelt,

$$\Theta(v_1 X + w_1, v_2 X + w_2, \ldots) = C_0 X^\nu + C_1 X^{\nu-1} + \ldots + C_\nu$$

und man bezeichne die Coëfficienten, welche in $\Theta(s_1, s_2, \ldots)$ bei denselben Potenzproducten von $s_1, s_2, \ldots$ wie $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ in S stehen, beziehungsweise mit

$$A, A', \ldots.$$

Multiplicirt man die vorstehende Identität für K mit $C_0^{p(\nu-1)}$, so ergibt sich

$$(C_0^{\nu-1} S)^{p-m_n} C_0^{p-m_n} f_{n1} f_{n2} \ldots f_{n\nu} = N(C_0^{\nu-1}\mathfrak{A}, C_0^{\nu-1}\mathfrak{A}', \ldots).$$

Hierauf setze man

$$y_{ik} = \Theta_k(v_1 z_i + w_1, v_2 z_i + w_2, \ldots),$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ Unbestimmte sind.

Bezeichnen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_\nu$ die elementaren symmetrischen Functionen dieser Unbestimmten und

$$\Gamma(C_1 + C_0\sigma_1, C_2 - C_0\sigma_2, \ldots)$$

allgemein eine ganze Function der Ausdrücke

$$C_1 + C_0\sigma_1, C_2 - C_0\sigma_2, \ldots C_\nu \pm C_0\sigma_\nu,$$

deren Glieder in Bezug auf diese Ausdrücke mindestens von der ersten Dimension sind, so wird

$$C_0^{r-m_n} f_{n1} f_{n2} \ldots f_{n\nu} = H + \Gamma(C_1 + C_0 \sigma_1, \ldots)$$
$$C_0^{r-1} S = M \Theta(s_1, s_2, \ldots) + \Gamma(C_1 + C_0 \sigma_1, \ldots)$$

also auch

$$C_0^{r-1} \mathfrak{A} = MA + \Gamma(C_1 + C_0 \sigma_1, \ldots)$$
$$C_0^{r-1} \mathfrak{A}' = MA' + \Gamma(C_1 + C_0 \sigma_1, \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und das Resultat nimmt die Gestalt

$$M^{r-m_n} \Theta^{r-m_n}(s_1, s_2, \ldots) H = N(MA, MA', \ldots) + \Gamma(C_1 + C_0 \sigma_1, \ldots)$$

oder

$$M^{r-m_n}(\Theta^{r-m_n}(s_1, s_2, \ldots) H - M^{m_n} N(A, A', \ldots)) = \Gamma(C_1 + C_0 \sigma_1, C_2 - C_0 \sigma_2, \ldots)$$

an. Da diese Gleichung in $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ also auch in den Ausdrücken $C_0 \sigma_1, C_0 \sigma_2, \ldots$ identisch sein muss, so ergibt sich nach Ersetzung derselben durch $-C_1, C_2, \ldots$

$$M^{r-m_n}(\Theta^{r-m_n}(s_1, s_2, \ldots) H - M^{m_n} N(A, A', \ldots)) = 0$$

oder

$$\Theta^{r-m_n}(s_1, s_2, \ldots) H = M^{m_n} N(A, A', \ldots).$$

Dieser Identität zufolge sind die Ausdrücke

$$M^{m_n} N,\ M^{m_n} \frac{\partial N}{\partial s_n}, \ldots M^{m_n} \frac{\partial^{r-m_n-1} N}{\partial s_n^{r-m_n-1}}$$

alle durch $\Theta(s_1, s_2, \ldots)$ theilbar und besitzen die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, s_x$. Da aber der Ausdruck M^{m_n} diese Grundeigenschaft nicht besitzen kann, weil er $s_1, s_2, \ldots$ nicht enthält und nicht identisch verschwindet, so müssen

$$N,\ \frac{\partial N}{\partial s_n}, \ldots \frac{\partial^{r-m_n-1} N}{\partial s_n^{r-m_n-1}}$$

dieselbe besitzen und N ist durch $\Theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots)$ algebraisch theilbar. Setzt man

$$N(A, A', \ldots) = \Theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots) R,$$

so wird

$$H = M^{m_n} R,$$

und R ist die gesuchte Resultante der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Denn R ist eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen besitzt, weil H dieselbe hat, M^{m_n} aber nicht. In Bezug auf die Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ sind $N(A, A', \ldots)$, $\Theta^{p-m_n}(s_1, s_2, \ldots)$ einzeln homogen und vom Grade

$$\nu p_1, \nu p_2, \ldots \nu p_{n-1}, \nu$$

$$(p-m_n)\frac{\nu}{m_1}, (p-m_n)\frac{\nu}{m_2}, \ldots (p-m_n)\frac{\nu}{m_{n-1}}, 0;$$

R ist daher ebenfalls in Bezug auf die Coëfficienten jeder der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ homogen und weist die Gradzahlen

$$p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, p_n$$

auf. Der Coëfficient C von $a'_{nn} = a_{nn}^{p_n}$ in H hat der Identität

$$H = C_0^{p-m_n} \prod_i f_n(\Theta_1(v_1 z_i + w_1, \ldots), \ldots)$$
$$+ \Gamma(C_1 + C_0 \tau_1, \ldots)$$

zufolge die Gestalt

$$C_0^{p-m_n} \prod_i \Theta_n^{m_n}(v_1 z_i + w_1, v_2 z_i + w_2, \ldots)$$
$$+ \Gamma(C_1 + C_0 \tau_1, \ldots);$$

da aber

$$C_0^{\nu-1} \prod_i \Theta_n(v_1 z_i + w_1, v_2 z_i + w_2, \ldots)$$
$$= M\Theta(0, 0, \ldots 1) + \Gamma(C_1 + C_0 \tau_1, \ldots)$$
$$= MR_n + \Gamma(C_1 + C_0 \tau_1, \ldots)$$

ist, so folgt

$$C = M^{m_n} R_n^{m_n} + \Gamma(C_1 + C_0 \tau_1, \ldots)$$

und nach Ersetzung von $C_0\tau_1$, $C_0\tau_2, \ldots$ durch $-C_1, C_2, \ldots$

$$C = M^{m_n} R_n^{m_n}.$$

R hat also bei $a_{nn}^{r_n}$ den Coëfficienten $R_n^{m_n}$ und nimmt für

$$f_1 = x_1^{m_1}, f_2 = x_2^{m_2} \ldots f_n = x_n^{m_n}$$

den Werth 1 an.

Hiemit sind die zwei Hauptsätze über die der Grundeigenschaft genügenden Functionen für irgend eine Anzahl von Formen bewiesen.

Die Resultante R von n allgemeinen Formen hat ganzzahlige Coëfficienten. Ist dies nämlich bei der Resultante von $n-1$ Formen der Fall, so ist Θ ganzzahlig und überdies primitiv, wie der Coëfficient 1 des Hauptgliedes lehrt. Dann müssen aber auch H und M ganzzahlig sein. M ist ebenfalls primitiv, wie der oben erörterte besondere Fall zeigt, und es muss also auch $\dfrac{H}{M^{m_n}} = R$ ganzzahlig sein. Da aber die Resultante zweier Formen ganzzahlig ist, so gilt dasselbe für irgend eine Anzahl von Formen.

Die Resultante von n linearen Formen

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

ist die Determinante

$$D = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$$

derselben. Denn man hat

$$Dx_n = \frac{\partial D}{\partial a_{1n}} f_1 + \frac{\partial D}{\partial a_{2n}} f_2 + \ldots + \frac{\partial D}{\partial a_{nn}} f_n$$

und D ist in Bezug auf die Coëfficienten jeder einzelnen Form linear-homogen und enthält das Hauptpotenzproduct $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ mit dem Coëfficienten 1.

Sind $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ linear und setzt man von $i=1$ bis $i=n-1$

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \ldots a_{n-1n} \\ u_1 & u_2 & \ldots u_n \end{vmatrix} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n,$$

so ist

$$\begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix} = f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

6.

Die Definition der Resultante von n Formen setzt eine bestimmte Reihenfolge derselben und der Veränderlichen voraus und es entsteht die Frage, wie sich die Resultante ändert, wenn man die Reihenfolge der Formen oder Veränderlichen oder beider ändert.

Es seien $\alpha\beta\ldots\sigma$ und $\alpha'\beta'\ldots\sigma'$ irgend zwei Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ und

$$R' = \begin{bmatrix} f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\sigma \\ x_{\alpha'}, x_{\beta'}, \ldots x_{\sigma'} \end{bmatrix}.$$

Da der Ausdruck R' die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ und dieselben Gradzahlen wie R besitzt, so kann er sich von R nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden und man hat

$$R' = cR.$$

Der Factor c ist der Coëfficient des Hauptpotenzproductes von $f_1, f_2, \ldots f_n$ in R'.

Ist insbesondere

$$\alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta, \ldots \sigma' = \sigma,$$

so fallen die Hauptglieder von R' und R zusammen, und es ist $c = 1$

$$R' = R.$$

Diese Gleichung gestattet die Bestimmung des Inbegriffes aller Glieder der Resultante R, welche ein gegebenes Potenzproduct $a_{\lambda\lambda}^{r_\lambda} a_{\mu\mu}^{r_\mu} \dots a_{\sigma\sigma}^{r_\sigma}$ als Factor enthalten. Sind nämlich $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ die von $\lambda, \mu, \dots \sigma$ verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2, \dots n$, $f_\alpha^0, f_\beta^0, \dots f_\varepsilon^0$ die Formen, welche aus $f_\alpha, f_\beta, \dots f_\varepsilon$ durch Nullsetzung von $x_\lambda, x_\mu, x_\sigma$ hervorgehen und $R_{\lambda\mu\dots\sigma}$ die Resultante

$$R_{\lambda\mu\dots\sigma} = \begin{bmatrix} f_\alpha^0, f_\beta^0, \dots f_\varepsilon^0 \\ x_\alpha, x_\beta, \dots x_\varepsilon \end{bmatrix},$$

so ist

$$a_{\lambda\lambda}^{r_\lambda} a_{\mu\mu}^{r_\mu} \dots a_{\sigma\sigma}^{r_\sigma} R_{\lambda\mu\dots\sigma}^{m_\lambda m_\mu \dots m_\sigma}$$

der fragliche Inbegriff. Denn der Coëfficient von $a_{\sigma\sigma}^{r_\sigma}$ in R', also auch in R ist — auch für $n = 2$ — $R_\sigma^{m_\sigma}$, der Coëfficient von $a_{\rho\rho}^{r_\rho} a_{\sigma\sigma}^{r_\sigma}$, welcher mit dem von $a_{\rho\rho}^{r_\rho}$ in $R_\sigma^{m_\sigma}$ oder der $m_\sigma$ten Potenz des Coëfficienten $a_{\rho\rho}^{\frac{r_\rho}{m_\sigma}}$ in R_σ zusammenfällt, $R_{\rho\sigma}^{m_\rho m_\sigma}$ u. s. f.

Geht R' aus R durch Vertauschung von f_i und f_k hervor und bezeichnen $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ die von i, k verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2, \dots n$, wofern $n > 2$ ist, so ist

$$a_{\alpha\alpha}^{r_\alpha} \dots a_{\varepsilon\varepsilon}^{r_\varepsilon} \begin{bmatrix} f_k^0\, f_i^0 \\ x_i\;\, x_k \end{bmatrix}^{m_\alpha m_\beta \dots m_\varepsilon}$$

der Inbegriff aller das Product $a_{\alpha\alpha}^{r_\alpha} \dots a_{\varepsilon\varepsilon}^{r_\varepsilon}$ enthaltenden Glieder von $R'.c$ ist also in diesem Falle der Coëfficient von $a_{ii}^{r_i} a_{kk}^{r_k}$ in

$$\begin{bmatrix} f_k^0, f_i^0 \\ x_i, x_k \end{bmatrix}^{\frac{r}{m_i m_k}}$$

und dies gilt auch noch für $n = 2$, wenn unter f_i^0, f_k^0 die Formen f_i, f_k selbst verstanden werden. Daher ist

$$c = (-1)^{m_i m_k \cdot \frac{r}{m_i m_k}} = (-1)^r$$

$$R' = (-1)^r R.$$

Hienach ist, wenn $C_{\alpha\beta\ldots\sigma}$ die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem die Permutation $\alpha\beta\ldots\sigma$ gerade oder ungerade ist,

$$\begin{bmatrix} f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\sigma \\ x_{\alpha'}, x_{\beta'}, \ldots x_{\sigma'} \end{bmatrix} = C^p_{\alpha\beta\ldots\sigma} C^p_{\alpha'\beta'\ldots\sigma'} R.$$

Ist mindestens eine der Gradzahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ gerade, so bleibt R bei allen Vertauschungen der Formen oder Veränderlichen ungeändert. Sind dagegen alle Gradzahlen ungerade, so wechselt R bei der Vertauschung zweier Formen oder Veränderlichen das Vorzeichen.

7.

Ersetzt man in der Formenreihe $f_1, f_2, \ldots f_n$ eine Form, etwa f_i, einmal durch φ, einmal durch ψ und zuletzt durch $\varphi\psi$, wo φ, ψ allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, und bezeichnet die Resultanten der drei erhaltenen Formenreihen mit R', R'', R, so ist

$$R = R'R''.$$

Denn R genügt der Identität

$$Rx_n^r = [\varphi\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon],$$

wo $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ die Zahlen $1, 2, \ldots n$ nach Weglassung von i bezeichnen, und besitzt daher die Grundeigenschaft sowohl in Bezug auf die Formen $\varphi, f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$, als auch in Bezug auf die Formen $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$. Hieraus erhellt zunächst die Theilbarkeit von R durch R'. Setzt man

$$R = QR'$$

und erwägt, dass der Rest von R in Bezug auf $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$ und x_n verschwindet, der von R' aber nicht, weil R' die Coëfficienten von ψ nicht enthält und nicht identisch verschwindet, so muss der Rest von Q in Bezug auf $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$ und x_n verschwinden. Q hat also die Grundeigenschaft in Bezug auf $\psi, f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon$ und muss durch R'' theilbar sein. Wird

$$Q = NR''$$

gesetzt, so ist

$$R = NR'R''$$

und N ein blosser Zahlenfactor, wie eine Vergleichung der Gradzahlen zeigt. Für

$$f_\alpha = x_\alpha^{m_\alpha}\, f_\beta = x_\beta^{m_\beta} \ldots f_\varepsilon = x_\varepsilon^{m_\varepsilon}$$
$$\varphi = x_\iota^\mu \qquad \psi = x_\iota^\nu,$$

wo μ, ν die Gradzahlen von φ, ψ bedeuten, wird

$$R = R' = R'' = 1,$$

und es ergibt sich $N = 1$.

Ersetzt man allgemeiner einige der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ oder alle durch Producte von Formen, so ist die Resultante der so entstehenden Formenreihe das Product aller Resultanten, welche allen möglichen Zusammenstellungen von n Formen entsprechen, deren erste ein Factor des statt f_1 gesetzten Productes, deren zweite ein Factor des statt f_2 gesetzten Productes u. s. w. ist.

Es ist z. B.

$$\begin{bmatrix} \varphi\psi, & \chi\vartheta, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \varphi, & \chi, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi, & \vartheta, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi, & \chi, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi, & \vartheta, & \omega \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} f_1^{\nu_1}, f_2^{\nu_2}, \ldots f_n^{\nu_n} \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}.$$

8.

Die Resultante R von n Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ bleibt ungeändert, wenn man eine dieser Formen, etwa f_i, durch $f_i + \varphi f_k$ ersetzt, wo von den Gradzahlen m_i, m_k von f_i, f_k angenommen wird, dass $m_i \geqq m_k$ ist, und φ eine allgemeine Form von $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Grade $m_i - m_k$ bezeichnet.

Denn die Resultante R' des neuen Formensystems hat die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$. Die Differenz

$R'-R$ besitzt daher ebenfalls dieselbe und muss demzufolge identisch verschwinden, weil sie in Bezug auf den Coëfficienten a_{ii} von $x_i^{m_i}$ in f_i den Grad $\frac{p}{m_i}$ nicht erreicht, wo p das Product der Gradzahlen von $f_1, f_2, \ldots f_n$ bezeichnet.

Ersetzt man in der Formenreihe

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

die Form f_i durch $f_i + [f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\varepsilon]$, wo $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ die von i verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots n$ sind und $m_i \geqq m_\alpha, m_\beta, \ldots m_\varepsilon$ angenommen wird, so bleibt R ungeändert.

Ist $f_k = cg^m$, wo c eine Constante und g eine allgemeine Form von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen, und ist der Grad μ von g nicht grösser als der Grad m_i von f_i, φ eine allgemeine Form von $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Grade $m_i - \mu$, so bleibt die Resultante R der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ungeändert, wenn f_i durch $f_i + \varphi g$ ersetzt wird.

Es seien R' die Resultante der neuen Formenreihe, R_1, R_2 die Resultanten der Formenreihen, welche aus $f_1, f_2, \ldots f_n$ dadurch hervorgehen, dass einmal f_k durch g, einmal f_k durch g und f_i durch $f_i + \varphi g$ ersetzt wird. Es ist dann

$$R = c^{\frac{p}{m_k}} R_1^m$$

$$R' = c^{\frac{p}{m_k}} R_2^m$$

$$R_1 = R_2$$

und daher

$$R' = R.$$

Beispiel.

Es sei $\Theta(u_1, u_2, \ldots u_n)$ die Resultante von $n-1$ allgemeinen Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$$

und einer linearen Form

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n$$

und zur Abkürzung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i} = \Theta_i$$

$$s_1\Theta_1 + s_2\Theta_2 + \ldots + s_n\Theta_n = \Theta'(u_1, u_2, \ldots)$$

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \Theta'(v_1 w_x - w_1 v_x, v_2 w_x - w_2 v_x, \ldots \\ x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \quad x_n \end{bmatrix}.$$

Es ist dann, wofern die Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ nicht alle linear sind

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \Theta(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \Theta'(v_1 X + w_1 Y, \ldots) \\ X, \quad Y \end{bmatrix}$$

$$= M\Theta(s_1, s_2, \ldots s_n),$$

wo M die Bedeutung des Abschnittes 5 hat.

Setzt man

$$\Theta(v_1 X + w_1 Y, v_2 X + w_2 Y, \ldots) = F,$$

so wird

$$v_1\Theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + v_2\Theta_2(v_1 X + w_1 Y_1, \ldots) + \ldots = \frac{\partial F}{\partial X}$$

$$w_1\Theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + w_2\Theta_2(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + \ldots = \frac{\partial F}{\partial Y}$$

und die Form

$$\Theta'(v_1 w_x - w_1 v_x, \ldots)$$

geht nach Ersetzung von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch

$$\Theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \Theta_2(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \ldots$$

in

$$\Theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right)$$

über. Man hat daher, wenn ν das Product der Gradzahlen von $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ oder den Grad von $\Theta(u_1, u_2, \ldots)$ in $u_1, u_2, \ldots$ bezeichnet, nach A. 5, S. 1197

$$M^{\nu-1}\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} F, \Theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right) \\ X, Y \end{bmatrix}.$$

Es ist aber

$$X^{\nu-1}\Theta'\left(v_1\frac{\partial F}{\partial Y}-w_1\frac{\partial F}{\partial X},\ldots\right)$$

$$=\Theta'\left(v_1X\frac{\partial F}{\partial Y}-w_1X\frac{\partial F}{\partial X},\ldots\right)$$

$$=\Theta'\left((v_1X+w_1Y)\frac{\partial F}{\partial Y}-\nu w_1F,\ldots\right)$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{\nu-1}\Theta'(v_1X+w_1Y,\ldots)+[F].$$

Hieraus folgt

$$\begin{bmatrix} F, X^{\nu-1}\Theta'\left(v_1\dfrac{\partial F}{\partial Y}-w_1\dfrac{\partial F}{\partial X},\ldots\right) \\ X, Y \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} F, \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y}\right)^{\nu-1}\Theta'(v_1X+w_1Y,\ldots) \\ X, \quad Y \end{bmatrix}$$

oder

$$\begin{bmatrix} F, & X \\ X, & Y \end{bmatrix}^{\nu-1}\mathfrak{R}M^{\nu-1}=$$

$$\begin{bmatrix} F, & \dfrac{\partial F}{\partial Y} \\ X, & Y \end{bmatrix}^{\nu-1}\begin{bmatrix} F, \Theta'(v_1X+w_1Y,\ldots) \\ X, Y \end{bmatrix}.$$

Nun ist (A. 5)

$$\begin{bmatrix} F, & X \\ X, & Y \end{bmatrix}=(-1)^{\nu}\Theta(w_1, w_2,\ldots)$$

$$\begin{bmatrix} F, & \dfrac{\partial F}{\partial Y} \\ X, & Y \end{bmatrix}=M\Theta(w_1, w_2,\ldots)$$

$$\begin{bmatrix} F, \Theta'(v_1X+w_1Y,\ldots) \\ X, Y \end{bmatrix}=M\Theta(s_1, s_2,\ldots).$$

Nach Forthebung von $M^{\nu-1}\Theta^{\nu-1}(w_1, w_2,\ldots)$ ergibt sich daher

$$\mathfrak{R}=M\Theta(s_1, s_2,\ldots s_n).$$

und zur Abkürzung

$$\frac{\partial\Theta}{\partial u_i} = \Theta_i$$

$$s_1\Theta_1 + s_2\Theta_2 + \ldots + s_n\Theta_n = \Theta'(u_1, u_2, \ldots)$$

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \Theta'(v_1 w_x - w_1 v_x, v_2 w_x - w_2 v_x, \ldots \\ x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \qquad x_n \end{bmatrix}.$$

Es ist dann, wofern die Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ nicht alle linear sind

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \Theta(v_1 X + w_1 Y, \ldots), & \Theta'(v_1 X + w_1 Y, \ldots) \\ X, & Y \end{bmatrix}$$

$$= M\Theta(s_1, s_2, \ldots s_n),$$

wo M die Bedeutung des Abschnittes 5 hat.

Setzt man

$$\Theta(v_1 X + w_1 Y, v_2 X + w_2 Y, \ldots) = F,$$

so wird

$$v_1\Theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + v_2\Theta_2(v_1 X + w_1 Y_1, \ldots) + \ldots = \frac{\partial F}{\partial X}$$

$$w_1\Theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + w_2\Theta_2(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + \ldots = \frac{\partial F}{\partial Y}$$

und die Form

$$\Theta'(v_1 w_x - w_1 v_x, \ldots)$$

geht nach Ersetzung von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch

$$\Theta_1(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \Theta_2(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \ldots$$

in

$$\Theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right)$$

über. Man hat daher, wenn ν das Product der Gradzahlen von $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ oder den Grad von $\Theta(u_1, u_2, \ldots)$ in $u_1, u_2, \ldots$ bezeichnet, nach A. 5, S. 1197

$$M^{\nu-1}\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} F, \Theta'\left(v_1 \frac{\partial F}{\partial Y} - w_1 \frac{\partial F}{\partial X}, \ldots\right) \\ X, Y \end{bmatrix}.$$

Es ist aber

$$
\begin{aligned}
& X^{\nu-1}\Theta'\left(v_1\frac{\partial F}{\partial Y}-w_1\frac{\partial F}{\partial X},\ldots\right) \\
& = \Theta'\left(v_1 X\frac{\partial F}{\partial Y}-w_1 X\frac{\partial F}{\partial X},\ldots\right) \\
& = \Theta'\left((v_1 X+w_1 Y)\frac{\partial F}{\partial Y}-\nu w_1 F,\ldots\right) \\
& = \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{\nu-1}\Theta'(v_1 X+w_1 Y,\ldots)+[F].
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$
\begin{bmatrix} F, X^{\nu-1}\Theta'\left(v_1\frac{\partial F}{\partial Y}-w_1\frac{\partial F}{\partial X},\ldots\right) \\ X, Y \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} F, \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{\nu-1}\Theta'(v_1 X+w_1 Y,\ldots) \\ X, \quad Y \end{bmatrix}
$$

oder

$$
\begin{bmatrix} F, & X \\ X, & Y \end{bmatrix}^{\nu-1}\Re M^{\nu-1} =
$$

$$
\begin{bmatrix} F, & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ X, & Y \end{bmatrix}^{\nu-1}\begin{bmatrix} F, \Theta'(v_1 X+w_1 Y,\ldots) \\ X, Y \end{bmatrix}.
$$

Nun ist (A. 5)

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F, & X \\ X, & Y \end{bmatrix} &= (-1)^{\nu}\Theta(w_1, w_2,\ldots) \\
\begin{bmatrix} F, & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ X, & Y \end{bmatrix} &= M\Theta(w_1, w_2,\ldots) \\
\begin{bmatrix} F, \Theta'(v_1 X+w_1 Y,\ldots) \\ X, Y \end{bmatrix} &= M\Theta(s_1, s_2,\ldots).
\end{aligned}
$$

Nach Forthebung von $M^{\nu-1}\Theta^{\nu-1}(w_1, w_2,\ldots)$ ergibt sich daher

$$
\Re = M\Theta(s_1, s_2,\ldots s_n).
$$

9.

Aufgabe. Die allgemeinen Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

der Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

gehen durch die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \ldots + c_{1n} X_n \\ x_2 &= c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \ldots + c_{2n} X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1} X_1 + c_{n2} X_2 + \ldots + c_{nn} X_n \end{aligned}$$

mit unbestimmten Coëfficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}$ in die Formen

$$f_1', f_2', \ldots f_n'$$

der Variablen $X_1, X_2, \ldots X_n$ über; es soll die Resultante

$$R' = \begin{bmatrix} f_1', & f_2', \ldots f_n' \\ X_1, & X_2, \ldots X_n \end{bmatrix}$$

ermittelt werden.

Es sei

$$R = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, \ldots f_n \\ x_1, & x_2, \ldots x_n \end{bmatrix},$$

und C die Determinante

$$C = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}.$$

Man hat die Identität

$$R' X_n^r = [f_1', f_2', \ldots f_n'].$$

Ersetzt man in derselben $X_1, X_2, \ldots X_n$ durch die Ausdrücke

$$x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{11}} + x_2 \frac{\partial C}{\partial c_{21}} + \ldots + x_n \frac{\partial C}{\partial c_{n1}}$$

$$x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{12}} + x_2 \frac{\partial C}{\partial c_{22}} + \ldots + x_n \frac{\partial C}{\partial c_{n2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{1n}} + x_2 \frac{\partial C}{\partial c_{2n}} + \ldots + x_n \frac{\partial C}{\partial c_{nn}}$$

so gehen $f_1', f_2', \ldots$ in

$$C^{m_1} f_1, C^{m_2} f_2, \ldots C^{m_n} f_n$$

über, und es ergibt sich

$$R'\left(x_1 \frac{\partial C}{\partial c_{1n}} + x_2 \frac{\partial C}{\partial c_{2n}} + \ldots\right)^r = [f_1, f_2, \ldots f_n].$$

Hienach verschwindet der Rest der ganzen Function R' in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ und x_n, und dieselbe muss durch R theilbar sein. Setzt man

$$R' = QR,$$

so enthält Q die Coëfficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ nicht mehr und ist mittelst der besonderen Formen

$$f_1 = x_1^{m_1}, f_2 = x_2^{m_2}, \ldots f_n = x_n^{m_n}$$

bestimmbar. Für diese Formen wird

$$R = 1$$

$$f_1' = (c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \ldots + c_{1n} X_n)^{m_1}$$

$$f_2' = (c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \ldots + c_{2n} X_n)^{m_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n' = (c_{n1} X_1 + c_{n2} X_2 + \ldots + c_{nn} X_n)^{m_n},$$

also

$$R' = C^p = Q,$$

wo

$$p = m_1 m_2 \ldots m_n.$$

Es ist demnach

$$R' = C^r R$$

und R eine Invariante der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Folgerungen.

Ersetzt man x_i durch tx_i, so ist $t^r R$ die Resultante der neuen Formen.

Macht man die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 + z_1 X_n \\ x_2 &= X_2 + z_2 X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= X_{n-1} + z_{n-1} X_n \\ x_n &= -s_1 X_1 - s_2 X_2 - \ldots - s_{n-1} X_{n-1} + z_n X_n \end{aligned}$$

und setzt

$$s_1 z_1 + s_2 z_2 + \ldots + z_n = s,$$

so ist Rs^r die Resultante der neuen Formen und letztere haben beziehungsweise bei $X_n^{m_1}, X_n^{m_2}, \ldots X_n^{m_n}$ die Coëfficienten

$$f_1(z_1, z_2, \ldots z_n),\ f_2(z_1, z_2, \ldots z_n), \ldots f_n(z_1, z_2, \ldots z_n).$$

Aus der Identität

$$Rx_n^r = [f_1, f_2, \ldots f_n]$$

folgt aber, wenn

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0 \qquad x_n = 1$$

gesetzt wird,

$$R = [a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{nn}],$$

wo a_{in} den Coëfficienten von $x_n^{m_i}$ in f_i bezeichnet.

Durch Anwendung dieser Identität auf die Resultante Rs^r ergibt sich daher die Identität

$$Rs^r = [f_1(z_1, z_2, \ldots z_n),\ f_2(z_1, z_2, \ldots z_n), \ldots].$$

Macht man dieselbe durch Einführung einer n^{ten} Unbestimmten s_n homogen in $s_1, s_2, \ldots s_n$ und ersetzt $z_1, z_2, \ldots z_n$ durch $x_1, x_2, \ldots x_n$, so folgt

$$R(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n)^r = [f_1, f_2, \ldots f_n].$$

10.

Es seien

$$f_1, f_2, \ldots f_k$$

k allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ von den Graden $m_1, m_2, \ldots m_k$, wo $1 < k < n$, und

$$m_1 m_2 \ldots m_k = p.$$

Macht man die Substitution

$$x_i = \xi_{1i} X_1 + \xi_{2i} X_2 + \ldots + \xi_{ki} X_k,$$

so gehen $f_1, f_2, \ldots f_k$ in Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ der Veränderlichen $X_1, X_2, \ldots X_k$ über, deren Resultante R eine ganze homogene Function p^{ten} Grades der Determinanten k^{ter} Ordnung des Elementensystems

$$\begin{matrix} \xi_{11} \, \xi_{21} \ldots \xi_{k1} \\ \xi_{12} \, \xi_{22} \ldots \xi_{k2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{1n} \, \xi_{2n} \ldots \xi_{kn} \end{matrix}$$

ist, also die Unbestimmten $\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots \xi_{kn}$ nur innerhalb dieser Determinanten enthält.

Gehen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ durch die Substitution

$$\begin{aligned} X_1 &= y_{11} Y_1 + y_{12} Y_2 + \ldots + y_{1k} Y_k \\ X_2 &= y_{21} Y_1 + y_{22} Y_2 + \ldots + y_{2k} Y_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_k &= y_{k1} Y_1 + y_{k2} Y_2 + \ldots + y_{kk} Y_k \end{aligned}$$

in $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_k$ über und wird

$$\Sigma \pm y_{11} y_{22} \ldots y_{kk} = \omega$$

gesetzt, so ist

$$\begin{bmatrix} \psi_1, \; \psi_2, \ldots \psi_k \\ Y_1, Y_2, \ldots Y_k \end{bmatrix} = \omega^p R.$$

Man erhält aber auch ψ_i, wenn man unmittelbar in f_i die Substitution

$$x_i = \eta_{1i} Y_1 + \eta_{2i} Y_2 + \ldots + \eta_{ki} Y_k$$

macht, wo

$$\eta_{\rho\iota} = y_{1\rho}\xi_{1\iota} + y_{2\rho}\xi_{2\iota} + \ldots + y_{k\rho}\xi_{k\iota},$$

und die Resultante der Formen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_k$ ist der Ausdruck R_1, in welchen R übergeht, wenn $\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots \xi_{kn}$ durch $\eta_{11}, \eta_{21}, \ldots \eta_{kn}$ ersetzt werden. Daher ist

$$R_1 = \omega^r R.$$

Es sei nun

$$\Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \begin{vmatrix} \xi_{1\alpha} & \xi_{2\alpha} & \ldots & \xi_{k\alpha} \\ \xi_{1\beta} & \xi_{2\beta} & \ldots & \xi_{k\beta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1\varepsilon} & \xi_{2\varepsilon} & \ldots & \xi_{k\varepsilon} \end{vmatrix}$$

und man bezeichne die ähnlich wie eine Determinante gebildeten Operationen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_{1\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial \eta_{2\alpha}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \eta_{k\alpha}} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_{1\beta}}, & \frac{\partial}{\partial \eta_{2\beta}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \eta_{k\beta}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial}{\partial \eta_{1\varepsilon}}, & \frac{\partial}{\partial \eta_{2\varepsilon}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \eta_{k\varepsilon}} \end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}}, & \frac{\partial}{\partial y_{12}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_{1k}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{21}}, & \frac{\partial}{\partial y_{22}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_{2k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial}{\partial y_{k1}}, & \frac{\partial}{\partial y_{k2}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_{kk}} \end{vmatrix}$$

mit $\Omega_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$, ∇ und die Operation

$$\Sigma \Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} \Omega_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$$

mit Ω, wo das Summenzeichen auf alle Combinationen k^{ter} Classe $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \ldots n$ zu erstrecken ist. Nimmt man ein Operationsobject an, welches die Unbestimmten

$y_{11}, y_{12}, \ldots y_{nn}$ nur innerhalb der Verbindungen $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots \eta_{kn}$ enthält, so ist

$$\nabla = \Omega$$

und daher

$$\nabla^p \omega^p R = R \nabla^p \omega^p = \Omega^p R_1.$$

Wird ω^p nach Potenzproducten $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ der Unbestimmten $y_{11}, y_{12}, \ldots$ entwickelt und

$$\omega^p = c\mathfrak{P} + c_1\mathfrak{P}_1 + \ldots$$

gesetzt und bezeichnen $Q, Q_1, \ldots$ die Differentiationsforderungen, welche aus $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ nach Ersetzung von $y_{\rho\sigma}$ durch $\frac{\partial}{\partial y_{\rho\sigma}}$ hervorgehen, so ist

$$\nabla^p = cQ + c_1 Q_1 + \ldots$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} \nabla^p \omega^p &= c^2 Q\mathfrak{P} + c_1^2 Q_1 \mathfrak{P}_1 + \ldots \\ &= h, \end{aligned}$$

wo h eine positive Zahl bedeutet.

Man hat daher

$$R = \frac{1}{h} \Omega^p R_1$$

und es erhellt, dass $\frac{1}{h} \Omega^p R_1$ die Unbestimmten $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots$ nur innerhalb der Determinanten $\Delta_{\alpha\beta\ldots\epsilon}$ enthält.

Da R der Identität

$$RX_k^r = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k]$$

genügt, so ergibt sich, wenn

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_{k-1} = 0 \qquad X_k = 1$$
$$\xi_{k1} = x_1, \ \xi_{k2} = x_2, \ldots \xi_{kn} = x_n$$

gesetzt wird, wodurch R in R_0 übergehe,

$$R_0 = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \ldots + P_k f_k.$$

Man darf annehmen, dass die ganzen Functionen $P_1, P_2, \ldots P_k$ die Unbestimmten $\xi_{11}, \xi_{21}, \ldots \xi_{k-1\,1}, \xi_{k-1\,2}, \ldots$ nur innerhalb der Determinanten $k-1^{\text{ter}}$ Ordnung des Systems

$$\begin{matrix} \xi_{11}\,\xi_{21}\ldots\xi_{k-1\,1} \\ \xi_{12}\,\xi_{22}\ldots\xi_{k-1\,2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1n}\,\xi_{2n}\ldots\xi_{k-1\,n} \end{matrix}$$

enthalten. Denn es sei

$$\zeta_{\lambda\mu} = y_{1\lambda}\xi_{1\mu} + y_{2\lambda}\xi_{2\mu} + \ldots + y_{k-1\,\lambda}\xi_{k-1\,\mu}$$

$$\nabla_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}}, & \frac{\partial}{\partial y_{12}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_{1\,k-1}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{21}}, & \frac{\partial}{\partial y_{22}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_{2\,k-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial y_{k-1\,1}}, & \frac{\partial}{\partial y_{k-1\,2}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial y_{k-1\,k-1}} \end{vmatrix}$$

$$\Delta'_{\alpha\beta\ldots\delta} = \begin{vmatrix} \xi_{1\alpha}\,\xi_{2\alpha}\ldots\xi_{k-1\,\alpha} \\ \xi_{1\beta}\,\xi_{2\beta}\ldots\xi_{k-1\,\beta} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \xi_{1\delta}\,\xi_{2\delta}\ldots\xi_{k-1\,\delta} \end{vmatrix}$$

$$\Omega'_{\alpha\beta\ldots\delta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_{1\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial \zeta_{2\alpha}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \zeta_{k-1\,\alpha}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_{1\delta}}, & \frac{\partial}{\partial \zeta_{2\delta}}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \zeta_{k-1\,\delta}} \end{vmatrix}$$

$$\Omega_1 = \Sigma\Delta'_{\alpha\beta\ldots\delta}\Omega'_{\alpha\beta\ldots\delta},$$

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots y_{1\,k-1} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots y_{2\,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{k-1\,1} & y_{k-1\,2} & \ldots y_{k-1\,k-1} \end{vmatrix} = \omega_1,$$

wo die Summe sich auf alle Combinationen $k-1^{\text{ter}}$ Classe $\alpha\beta\ldots\delta$ der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezieht. Nach Ersetzung von

$\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots \xi_{k-1\,1}, \ldots \xi_{k-1\,n}$ durch $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots \zeta_{k-1\,n}$ geht die vorstehende Identität in

$$\omega_1^p R_0 = P_1' f_1 + P_2' f_2 + \ldots + P_k' f_k$$

über, wo $P_1', P_2', \ldots$ ganze Functionen der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots$ und der Unbestimmten $\xi_{11}, \ldots y_{11}, \ldots$ sind, welche $y_{11}, y_{12}, \ldots$ nur in den Verbindungen $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots$ enthalten. Vollzieht man an beiden Seiten p mal die Operation ∇_1, welche hier mit Ω_1 zusammenfällt, so ergibt sich

$$R_0 \nabla_1^p \omega_1^p = f_1 \Omega_1^p P_1' + f_2 \Omega_1^p P_2' + \ldots$$

Da sich aber für $\nabla_1^p \omega_1^p$, wie vorhin, eine ganze positive Zahl ergibt und $\Omega_1^p P_1', \Omega_1^p P_2', \ldots$ blosse Functionen der Determinanten $\Delta'_{\alpha\beta\ldots\delta}$ sind, so ist obige Behauptung bewiesen.

Es seien

$$\begin{array}{l} u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n \\ v_x = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_n x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_x = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n \end{array}$$

$n-k$ allgemeine lineare Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $(u_\lambda v_\mu \ldots w_\rho)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_\lambda & u_\mu & \ldots & u_\rho \\ v_\lambda & v_\mu & \ldots & v_\rho \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_\lambda & w_\mu & \ldots & w_\rho \end{vmatrix}.$$

Nach Ersetzung jeder Determinante $\Delta_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ durch die Determinante $(u_\lambda v_\mu \ldots w_\rho)$, wo $\alpha\beta\ldots\varepsilon\ \lambda\mu\ldots\rho$ eine gerade Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots n$ sein soll, geht R in einen ganzen Ausdruck der Determinanten $n-k^{\text{ter}}$ Ordnung des Systems

$$\begin{array}{l} u_1\ u_2\ \ldots u_n \\ v_1\ v_2\ \ldots v_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_1\ w_2\ \ldots w_n \end{array}$$

über, welcher kurz mit

$$R'((u_1 v_2 \ldots w_{n-k}), \ldots)$$

bezeichnet werden möge.

Nimmt man zu den $n-k$ Formen $u_x, v_x, \ldots w_x$ noch weitere k lineare Formen $q_x, r_x, \ldots s_x, t_x$ hinzu und setzt

$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & \ldots & q_n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{vmatrix} = D,$$

so wird nach Ersetzung von

$$\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots \xi_{k-1\,i}$$

durch

$$\frac{\partial D}{\partial q_i}, \frac{\partial D}{\partial r_i}, \ldots \frac{\partial D}{\partial s_i}$$

$$\Delta'_{\alpha\beta\ldots\delta} = D^{k-2} \frac{\partial^{k-1} D}{\partial q_\alpha \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta}$$

$$= D^{k-2}\left(t_\varepsilon \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta \partial t_\varepsilon} + u_\varepsilon \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta \partial u_\varepsilon} + \ldots\right).$$

Hieraus folgt, wenn $\lambda, \mu, \ldots \rho$ die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ zu einer geraden Permutation $\alpha\beta\ldots\varepsilon\,\lambda\mu\ldots\rho$ ergänzen

$$\begin{vmatrix} \xi_{1\alpha} & \xi_{2\alpha} & \ldots & \xi_{k-1\,\alpha} & x_\alpha \\ \xi_{1\beta} & \xi_{2\beta} & \ldots & \xi_{k-1\,\beta} & x_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1\varepsilon} & \xi_{2\varepsilon} & \ldots & \xi_{k-1\,\varepsilon} & x_\varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$D^{k-2}\left(t_x \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta \partial t_\varepsilon} + u_x \frac{\partial^k D}{\partial q_\alpha \partial r_\beta \ldots \partial s_\delta \partial u_\varepsilon} + \ldots\right)$$

$$= D^{k-2}(t_x(u_\lambda v_\mu \ldots w_\rho) - u_x(t_\lambda v_\mu \ldots w_\rho) + \ldots \pm w_x(t_\lambda u_\mu \ldots))$$

und die Identität

$$R_0 = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \ldots + P_k f_k$$

nimmt in Folge derselben Ersetzung die Gestalt

$$D^{(k-2)p} R'(t_x(u_1 v_2 \ldots w_{n-k}) - u_x(t_1 v_2 \ldots w_{n-k}) + \ldots \pm w_x(t_1 u_2 \ldots), \ldots) = D^{(k-2)p}[f_1, f_2, \ldots f_k]$$

an. Man hat also die Identität

$$R'(t_x(u_1 v_2 \ldots w_{n-k}) - u_x(t_1 u_2 \ldots w_{n-k}) + \ldots \pm w_x(t_1 u_2 \ldots), \ldots) = [f_1, f_2, \ldots f_k].$$

Der Ausdruck

$$R'((u_1 v_2 \ldots w_{n-k}), \ldots)$$

ist die Resultante der Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_k, \; u_x, \; v_x, \ldots w_x.$$

Denn er besitzt die Grundeigenschaft in Bezug auf die genannten Formen, da die vorstehende Identität

$$t_x^p R'((u_1 v_2 \ldots w_{n-k}), \ldots) = [f_1, f_2, \ldots f_k, \; u_x, \ldots w_x]$$

ergibt. Ferner hat derselbe in den Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_k$, $u_x, v_x, \ldots w_x$ die Gradzahlen

$$\frac{p}{m_1}, \; \frac{p}{m_2}, \ldots \frac{p}{m_k}, \; p, p, \ldots p.$$

Für

$$f_1 = x_1^{m_1} \; f_2 = x_2^{m_2} \ldots f_k = x_k^{m_k}$$

wird

$$R = \Delta_{12\ldots k}^p,$$

also

$$R' = (u_{k+1} v_{k+2} \ldots w_n)^p$$

und wenn noch

$$u_x = x_{k+1}, \; v_x = x_{k+2}, \ldots w_x = x_n$$

gesetzt wird,

$$R' = 1.$$

11.

Sind

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$$

allgemeine Formen gleichen Grades von $x_1, x_2, \ldots x_n$, wo $m \geqq n$, und bildet man die Formen

$$\begin{aligned} g_1 &= c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + \ldots + c_{1m}\varphi_m \\ g_2 &= c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + \ldots + c_{2m}\varphi_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n &= c_{n1}\varphi_1 + c_{n2}\varphi_2 + \ldots + c_{nm}\varphi_m, \end{aligned}$$

wo $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nm}$ Unbestimmte sind, so ist die Resultante

$$R = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}$$

eine Function der Determinanten n^{ter} Ordnung, welche sich aus dem System der Unbestimmten

$$\begin{matrix} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1m} \\ c_{21}\, c_{22} \ldots c_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}\, c_{n2} \ldots c_{nm} \end{matrix}$$

bilden lassen.

Es seien $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{nn}$ Unbestimmte und man setze

$$\begin{aligned} y_{1i}c_{1k} + y_{2i}c_{2k} + \ldots + y_{ni}c_{nk} &= c'_{ik} \\ g'_i = c'_{i1}\varphi_1 + c'_{i2}\varphi_2 + \ldots + c'_{im}\varphi_m & \\ = y_{1i}g_1 + y_{2i}g_2 + \ldots + y_{ni}g_n & \\ \Sigma \pm y_{11}y_{22} \ldots y_{nn} &= Y. \end{aligned}$$

Geht R nach Ersetzung von $c_{11}, c_{12}, \ldots$ durch $c'_{11}, c'_{12}, \ldots$ in R' über, so hat man

$$R' = \begin{bmatrix} g'_1, g'_2, \ldots g'_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix} = Y^q R,$$

wo $q = \mu^n$ und μ der Grad von φ_1 ist.

Es sei nun weiter

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}}, & \frac{\partial}{\partial y_{12}}, & \dots & \frac{\partial}{\partial y_{1n}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{21}}, & \frac{\partial}{\partial y_{22}}, & \dots & \frac{\partial}{\partial y_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial y_{n1}}, & \frac{\partial}{\partial y_{n2}}, & \dots & \frac{\partial}{\partial y_{nn}} \end{vmatrix}$$

$$\Omega_{\alpha\beta\dots\varepsilon} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial c'_{1\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial c'_{1\beta}}, & \dots & \frac{\partial}{\partial c'_{1\varepsilon}} \\ \frac{\partial}{\partial c'_{2\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial c'_{2\beta}}, & \dots & \frac{\partial}{\partial c'_{2\varepsilon}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial c'_{n\alpha}}, & \frac{\partial}{\partial c'_{n\beta}}, & \dots & \frac{\partial}{\partial c'_{n\varepsilon}} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{\alpha\beta\dots\varepsilon} = \begin{vmatrix} c_{1\alpha} c_{1\beta} \dots c_{1\varepsilon} \\ c_{2\alpha} c_{2\beta} \dots c_{2\varepsilon} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n\alpha} c_{n\beta} \dots c_{n\varepsilon} \end{vmatrix}$$

$$\Omega = \Sigma \Delta_{\alpha\beta\dots\varepsilon} \Omega_{\alpha\beta\dots\varepsilon},$$

wo die Summe auf alle Combinationen n^{ter} Classe $\alpha\beta\dots\varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \dots m$ zu beziehen ist. Vollzieht man an beiden Seiten der vorstehenden Identität $q$mal die Operation ∇ und erwägt, dass dieselbe bei der Ausführung auf der linken Seite mit Ω zusammenfällt, so folgt

$$\Omega^q R' = R \nabla^q Y^q.$$

$\nabla^q Y^q$ ist, wie in A. 10 gefunden wurde, eine ganze positive Zahl h und $\Omega^q R'$ eine ganze homogene Function q^{ten} Grades der Determinanten $\Delta_{\alpha\beta\dots\varepsilon}$, welche in ihren Coëfficienten die Unbestimmten $c_{11}, c_{12}, \dots$ nicht mehr enthält. Es ist also, wie behauptet wurde,

$$R = \frac{1}{h} \Omega^q R'.$$

Sind

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$$

Formen gleichen Grades μ in $x_1, x_2, \ldots x_n$,

$$\begin{array}{c} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{k1}\, c_{k2} \ldots c_{km} \end{array}$$

Unbestimmte und ist $k < n \leqq m$, so ist die Resultante der k Formen

$$\begin{array}{l} g_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + \ldots + c_{1m}\varphi_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k = c_{k1}\varphi_1 + c_{k2}\varphi_2 + \ldots + c_{km}\varphi_m \end{array}$$

und $n-k$ linear-homogener Formen eine blosse Function der Determinanten k^{ter} Ordnung des Systems

$$\begin{array}{c} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1m} \\ c_{21}\, c_{22} \ldots c_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{k1}\, c_{k2} \ldots c_{km}. \end{array}$$

12.

Aufgabe. Es seien

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$$

gegebene ganze positive Zahlen, welche beziehungsweise die Gradzahlen

$$m_1, m_2, \ldots m_n$$

der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ nicht übersteigen. Dem Coëfficienten eines Potenzproductes $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ in f_i werde das Gewicht $\mu_i - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{n-1}$ oder Null beigelegt, je nachdem die Zahl $\mu_i - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{n-1}$ positiv ist oder nicht; einem Producte von Coëfficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ werde als Gewicht die Summe der Gewichte seiner Factoren beigelegt. Es soll unter den Gewichten der einzelnen Glieder der Resultante

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}$$

das kleinste ermittelt werden.

Es sei N der Inbegriff aller Glieder von R, welche das kleinste Gewicht ν aufweisen, H der Inbegriff der übrigen Glieder, g_i der Inbegriff der die Potenz $x_n^{m_i-\mu_i}$ von x_n enthaltenden Glieder von f_i und

$$f_i = x_n^{m_i-\mu_i} g_i + h_i.$$

Gehen $g_i - a_{in} x_n^{\mu_i}$, h_i für $x_n = 1$ in $g_i^{(n)}$, h_i^0 über, so nimmt die Identität

$$R = [a_{1n} + f_1^{(n)}, a_{2n} + f_2^{(n)}, \ldots]$$

die Gestalt

$$N + H = [a_{1n} + g_1^{(n)} + h_1^0, a_{2n} + g_2^{(n)} + h_2^0, \ldots]$$

an. Ersetzt man in derselben jeden Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_n$ durch sein Product in t^γ und $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ durch $tx_1, tx_2, \ldots tx_{n-1}$, wo t eine Unbestimmte und γ das Gewicht des betreffenden Coëfficienten bezeichnen, so ergibt sich

$$Nt^\nu + [t^{\nu+1}] = [t^{\mu_1}(a_{1n} + g_1^{(n)} + th_1'), \ldots],$$

wo $h_1', h_2', \ldots$ ganze Functionen der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und der Unbestimmten t bedeuten. Bezeichnet man daher den Ausdruck N als Function von $a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{nn}$ mit $N(a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{nn})$ und ersetzt

$$a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{nn}$$

durch

$$-g_1^{(n)} - th_1', -g_2^{(n)} - th_2', \ldots -g_n^{(n)} - th_n',$$

so folgt

$$t^\nu N(-g_1^{(n)} - th_1', -g_2^{(n)} - th_2', \ldots) + [t^{\nu+1}] = 0.$$

In dieser Identität müssen die die Potenz t^ν enthaltenden Glieder sich unter einander fortheben, und es wird

$$0 = N(-g_1^{(n)}, -g_2^{(n)}, \ldots -g_n^{(n)}).$$

N hat also die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen

$$g_1, g_2, \ldots g_n$$

und muss demzufolge durch die Resultante

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}$$

theilbar sein.

Es sei

$$N = Q\mathfrak{R},$$

und es mögen Q, $\mathfrak{R}$ in Q', $\mathfrak{R}'$ übergehen, wenn jeder Coëfficient C von $f_1, f_2, \ldots f_n$ durch Ct^γ ersetzt wird, wo γ das Gewicht von C bedeutet. Da diese Ersetzung darauf hinausläuft, in den Formen $g_1, g_2, \ldots g_n$ x_n durch tx_n zu ersetzen und die übrigen Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots$ ungeändert zu lassen, so wird

$$\mathfrak{R}' = t^\pi \mathfrak{R}$$

also

$$Nt^\nu = Q'\mathfrak{R}t^\pi,$$

wo

$$\pi = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$$

ist. ν muss also $\geqq \pi$ sein.

ν kann aber nicht $> \pi$ sein, wie die besonderen Formen

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^{\mu_1} x_n^{m_1-\mu_1} \\ f_2 &= x_1^{m_2} + x_2^{\mu_2} x_n^{m_2-\mu_2} \\ f_3 &= x_2^{m_3} + x_3^{\mu_3} x_n^{m_3-\mu_3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= x_{n-1}^{m_n} + x_n^{m_n} \end{aligned}$$

zeigen. Diese Formen gehen nach Ersetzung jedes Coëfficienten vom Gewicht γ durch sein Product in t^γ in

$$\begin{aligned} f'_1 &= x_1^{\mu_1} x_n^{m_1-\mu_1} \\ f'_2 &= x_1^{m_2} + x_2^{\mu_2} x_n^{m_2-\mu_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{n-1} &= x_{n-2}^{m_{n-1}} + x_{n-1}^{\mu_{n-1}} x_n^{m_{n-1}-\mu_{n-1}} \\ f'_n &= x_{n-1}^{m_n} + t^{\mu_n} x_n^{m_n} \end{aligned}$$

über, und es handelt sich um die Berechnung der Resultante

$$R' = \begin{bmatrix} f'_1, f'_2, \ldots f'_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}.$$

Zu diesem Ende ist zu bemerken, dass eine Resultante wie

$$B = \begin{bmatrix} x_1^{\nu_1} + x_2 w_1, & x_2^{\nu_2} + x_3 w_2, \ldots & x_{n-1}^{\nu_{n-1}} + x_n w_{n-1}, & x_n \\ x_1 & , x_2 & , \quad x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix},$$

wo $w_1, w_2, \ldots$ Formen vom Grade $\nu_1 - 1, \nu_2 - 1, \ldots$ bezeichnen, den Werth 1 hat. Denn man darf, ohne B zu ändern, zunächst in der $n-1^{\text{ten}}$ Form den Bestandtheil $x_n w_{n-1}$, hierauf in der $n-2^{\text{ten}}$ Form den Bestandtheil $x_{n-1} w_{n-2}$ u. s. f. zuletzt in der ersten Form den Bestandtheil $x_2 w_1$ fortlassen. Es wird demnach

$$B = \begin{bmatrix} x_1^{\nu_1}, x_2^{\nu_2}, \ldots x_{n-1}^{\nu_{n-1}}, x_n \\ x_1, x_2, \quad x_{n-1}, x_n \end{bmatrix}$$
$$= 1.$$

R' zerfällt nun zunächst — auch für $m_1 - \mu_1 = 0$ — in die Factoren

$$\begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, f'_2, \ldots f'_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} x_n, f'_2, \ldots f'_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}^{m_1 - \mu_1} = \pm \begin{bmatrix} f'_2, f'_3, \ldots f'_n, & x_n \\ x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix}^{m_1 - \mu_1},$$

deren zweiter bis auf das Vorzeichen eine Potenz einer Determinante B ist. Daher wird

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, f'_2, \ldots f'_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}.$$

Ist $n > 2$, so wird weiter

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2} x_n^{m_2 - \mu_2}, & f'_3, \ldots f'_n \\ x_1, x_2, & x_3, \quad x_n \end{bmatrix}$$
$$= \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2}, f'_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_n, f'_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{bmatrix}^{m_2 - \mu_2}$$
$$= \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2}, f'_3, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, f'_3, \ldots f'_n, x_n \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix}^{m_2 - \mu_2};$$

der zweite Factor ist hier wieder eine Potenz einer Resultante B, und man hat

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2}, f_3', \dots f_n' \\ x_1, x_2, \quad \dots x_n \end{bmatrix}.$$

In derselben Weise kann fortgeschlossen werden, und man findet

$$R' = \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2}, \dots x_{n-1}^{\mu_{n-1}}, f_n' \\ x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n \end{bmatrix},$$

welches Resultat auch für $n = 2$ gilt. Es ist also

$$\begin{aligned} R' &= \pm \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2}, \dots x_{n-1}^{\mu_{n-1}}, t^{\mu_n} x_n^{m_n} \\ x_1, x_2, \dots \qquad x_n \end{bmatrix} \\ &= \pm t^{\pi} \begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}, x_2^{\mu_2}, \dots x_n^{m_n} \\ x_1, x_2, \dots x_n \end{bmatrix} \\ &= \pm t^{\pi}. \end{aligned}$$

R' ist somit genau durch t^{π} theilbar und daher

$$\nu = \pi.$$

Wenn $n = 2$ ist, so lässt sich Q bekanntlich in einfacher Weise bestimmen.

Sind $x_1^{\mu_1}\varphi_1$, $x_1^{\mu_2}\varphi_2$ die durch $x_1^{\mu_1}$ beziehungsweise $x_1^{\mu_2}$ theilbaren Glieder von f_1, f_2 und b der Coëfficient von $x_1^{\mu_1} x_2^{m_1-\mu_1}$ in f_1, so ist $a_{22}^{\mu_1} b^{\mu_2} Q$ derjenige Bestandtheil der Resultante

$$\begin{bmatrix} x_1^{\mu_1}\varphi_1, x_1^{\mu_2}\varphi_2 + a_{22} x_2^{m_2} \\ x_1, \quad x_2 \end{bmatrix},$$

dessen Glieder das Gewicht $\mu_1\mu_2$ haben. Diese Resultante ist aber

$$= a_{22}^{\mu_1} \begin{bmatrix} \varphi_1, x_1^{\mu_2}\varphi_2 + a_{22} x_2^{m_2} \\ x_1, x_2 \end{bmatrix},$$

und da $a_{22}^{\mu_1}$ das Gewicht $\mu_1\mu_2$ hat, so ist $b^{\mu_2}Q$ derjenige Bestandtheil der Resultante

$$\begin{bmatrix} \varphi_1, x_1^{\mu_2}\varphi_2 + a_{22} x_2^{m_2} \\ x_1, x_2 \end{bmatrix},$$

dessen Glieder das Gewicht 0 haben. Um daher diese Glieder zu erhalten, darf man $a_{22} = 0$ setzen, und es wird

$$b^{\mu_2} Q = \begin{bmatrix} \varphi_1, & x_1^{\mu_2} \varphi_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix}$$

also

$$Q = (-1)^{\mu_2(m_1-\mu_1)} \begin{bmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix}$$

$$N = (-1)^{\mu_2(m_1-\mu_1)} \begin{bmatrix} g_1, & g_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ x_1, & x_2 \end{bmatrix}.$$

Folgerungen.

Nimmt man insbesondere

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 1$$

und bezeichnet den in $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ linearen Bestandtheil von f_i mit

$$(b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \ldots + b_{in} x_n)\, x_n^{m_i - 1},$$

so hat R die Gestalt

$$R = Q\Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{nn} + H,$$

wo H in

$$b_{1n} = a_{1n} \; b_{2n} = a_{2n} \ldots b_{nn} = a_{nn}$$

von höherer als der ersten Dimension ist.

Wenn die Coëfficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ganze Functionen von t und

$$\begin{gathered} f_1(tx_1, tx_2, \ldots tx_{n-1}, x_n), \\ f_2(tx_1, tx_2, \ldots tx_{n-1}, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(tx_1, tx_2, \ldots tx_{n-1}, x_n), \end{gathered}$$

durch $t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, \ldots t^{\mu_n}$ theilbar sind, so ist die Resultante R von $f_1, f_2, \ldots f_n$ durch $t^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}$ theilbar. Denn jeder Coëfficient vom Gewicht γ ist in diesem Falle durch t^γ theilbar.

13.

Es seien

$$g_1, g_2, \ldots g_n$$

allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $f_1, f_2, \ldots f_n$ ganze homogene Functionen von $g_1, g_2, \ldots g_n$ von den Graden $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$,

deren Coëfficienten nach Massgabe der Gradverhältnisse allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, so dass $f_1, f_2, \ldots$ homogen in $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausfallen. Die Resultante R der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist durch die π^{te} Potenz der Resultante S der Formen $g_1, g_2, \ldots g_n$ theilbar, wo

$$\pi = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n$$

ist.

Es seien $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, t$ Unbestimmte, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ die Gradzahlen von $g_1, g_2, \ldots g_n$ und

$$g_i(z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, 1) = g_i^0.$$

Nach Ersetzung des Coëfficienten b_{nn} von $x_n^{\nu_n}$ in g_n durch $b_{nn}+t$ mögen $f_1, f_2, \ldots f_n, R$ in $f_1', f_2', \ldots f_n', R(b_{nn}+t)$ übergehen. Man hat

$$g_i - g_i^0 x_n^{\nu_i} = [y_1, y_2, \ldots y_{n-1}]$$
$$g_n + t x_n^{\nu_n} - g_n^0 x_n^{\nu_n} = [y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, t],$$

wo

$$y_1 = x_1 - z_1 x_n,\ y_2 = x_2 - z_2 x_n, \ldots y_{n-1} = x_{n-1} - z_{n-1} x_n$$

ist. Hieraus ergibt sich

$$f_i' = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, t) + [g_1^0, g_2^0, \ldots g_n^0],$$

wo φ_i eine Form von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, welche in $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, t$ μ_i Dimensionen aufweist.

Da die Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ beziehungsweise durch $t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, \ldots t^{\mu_n}$ theilbar werden, wenn man $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ durch $tx_1 + z_1 x_n, tx_2 + z_2 x_n, \ldots tx_{n-1} + z_{n-1} x_n$ ersetzt, so ist (A. 9, S. 1206 und A. 12, S. 1218) ihre Resultante durch t^π theilbar. Anderseits unterscheidet sich dieselbe von der Resultante der Formen $f_1', f_2', \ldots f_n'$ nur um einen Ausdruck $[g_1^0, g_2^0, \ldots g_n^0]$ und erscheint daher in der Gestalt

$$R(b_{nn}+t) + [g_1^0, g_2^0, \ldots g_n^0].$$

Man hat also

$$R(b_{nn}+t) = [g_1^0, g_2^0, \ldots g_n^0, t^\pi].$$

Entwickelt man demnach $R(b_{nn}+t)$ nach Potenzen von t, so haben die Coëfficienten von $t^0, t, \ldots t^{\pi-1}$ alle die Gestalt $[g_1^0, g_2^0, \ldots g_n^0]$ also die Ausdrücke

$$R, \frac{\partial R}{\partial b_{nn}}, \ldots \frac{\partial^{\pi-1} R}{\partial b_{nn}^{\pi-1}}$$

die Grundeigenschaft in Bezug auf $g_1, g_2, \ldots g_n$, und R ist demzufolge durch S^π theilbar.

Folgerung.

Es seien

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$
$$g_1, g_2, \ldots g_n$$

allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, R die Resultante der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$, Δ die der Formen $g_1, g_2, \ldots g_n$; die Gradzahlen der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ seien $m_1, m_2, \ldots m_n$ und $g_1, g_2, \ldots g_n$ seien von demselben Grade m. Die Resultante Q der Formen

$$f_1(g_1, g_2, \ldots g_n), f_2(g_1, g_2, \ldots g_n), \ldots f_n(g_1, g_2, \ldots g_n)$$

in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist dann

$$R^{m^{n-1}} \Delta^p,$$

wo $p = m_1 m_2 \ldots m_n$ ist.

Zunächst erhellt die Theilbarkeit von Q durch Δ^p.

Es sei ferner

$$f_i(z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, 1) = f_i^0$$
$$g_i - z_i g_n = \omega_i$$

und a_{nn} der Coëfficient von $x_n^{m_n}$ in f_n, $Q(a_{nn}+t)$ der Ausdruck, in welchen Q nach Ersetzung von a_{nn} durch $a_{nn}+t$ übergeht. Die Resultante der Formen

$$f_1(g_1, g_2, \ldots g_n) - g_n^{m_1} f_1^0$$
$$f_2(g_1, g_2, \ldots g_n) - g_n^{m_2} f_2^0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{n-1}(g_1, g_2, \ldots g_n) - g_n^{m_{n-1}} f_{n-1}^0$$
$$f_n(g_1, g_2, \ldots g_n) + t g_n^{m_n} - g_n^{m_n} f_n^0$$

in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$, deren $n-1$ erste alle die Gestalt $[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}]$ und deren letzte die Gestalt $[\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}, tg_n^{m_n}]$ haben, ist einerseits auf Grund dieser Gestalt durch die Resultante der Formen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}, tg_n^{m_n}$$

also durch $t^{m^{n-1}}$ theilbar und unterscheidet sich anderseits von der Resultante $Q(a_{nn}+t)$ der Formen

$$f_1(g_1, g_2, \ldots g_n), f_2(g_1, g_2, \ldots g_n), \ldots f_{n-1}(g_1, g_2, \ldots g_n)$$
$$f_n(g_1, g_2, \ldots g_n) + tg_n^{m_n}$$

nur um einen Ausdruck $[f_1^0, f_2^0, \ldots f_n^0]$.

Hienach ist

$$Q(a_{nn}+t) = [f_1^0, f_2^0, \ldots f_n^0, t^{m^{n-1}}],$$

und es erhellt, dass die Coëfficienten der m^{n-1} ersten Potenzen von t in der Entwickelung von $Q(a_{nn}+t)$ alle die Gestalt $[f_1^0, f_2^0, \ldots]$ also der Ausdruck Q und seine $m^{n-1}-1$ ersten Ableitungen nach a_{nn} die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_n$ haben. Dann ist aber Q durch $R^{m^{n-1}}$ theilbar.

Q ist demnach durch das Product $\Delta^r R^{m^{n-1}}$ theilbar. Der Quotient kann nur ein Zahlenfactor, und zwar 1 sein, weil Q, Δ, R für

$$f_1 = x_1^{m_1}\ f_2 = x_2^{m_2} \ldots f_n = x_n^{m_n}$$
$$g_1 = x_1^{m}\ g_2 = x_2^{m} \ldots g_n = x_n^{m}$$

$= 1$ werden. Es ist also

$$Q = \Delta^r R^{m^{n-1}}.$$

Sind die Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ insbesondere linear und R ihre Determinante, so ist

$$Q = R^{m^{n-1}} \Delta.$$

Folgerung.

Es seien

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$$

allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_k$ von den Graden $m_1, m_2, \ldots m_k$,

$$\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, \ldots \varphi_n$$

allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ von den Graden m_{k+1}, $m_{k+2}, \ldots m_n$, welche für $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$ in $\varphi^0_{k+1}, \varphi^0_{k+2}, \ldots \varphi^0_n$ übergehen mögen und R die Resultante

$$R = \begin{bmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}.$$

Nimmt man

$$g_1 = x_1 \quad g_2 = x_2 \ldots g_k = x_k$$
$$g_{k+1} = \varphi_{k+1} \qquad \ldots g_n = \varphi_n,$$

so erhellt die Theilbarkeit von R durch den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots x_k, \varphi_{k+1}, \ldots \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots x_n \end{bmatrix}^{m_1 m_2 \ldots m_k}$$
$$= \begin{bmatrix} \varphi^0_{k+1}, \varphi^0_{k+2}, \ldots \varphi^0_n \\ x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n \end{bmatrix}^{m_1 m_2 \ldots m_k}.$$

Der Quotient ist von den Coëfficienten der Formen $\varphi_{k+1}, \ldots \varphi_n$ unabhängig und daher

$$= \begin{bmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k, x_{k+1}^{m_{k+1}}, \ldots x_n^{m_n} \\ x_1, x_2, \qquad \ldots x_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k, x_{k+1}, \ldots x_n \\ x_1, x_2, \qquad \ldots x_n \end{bmatrix}^{m_{k+1} \ldots m_n}$$
$$= \begin{bmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k \\ x_1, x_2, \ldots x_k \end{bmatrix}^{m_{k+1} \ldots m_n}.$$

Mithin ist

$$R = \begin{bmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k \\ x_1, x_2, \ldots x_k \end{bmatrix}^{m_{k+1} \ldots m_n} \begin{bmatrix} \varphi^0_{k+1}, \ldots \varphi^0_n \\ x_{k+1}, \ldots x_n \end{bmatrix}^{m_1 m_2 \ldots m_k}.$$

Beispiel. Es seien φ, ψ, χ allgemeine Formen von x_1, x_2, x_3 vom Grade λ, μ, ν. Man bezeichne die Ausdrücke, in welche ψ, χ nach Ersetzung von x_1, x_2, x_3 durch

$$x_2 y_3 - x_3 y_2, \; x_3 y_1 - x_1 y_3, \; x_1 y_2 - x_2 y_1$$

übergehen, mit $\psi(xy)$, $\chi(xy)$ und setze

$$R = \begin{bmatrix} \varphi, \psi(xy), \chi(xy) \\ x_1, \quad x_2, \quad\quad x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \psi, \chi, y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix}.$$

Es ist dann

$$R = \Theta^\lambda \varphi(y_1, y_2, y_3)^{\mu\nu}.$$

Macht man die Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= X + y_1 Z \\ x_2 &= Y + y_2 Z \\ x_3 &= \quad\quad y_3 Z, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} \psi(xy) &= \psi(y_3 Y, -y_3 X, y_2 X - y_1 Y) \\ \chi(xy) &= \chi(y_3 Y, -y_3 X, y_2 X - y_1 Y) \\ \varphi &= \varphi(y_1, y_2, y_3) Z^\lambda + [X, Y]. \end{aligned}$$

Die Resultante dieser drei Formen in Bezug auf X, Y, Z ist daher einerseits $= y_3^{\lambda\mu\nu} R$ und zerfällt anderseits in die zwei Factoren

$$\begin{bmatrix} \varphi(y_1, y_2, y_3) Z^\lambda \\ Z \end{bmatrix}^{\mu\nu} = \varphi(y_1, y_2, y_3)^{\mu\nu}$$

und

$$\begin{bmatrix} \varphi(y_3 Y, -y_3 X, y_2 X - y_1 Y), \psi(y_3 Y, -y_3 X, y_2 X - y_1 Y) \\ X, \quad\quad\quad\quad Y \end{bmatrix}^\lambda;$$

letzterer Factor ist aber

$$= \Theta(y_1 y_3, y_2 y_3, y_3^2)^\lambda = y_3^{2\mu\nu}\Theta^\lambda.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} y_3^{\lambda\mu\nu} R &= \varphi(y_1, y_2, y_3)^{\mu\nu} \Theta^\lambda y_3^{\lambda\mu\nu} \\ R &= \Theta^\lambda \varphi(y_1, y_2, y_3)^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

XXI. SITZUNG VOM 19. OCTOBER 1899.

Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt in Prag spricht den Dank für seine Wahl zum wirklichen Mitgliede dieser Classe aus.

Das c. M. Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Descendenztheoretische Untersuchungen. I. Untersuchungen über den Saisondimorphismus im Pflanzenreiche«.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt eine Abhandlung von Herrn Prof. P. Lenard in Kiel vor, welche den Titel führt: »Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht«.

Das w. M. Herr Prof. G. v. Escherich, legt Theil I, Band I, Heft 3, 4 und Band II, Heft 1 der mit Unterstützung der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Adolf Lieben überreicht folgende vier im II. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten:

1. »Über die Umlagerung des Bis-Isopropylazimethylens (Isobutyraldazins) in das 4, 4-Dimethyl-5-Isopropylpyrazolin«, von Herrn Dr. Adolf Franke.
2. »Über Isobutylidenaceton und Abkömmlinge desselben«, von den Herren Dr. Adolf Franke und Dr. Leopold Kohn.

3. »Einwirkung von Cyankalium auf aliphatische Aldehyde« (II. vorläufige Mittheilung), von Herrn Dr. Leopold Kohn.
4. »Über ein allgemein verwendbares Verfahren der Dampfdichtebestimmung unter beliebigem Drucke« (II. Mittheilung), von den Herren Dr. Otto Bleier und Dr. Leopold Kohn.

Das w. M. Herr Prof. F. Becke überreicht eine Mittheilung: »Zur optischen Orientirung des Anorthit«.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs in Wien überreicht eine Abhandlung: »Der Giesshübler Sandstein und die Flyschgrenze bei Wien«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Goering, W. Dr.: Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises und die Theilung jedes beliebigen Winkels und Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile; Dresden, 1899. 8°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

82

XXII. SITZUNG VOM 3. NOVEMBER 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II. b., Heft VI—VII (Juni und Juli 1899).

Herr B. G. Jenkins in London übersendet einen Nachtrag zu seiner in der Sitzung vom 6. Juli l. J. vorgelegten Arbeit: »A Basis for a Reliable System of Weather Forecasting«.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt eine Arbeit von den Herren w. M. Prof. H. Weidel (†) und Dr. J. Pollak vor, mit dem Titel: »Zur Kenntniss der Nitrosoderivate der Phloroglucinäther«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. O. Stolz in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Über die absolute Convergenz der uneigentlichen Integrale« (II. Mittheilung).

Das c. M. Herr Prof. Dr. Wilhelm Wirtinger in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: »Zur Theorie der automorphen Functionen von *n* Veränderlichen«.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Hans Molisch übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von dem Herrn Privatdocenten Dr. A. Nestler ausgeführte Arbeit: »Zur Kenntniss der Wasserausscheidung an den Blättern von *Phaseolus multiflorus* Willd. und *Boehmeria*«.

Seine Hochwürden, Herr P. Franz Schwab, Director der Stiftssternwarte in Kremsmünster, übersendet einen Bericht über die am Ehlert'schen Seismographen der kais. Akademie der Wissenschaften im September 1899 zu Kremsmünster angestellten Beobachtungen.

Herr Dr. Erwin Payr in Graz übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Vorläufige Mittheilungen über neue Methoden der Technik der Blutgefäss- und Nervennaht und über die sich daraus ergebenden Consequenzen etc.«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ludwig Boltzmann legt eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit vor, betitelt: »Über das Verhalten von Radium und Polonium im magnetischen Felde«, von Dr. Stefan Meyer und Dr. Egon R. v. Schweidler.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht folgende zwei Abhandlungen aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien.

I. »Über die synthetische Darstellung des Iratol und einiger verwandter Phentetrolderivate«, von Emil Kohner.

II. »Über die Darstellung des Dimethyl-1, 2, 3, 5-Phentetrol«, von Heinrich Brunnmayr.

Herr Präsident E. Suess berichtet über den Inhalt der von dem auswärtigen c. M. Excell. Director A. Karpinsky übersendeten Druckschrift: »Über die Reste von Edestiden und die neuere Gattung *Helicoprion*«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Adamkiewicz, Dr. A.: Zur klinischen Differenzialdiagnose zwischen Carcinomen und Sarkomen. (Sonderabdruck aus dem Centralbl. f. d. med. Wissensch., 1899, Nr. 41.)

Haeckel, E.: Kunstformen der Natur. III. Lieferung. Leipzig und Wien, Bibliographisches Institut, 1899; 4°.

Karpinsky, A.: Über die Reste von Edestiden und die neue Gattung *Helicoprion*. Mit 4 Tafeln und 72 Textfiguren.

— Tafeln zu obigem. (Separatabdruck aus den Verhandl. d. kaiserl. russ. Mineralog. Gesellschaft zu St. Petersburg. II. Serie, Bd. XXXVI, Nr. 2.) St. Petersburg, 1899; 8° und 4°.

Omori, F., D. Sc.: Note on the Preliminary Tremor of Earthquake Motion. (Reprinted from the Jour. Sci. Coll., Imp. Univ., Tokyo, Vol. XI, Pl XIII—XVI.) Tokyo, 1899; 8°.

— Horizontal Pendulums for Registering Mechanically Earthquakes and other Earth-movements. (Reprinted from the Jour. Sci. Coll., Imp. Univ., Tokyo, Vol. XI, Pl. II—XII.) Tokyo, 1899; 8°.

— und Hirata, K.: Earthquake Measurement at Miyako. (Reprinted from the Jour. Sci. Coll., Imp. Univ., Tokyo Vol. XI, Pl. XVII—XXIII.) Tokyo, 1899; 8°.

Über die absolute Convergenz der uneigentlichen bestimmten Integrale

(II. Mittheilung)

von

O. Stolz,

w. M. k. Akad.

I. Im dritten Theile meiner »Grundzüge der Differential- und Integralrechnung« (S. 124) habe ich das uneigentliche Doppelintegral J einer Function $f(x,y)$, welche mindestens über jedes vollständig innerhalb des gegebenen endlichen Integrationsgebietes $\mathfrak{F}$ gelegene Gebiet $\mathfrak{G}$ ein eigentliches Doppelintegral zulässt, nach C. Jordan in folgender Weise erklärt: »Es soll J das uneigentliche Doppelintegral der Function $f(x,y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ heissen, falls jeder positiven Zahl ε eine andere positive Zahl δ sich so zuordnen lässt, dass stets

$$|J - S_{(\mathfrak{G})} f(x,y)\, d\Delta| < \varepsilon \qquad (1)$$

ist, wenn nur die innerhalb $\mathfrak{F}$ gelegene Fläche $\mathfrak{G}$ davon sich um weniger als δ unterscheidet. Dabei kann die Fläche $\mathfrak{G}$ sowohl zusammenhängend sein, als auch aus einer endlichen Anzahl von getrennten, für sich zusammenhängenden Stücken bestehen.«

Herr Wirtinger hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn man diesen Begriff auf das einfache Integral einer Function $f(x)$ einer Veränderlichen x überträgt, man bloss zu dem absolut-convergenten uneigentlichen Integral gelangt. Man hat dann unter $\mathfrak{F}$ ein endliches Intervall (a, b), unter $\mathfrak{G}$ eine in demselben enthaltene Strecke oder die Summe aus einer endlichen Anzahl von solchen Strecken zu verstehen. Bezeichnen

wir nämlich die in $\mathfrak{G}$ nicht vorkommenden Theile des Intervalles (a, b) mit $\delta_1 \ldots \delta_n$, die darin aufgenommenen mit $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k_n}$, ferner die Abscissen der dem Punkte $x=a$ näheren Endpunkte der letzteren Strecken mit $b_1 \ldots b_{k_n}$ und setzen

$$\delta_1 + \ldots + \delta_n = \sigma,$$

so erhalten wir für das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ die Erklärung

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\sigma=0} \sum_1^{k_n} \int_{b_r}^{b_r+\varepsilon_r} f(x)dx. \tag{2}$$

Übertragen wir nun die a. a. O. S. 125—131 und 141—143 vorgeführten Schlüsse auf diese einfachere Annahme, so kommen wir zu dem uns bisher fehlenden Satze, dass der soeben erwähnte Grenzwerth (2) nur dann vorhanden ist, wenn er auch für die Function $|f(x)|$ vorhanden ist. Damit haben wir also einen neuen Beweis des auf S. 214 des Jahrganges 1898 dieser Sitzungsberichte in Nr. 4 gegebenen Satzes erhalten, und sind zugleich zur Einsicht gelangt, dass der Grenzwerth (2) nur in dem soeben erwähnten Falle vorhanden ist.

2. Durch Vergleichung der Eingangs angeführten Erklärung des uneigentlichen Doppelintegrals mit dem allgemeinen Begriffe des uneigentlichen einfachen bestimmten Integrals[1] könnte man zur Ansicht gelangen, dass die erstere nicht die volle Allgemeinheit besitze, sondern diese erst erreiche, wenn jede in der genannten Erklärung vorkommende Fläche $\mathfrak{G}$ als zusammenhängend angesehen wird. Dies ist jedoch, wie ebenfalls Herr Wirtinger bemerkt hat, nicht der Fall. Er hat nämlich mit Hilfe eines Kunstgriffes, den wir sogleich kennen lernen werden, bewiesen, dass, wenn die Function $|f(x,y)|$ kein Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ zulässt, dann auch für die Function $f(x,y)$ selbst ein Grenzwerth J, wie ihn die in der soeben erwähnten Weise verallgemeinerte Erklärung verlangen würde, nicht vorhanden ist.

[1] Vergl. z. B. diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1898, S. 210.

3. In der That gilt das in Nr. 2—6 des XVIII. Abschnittes meiner »Grundzüge« Gesagte auch unter der Voraussetzung, dass die Flächen 𝔊 zusammenhängend seien. Ein kleiner Zusatz ist jedoch erforderlich beim Absatze *c*) auf S. 142, worin der Fall behandelt ist, dass das Integrationsgebiet 𝔉 des uneigentlichen Doppelintegrals erst durch Ausschliessung einer endlichen Anzahl von einzelnen Punkten und ganzen Stücken der Begrenzung mittelst Umgebungen von beliebiger Kleinheit in ein Gebiet übergeht, welches in eine endliche Anzahl von Theilen zerfällt, in deren keinem die zu integrirende Function $f(x,y)$ ihr Zeichen wechselt.

Da $f(x,y)$ über das Gebiet 𝔉 ein uneigentliches Doppelintegral in dem obigen Sinne zulassen soll, so muss zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gehören, dass für jedes zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{g}$ innerhalb 𝔉, kleiner als δ, zu dem ein eigentliches Doppelintegral von $f(x,y)$ gehört,

$$|S_{\mathfrak{g}} f(x,y)\, d\Lambda| < \varepsilon \tag{3}$$

ist. Wir haben nun die Function $f_1(x,y)$ eingeführt, die in jedem Punkte von 𝔉, wo $f(x,y)$ positiv ist, gleich $f(x,y)$, in jedem anderen gleich Null sein soll. Es ist zu zeigen, dass die Function $f_1(x,y)$ ebenfalls ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet 𝔉 im obigen Sinne zulässt.

$\mathfrak{g}$ sei irgend eines der gerade erwähnten Gebiete, kleiner als δ. Zerfällt es in zwei, $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, in deren ersterem $f(x,y)$ nicht negativ, im letzteren nicht positiv ist, so finden wir, wie a. a. O., dass

$$0 < S_{\mathfrak{g}} f_1(x,y)\, d\Lambda < \varepsilon \tag{4}$$

ist. Wenn aber die Punkte von $\mathfrak{g}$, wo $f(x,y)$ nicht negativ ist, $k+1$ getrennte Gebiete $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 \ldots \mathfrak{h}_{k+1}$ bilden, so denke man sich das erste mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten u. s. f., endlich das k^{te} mit dem $k+1^{\text{ten}}$ je durch eine gewöhnliche Linie, welche die Fläche $\mathfrak{g}$ nicht verlässt, verbunden. Diese k Linien, $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \ldots \mathfrak{l}_k$, mögen mit einer Parallelen zur x-Axe höchstens beziehungsweise $p_1 p_2 \ldots p_k$, mit einer Parallelen zur y-Axe höchstens beziehungsweise $q_1 q_2 \ldots q_k$ Punkte gemein haben. Alsdann überziehe man die Fläche $\mathfrak{g}$ mit Parallelen zur x-Axe und mit Parallelen zur y-Axe, von welchen

je zwei den nämlichen Abstand Δ haben. Nun bilde man aus den Gebieten $\mathfrak{h}_1 \dots \mathfrak{h}_{k+1}$ durch Hinzunehmen aller der so entstandenen Quadrate von der Seite Δ, welche mindestens einen Punkt mit einer der Linien $\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \dots \mathfrak{l}_k$ gemein haben, ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{f}$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{i}_1$ die Summe der Quadrate Δ^2, welche von der Linie $\mathfrak{l}_1$ durchsetzt sind, nach Abrechnung der ihr und den Flächen $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ gemeinsamen Gebiete, mit $\mathfrak{i}_2$ die Summe der Quadrate Δ, welche von der Linie $\mathfrak{l}_2$ durchsetzt sind, nach Abrechnung der ihr und den Flächen $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ gemeinsamen Gebiete u. s. f.; so ist

$$\mathfrak{f} = \sum_1^{k+1} {}_r \mathfrak{h}_r + \sum_1^{k} {}_r \mathfrak{i}_r .$$

Demnach hat man

$$S_{\mathfrak{f}} f dA = \sum_1^{k+1} {}_r S_{\mathfrak{h}_r} f dA + \sum_1^{k} {}_r S_{\mathfrak{i}_r} f dA.$$

Hieraus folgt, da

$$\sum_1^{k+1} {}_r S_{\mathfrak{h}_r} f(x,y) dA = S_{\mathfrak{g}} f_1(x,y) dA$$

ist,

$$S_{\mathfrak{g}} f_1(x,y) dA = S_{\mathfrak{f}} f(x,y) dA - \sum_1^{k} {}_r S_{\mathfrak{i}_r} f dA,$$

und weiter, da $\mathfrak{f} < \mathfrak{g} < \delta$, somit nach (3)

$$|S_{\mathfrak{f}} f(x,y) dA| < \varepsilon$$

ist,

$$0 < S_{\mathfrak{g}} f_1(x,y) dA < \varepsilon + \sum_1^{k} {}_r S_{\mathfrak{i}_r} |f(x,y)| dA. \tag{5}$$

Durch gehörige Annahme der Zahl Δ lässt sich der zweite Theil rechts beliebig klein machen. Da die Function $f(x,y)$ im Gebiete $\mathfrak{g}$ endlich ist, so liegen ihre Werthe in den Punkten von $\mathfrak{g}$ dem Betrage nach sämmtlich unter einer und derselben positiven Zahl H. Demnach ist

$$S_{\mathfrak{i}_r} |f(x,y)| dA < \mathrm{H}\mathfrak{i}_r \qquad (r = 1 \dots k). \tag{6}$$

Nun haben wir nach S. 42 und 294 a. a. O., wenn wir das Gebiet $\mathfrak{g}$ innerhalb des Rechteckes zwischen den Abscissen a, a' und den Ordinaten b, b' liegen lassen,

$$\mathfrak{i}_r < \{p_r(b'-b)+2(q_r+1)(a'-a)\}\Delta \qquad (r = 1\ldots k).$$

Setzen wir

$$p_1+\ldots+p_k = p \qquad q_1+\ldots+q_k = q,$$

so ist demnach nach (6)

$$\sum_{1}^{k}{}_r S_{\mathfrak{i}_r} f(x,y)\, d\Lambda < \mathrm{H}[p(b'-b)+2(q+k)(a'-a)]\Delta.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist kleiner als die beliebig vorgelegte Zahl $\sigma > 0$, wenn nur

$$\Delta < \sigma : \mathrm{H}[p(b'-b)+2(q+k)(a'-a)]$$

gewählt wird. Wir können somit aus (5) schliessen, dass

$$0 < S_{\mathfrak{g}} f_1(x,y)\, d\Lambda < \varepsilon + \sigma$$

ist. Hieraus ergibt sich bei der Willkürlichkeit von (6), dass

$$0 < S_{\mathfrak{g}} f_1(x,y)\, d\Lambda \leqq \varepsilon$$

ist. Da diese Ungleichung für jede Fläche $\mathfrak{g}$ innerhalb $\mathfrak{F}$, kleiner als δ, zu der ein eigentliches Doppelintegral von $f(x,y)$ gehört, Geltung hat, so ist das Vorhandensein des uneigentlichen Doppelintegrals der Function $f_1(x,y)$ über das Gebiet $\mathfrak{F}$ auch in dem neuen Sinne dargethan.

Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass auch die Function $f_2(x,y)$, welche in allen Punkten, worin $f(x,y)$ negativ ist, damit übereinstimmt, sonst aber verschwindet, ein uneigentliches Doppelintegral über das Gebiet $\mathfrak{F}$ in dem neuen Sinne zulässt. Dann gilt das nämliche hinsichtlich der gegebenen Function $f(x,y)$, welche mit der Function $f_1(x,y)+f_2(x,y)$ identisch ist.

Zur Theorie der automorphen Functionen von n Veränderlichen

von

Wilhelm Wirtinger in Innsbruck,
c. M. k. Akad.

Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ n complexe Veränderliche und S eine Gruppe von linearen Substitutionen von der Form

$$x_i^{(\lambda)} = \frac{\alpha_{0i}^{(\lambda)} + \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\varkappa i}^{(\lambda)} x_\varkappa}{\alpha_{00}^{(\lambda)} + \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\varkappa 0}^{(\lambda)} x_\varkappa} \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

so soll angenommen werden, dass dieser Gruppe im Gebiete der n Veränderlichen x ein bestimmter endlicher Discontinuitätsbereich D zugehöre, dessen Begrenzungen einander paarweise durch die erzeugenden Substitutionen zugeordnet sind oder in eine endliche Anzahl von Cyclen zusammengefasst werden. Die Anzahl dieser Begrenzungsmannigfaltigkeiten soll selbst endlich sein. Aus dem Bereiche D entsteht dann durch die Substitution S_λ ein neuer Bereich D_λ und die Gesammtheit dieser Bereiche wird einen bestimmten Bereich der $x_1, x_2 \ldots x_n$ erfüllen, der in mannigfacher Weise begrenzt sein kann. Wir wollen noch annehmen, dass der Bereich D und daher jeder der Bereiche D_λ die Eigenschaft hat, dass eine genügend klein genommene Umgebung jeder Stelle seiner Begrenzung nur mit einer endlichen Anzahl von Nachbarbereichen Stellen gemeinsam hat. Dieser Annahme entspricht bei den automorphen Functionen einer Variablen ein Fundamentalpolygon, welches

ganz im Innern des Bereiches der Function liegt. Sie ist für die folgenden Entwicklungen nur aus dem Grunde geboten, weil unsere Kenntniss von Functionen mehrerer Variablen in der Nähe wesentlich singulärer Stellen noch sehr gering ist und wird bei weiterer Entwicklung der Theorie gewiss durch eine umfassendere ersetzt werden können.

Unter einer automorphen Function der n Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ verstehen wir dann eine eindeutige analytische Function derselben, welche im Inneren und an der Grenze des Bereiches D das Verhalten einer Rationalen zeigt und der Gleichung

$$F(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \ldots x_n^{(i)}) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \qquad 2$$

genügt.

Die Existenz solcher Bereiche und Functionen ist aus den Untersuchungen Picard's[1] bekannt.

Ich habe nun auf diese Functionen ähnliche Methoden wie seinerzeit in der Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen[2] angewendet und bin dabei zu dem Ergebniss gelangt, diese Functionen in ähnlicher Weise mit den algebraischen Functionen mehrerer Variablen und mit bestimmten Umkehrproblemen linearer Differentialgleichungen in Verbindung zu setzen.

I.

Wir machen die Voraussetzung, dass es überhaupt n automorphe Functionen zur Gruppe S gibt, deren Functionaldeterminante nicht verschwindet. In der Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen konnte bereits aus der Existenz einer solchen Function die eines solchen Systems erschlossen werden. Ein ähnlicher Gedankengang wäre auch hier möglich, wenn es eine n-gliedrige continuirliche Gruppe gibt, deren Substitutionen sämmtlich mit denen von S vertauschbar sind. Diese Voraussetzung würde jedoch eine viel grössere Complication für die Durchführung und eine grössere Einschränkung darstellen als die obige.

---

[1] Acta Mathem., T. 1, 2, 5, Journal d. Math. (4), t. I.

[2] Monatshefte für Math. und Phys., VI.

Dann lässt sich beweisen, dass zwischen $n+1$ solchen Functionen eine algebraische Gleichung besteht.

Der Beweis selbst ist in keiner Weise davon abhängig, dass die Gruppe S aus linearen Substitutionen mit gemeinsamem Nenner besteht, sondern in gleicher Weise auf jede Gruppe von analytischen Substitutionen, welcher ein Discontinuitätsbereich der vorausgesetzten Beschaffenheit zukommt, anwendbar, also z. B. auf die von Picard[1] eingeführten Functionen mit Cremonatransformationen in sich.

Bevor wir in den Beweis eintreten, bemerken wir noch, dass aus dem Weierstrass'schen Vorbereitungssatze[2] folgt, dass, wenn ein System von $n-1$ ganzen Potenzreihen von n Veränderlichen in der Nähe einer Stelle gleich Null gesetzt, ein oder mehrere analytische Gebilde erster Stufe zu Lösungen hat, welche nicht einem Gebilde höherer Stufe angehören, welches gleichfalls die gegebenen Potenzreihen zu Null macht, dass dann diese Gebilde erster Stufe in genügend kleiner Umgebung der betrachteten Stelle stets und vollständig durch eine endliche Anzahl von Elementen darstellbar sind, so dass in einer genügend kleinen Umgebung keine anderen als die durch die Elemente dargestellten Werthsysteme des Gebildes erster Stufe vorhanden sind.

Wendet man nämlich in Bezug auf eine Variable, etwa x_n, den Vorbereitungssatz an, so erhält man ein System von $n-1$ algebraischen Gleichungen in x_n mit Potenzreihen in den übrigen Variablen als Coëfficienten. Die Bedingungen für das Vorhandensein einer gemeinsamen Lösung dieser Gleichungen lassen sich durch eine endliche Zahl von gleich Null gesetzten Potenzreihen darstellen, welche nun bloss von $n-1$ Veränderlichen abhängen. Damit ist der Satz auf den gleichen für $n-1$ Veränderliche zurückgeführt, und da er für zwei Veränderliche gilt, so gilt er allgemein.

Nehmen wir nun ein bestimmtes Werthsystem der x, in dessen Umgebung die Functionaldeterminante der $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ nicht verschwindet, und bezeichnen die Werthe der $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$

[1] Comptes-rendus, 18.

[2] Werke, II, S. 135.

an dieser Stelle mit $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$, so sind in der Umgebung dieser Stelle die $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Potenzreihen der $f_1 - c_1, f_2 - c_2, f_3 - c_3, \ldots f_n - c_n$ darstellbar. Werden nun die $f_1 - c_1, f_2 - c_2, f_3 - c_3, \ldots f_{n-1} - c_{n-1}$ sämmtlich gleich Null gesetzt, $f_n - c_n$ aber gleich t, und beschränkt man t auf einen genügend kleinen Bereich, so wird dadurch ein Element eines analytischen Gebildes G im Gebiete der x definirt. Dieses Element denken wir uns nach allen Seiten fortgesetzt.

Werden die reellen und imaginären Theile der x als gewöhnliche orthogonale Coordinaten eines Raumes von $2n$ Dimensionen interpretirt, so ist das in Rede stehende Gebilde durch eine Fläche in diesem Raume dargestellt, und die Stellen dieser Fläche sind nach der über die Functionen f gemachten Voraussetzung Lösungen des Gleichungssystems

$$f_1 = c_1, f_2 = c_2, f_3 = c_3, \ldots f_{n-1} = c_{n-1}, \tag{3}$$

welche nicht einem Gebilde höherer Stufe angehören, dessen Stellen gleichfalls dem System 3) genügen würden. Das Gebilde G wird im Allgemeinen unendlich viele Bereiche D_λ durchziehen und in jedem einen bestimmten Theil haben. Jedem dieser Theile entspricht rückwärts in D ein bestimmtes Flächenstück zu Folge der Substitution S_λ^{-1}. Es kann nun innerhalb D nur eine endliche Anzahl solcher verschiedener Flächenstücke $F_1, F_2, \ldots F_\varkappa$ geben. Wäre dem nämlich nicht so, so nehmen wir auf jedem Flächenstück einen Punkt an. Diese Punkte hätten nothwendig eine Häufungsstelle, in deren Umgebung dann unendlich viele Elemente zur Darstellung des Gebildes nöthig wären.

Es gibt ferner nur eine endliche Anzahl von Stellen, in deren Umgebung mehr als ein Element zur Darstellung des Gebildes nöthig ist. Im Gegenfalle würde nämlich in der Umgebung einer Häufungsstelle doch eine endliche Anzahl von Elementen zur Darstellung des Gebildes hinreichen; diesen Elementen müssten die sich häufenden Stellen mit mehr als einem Element angehören, und darum müssten ihre Elemente einzeln mit den zur Häufungsstelle gehörigen congruiren. Dann aber würde jeder der sich häufenden Stellen doch nur ein Element zugehören, was der Voraussetzung widerspricht.

Auch diejenigen Stellen, an denen keine der Entwicklungen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die erste Potenz des Parameters t enthält, können nur in endlicher Anzahl vorkommen. Wenigstens auf einem der zu einer Häufungsstelle gehörigen Elemente müssten nämlich im Gegenfalle unendlich viele Stellen liegen, in denen sämmtliche dx/dt $(i = 1, 2, \ldots n)$ Null wären, woraus sich die unzulässige Folgerung ergeben würde, dass sämmtlich x constant wären.

Die Stellen der hier angeführten beiden Arten sind also auch durch eine endliche Anzahl von genügend kleinen Umgebungen aus dem Bereiche D auszusondern. Für die nach Aussonderung dieser Stellen noch verbleibenden Stellen lässt sich für jede Stelle ξ eine bestimmte Umgebung vom grössten Radius ρ_ξ, so dass $\rho_\xi > \sqrt{|x_1 - \xi_2|^2 + |x_2 - \xi_2|^2 + \ldots |x_n - \xi_n|^2}$ angeben, in welcher durch ein einziges Element alle in dieser Umgebung gelegenen Stellen der Flächen $F_1, F_2, F_3, \ldots F_\varkappa$ dargestellt werden. Diese Radien ρ_ξ haben eine von Null verschiedene untere Grenze innerhalb und an der Grenze des Bereiches D. Wäre nämlich diese untere Grenze Null, so gäbe es auch eine Folge von Stellen, so dass der Radius ρ_ξ beständig gegen Null abnimmt, und die Häufungsstelle η dieser Stellen hätte zwar selbst eine endliche Umgebung, in jeder Nähe derselben aber gäbe es Stellen, deren ρ_ξ beliebig klein wäre. Dies ist ein Widerspruch. Die Potenzreihen, welche in der Umgebung von η die $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ darstellen und welche nach einem zur Stelle η gehörigen Parameter t (der natürlich nicht mit $f_n - c_n$ identisch zu sein braucht) fortschreiten mögen, convergiren sämmtlich innerhalb eines Kreises K vom Radius R in der Ebene der complexen Variablen t mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Diesem Kreis entspricht auf dem η tragenden Flächenstück eine geschlossene Curve C und dem Inneren desselben ein von C begrenztes reguläres Flächenstück. Es ist ferner möglich, um η eine derartige Umgebung von bestimmtem Radius ρ abzugrenzen, dass das dieser Umgebung angehörige Flächenstück ganz innerhalb der Curve C liegt. Dem Inneren dieser Umgebung wird dann in der Ebene des Parameters t ein von einer Curve C_1 begrenztes Flächenstück entsprechen, welches ganz innerhalb des Kreises K liegt und mit diesem

keinen Punkt der Begrenzung gemein hat. Daher kann es in einen mit K concentrischen Kreis mit einem Radius R_1 kleiner als R eingeschlossen werden.

Werden nun für irgend einen Werth des Parameters t, der innerhalb eines mit K concentrischen Kreises mit dem Radius $R-R_1$ liegt, als Mittelpunkt aus den ursprünglichen Elementen neue abgeleitet, so schliesst deren Convergenzbereich die Curve C_1 vollständig ein, und diese Elemente stellen daher die vorhin bezeichnete Umgebung von τ_i vollständig dar. Der zu einer Stelle in genügender Nähe von τ_i gehörige Radius ρ_i ist daher sicher so gross, dass die Umgebung dieser Stelle bis an eine bestimmte endliche Umgebung mit bestimmtem Radius heranreicht, also sicher endlich, was einen Widerspruch mit der Annahme bildet, τ_i sei Häufungsstelle von Stellen mit gegen Null abnehmenden Umgebungsradien. Darum haben die Radien ρ_i eine endliche untere Grenze ρ_1. Wir bestimmen nun eine ebenfalls endliche Grösse $\sigma < \rho_1(\sqrt{2n})^{-1}$ und theilen den ganzen Bereich D in $2n$-dimensionale Würfel von der Kantenlänge σ, und zwar so, dass auch noch die ganze Begrenzung des Bereiches innerhalb solcher Würfel liegt, nachdem übrigens schon vorher die mehrelementigen oder sonst singulären Stellen der Flächentheile $F_1, F_2, F_3, \ldots F_\varkappa$ durch genügend kleine Umgebungen in endlicher Anzahl ausgeschlossen wurden. Dazu reicht eine endliche Anzahl von Würfeln hin, und innerhalb eines jeden Würfels wird der betreffende Flächentheil höchstens durch ein Element dargestellt, dessen Umgebung noch überall über den Würfel hinausreicht, weil jeder Würfel ganz im Inneren der Umgebung mit dem Radius ρ_1 eines in seinem Inneren oder auf seiner Begrenzung gelegenen Punktes liegt. Daher kann die Gesammtheit der Flächentheile $F_1, F_2, \ldots F_\varkappa$, und zwar noch über die Begrenzung von D hinaus durch eine endliche Anzahl von Elementen dargestellt werden. Diese Flächenstücke sind ferner im Inneren von D nirgends begrenzt, und ihre auf der Begrenzung von D gelegenen Ränder sind zu Folge der Entstehung der Flächenstücke F einander paarweise zugeordnet, da beim Passiren eines Theiles der Begrenzung von D das betreffende Flächenstück in den Nachbarbereich eintritt, also ein entsprechendes, durch die zugeordnete Begrenzung in D

eintreten muss. Die Flächenstücke kann man daher auf Grund dieser Zuordnung ihrer Begrenzungen als eine einzige geschlossene Fläche auffassen, da man ja nach der Entstehung derselben von jedem Theile zu jedem anderen zu Folge der Randzuordnung gelangen kann. Die nachgewiesene Beschaffenheit dieser geschlossenen Fläche F reicht hin, um auf Grund der Methoden von Neumann und Schwarz die Existenz eines durch diese Fläche definirten algebraischen Gebildes darzuthun. Hier reichen aber bereits einfachere Schlüsse aus, um darzuthun, dass zwischen zwei automorphen Functionen f_n und f_{n+1} auf dem Gebilde G eine algebraische Gleichung besteht. In der That folgt aus dem über die Fläche F Bewiesenen, dass sowohl f_n, als auch f_{n+1} auf dieser durch eine endliche Anzahl von Elementen desselben Parameters darstellbar sind, wobei negative Potenzen des Parameters in jedem Elemente nur in endlicher Zahl vorkommen, was eben die Existenz einer algebraischen Gleichung zwischen f_n und f_{n+1} nach sich zieht, wenn die Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ auf die Fläche F beschränkt werden. Die Coëfficienten dieser Gleichung sind natürlich von den Werthen $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$ in den Gleichungen 3) abhängig.

Betrachten wir nun eine bestimmte Stelle der $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, welche den in 3) gemachten Voraussetzungen entspricht und in deren Umgebung f_{n+1} keine singuläre Stelle hat, so ergibt sich auch für eine gewisse Umgebung der Werthe $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ die Function f_{n+1} als gewöhnliche Potenzreihe dargestellt:

$$f_{n+1} = \mathfrak{P}(f_1 - c_1, f_2 - c_2, f_3 - c_3, \ldots f_n - c_n). \qquad 4)$$

Werden nun im Geltungsgebiet dieser Potenzreihe die $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-1}$ festgehalten, so besteht nach dem Vorigen eine algebraische Gleichung zwischen f_{n+1} und f_n, und in 4) muss ein Element des durch diese Gleichung definirten Gebildes vorliegen. Da dies nun für jedes Werthsystem der $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-1}$ in genügender Nähe der $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$ der Fall ist, so folgt, dass auch für alle analytischen Fortsetzungen von 4) immer f_{n+1} eine algebraische Function von f_n ist. Da ferner genau dieselben Überlegungen wie für f_n auch für jedes der $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n-1}$ gelten, so ist damit f_{n+1} als algebraische Function von $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n+1}$ erwiesen.

Es besteht daher in der That zwischen $n+1$ automorphen Functionen eine algebraische Gleichung mit constanten Coëfficienten.

II.

Nun ist es leicht einzusehen, dass durch geeignete $n+1$ automorphe Functionen jede andere rational darstellbar ist.

Zunächst ist nämlich ersichtlich, dass ein Gleichungssystem von der Form

$$f_1 = c_1, f_2 = c_2, f_3 = c_3, \ldots f_n = c_n, \tag{5}$$

wobei wieder die Functionaldeterminante der f als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt wird, bei passender Wahl der c nur eine endliche Anzahl nicht äquivalenter Lösungen nach den $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ haben kann. Dabei gelten zwei Lösungen als äquivalent, wenn sie durch eine Substitution der Gruppe S ineinander übergeführt werden. Die ersten $n-1$-Gleichungen definiren dann nämlich ein oder mehrere Gebilde von der Art wie F in der vorigen Nummer, und zwar nur eine endliche Anzahl solcher Gebilde. Im Gegenfalle würden nämlich die Häufungsstellen in der nun schon oft benützten Schlussweise auf einen Widerspruch führen. Auf allen diesen Gebilden erster Stufe F ist f_n eine algebraische Function, welche wegen des Nichtverschwindens der Functionaldeterminante nicht constant sein kann und daher jeden Werth nur eine endliche Anzahl Male annimmt, was eben die Behauptung ergibt. Ist nun f_{n+1} so beschaffen, dass es wenigstens für ein Werthesystem der c an den zugehörigen nicht äquivalenten Lösungen des Systems 5) lauter verschiedene Werthe annimmt, und ist die Anzahl dieser Lösungssysteme N, so ist auch die algebraische Gleichung zwischen den $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ vom Grade N in f_{n+1}. Sei diese Gleichung

$$\Phi(f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n+1}) = 0. \tag{6}$$

Ist dann g irgend eine neue automorphe Function derselben Gruppe, so besteht auch zwischen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ und $f_{n+1} + ug$ eine algebraische Gleichung vom Grade N

$$\Psi(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n; u. f_{n+1} + ug) = 0, \tag{7}$$

und diese kann sich für den Fall, dass die Unbestimmte u gleich Null gesetzt wird, nur um einen nur von den $f_1, f_2 f_3, \ldots f_n$ abhängigen Factor von 6) unterscheiden, wenn — wie selbstverständlich — sowohl 6) als 7) bereits als irreducibel vorausgesetzt werden. Dann ergibt aber partielle Differentiation von 7) nach u, wenn nachher noch u gleich Null gesetzt wird, sofort die Darstellung von g durch die übrigen Functionen in Form eines Bruches mit nicht verschwindendem Nenner.

Die automorphen Functionen einer Gruppe bilden daher ebenso wie die $2n$-fach periodischen einen Körper, nur dass dort die Existenz einer Function hinreicht, um daraus die Existenz eines geeigneten Systems zu erweisen, was hier — wenigstens vorläufig — unter die Voraussetzungen aufgenommen werden musste.

III.

Auf der Grundlage der so gewonnenen Sätze gehen wir nun daran, umgekehrt die Abhängigkeit der $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ von einem solchen System automorpher Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ zu untersuchen, für welches erstens die Functionaldeterminante nicht identisch verschwindet, und welche zweitens bei keinen anderen Substitutionen als denen der Gruppe S ungeändert bleiben.

Betrachten wir zunächst die Functionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_\varkappa}\right| = \Delta(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{8}$$

und ihr Verhalten, wenn die x den Substitutionen 1) unterworfen werden. Man erhält durch einfache Determinantenrechnung

$$\Delta(x_1^{(\lambda)}, x_2^{(\lambda)}, x_3^{(\lambda)}, \ldots x_n^{(\lambda)}) = d_\lambda^{-1}\left((\alpha_{00}^{(\lambda)} + \sum_{\varkappa=1}^{n} \alpha_{\varkappa,0}^{(\lambda)} x_\varkappa\right)^{n+1} \Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \tag{9}$$

wo d_λ die Determinante $|\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}|$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots n)$ bedeutet. Bilden wir nun die Functionen

$$\begin{aligned} x_\varkappa \Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)^{\frac{1}{n+1}} &= X_\varkappa \\ \Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)^{\frac{1}{n+1}} &= X_0, \end{aligned} \tag{10}$$

so erleiden die $n+1$ Functionen $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$ bei den Substitutionen der Gruppe S selbst lineare homogene Substitutionen unter sich. Bilden wir daher die Matrix

$$\left| X_i, \frac{\partial X_i}{\partial f_h}, \frac{\partial^2 X_i}{\partial f_h^2}, \ldots, \frac{\partial^{n+1} X_i}{\partial f_h^{n+1}} \right| \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{11}$$

wobei h irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bedeuten kann, so sind die Verhältnisse der Determinaten $n+1$ter Ordnung dieser Matrix automorphe Functionen der $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$. Dann aber ist ersichtlich:

Die $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$ sind, als Functionen einer der $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ betrachtet, ein System linear unabhängiger Integrale einer Diffentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{n+1} R_{h,\varkappa}(f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n+1}) \frac{\partial^\varkappa X}{\partial f_h^\varkappa} = 0, \tag{12}$$

deren Coëfficienten rationale Functionen der $f_1, f_2, f_3, \ldots f_{n+1}$ sind. Die Gruppe dieser Differentialgleichung ist keine andere als die homogene Gruppe der $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$, und es sind gerade n solche Differentialgleichungen nothwendig, um die Abhängigkeit der X von den f festzulegen.

Anderseits erlauben die automorphen Functionen bei bekannten Verhältnissen der $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$, diese eindeutig umzukehren und die f daraus zu berechnen. Man hat also hier vollständige Analogie zu den aus der Theorie der automorphen Functionen einer Variablen bekannten Verhältnissen und auch zu den Abel'schen Functionen. Die Differentialgleichungen 12) fallen natürlich unter die von Fuchs[1] vielfach behandelte Classe von Differentialgleichungen, deren Gruppe von Parametern unabhängig ist.

IV.

Es seien nun noch einige Bemerkungen über das so gewonnene Resultat gestattet. Zunächst reihen sich die $2n$-fach periodischen Functionen als Specialfall ein, nur ist es bei ihnen

[1] Berl. Sitz. Ber., 1888, 1892, 1894, 1896, 1898.

möglich, bereits mit einfacheren Bildungen als der Matrix 11) auszukommen. Die Functionaldeterminante ist hier selbst $2n$-fach periodisch und die Differentialgleichungen 12) haben daher ein algebraisches Integral, während die übrigen Integrale durch einfache Quadraturen darstellbar sind. Es werden so die Andeutungen, welche Riemann in der nachgelassenen Abhandlung über Differentialgleichungen (S. 385 der zweiten Ausgabe der gesammten Werke) in Bezug auf die allgemeinen Theta verständlich.

Was die Weiterentwicklung der Theorie betrifft, so ist zunächst dem Problem bei endlichen Gruppen S, wo also die automorphen Functionen selbst algebraisch werden, Aufmerksamkeit zu schenken, da wir im Besitz einer grossen Reihe merkwürdiger Gruppen sind. Diese führen auf algebraisch integrirbare Differentialgleichungen. Hier wird dann eine ähnliche Verbindung mit den Untersuchungen Klein's für die Gleichungen 7. und 8. Grades herzustellen sein, wie beim Ikosaëder und der hypergeometrischen Reihe.

Eine weitere Forderung wird die Ausdehnung der Untersuchungen von Schwarz über die hypergeometrische Reihe auf die Tissot-Pochhammer'sche Differentialgleichung sein.

Aber es wird erst einer eingehenden Bearbeitung von Specialfällen und einer durchgreifenden Vertiefung unserer Kenntniss von den Functionen mehrerer Variablen bedürfen, bevor wir an die Frage werden gehen können, ob auf jedem algebraischen Gebilde n^{ter} Stufe eindeutig umkehrbare Systeme von Differentialgleichungen von der Form 12) existiren, eine Frage, welche ja, wie bekannt, schon für $n = 1$ Schwierigkeiten genug bietet.

XXIII. SITZUNG VOM 9. NOVEMBER 1899.

Der Vorsitzende, Herr Präsident E. Suess, begrüsst namens der anwesenden Mitglieder das auswärtige correspondirende Mitglied Herrn Prof. A. Cornu aus Paris, welcher an der heutigen Classensitzung theilnimmt, aufs herzlichste.

Der Vorsitzende macht ferner Mittheilung von dem Verluste, welcher die Akademie durch das am 9. August d. J. erfolgte Ableben des auswärtigen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn F. Edward Frankland in London, betroffen hat.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen ihres Beileides von den Sitzen.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingelangte Abhandlungen vor:

I. »Über die Nitrosirung des Methylphloroglucins«, von den Herren w. M. Prof. H. Weidel (†) und Dr. J. Pollak.

II. »System der Sensitometrie photographischer Platten«, von Herrn Hofrath Dr. J. M. Eder in Wien.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung des Herrn Felix Exner vor, betitelt: »Über die Absorptionsspectren der seltenen Erden im sichtbaren und ultravioletten Theil«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine vorläufige Mittheilung des Herrn Victor Conrad: »Über den Wassergehalt der Wolken« vor.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Franz Schardinger vor, betitelt: »Entwicklungskreis einer *Amoeba lobosa (Gymnamoeba): Amoeba Gruberi*«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine weitere Notiz über das Verhalten von Radium im

magnetischen Felde, von Dr. Stefan Meyer und Dr. Egon R. v. Schweidler.

Ferner legt Herr Hofrath Boltzmann folgende zwei Arbeiten vor:

I. »Über das Verhalten der Flüssigkeiten im magnetischen Felde«, von Prof. Dr. Gustav Jäger.
II. »Über ein Problem der Potentialtheorie«, von Dr. Fritz Hasenöhrl.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der Universität Wien:

I. »Über das Äthylphloroglucin und einige andere Derivate des Äthylbenzols«, von G. Weisweiller.
II. »Zum quantitativen Nachweis des Chloralalkoholates«, von F. Schmidinger.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Blümelhuber, M.: Ein lenkbares Luftfahrzeug. (Mit 4 Tafeln). Weimar, 1899; 8⁰.

Lampe E., Dr.: Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899 nebst Actenstücken zum Leben von Siegfried Aronhold. Ein Gedenkblatt zur hundertjährigen Jubelfeier der königlichen Technischen Hochschule zu Berlin. Berlin, 1899; 8⁰.

K. K. Technische Hochschule in Brünn: Festschrift der k. k. Technischen Hochschule in Brünn zur Feier ihres fünfzigjährigen Bestehens und der Vollendung des Erweiterungsbaues im October 1899. Mit Unterstützung des k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben vom Professoren-Collegium. Brünn, 1899; 4⁰.

— Verzeichniss der an der k. k. Technischen Hochschule in Brünn thätigen Lehrkräfte, Beamten und Diener während ihres Bestandes 1849/50—1898/99 und der in dieser Zeit eingeschriebenen Hörer. (Beilage der Festschrift.) Brünn, 1899; 4⁰.

Über die Absorptionsspectren der seltenen Erden im sichtbaren und ultravioletten Theile des Spectrums

von

Felix M. Exner.

Die vorliegenden Messungen sind theils mit einem Spectralapparate von Starke und Kammerer mit zwei sechziggradigen Prismen, theils mit einem grossen Rowland'schen Beugungsgitter von 4·52 *m* Krümmungsradius, wobei die ultravioletten Strahlen auf einem fluorescirenden Schirme sichtbar gemacht wurden, ausgeführt.

Untersucht wurden die folgenden Substanzen: Didym, Neodym, Praseodym, Erbium, Yttrium, Cer, Lanthan, Ytterbium, Scandium, Gadolinium, Samarium.

Es seien zuerst die Messungen mit dem Spectralapparat von Starke und Kammerer, die sich auf den sichtbaren Theil des Spectrums beziehen, angeführt:

A. Messungen mit dem Spectralapparat.

I. Concentrirte Didymchloridlösung.[1]

Schichtendicke 7 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
686	schwach
578·5—582	schwach

[1] Wurde nur der Vollständigkeit halber mitgemessen. — Eine Aufzählung der Absorptionslinien des Dydim gibt R. Thalén: Beiblätter zu Wiedemann's Annalen, 7, 893.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
576—578	stark
571—574	stark
569	stark
518	stark
516	stark
504·5—511	schwach
481·5—482·5	stark
477—478	schwach
470—472	ziemlich stark
444·5—450	stark, beiderseits verflacht
427—428	schwach

II. Concentrirte Didymchloridlösung.

Schichtendicke 37 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
685—686	stark
590—597	sehr schwach
583—590	stärker
568—583	sehr stark
522—524	schwach
515·5—522	sehr stark
508—512	stark
505·5—507·5	schwächer
bis 499	verflachend
481—483	stark
476·5—477·5	schwach
469·5—472·5	sehr stark, beiderseits verflachend
462·5—464	schwach
442·5—450·5	stark
427—428	schwach

III. Fünfzigprocentige Praseodymchloridlösung.[1]

Schichtendicke 7·2 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
599—601	schwach
585—595	stark, verflachend
478—483·5	sehr stark
462—472·5	stark, beiderseits verflachend
432·5—453	stark, verflachend

IV. Fünfzigprocentige Praseodymchloridlösung.

Schichtendicke 2·3 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
597—599	ziemlich stark
591—597	schwach
582—591	stark
478·5—482	stark
464·5—470	stark, an den Rändern verwaschen
437·5—450·5	stark, an den Rändern verwaschen

V. Fünfzigprocentige Praseodymchloridlösung.

Schichtendicke 0·55 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
595·5	schwach
593—595·5	sehr schwach
585—593	stärker, verwaschen
479—481	stark
465—470	ziemlich stark, verwaschen
440·5—447·5	stark

[1] Präparat von Cleve.

Die Herren Krüss und Nilson[1] führen eine viel grössere Anzahl von Absorptionsstreifen des Praseodyms an, die auch in dem Spectrum des Beugungsgitters später nicht gesehen wurden.

VI. Siebenprocentige Praseodymchloridlösung.

Schichtendicke 10·7 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
596	schwach
585—594·5	schwach
478·5—481	stark
465—468·5	schwächer
440·5—447	stark, an den Rändern verwaschen

VII. Siebenprocentige Praseodymchloridlösung.

Schichtendicke 5·3 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
585·5—594	sehr schwach, verwaschen
479—481	stärker
465·5—469	schwach
440·5—446·5	stark, verwaschen

VIII. Praseodymchloridkrystalle.

(Im reflectirten Lichte.)

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
594—596	ziemlich stark
bis 585	schwächer
480—482	stark
466—470·5	schwächer
442·5—448	stark, verwaschen

[1] Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, 20, 2144.

Neodym wurde mit dem Spectralapparat nicht untersucht, da dies in letzter Zeit in ausführlicher Weise durch G. Dimmer (diese Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. II. a) geschehen ist.

IX. Verdünnte Erbiumnitratlösung.[1]

Schichtendicke 10·7 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
653—659	schwach
bei 656	stark
539	schwach
518—523	stark
484·5—486·5	schwach
449·5—450·5	schwach
442·5—443·5	sehr schwach

X. Verdünnte Erbiumnitratlösung.[2]

Schichtendicke 10·7 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
672	sehr schwach
653—656	stark
642·5—645·5	schwach
575·5—584	stark
569—575·5	schwach
540	schwach
535	schwach
517—523	stark
483·5—487·5	schwächer, verwaschen
448·5—452·5	stark, verwaschen

[1] Präparat von Cleve.
[2] Präparat von Merck.

XI. Concentrirtere Erbiumnitratlösung.[1]

Schichtendicke 10·7 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
673·5	ziemlich stark
bis 657	schwächer
650—657	stark
538—541·5	schwach, verflachend
bei 538	Maximum
525—531	schwach
515·5—525	stark
487—493·5	schwächer
484·5—487	stark
483·5—484·5	schwach
451—456·5	schwach, verwaschen
448·5—451	stark
442·5—443·5	schwach

XII. Erbiumnitrat[2] in Krystallen.

(Im reflectirten Lichte.)

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
641—670	stark
638—641	schwach
547—550	ziemlich schwach
536·5—544	schwach
bei 539	Maximum
535	schwach
515—531	stark
bis 532	schwach
489·5—493·5	stark
482·5—489·5	stark, gegen Roth verflachend
449—457	verwaschen
442—444·5	verwaschen

Wie man sieht, stimmen die Präparate von Cleve und Merck nicht überein; letzteres hat sich später als unrein erwiesen.

---

[1] Präparat von Cleve.

[2] Präparat von Cleve.

XIII. Concentrirte Yttriumchloridlösung.[1]

Schichtendicke 10·7 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
672	sehr schwach
655—658	stark
642·5	schwach
572·5—578·5	schwach
541·5	schwach, verwaschen
535	schwach, verwaschen
521·5—523	stark
bis 518	schwächer werdend
484·5—486·5	schwach
bis 490·5	sehr schwach
448—455	schwach, verwaschen

Demnach sind die Absorptionsspectren des Erbiumnitrats und des Yttriumchlorids von Merck ziemlich identisch.

B. Messungen mit dem Beugungsgitter.

Die Absorption im Ultraviolett geht gewöhnlich langsam in eine continuirliche über, weswegen deren Anfang meistens nicht genau bestimmbar war.

I. Verdünnte Didymchloridlösung.

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
578·5	schwach
576·5	stärker
573·5	stark
524	schwach
522·5	schwach
482	stark
470	etwas schwächer
445·5	stark
427·5	schwach
376—337	ziemlich stark
bis 248	schwächer, hier ein Maximum
von 248	ansteigend continuirliche Absorption

[1] Präparat von Merck.

J. L. Soret[1] gibt folgende ultraviolette Streifen bei Didym an: ein breites Band mit zwei Maximis bei 353 und 348 und einen schwächeren Streifen von 330·5—328·5.

II. Verdünnte Neodymammonnitratlösung.[2]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
675	Mitte eines schwachen, verwaschenen Streifens
588·5—572	schwach
darunter 585·5	Maxima
579·5	Maxima
574	Maxima
523·5	etwas stärker
512	schwach
483	ziemlich schwach
476	ziemlich schwach
470	ziemlich schwach
462	ziemlich schwach
443	ziemlich schwach
427	stärker
356—352	verwaschen, schwach
349·5—346	verwaschen, schwach
335—313	verwaschen, schwach
von 291 an	continuirliche Absorption

III. Verdünnte Praseodymchloridlösung.[3]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
601—586	schwach
darunter 596	stärker
590—588	stärker
492	sehr schwach
482	stark
470	stark
443	stark
367	Beginn der Absorption
346	ein Maximum
von 326 an	continuirliche Absorption

[1] Comptes-rendus, 91, 378.

[2] Angabe der Absorptionsstreifen des Neodyms siehe G. Dimmer, oben citirte Abhandlung.

[3] Präparat von Cleve.

Kurz nachdem diese Messungen ausgeführt waren, erschien eine Abhandlung von S. Forsling,[1] worin folgende Absorptionsstreifen des Praseodyms angegeben sind: 596·5, 591·7, 588·9 bis 585, 483·2—482·2, 481·3, 468·7, 445·5—444·5, 443·5 bis 441·5, 354·0—353·0.

IV. Verdünnte Erbiumnitratlösung.[2]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
669	schwach, Mitte eines breiten Streifens
655—652	schwach
649	schwach, Mitte eines Streifens
543	schwach
525—523	ziemlich stark
523—520	schwächer
495—490	schwach
489—486	stark
450·5—449	schwach
444·5—441·5	ganz schwach
443	Mitte davon etwas stärker
403·5	sehr schwach, Mitte eines schmalen Streifens
379·5—378	stark
376·5—375	schwach
365—364·5	schwach
327—292	stärker
von 292	ansteigend continuirliche Absorption

[1] Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 23, Nr. 5.

[2] Präparat von Cleve.

V. Verdünnte Erbiumnitratlösung.[1]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
bis 677	continuirliche Absorption in Roth
667—660	schwach
655—648·5	stärker
641·5	Mitte eines schwachen Streifens
583—576	stark
576—571	schwach
540	Maxima eines schwachen Doppelstreifens
537	
525·5—517·5	stark
494—488	schwach
488—483	stärker
455—445	ziemlich stark
380—375	stark
375—368	sehr schwach
368—359	stärker
von 350 an	continuirliche Absorption

J. L. Soret[2] gibt eine Zeichnung der Absorption von Erbium im Ultraviolett, aber ohne Angabe von Wellenlängen.

VI. Verdünnte Erbiumnitratlösung.

Schichtendicke 10 *mm*.

Es wurde Merck'sches metallisches Erbium in HNO_3 gelöst.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
393—345	stark. Die Absorption geht von hier schwach weiter und in eine continuirliche über.

Sämmtliche Streifen des Erbiumspectrums im sichtbaren Theile waren nicht vorhanden.

Dasselbe war bei der folgenden Messung der Fall.

---

[1] Präparat von Merck.

[2] Comptes-rendus, 91, 378.

VII. Verdünnte Yttriumnitratlösung.

Schichtendicke 10 *mm*.

Es wurde Merck'sches metallisches Yttrium in HNO_3 gelöst.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
von 375 an	beginnt sehr schwach die continuirliche Absorption

VIII. Verdünnte Yttriumchloridlösung.[1]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
651	Mitte eines sehr schwachen Streifens
648·5	Mitte eines schwachen Streifens
640	
542	
537	
525—520	stark
darunter 524	Maxima
520·5	
492—481	sehr schwach
379·5—376	verwaschen, schwach
369—358·5	
352—343	
325	Mitte eines verwaschenen, schwachen Streifens.

Keine continuirliche Absorption.

IX. Verdünnte Samariumnitratlösung.[2]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
404—400	schwach
334—271	ziemlich schwach
von 271 an	beginnt etwas schwächer die continuirliche Absorption.

[1] Präparat von Merck.

[2] Präparat von Cleve.

Soret[1] gibt für Samarium folgende violette und ultraviolette Streifen an: 408—406, einen Streifen von grosser Stärke von der *H*-Linie etwas gegen Roth gelegen, einen ziemlich starken Streifen von 376—372, einen ziemlich starken Streifen von 364—360 und einen schwächeren Streifen, dessen Mitte mit der *O*-Linie zusammenfällt.

Das hier untersuchte Samarium zeigte keine Absorptionsstreifen im sichtbaren Theile des Spectrums, wie sie z. B. Bettendorff[2] in grosser Menge angibt, was seinen Grund in der Unreinheit der Präparate haben dürfte, die Bettendorff benützte.

S. Forsling[3] hat ebenfalls die ultravioletten Absorptionsstreifen des Samariums untersucht und gibt folgende Wellenlängen an: 408·3, 407·7, 403·5—403, 401·6—400·7, 394·2 bis 393·2. Er gibt auch eine Zusammenstellung der diesbezüglichen Untersuchungen von Lecoq de Boibaudran, Soret, Thalén, Krüss und Nilson und Bettendorff.

X. Verdünnte Gadoliniumnitratlösung.[4]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in $\mu\mu$	Stärke der Streifen
347	Maximum eines sehr schwachen Streifens, der circa von 350—339 reicht
330—289	schwach
von 220 an	beginnt die continuirliche Absorption

[1] Comptes rendus, 91, 378.

[2] Liebig's Annalen, 263, 172.

[3] Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 18, Abth. I.

[4] Das Präparat stammte von Marignac.

XI. Verdünnte Ytterbiumnitratlösung.[1]

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
353—343	sehr schwach
329—240	schwach
von 240	geht die Absorption schwächer continuirlich weiter

XII. Ziemlich concentrirte Ceriammonnitratlösung.

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
487—356	schwach
von 223 an	beginnt die continuirliche Absorption

XIII. Ceriammonnitratlösung.

Concentration: 1/4 der früheren.

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
428—414	ziemlich schwach
414—385	stark
385—372	schwächer
372—345	stärker
von 345 an	schwächer in continuirlicher Absorption

[1] Präparat von L. F. Nilson.

XIV. Ceriammonnitratlösung.

Concentration: $^1/_{16}$ der ersteren.

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
402·5—378	ziemlich schwach
378—352	stärker
von 352 an	schwächer in continuirlicher Absorption

XV. Verdünnte Ceroammonnitratlösung.

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
376—332	schwach
bei 350	Maximum
von 332 an	stärker in continuirlicher Absorption

XVI. Verdünnte Lanthanammonnitratlösung.

Schichtendicke 10 *mm*.

Wellenlängen der Absorption in μμ	Stärke der Streifen
352—346	sehr schwach
336—319	etwas stärker

Keine continuirliche Absorption.

XVII. Verdünnte Scandiumnitratlösung.[1]

Schichtendicke 10 *mm*.

Zeigte überhaupt keine Absorption.

Destillirtes Wasser, das bei allen Lösungen als Lösungsmittel diente, zeigte keine Absorptionsstreifen.

[1] Präparat von L. F. Nilson.

Die Elemente Samarium, Gadolinium, Ytterbium, Cer, Lanthan und Scandium wurden mit dem Spectralapparat nicht untersucht, da ihre Absorptionsstreifen entweder ganz im ultravioletten Theile des Spectrums oder doch sehr nahe an der Grenze desselben liegen.

Die grossen Abweichungen gegen frühere Messungen dürften wesentlich darauf zurückzuführen sein, dass die hier benützten Präparate einen höheren Grad von Reinheit hatten.

XXIV. SITZUNG VOM 16. NOVEMBER 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. III, Heft IV—VII (April bis Juli 1899).

Das c. M. Herr Prof. Dr. L. v. Graff übersendet die sechs bedungenen Pflichtexemplare des von ihm mit einer Subvention der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: »Monographie der Turbellarien. II. Tricladida terricola (Landplanarien). 1 Band Text und 1 Band Atlas. Leipzig, 1899. Gross 4°.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, verliest ein Telegramm der zur Beobachtung der Leoniden entsendeten Expedition, ddo. Delhi, 16. November, 12 Uhr Mittags, welches lautet: Leonides not yet appeared.

Herr Dr. Friedrich Bidschof, Adjunct an der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, theilt im Namen des auf der Rückfahrt vom Schneeberge begriffenen ersten Adjuncten der k. k. Universitäts-Sternwarte, Dr. Johann Palisa, sowie in seinem eigenen Namen mit, dass bloss in der Nacht vom 14.—15. d. M., und auch in dieser nur während weniger Stunden, Beobachtungen von Sternschnuppen des Leonidenschwarmes angestellt werden konnten, wobei auf dem Schneeberg 134, auf dem Sonnwendstein (von einer kleineren Zahl Beobachter) 105 Sternschnuppen wahrgenommen wurden; photographische Aufnahmen konnten jedoch nicht erhalten werden. In den übrigen Nächten herrschten trübes Wetter oder Schneestürme. Die auf dem Schneeberg befindlichen Astronomen waren heute, den 16. November, gezwungen, ihren Beobachtungsort zu verlassen und werden ihre Arbeit in Puchberg am Schneeberg fortsetzen, insoferne das Wetter günstig ist.

Zur Beobachtung des in der nächsten Woche zu erwartenden Sternschnuppenschwarmes der Bieliden werden die beiden Hochstationen wieder bezogen werden, soferne sie noch zugänglich sein werden.

Der Secretär legt ferner eine Abhandlung von Prof. Dr. O Tumlirz in Czernowitz vor, welche den Titel führt: »Die beiden specifischen Wärmen des Wasserdampfes«.

Das w. M. Prof. G. v. Escherich überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Die zweite Variation der einfachen Integrale« (IV. Mittheilung).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine im I. chemischen Universitätslaboratorium ausgeführte Arbeit von den Herren w. M. Prof. H. Weidel (†) und F. Wenzel, betitelt: »Über die Condensation der homologen Phloroglucine mit Salicylaldehyd«.

Ferner überreicht Prof. Ad. Lieben eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn G. Lindauer, »Über ein Glykol und Aldol der Furanreihe«.

Herr Dr. G. Alexander, Prosector, überreicht eine von ihm ausgeführte Arbeit aus dem I. anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Zur Anatomie des Ganglion vestibulare nervi acustici der Säugethiere«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Fay, Edw. Allen: Marriages of the deaf in America. (Published by the Volta Bureau.) Washington, 1898; 8°.

Jousseaume, Dr. F: La philosophie aux prises avec la Mer Rouge, le darwinisme et les trois règnes des corps organisés. Paris, 1899; 8°.

Die zweite Variation der einfachen Integrale

(IV. Mittheilung)

von

G. v. Escherich,

w. M. k. Akad.

Diese Mittheilung bringt zunächst Nachträge zu den früheren Mittheilungen.[1] In XXII und XXIII wird gezeigt, dass sowohl die Transformation der zweiten Variation in die reducirte Form, als auch die fundamentale Formel (9) in XI (Mittheilung II) aus einer und derselben Relation als gemeinsamer Quelle fliessen. Die Ableitung der Formel (9) ist dabei im Wesentlichen dieselbe wie früher, während die Überführung der zweiten Variation des Integrals in die reducirte Form sich noch einfacher gestaltet, als die ohnehin, wie ich glaube, sehr einfache in Mittheilung I, X. Es wird dann die schon früher (in Mittheilung III, XVIII, S. 1409 [27]) aufgeworfene Frage, ob auch in anderen Fällen als im trivialen Falle von einem Integralsysteme z, r des accessorischen Gleichungssystems die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ zugleich identisch in einer Strecke des Integrationsintervalles verschwinden können, nochmals, und zwar mit Beschränkung auf den Fall, wo die Bedingungsgleichungen des Problems keine endlichen Gleichungen enthalten, behandelt, da bei der dort gegebenen Antwort ein Irrthum unterlaufen ist. Die Entscheidung über diese Frage, die bisher trotz ihrer principiellen Wichtigkeit unbeachtet blieb, erwies sich als abhängig von der anderen, ob ein überzähliges

[1] Mittheilung I, II und III, diese Sitzungsber., Bd. CVII, Abth. II. a.

System linearer homogener Differentialgleichung noch andere gemeinsame Lösungssysteme besitzt, als das, dessen sämmtliche Glieder Null sind. Zu dem allgemeineren Falle, wo keine solchen vorhanden sind, gehört der Fall, dass keine Bedingungsgleichungen vorkommen, der von Jacobi[1] und Lipschitz[2] behandelte Fall, aber schon das einfache isoperimetrische Problem könnte Ausnahmsfälle darbieten. In diesem Hauptfalle können die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ eines Integralsystems z, r des accessorischen Gleichungssystems nie zugleich in einer Strecke des Integrationsintervalles identisch verschwinden, woraus gefolgert wird, dass die Determinante des Systems, das irgend einem Punkte des Integrationsintervalles conjugirt ist, in ihm eine isolirte Nullstelle hat. Hingegen in den anderen Fällen gibt es Punkte des Integrationsintervalles, deren conjugirte Integralsysteme Determinanten besitzen, die streckenweise und wenn die Functionen des Systems, wie es zumeist zutrifft, analytische sind, also im ganzen Integrationsintervalle Null sind, und die aufgestellten Kriterien gelten dann nicht mehr alle unbedingt. Im Hauptfalle bleiben alle in den früheren Mittheilungen entwickelten Sätze bestehen mit Ausnahme der Behauptung, dass die Determinante eines jeden Systems, das irgend einem Punkte des Integrationsintervalles conjugirt ist, darin nirgends identisch verschwinden könne.[3] Dieselbe ist — nach dem oben erwähnten Satze — gewiss richtig, wenn die Functionen analytische sind, es geht aber doch nicht an, wie es bisher geschah, sie entweder ohne strenge Begründung zuzulassen oder als Voraussetzung einzuführen. Mit derselben Berechtigung dürfte man dann die Bedingung I für die zweite Variation — dass die quadratische Form in der reducirten zweiten Variation im ganzen Integrationsintervalle definit sein muss — als Voraussetzung aufnehmen. Denn setzt man sie als erfüllt voraus, so kann man aus ihr im Hauptfalle erschliessen,

[1] Journal für Math., Bd. 17.

[2] Ebenda, Bd. 65.

[3] Es scheint Scheeffer (Math. Annalen, Bd. 25) übersehen zu haben, dass diese Determinanten — und somit auch die von ihm mit $\Delta(x, x^0)$ bezeichnete Determinante — immer identisch im ganzen Integrationsintervalle verschwinden, wenn endliche Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

dass die Determinante eines jeden Systems, das irgend einem Punkte des Integrationsintervalles conjugirt ist, in ihm eine isolirte Nullstelle hat; nimmt man hingegen umgekehrt an, dass in keinem Punkte des Integrationsintervalles die Determinante des zugehörigen Systems daselbst identisch verschwindet, so liegt selbstverständlich der Hauptfall vor, und eine schärfere Untersuchung zeigt, dass diese Annahme auch die Bedingung I zur Folge hat.

Doch ist die Frage, ob im Hauptfalle die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems ausserhalb desselben identisch verschwindet, für die Ableitung der Kriterien nicht von Belang, wie aus dem zweiten Theile der Arbeit (XXVI bis XXXI) hervorgeht, wo der (in Mittheilung I erwähnte) Grundgedanke Weierstrass' verwendet wird, um neue Beweise für die Kriterien II (Mittheilung III, XIX) und III (Mittheilung III, XX) zu geben. Der Beweis für das letztere gestaltet sich sehr einfach, trotzdem er unabhängig von dem Umstande geführt wird, ob die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems nicht etwa ausserhalb einer Umgebung des Punktes streckenweise Null ist. Der Beweis für das erstere Kriterium ist ebenfalls unabhängig von diesem Umstande, jedoch langwieriger als der frühere, lässt aber dafür eine erweiterte Fassung des Satzes zu. Bei diesen Beweisen wurde von der reducirten Form der zweiten Variation selbst kein directer Gebrauch gemacht, aber wohl indirect insoferne, als die Ableitung (Mittheilung III, XVII) von Bedingung I auf ihr beruht. Einen Beweis für diese Bedingung zu finden, der die reducirte Form nicht benöthigen würde und, wie der in XVIII gegebene, für alle Fälle giltig wäre, ist mir nicht gelungen.

Mit diesem zweiten Theile der Abhandlung ist die Aufgabe erledigt, die einst Scheeffer sich setzte, und ein Vergleich zwischen beiden Arbeiten wird wohl klar zeigen, dass er von einer richtigen Ausgangsstelle auf Abwege gerieth.

Durch die bisherigen vier Mittheilungen[1] glaube ich das Problem der zweiten Variation der einfachen Integrale für den

[1] Ein kurzer, zusammenfassender Bericht über dieselben wird im Jahrgange 1900 der Monatshefte für Mathematik und Physik erscheinen.

Fall, als die Ordinaten der gesuchten Curve im ganzen Integrationsintervalle sich als eindeutige Functionen der Abscisse darstellen lassen und keine endlichen Bedingungsgleichungen vorhanden sind, nach allen Seiten hin klargelegt zu haben. Während es aber für das Problem der ersten Variation ganz gleichgiltig ist, ob die Ordinaten der Curve im ganzen Integrationsintervalle eindeutige Functionen der Abscisse sind oder nicht, da es sich dabei nur um die Gleichung für das Curvenelement handelt — ist bei der zweiten Variation, wo die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung in Betracht kommt, mit dem ersten Falle noch nicht das ganze Problem erledigt.

Einer späteren Mittheilung bleibt es vorbehalten, das Problem ohne die Beschränkung, dass die Ordinaten im ganzen Integrationsintervalle eindeutige Functionen der Abscisse sind, zu behandeln.

Aber auch nach der anderen Seite hin erheischen die bisherigen Untersuchungen noch eine Vervollständigung: dass nämlich die Bedingungsgleichungen auch endliche Gleichungen enthalten. Doch lassen sich die für den vorhergehenden Fall gegebenen Methoden gemäss den in Mittheilung II, XII und XIII gezogenen Grundlinien auch auf diesen allgemeinsten Fall der Variationsrechnung ohne Schwierigkeit übertragen, wie von anderer Seite dargelegt werden wird.

XXII.

Ich gehe zu dem ursprünglichen, in II der Mittheilung I gestellten Probleme zurück: Man soll n Functionen $y_1, y_2 \dots y_n$ des x bestimmen, dergestalt, dass sie m Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x; y_1, y_1' \dots y_n, y_n') &= 0 \\
\varphi_2(x; y_1, y_1' \dots y_n, y_n') &= 0 \\
\dots\dots\dots&\dots\dots \\
\dots\dots\dots&\dots\dots \\
\varphi_m(x; y_1, y_1' \dots y_n, y_n') &= 0,
\end{aligned}$$

wo $n > m$ ist, genügen, in a und b vorgegebene Werthe annehmen und das Integral

$$J = \int_a^b f(x; y_1, y_1' \dots y_n, y_n')\,dx \tag{1}$$

zu einem Maximum oder Minimum machen.

Die Lösung der Aufgabe ergibt eine Curve im Gebiete der Grössen $x, y_1, y_2 \dots y_n$, deren Coordinaten in jedem Punkte einem Systeme von Differentialgleichungen genügen, das man vermöge der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode erhält, die in diesen Mittheilungen vorläufig ohne Kritik als richtig hingenommen wird. Bezeichnet man mit $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ noch unbestimmte Factoren und setzt

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_m\varphi_m,$$

so liefert sie das System

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0 \qquad i = 1, 2 \dots n \\
\varphi_1 = 0;\ \varphi_2 = 0 \dots \varphi_m = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

denen die $(n+m)$ gesuchten Functionen

$$y_1, y_2 \dots y_n;\ \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$$

genügen müssen.

Bei den Untersuchungen über die zweite Variation nehme ich auch hier wie in den vorangegangenen drei Mittheilungen an, dass

1. in einem gewissen Bereiche der $x, y_1 \dots y_n$, in dem auch die durch die vorgegebenen Werthe der $y_1, y_2 \dots y_n$ für $x = a$ und $x = b$ bestimmten Punkte liegen, die daselbst eindeutigen Functionen

$$f, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$$

eindeutige, stetige Derivirte der ersten, zweiten und dritten Ordnung nach sämmtlichen Veränderlichen besitzen;

2. ein Integralsystem der Differentialgleichungen (2) gefunden sei, das die vorgeschriebenen Bedingungen in a und b erfüllt, d. h. dessen Glieder $y_1, y_2 \dots y_n$ an diesen Stellen die gegebenen Werthe annehmen und eine Curve im Gebiete der $x, y_1 \dots y_n$ bestimmen, die im obigen Bereiche liegt;

3. dass die $y_1, y_2 \dots y_n$ längs dieses ganzen Curvenstückes im Intervalle ab eindeutige Functionen des x sind und somit das Integral längs dieser Curve durch

$$\int_a^b F dx$$

selbst dargestellt wird, und

4. dass weder die Determinante in II, Mittheilung I. S. 1210 [20]

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_1'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_1'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}; & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}; & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (3)$$

in einem Curvenpunkte verschwinde, noch eines ihrer Elemente unendlich werde, so dass also das ganze Integralsystem aus einem Anfangselemente durch Fortsetzung entstanden gedacht werden kann.

Um nun näher zu untersuchen, ob das gefundene Curvenstück die Aufgabe löst, ertheilt man bekanntlich den Ordinaten $y_1, y_2 \dots y_n$ Variationen $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$, die in a und b alle Null sind und die sehr specielle Form

$$\eta_1 = \varepsilon u_1,\ \eta_2 = \varepsilon u_2 \dots \eta_n = \varepsilon u_n$$

besitzen, wo ε eine differentiale Grösse ist und die $u_1, u_2 \dots u_n$ von ε unabhängige eindeutige Functionen des x sind, die im ganzen Intervalle ab erste eindeutige, stetige und zweite eindeutige, integrable Derivirte nach x besitzen[1] und überdies die $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \eta_i' \right) = 0$$

$$k = 1, 2 \dots m$$

genügen.

Die erste Variation verschwindet, da die Gleichungen (2) erfüllt sind, und für die zweite Variation $\delta^2 J$ ergibt sich

$$\delta^2 J = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \eta_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} \eta_n + \frac{\partial}{\partial y_1'} \eta_1' + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n'} \eta_n' \right)^2 F$$

$$= \int_a^b \Omega(\eta, \eta') \, dx,$$

wenn die obige nach

$$\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n;\ \eta_1', \eta_2' \dots \eta_n'$$

quadratische Form mit $\Omega(\eta, \eta')$ bezeichnet wird.

Nimmt man die $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ längs der Strecke $a\alpha$, wo $a \leqq \alpha$ ist, und längs βb, wo $\alpha < \beta \leqq b$ ist, gleich Null, so wird die zweite Variation des Integrals durch

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\beta \Omega(\eta, \eta') \, dx \tag{4}$$

ausgedrückt.

[1] Diese Voraussetzung über die zweiten Derivirten lässt sich bei der hier befolgten Methode allem Anscheine nach nicht umgehen.

Haben alle zweiten Variationen des Integrals, die durch derartige Änderungen der $y_1, y_2 \ldots y_n$ erhalten werden, einerlei Zeichen, so ist damit eine nothwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums erfüllt. Um sich hierüber Gewissheit zu verschaffen, transformirt man zunächst (4) vermöge der Identität

$$2\Omega(\eta_i, \eta_i') = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}} \eta_{ik} + \frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} \eta_{ik}' \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} \right) \eta_{ik}$$

$$+ \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} \eta_{ik} \right).$$

Doch ist diese Transformation nur gestattet, wenn die Ausdrücke

$$\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

an jeder Stelle des Intervalls *ab* Differentialquotienten nach x haben, was in Folge der gemachten Voraussetzung, dass die $\eta_{i1}, \eta_{i2} \ldots \eta_{in}$ überall in diesem Intervalle auch zweite Differentialquotienten nach x besitzen sollen, thatsächlich hier zutrifft. Da gemäss dieser Voraussetzung auch die $\eta_{i1}', \eta_{i2}' \ldots \eta_{in}'$ im Intervalle *ab* überall stetig sind, so geht

$$\delta^2 J = \int_a^b \Omega(\eta_i, \eta_i')\,dx$$

in

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik} \left[\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} \right] dx$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\eta_{ik} \frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} \right]_a^b \qquad (5)$$

über.

Die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ sind in α und β Null, woraus sich ergibt

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{n} \eta_k \left[\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta'_k}\right] dx. \tag{6}$$

Um diesen Ausdruck weiter zu transformiren, benütze man, wie in Mittheilung I, X die Form

$$\psi_i(z, r) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i\,\partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i\,\partial y'_k} z'_k - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i\,\partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i\,\partial y'_k} z'_k\right)\right]$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i} r_k\right)\right],$$

der man auch die Gestalt

$$\psi_i(z, r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(z,z')}{\partial z'_i}\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i} r_k\right)\right] \tag{7}$$

geben kann. Es wird dann

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta'_k}\right] =$$
$$= \psi_k(\eta, r) - \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k} r_i - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k} r_i\right)\right]$$

und somit

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\left[\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta'_k}\right] = \sum_{k=1}^{n}\eta_k\psi_k(\eta, r)$$
$$- \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k} r_i\eta_k - \eta_k\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k} r_i\right)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\eta_k\psi_k(\eta, r) + \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k} r_i\eta_k\right), \tag{7*}$$

da nach Voraussetzung

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k}\eta_k+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y'_k}\eta'_k\right)=0 \qquad (i=1,2\ldots m).$$

Der Ausdruck (6) erhält dann die Form

$$\partial^2 J=\int_a^\beta\left[\sum_{k=1}^{n}\psi_k(\eta,r)\eta_k\right]dx, \tag{8}$$

wo die $r_1, r_2 \ldots r_m$ unbestimmt bleiben (Mittheilung I, X, 2).

XXIII.

Aus der Gleichung (7) lässt sich nun eine wichtige Folgerung ziehen. Führt man die Bezeichnung

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}z_i+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i}z'_i\right)=\bar{\varphi}_k(z) \tag{1}$$

ein, so ist für je zwei Grössensysteme

$$z_1, z_2\ldots z_n;\quad r_1, r_2\ldots r_m$$

$$u_1, u_2\ldots u_n;\quad \rho_1, \rho_2\ldots \rho_m$$

der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n}u_i\psi_i(z,r)+\sum_{k=1}^{m}\rho_k\bar{\varphi}_k(z)-\left[\sum_{i=1}^{n}z_i\psi_i(u,\rho)+\sum_{k=1}^{m}r_k\bar{\varphi}_k(u)\right]$$

ein vollständiger Differentialquotient nach x. Bezeichnet man sein Integral mit $\psi(z, r; u, \rho)$, so ist

$$\psi(z,r;u,\rho)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u'_i\partial u'_k}(z_i u'_k-u_i z'_k)+\frac{\partial^2\Omega(u,u')}{\partial u'_i\partial u_k}(z_i u_k-z_k u_i)\right]$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i}(r_k u_i-\rho_k z_i) \tag{2}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \psi_i(z, r) + \sum_{k=1}^{m} \rho_k \overline{\varphi}_k(z) - \left[\sum_{i=1}^{n} z_i \psi_i(u, \rho) + \sum_{k=1}^{m} r_k \overline{\varphi}_k(u)\right]$$

$$= \frac{d}{dx} \psi(z, r; u, \rho) \qquad (3)$$

(siehe Mittheilung I, X).

Setzt man

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} = a_{ik}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} = b_{ik},$$

so nimmt die Form (2) $\psi(u, \rho; z, r)$ die Gestalt an

$$\psi(u, \rho; z, r) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [a_{ik}(u_i z'_k - z_i u'_k) + b_{ik}(u_i z_k - u_k z_i)]$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} (\rho_k z_i - r_k u_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z'_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} u_i + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(b_{ik} - b_{ki}) u_i - a_{ik} u'_i] - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \rho_i \right\} z_k$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k u_i. \qquad (4)$$

Von den n Grössensystemen

$$\begin{array}{l} u_1^1, u_2^1 \ldots u_n^1;\ \rho_1^1, \rho_1^2 \ldots \rho_m^1 \\ u_1^2, u_2^2 \ldots u_n^2;\ \rho_1^2, \rho_2^2 \ldots \rho_m^2 \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ u_1^n, u_2^n \ldots u_n^n;\ \rho_1^n, \rho_2^n \ldots \rho_m^n \end{array}$$

werde das λ^{te} kurz mit

$$u^\lambda, \rho^\lambda$$

und die Determinante

$$\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$$

mit $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ bezeichnet. Ist diese Determinante in einem Punkte ξ des Integrationsintervalls nicht Null, so verschwindet sie auch in einer Umgebung (Nachbarschaft) desselben nicht. An jeder solchen Stelle lassen sich $n(n+m)$ Multiplicatoren

$$w_1^\mu, w_2^\mu \ldots w_n^\mu;\ v_1^\mu, v_2^\mu \ldots v_m^\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots n)$$

bestimmen, so dass in den nach den $z_1, z_2 \ldots z_n$ linearen Differentialausdrücken der ersten Ordnung

$$w_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} w_\lambda^\mu \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \sum_{\lambda=1}^{m} v_\lambda^\mu \varphi_\lambda(z)$$
$$(\mu = 1, 2 \ldots n)$$

die Coëfficienten sämmtlicher r und aller Ableitungen der $z_1, z_2 \ldots z_n$ bis auf den von z'_μ, der gleich 1 gemacht werden soll, verschwinden. Man findet leicht (Mittheilung II, XI, S. 3)

$$w_\mu(z) = z'_\mu + \sum_{i=1}^{n} q_i z_i$$
$$= \frac{1}{\Delta U} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} U_\nu^\lambda \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda=1}^{m} \varphi_\lambda^\mu \varphi_\lambda(z).$$

Darin bedeutet U die Determinante $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$, U_ν^λ die Subdeterminante des Elementes u_ν^λ in U, Δ die Determinante (XXIII, 3), in der

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} = a_{ik}$$

zu setzen ist, A_{ik} die Subdeterminante von a_{ik} und φ_λ^μ von $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_\mu}$ in Δ.

Wählt man für die n Grössensysteme u unter einander conjugirte Integralsysteme des Systems accessorischer Differentialgleichungen (Mittheilung I, IX, 3), deren Determinante $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ im Punkte ξ nicht Null ist, die also ein conguijrtes Integralsystem bilden (Mittheilung II, XVI, 2, S. 1324 [58]), so ergibt sich leicht, dass

$$w_\mu(z) = \frac{1}{U} \begin{vmatrix} z'_\mu; & z_1 \ldots z_n \\ (u^1_\mu)'; & u^1_1 \ldots u^1_n \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ (u^n_\mu)'; & u^n_1 \ldots u^n_n \end{vmatrix}$$

wird. Bezeichnet man die rechtsstehende Determinante im Zähler mit $\chi_\mu(z)$, also

$$\chi_\mu(z) = \begin{vmatrix} z'_\mu; & z_1 \ldots z_n \\ (u^1_\mu)'; & u^1_1 \ldots u^1_n \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ (u^n_\mu)'; & u^n_1 \ldots u^n_n \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$(\mu = 1, 2 \ldots n),$$

so findet man

$$\chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda, \nu = 1}^{n} A_{\mu\nu} U^\lambda_\nu \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) + \frac{U}{\Delta} \sum_{\lambda = 1}^{m} \bar{\varphi}_\lambda(z) \varphi^\mu_\lambda,$$

$$(\mu = 1, 2 \ldots n).$$

Nimmt man nun an, dass $z_1, z_2 \ldots z_n$ die Gleichungen

$$\bar{\varphi}_\lambda(z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_k} z_k + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k} z'_k \right) = 0$$

$$(\lambda = 1, 2 \ldots m)$$

befriedigen, so vereinfacht sich obige Formel in

$$\chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda, \nu = 1}^{n} A_{\mu\nu} U^\lambda_\nu \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r), \tag{6}$$

welcher Ausdruck, wenn man der Kürze halber

$$\sum_{\lambda = 1}^{n} U^\lambda_\nu \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; z, r) = V_\nu$$

setzt, die Form

$$\chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu = 1}^{n} A_{\mu\nu} V_\nu$$

annimmt. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit

$$\chi_\lambda(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\tau=1}^{n} A_{\lambda\tau} V_\tau,$$

so erhält man

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\mu\lambda} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{\lambda,\mu,\nu,\tau} a_{\mu\lambda} A_{\mu\nu} A_{\lambda\tau} V_\nu V_\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{\lambda,\nu,\tau} A_{\lambda\tau} V_\nu V_\tau \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda} A_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Nun ist

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \chi_\lambda(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \sum_{\tau=1}^{n} A_{\lambda\tau} V_\tau = 0.$$

Daher ist auch

$$\sum_{\lambda,\nu,\tau} A_{\lambda\tau} V_\nu V_\tau \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \varphi_\sigma^\nu = 0$$

und somit auch

$$\sum_{\lambda,\nu,\tau} A_{\lambda\tau} V_\nu V_\tau \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \varphi_\sigma^\nu = 0.$$

Addirt man diesen Ausdruck zu obiger Formel (7), so ergibt sich

$$\sum_{\mu,\lambda} a_{\mu\lambda} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{\lambda,\nu,\tau} A_{\lambda\tau} V_\nu V_\tau \left[\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda} A_{\mu\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \varphi_\sigma^\nu \right].$$

Es ist nun

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda} A_{\mu\nu} + \sum_{\sigma=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda} \varphi_\sigma^\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \neq \nu \\ \Delta & \text{für } \lambda = \nu \end{cases}$$

und daher

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\mu\lambda} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda,\tau} A_{\lambda\tau} V_\lambda V_\tau. \tag{8}$$

Aus dieser an sich bemerkenswerthen Formel lässt sich eine andere vermöge der Bedeutung von $\chi_\lambda(z)$ ableiten, denn es ist

$$\chi_\mu(z) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\tau=1}^{n} A_{\mu\tau} V_\tau$$

und daher ist

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z) = \sum_{\lambda,\tau=1}^{n} V_\tau\chi_\lambda(z)\sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu\tau}a_{\mu\lambda}.$$

Aus

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\varphi_\sigma^\mu\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda}\chi_\lambda(z) = 0$$

oder

$$\sum_{\lambda,\tau=1}^{n}\chi_\lambda(z)V_\tau\sum_{\sigma=1}^{m}\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial y'_\lambda}\varphi_\sigma^\mu = 0$$

folgt dann

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{n} V_\lambda\chi_\lambda(z).$$

Substituirt man hierin den Werth von V_λ:

$$V_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} U_\lambda^\nu\psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r),$$

so geht die obige Formel über in

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z) = \sum_{\nu=1}^{n}\psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r)\sum_{\lambda=1}^{n} U_\lambda^\nu\chi_\lambda(z).$$

Wendet man hierauf den Determinantensatz in Mittheilung I, VII. (S. 1232 [42]) an:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} U_\lambda^\nu\chi_\lambda(z) = \Delta(u^1, u^2\ldots u^n)\Delta'(u^1\ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1}\ldots u^n)$$
$$-\Delta'(u^1, u^2\ldots u^n)\Delta(u^1\ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1}\ldots u^n),$$

so erhält man aus der obigen Gleichung

$$\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z) = \sum_{\nu=1}^{n}[\Delta(u^1, u^2\ldots u^n)\Delta'(u^1\ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1}\ldots u^n)$$
$$-\Delta'(u^1, u^2\ldots u^n)\Delta(u^1\ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1}\ldots u^n]\psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r). \quad (9)$$

Diese Relation ist eine Verallgemeinerung der Formel (9) in Mittheilung II, XI., 2. (S. 1276 [10]), die aus ihr hervorgeht, wenn das Integralsystem z, r zu jedem der Systeme

$$u^1, \rho^1\ldots u^{k-1}, \rho^{k-1}; u^{k+1}, \rho^{k+1}\ldots u^n, \rho^n,$$

aber nicht zu u^k, ρ^k conjugirt ist, denn in diesem Falle schrumpft die Formel (9) in

$$\frac{1}{\psi(u^k, \rho^k; z, r)} \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z) = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n) \Delta'(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n)$$
$$-\Delta'(u^1, u^2 \ldots u^n) \Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n) \quad (10)$$

zusammen.

Aus der Formel (9) ergibt sich aber eine neue Beziehung, wenn man durch $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)^2$, das der Voraussetzung nach in einer gewissen Strecke von ab nicht verschwindet, dividirt. Für diese Strecke gilt dann die Relation

$$\frac{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)^2} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r) \frac{d}{dx} \frac{\Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)}$$

und daher

$$\frac{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)^2} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dx} \left[\frac{\Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \cdot \psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r) \right]$$
$$- \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \frac{d}{dx} \psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r). \quad (11)$$

Nun ist aber nach (3)

$$\frac{d}{dx} \psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r) = \sum_{i=1}^{n} z_i \psi_i(u^\nu, \rho^\nu) + \sum_{k=1}^{m} r_k \bar{\varphi}_k(u^\nu)$$
$$- \left[\sum_{i=1}^{n} u_i^\nu \psi_i(z, r) + \sum_{k=1}^{m} \rho_k^\nu \bar{\varphi}_k(z) \right] = - \sum_{i=1}^{n} u_i^\nu \psi_i(z, r)$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots n).$$

da

$$\psi_i(u^\nu, \rho^\nu) = 0, \qquad \left.\begin{matrix}\nu\\ i\end{matrix}\right\} = 1, 2 \ldots n,$$

$$\overline{\varphi}_k(u^\nu) = 0, \qquad \begin{matrix}\nu = 1, 2 \ldots n,\\ k = 1, 2 \ldots m,\end{matrix}$$

$$\overline{\varphi}_k(z) = 0, \qquad k = 1, 2 \ldots m$$

ist. Aus

$$\Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n) = \sum_{k=1}^{n} U_k^\nu z_k$$

ergibt sich daher

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n) \frac{d}{dx} \psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r)$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i,k=1}^{n} z_k U_k^\nu u_i^\nu \psi_i(z, r)$$

$$= -\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n) \sum_{k=1}^{n} \psi_k(z, r) z_k.$$

Die Formel (11) reducirt sich also auf

$$\frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)^2} =$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \psi(u^\nu, \rho^\nu; z, r) \right] + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(z, r) z_k,$$

woraus sich

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k(z, r) z_k = \frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)^2}$$

$$+ \frac{d}{dx} \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \psi(z, r; u^\nu, \rho^\nu) \right] \qquad (12)$$

ergibt.

Verschwinden nun die

$$z_1, z_2 \ldots z_n$$

in den Punkten $\alpha\beta$ des Integrations-Intervalles und haben sie überdies in diesem Intervalle überall ausser den ersten auch zweite integrable, eindeutige Derivirte, so kann man, wenn k eine differentiale Grösse bedeutet, den $y_1, y_2 \ldots y_n$ längs $\alpha\beta$ bezüglich die Variationen

$$kz_1, kz_2 \ldots kz_n$$

ertheilen. Besteht dann ein conjugirtes System von Integralen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n,$$

dessen Determinante in $\alpha\beta$ (mit Einschluss der Grenzen) nicht Null wird, so nimmt

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{n} \psi(kz, kr) kz_i dx$$

vermöge obiger Relation (11) die Form an:

$$\delta^2 J = k^2 \int_\alpha^\beta \frac{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)^2} dx,$$

da die

$$\Delta(u^1 \ldots u^{\nu-1}, z, u^{\nu+1} \ldots u^n)$$

$$\nu = 1, 2 \ldots n$$

an den Stellen α und β Null sind.

Dabei erfüllen, wie aus der Form (XXII, 5) für die $\chi_1(z)$ $\chi_2(z) \ldots \chi_n(z)$ hervorgeht, dieselben die m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \chi_i(z) = 0$$

$$(k = 1, 2 \ldots m).$$

Die oben erhaltene Form der zweiten Variation ist aber die zuerst von Clebsch aufgestellte reducirte Form derselben.[1]

[1] Ein anderer Beweis wurde in Mittheilung I, X gegeben.

XXIV.

Aus dieser reducirten Form ergibt sich, wie in Mittheilung III, XVII., bewiesen wurde,[1] als erste nothwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums (Bedingung I) der Satz:

»Die zweiten Variationen des Integrals können nur dann einerlei Vorzeichen haben, wenn die quadratische Form

$$\Sigma a_{ik}\zeta_i\zeta_k,$$

wo die

$$\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n,$$

den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i}\zeta_i = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

genügen, in jedem Punkte des Integrationsintervalls definit und in allen von derselben Art definit ist«.

Der Beweis für diese Behauptung stützt sich auf den in XVI., 2., bewiesenen Satz:

Es bestehen unendlich viele conjugirte Systeme, deren jedes eine Determinante besitzt, welche an einer vorgegebenen Stelle des Integrationsintervalles nicht Null ist.

Die Bedingung I ohne Benützung der reducirten Form und dieses Satzes abzuleiten, ist mir trotz wiederholter Bemühungen nicht gelungen.[2]

Ist die Bedingung I erfüllt, so lassen sich aus der Formel (11) in XXIII. wichtige Folgerungen ziehen, wenn entweder keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind, oder, im Falle solche gegeben sind,[3] ausser dem trivialen kein Integralsystem z, r des accessorischen Gleichungssystems

---

[1] Auf S. 1393 [11], Zeile 10 von oben muss offenbar statt $(a_{ik})_0$ bloss a_{ik} stehen.

[2] Im Falle keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind, im Jacobi'schen und dem von Lipschitz behandelten Falle ergibt sich ein solcher Beweis sehr leicht.

[3] Dass keine endlichen unter ihnen vorkommen, folgt aus XXII, Voraussetzung 4.

$$\psi_i(z, r) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} z_i' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} z_i \right) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

besteht, dessen sämmtliche Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ in einem Intervalle von ab identisch Null sind, ohne dass zugleich die zugehörigen $r_1, r_2 \ldots r_m$ auch identisch verschwinden.

Aus

$$\psi_i(z, r) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k'} z_k' - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'} z_k' \right) \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} r_k \right) \right] = 0$$

folgt, dass, wenn die $z_1, z_2 \ldots z_n$ in einem Intervalle identisch verschwinden, ohne dass das Gleiche mit sämmtlichen $r_1, r_2 \ldots r_m$ statthat, diese in dem betreffenden Intervalle die n Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} r_k \right) \right] = 0 \qquad (\alpha)$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

befriedigen.

Und umgekehrt: Haben die Gleichungen (α) ein Lösungssystem: $r_1, r_2 \ldots r_m$, so genügen

$$z_1 = 0, z_2 = 0 \ldots z_n = 0; \; r_1, r_2 \ldots r_m$$

in dem Intervalle dem accessorischen Gleichungssysteme.

Ist $A_{i\mu}$ die Subdeterminante des Elementes

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_\mu'} = a_{i\mu}$$

in Δ (XXII., 3), so folgt aus (α)

$$G_\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \right] r_k A_{\mu i}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} r_k \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \right] A_{\mu i} = 0 \qquad (\beta)$$

$$(i = 1, 2 \ldots n).$$

da, wie man aus der Constitution von Δ ersieht,

$$\sum_{\mu=1}^{n} A_{\mu i} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_\mu} = 0$$

für jedes zulässige λ und i ist. Diese n Gleichungen sind aber nicht von einander unabhängig, denn aus demselben Grunde ist

$$\sum_{\mu=1}^{n} G_\mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_\mu} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m).$$

Da nun in jedem Punkte des Intervalls ab mindestens eine Determinante m^{ten} Grades der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y'_n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_1}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_n} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, so sind von den n Gleichungen in (α)

$$G_1 = 0, G_2 = 0 \ldots G_n = 0$$

in jedem Punkte stets m eine Folge der übrigen (n—m).

Zu diesen (n—m) Gleichungen, die also keine Derivirten von $r_1, r_2 \ldots r_m$ enthalten, lassen sich aus (α) noch m andere ableiten, die zusammen mit jenen den n Gleichungen (α) äquivalent sind.

Bezeichnet man nämlich, wie bei früheren Gelegenheiten, mit φ^i_ν die Subdeterminante des Elementes $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y'_i}$ in Δ, so erhält man aus (α)

$$\Delta r'_\nu = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i}\right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\right] \varphi^i_\nu r_\nu \qquad (\gamma)$$

$$\nu = 1, 2 \ldots m,$$

also, da Δ nie Null ist, das kanonische System von m linearen Differentialgleichungen der ersten Ordnung in $r_1, r_2 \ldots r_m$.

Man ersieht aus diesen Darlegungen:

»Das accessorische Gleichungssystem hat dann und nur dann ein Lösungssystem (z, r), dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ identisch verschwinden, ohne dass zugleich $r_1, r_2 \ldots r_m$ identisch Null sind, wenn die linearen Differentialgleichungen (γ) ein Integralsystem besitzen, das zugleich den n Gleichungen (β), die nur $(n-m)$ Gleichungen äquivalent sind, genügt.«

Es hätte, im Falle die $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m$ die nöthigen Differentiationen zulassen, keine Schwierigkeit, diese nothwendige und hinreichende Bedingung durch Relationen zwischen den Coëfficienten der Gleichungen darzustellen. Doch sind die Formeln so undurchsichtig, dass ihre Ableitung keinen Nutzen verspricht.

Es soll nun im Folgenden der Fall, der als der allgemeinere erscheint und Hauptfall genannt werden soll, behandelt werden, dass die Gleichungen (α) oder, was dasselbe ist, (β) und (γ) überall in *ab* nur die eine gemeinsame Lösung

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 0$$

besitzen.

Diese Voraussetzung trifft zu im Jacobi'schen Falle, wenn also das vorgelegte Integral die Form hat

$$\int_a^b f(x, y, y' \ldots y^{(n)})\, dx,$$

wo $y^{(k)} = \dfrac{d^k y}{dx^k}$ ist. Gibt man demselben die Gestalt

$$\int_a^b f\left(x, y, y_1 \ldots y_{n-1}; \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) dx,$$

so hängen die $y, y_1 \ldots y_{n-1}$ durch die $(n-1)$ Gleichungen

$$\varphi_1 = \frac{dy}{dx} - y_1 = 0;\ \varphi_2 = \frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0 \ldots \varphi_{n-1} = \frac{dy_{n-2}}{dx} - y_{n-1} = 0$$

zusammen. Das zugehörige System (α) besteht aus den $(n-1)$ Gleichungen

$$r_1' = 0;\ r_2' = r_1;\ r_3' = r_2 \ldots r_{n-1}' = r_{n-2};\ r_{n-1} = 0,$$

aus denen

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-1} = 0$$

hervorgeht.

Das Gleiche gilt für den von Lipschitz behandelten Fall, wo also bei Beschränkung auf etwa zwei abhängige Veränderliche das Integral die Form

$$\int_a^b f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)};\ z, z' \ldots z^{(m-1)})\, dx$$

besitzt. Dasselbe kann man ersetzen durch

$$\int_a^b f\left((x, y;\ y_1 \ldots y_{n-1};\ \frac{dy_{n-1}}{dx};\ z, z_1 \ldots z_{m-1}\ \frac{dz_{m-1}}{dx}\right) dx,$$

wenn man die $(n+m-2)$ Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1 \equiv \frac{dy}{dx} - y_1 = 0;\ \varphi_2 \equiv \frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0 \ldots \varphi_{n-1} \equiv \frac{dy_{n-2}}{dx} - y_{n-1} = 0$$

$$\psi_1 \equiv \frac{dz}{dx} - z_1 = 0;\ \psi_2 \equiv \frac{dz_1}{dx} - z_2 = 0 \ldots \psi_{m-1} \equiv \frac{dz_{m-2}}{dx} - z_{m-1} = 0$$

hinzufügt. Für das zugehörige System (α) findet man

$$r_1' = 0;\ r_2' = r_1,\ r_3' = r_2 \ldots r_{n-1}' = r_{n-2};\ r_{n-1} = 0$$

$$r_n' = 0;\ r_{n+1}' = r_n;\ r_{n+2}' = r_{n+1} \ldots r_{n+m-2}' = r_{n+m-3};\ r_{n+m-2} = 0,$$

woraus

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_{n+m-2} = 0$$

folgt.

Anders verhält es sich schon im Falle des einfachen isoperimetrischen Problems. Soll das Integral

$$\int_a^b f(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n')\, dx$$

zu einem Maximum oder Minimum werden, während die m Integrale

$$\int_a^b f_1(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n')\, dx, \ldots \int_a^b f_m(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n')\, dx$$

vorgegebene Werthe annehmen, so wird bekanntlich das Problem durch Einführung von m neuen Veränderlichen $y_{n+1}, y_{n+2} \ldots y_{n+m}$, die mit den $y_1, y_2 \ldots y_n$ durch die Gleichungen

$$y'_{n+1} = f_1(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n') \ldots y'_{n+m} = f_m(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n')$$

zusammenhängen, auf die bisher behandelte allgemeine Form gebracht.

Zwischen den $(n+m)$ Veränderlichen

$$y_1, y_2 \ldots y_n, y_{n+1} \ldots y_{n+m}$$

bestehen dann die m Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= y'_{n+1} - f_1(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n') = 0 \\
\varphi_2 &= y'_{n+2} - f_2(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n') = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_m &= y'_{n+m} - f_m(x, y_1, y_1' \ldots y_n, y_n') = 0
\end{aligned}$$

Die Determinante $(n+2m)^{\text{ten}}$ Grades Δ, von der stets vorausgesetzt wird, dass sie längs der ganzen Curve nirgends verschwindet, reducirt sich hier auf die Determinante $(n+m)^{\text{ten}}$ Grades

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_1'} ; & \frac{\partial f_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_1'} \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_n'} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_n'} ; & \frac{\partial f_1}{\partial y_n'} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n'} \\
\frac{\partial f_1}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n'} ; & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\frac{\partial f_m}{\partial y_1'} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n'} ; & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}.$$

In dem System der $n+m$ Gleichungen (α)

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}r_k-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i}r_k\right)\right]=0$$
$$i=1,2\ldots n+m$$

ergeben die letzten m Gleichungen ($i=n+1,\ldots n+m$)

$$r'_1=r'_2\ldots=r'_m=0,$$

woraus folgt, dass die $r_1, r_2\ldots r_m$ nach x constante Grössen sind. Die übrigen n Gleichungen kommen also auf

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial f_k}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f'_k}{\partial y'_i}\right)\right]r_k=0 \qquad (i=1,2\ldots n)$$

zurück. Aus ihnen lässt sich nun keineswegs schliessen, dass die Constanten $r_1, r_2\ldots r_m$ stets Null sein müssen, und es ist also beim isoperimetrischen Probleme immerhin der Ausnahmsfall möglich, dass das accessorische Gleichungssystem ein Integralsystem z, r besitze, in dem bloss die Glieder $z_1, z_2\ldots z_n$ identisch verschwinden.

XXV.

Im erwähnten Hauptfalle, der von nun ab allein berücksichtigt wird, ergeben sich unmittelbar aus Formel (9) in XXIII mehrere Folgerungen, die aber zweckmässiger aus Formel (10) auf Grund folgender, bereits in Mittheilung III (XVIII, 2, S. 1407 [25]) gemachten Bemerkung, abgeleitet werden:

Bilden die n Integralsysteme des accessorischen Gleichungssystemes

$$u^1, \rho^1;\; u^2, \rho^2\ldots u^n, \rho^n$$

ein conjugirtes System und ist das Integralsystem z, r nicht zu jedem dieser Integralsysteme conjugirt, so gibt es in der Gruppe dieses conjugirten Systems solche conjugirte Systeme

$$z^1, r^1;\; z^2, r^2\ldots z^n, r^n;$$

in denen $(n-1)$ und nicht mehr Integralsysteme zu z, r conjugirt sind.

Setzt man

$$\begin{aligned}
z^1 &= \alpha_1^1 u^1 + \alpha_2^1 u^2 + \ldots + \alpha_n^1 u^n; \quad r^1 = \alpha_1^1 \rho^1 + \ldots + \alpha_n^1 \rho^n \\
z^2 &= \alpha_1^2 u^1 + \alpha_2^2 u^2 + \ldots + \alpha_n^2 u^n; \quad r^2 = \alpha_1^2 \rho^1 + \ldots + \alpha_n^2 \rho^n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z^n &= \alpha_1^n u^1 + \alpha_2^n u^2 + \ldots + \alpha_n^n u^n; \quad r^n = \alpha_1^n \rho^1 + \ldots + \alpha_n^n \rho^n,
\end{aligned}$$

so lassen sich die n^2 Grössen α stets den Forderungen der Aufgabe gemäss bestimmen.

Soll etwa z, r zu z^n, r^n nicht conjugirt sein und ist z, r z. B. zu u^1, ρ^1 nicht conjugirt, so hat man die α gemäss den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\psi(z, r; z^1, r^1) &= \alpha_1^1 \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \ldots + \alpha_n^1 \psi(z, r; u^n, \rho^n) = 0 \\
\psi(z, r; z^2, r^2) &= \alpha_1^2 \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \ldots + \alpha_n^2 \psi(z, r; u^n, \rho^n) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi(z, r; z^{n-1}, r^{n-1}) &= \alpha_1^{n-1} \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \ldots + \alpha_n^{n-1} \psi(z, r; u^n, \rho^n) = 0 \\
\psi(z, r; z^n, r^n) &= \alpha_1^n \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \ldots + \alpha_n^n \psi(z, r; u^n, \rho^n) \neq 0
\end{aligned}$$

zu wählen. Aus den ersten $(n-1)$ Gleichungen ergeben sich die

$$\alpha_1^1, \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1},$$

während die übrigen α in den $(n-1)$ ersten Zeilen unbestimmt bleiben. Man kann sie also stets so wählen, dass ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_2^1 ; & \alpha_3^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_2^2 ; & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \alpha_2^{n-1} ; & \alpha_3^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} A_1^n$$

nicht verschwindet. Werden nun noch die

$$\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n$$

so genommen, dass die letzte Ungleichung erfüllt wird, so können nicht alle Null sein. Es ist dann aber auch die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1^1; & \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2; & \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2 \\ . & \ldots\ldots \\ . & \ldots\ldots \\ \alpha_1^n; & \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

nicht Null, denn aus ihr folgt

$$A\psi(z, r; u^1, \rho^1) = A_1^n \psi(z, r; z^n, r^n) \neq 0.$$

Man hat nunmehr zwei conjugirte Systeme

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^{n-1}, r^{n-1}; z^n, r^n$$

und

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^{n-1}, r^{n-1}; z, r,$$

die $(n-1)$ Integralsysteme gemeinsam haben. Auf diese kann man also die Formel (10) in XXIII anwenden, wodurch man

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)\Delta'(z^1 \ldots z^{n-1}, z) - \Delta'(z^1, z^2 \ldots z^n)\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z)$$
$$= \frac{1}{\psi(z^n, r^n; z, r)} \Sigma a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z) \tag{1}$$

erhält.

Man erkennt auch leicht, wann die obige quadratische Form

$$\Sigma a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z)$$

in einem Intervalle identisch Null ist. Da sie in *ab* definit ist, so tritt dies dann und nur dann ein, wenn die

$$\chi_\lambda(z) = \begin{vmatrix} z_\lambda' & ; z_1 \ldots z_n \\ (z_\lambda^1)'; & z_1^1 \ldots z_n^1 \\ . & \ldots\ldots \\ . & \ldots\ldots \\ (z_\lambda^n)'; & z_1^n \ldots z_n^n \end{vmatrix}$$

$$(\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

zugleich identisch in dem Intervalle verschwinden. Dies kann aber, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} z_1^1; z_2^1 \ldots z_n^1 \\ z_1^2; z_2^2 \ldots z_n^2 \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ z_1^n; z_2^n \ldots z_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1^1; u_2^1 \ldots u_n^1 \\ u_1^2; u_2^2 \ldots u_n^2 \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ u_1^n; u_2^n \ldots u_n^n \end{vmatrix} A$$

in der Strecke nicht Null wird, nur dann eintreten, wenn entweder die

$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

identisch Null sind oder das System (z, r) mit den Systemen

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^n, r^n$$

und daher mit

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

linear zusammenhängt.

Der erste Fall kann aber hier nicht stattfinden, da mit den

$$z_1, z_2 \ldots z_n$$

auch die

$$r_1, r_2 \ldots r_m$$

identisch verschwinden würden und somit die Integralsysteme des Fundamentalsystems, aus denen z, r linear sich zusammensetzt, nicht linear unabhängig von einander wären. Es gilt somit der Satz:

Die quadratische Form

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_\lambda}\chi_\lambda(z) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

kann in einer Strecke, wo die Determinante des conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

nicht Null wird, im Hauptfalle nicht verschwinden, wenn die Integralsysteme

$$z, r;\ u^1, \rho^1 \ldots u^n, \rho^n$$

linear unabhängig sind, wenn also das erste Integralsystem z, r nicht zu jedem nachfolgenden conjugirt ist.

Aus dieser Bemerkung fliessen nun die Folgerungen, die in Mittheilung III in XVIII. (S. 1410 [28], S. 1412 [30]) gezogen wurden und hier in theilweise präciserer Fassung kurz wiederholt werden mögen.

Verschwinden die $z_1, z_2 \ldots z_n$ von (z, r) ausser in x_0 noch in anderen Punkten alle zusammen und ist x_0' ein anderer im Integrationsintervalle gelegener derartiger Nullpunkt, so verschwindet $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^{n-1}, z)$ ausser in x_0 auch in x_0'. Ist die Determinante $\Sigma \pm u_1^1, u_2^2 \ldots u_n^n$ in x_0 nicht Null, so sind die Integralsysteme $z, r;\ u^1, \rho^1 \ldots u^n, \rho^n$ linear unabhängig. Ist sie auch in x_0' nicht Null, so verschwindet auch

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n) = A\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$$

weder in x_0, noch x_0'. Würde nun $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ auch nirgends innerhalb $x_0 x_0'$ verschwinden, so könnte man also obige Gleichung (1) durch $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2$ dividiren und für die ganze Strecke x_0, x_0' (einschliesslich der Grenzen) würde somit die Gleichung

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)} = \frac{-1}{\psi(z, r; z^n, r^n)} \cdot \frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2}$$

bestehen. Da in derselben auf der rechten und linken Seite endliche, stetige Functionen stünden, so ergäbe sich hieraus

$$\frac{-1}{\psi(z, r; z^n, r^n)} \int_{x_0}^{x_0'} \frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx = \left[\frac{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)} \right]_{x_0}^{x_0'}$$
$$= 0,$$

was widersinnig ist, nachdem die quadratische Form und daher der ganze Ausdruck in der ganzen Strecke nicht identisch

Null ist und daselbst überall dasselbe Zeichen hat. Man erhält also den Satz:

1. Verschwinden alle Glieder $z_1, z_2 \dots z_n$ eines Integralsystems z, r in zwei Punkten des Integrationsintervalles, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems, für die keiner der beiden Punkte eine Nullstelle ist, mindestens einmal innerhalb der von ihnen begrenzten Strecke.

Da also in diesem Falle die Determinante eines conjugirten Systems, die weder in x_0, noch x'_0 verschwindet, innerhalb $x_0 x'_0$ Null wird, so kann man diese Überlegungen in dem Satz zusammenfassen:

2. Verschwinden alle Glieder $z_1, z_2 \dots z_n$ eines Integralsystems z, r in zwei Punkten des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems, wenn nicht innerhalb der von den Punkten begrenzten Strecke, so doch mindestens an einer Grenze derselben.

Verschwinden alle Glieder $z_1, z_2 \dots z_n$ eines Integralsystems z, r in zwei Punkten x_0 und x'_0, so verschwindet, wenn mit $\Delta(x, x_0)$ die Determinante eines x_0 conjugirten Systems bezeichnet wird, auch $\Delta(x, x_0)$ in x'_0 und $\Delta(x, x'_0)$ in x_0, und umgekehrt: verschwindet $\Delta(x, x_0)$ in x'_0, so besteht ein Integralsystem z, r, dessen sämmtliche Glieder $z_1, z_2 \dots z_n$ ausser in x_0 auch in x'_0 verschwinden. Man kann daher obigem Satz auch folgende Fassung geben:

3. Verschwindet die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems ausser in diesem noch in einem zweiten Punkte des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems wenn nicht innerhalb, so doch mindestens an einer Grenze der von den Punkten bestimmten Strecke.

Wenn die Determinante $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \dots u_n^n$ des conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \dots u^n, \rho^n$$

in x_0 nicht verschwindet — und dass conjugirte Systeme, deren Determinante in x_0 nicht verschwindet, bestehen, wurde in

XVI., 2. (S. 1321 [55]) bewiesen — so existirt, da sie in x_0 stetig ist, eine Umgebung von x_0, in der sie nirgends verschwindet. Würde nun $\Delta(x, x_0)$ in jeder noch so kleinen Umgebung von x_0 einen Nullpunkt haben und nähme man diesen Punkt in der Umgebung von x_0, in der $\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$ nicht Null ist, so hätte man nach obigem Satze den Widerspruch, dass diese Determinante zwischen x_0 und dem angenommenen Punkte verschwinden müsste. Daraus folgt also:

4. Zu jedem Punkte des Integrationsintervalls gehört eine Umgebung (Nachbarschaft), innerhalb der die Determinante seines conjugirten Systems nur ihn zur Nullstelle hat. Sind die hier vorkommenden Functionen analytische, so kann also eine derartige Determinante nur isolirte Nullstellen besitzen.

Ist $x_0 < x_0'$ und nicht zugleich $x_0 = a$ und $x_0' = b$, so sei x_1 eine Stelle des Integrationsintervalls ausserhalb $x_0 x_0'$. Dann muss die Determinante des zu x_1 conjugirten Systems $\Delta(x, x_1)$ wenn nicht in einem Endpunkte so gewiss innerhalb $x_0 x_0'$ verschwinden. Die Anwendung dieser Bemerkung auf den Anfangspunkt a des Integrals führt somit zu folgender Einsicht:

5. Verschwindet die Determinante des Systems, das dem Anfangspunkte des Integrals conjugirt ist, innerhalb oder im Endpunkte des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems wenn nicht innerhalb, so doch mindestens an einer Grenze des Integrationsintervalls, und es gibt Variationen der Veränderlichen, für welche die zweite Variation des Integrals sich nicht in die reducirte Form überführen lässt.

Die Ausführungen in Mittheilung III, XIX. (S. 1412 [30]) bleiben unverändert aufrecht. Hingegen beruhen die in XX. (S. 1418 [36]) auf der Annahme, dass $\Delta(x, x_0)$ (S. 1419 [37]), das in x_0' wieder Null wird, auf keiner Seite von x_0' identisch Null sei. Da nun der Beweis für die Behauptung (Mittheilung III, XVIII., S. 1410 [28]), »dass die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems in keiner Strecke identisch verschwindet«, nur für den Fall erbracht ist, als die Functionen analytische sind, so muss die erwähnte Annahme über $\Delta(x, x_0)$ als Voraus-

setzung eingeführt werden. Die Darlegungen in XIX. lassen sich also in den Satz zusammenfassen:

6. Verschwindet die Determinante $\Delta(x, x_0)$ des einem Punkte conjugirten Systems nochmals innerhalb *ab*, aber auf keiner Seite dieses letzteren Nullpunktes identisch, so gibt es Variationen der Veränderlichen, denen entgegengesetzt bezeichnete zweite Variationen des Integrals entsprechen. Sind die im Problem gegebenen Functionen analytische und verschwindet die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems nochmals innerhalb des Integrationsintervalls, so gibt es Variationen der Veränderlichen, die entgegengesetzt bezeichnete zweite Variationen des Integrals zur Folge haben.

Es wird sich übrigens später (XXIX.) zeigen, dass die obige Einschränkung nur durch die Beweisführung bedingt ist und der Satz ohne sie besteht.

Die vorstehenden Sätze sind nur für den Hauptfall bewiesen, man erkennt aber aus dem gegebenen Beweise, dass man durch eine leichte Modification des Satzes 2) auf S. 1298 einen für alle Fälle giltigen Satz erhält:

Sind alle Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ eines Integralsystems $z.r$ in zwei Punkten des Integrationsintervalls Null, ohne insgesammt in der von den Punkten begrenzten Strecke identisch zu verschwinden, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugirten Systems, wenn nicht innerhalb, so wenigstens an einem Endpunkte dieser Strecke.

XXVI.

Die vorangehenden Erörterungen dieser Abhandlungen ergänzen zum Theile die Entwickelungen in den früheren Mittheilungen und zum Theile begrenzen sie dieselben genauer. In den folgenden Paragraphen sollen nun die gefundenen Kriterien für die Permanenz des Zeichens der zweiten Variation in anderer Weise, die sich auf eine Erweiterung des Begriffs der Variation gründet, abgeleitet werden.

In den bisherigen Untersuchungen wurden bloss solche Variationen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ der Veränderlichen berücksichtigt, welche (XXII, S. 1275) im ganzen Integrationsintervalle erste und zweite Derivirte besitzen, deren erste Derivirte also überall in ab stetig sind. Nunmehr soll diese Voraussetzung für eine endliche Anzahl Punkte von ab fallen gelassen werden, es sollen also Variationen benützt werden, deren erste Derivirten in einer endlichen Anzahl Punkte unstetig werden, während sie sonst überall die früheren Bedingungen erfüllen.

1. Beschränkt man sich zunächst auf einen solchen Punkt ξ innerhalb $\alpha\beta$, wo, wie früher (XXII), $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ ist, so sind also die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ in jedem der Intervalle $\alpha\xi$, $\xi\beta$ sammt ihren ersten Derivirten eindeutig und stetig, aber in ξ werden die ersten Derivirten unstetig, während die Variationen selbst darin stetig sind. Um diesen Umstand ersichtlich zu machen, sollen die Variationen längs $\alpha\xi$ mit $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$, die längs $\xi\beta$ anders, etwa mit $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_n$, bezeichnet werden. Es ist dann in ξ wohl

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1;\ \eta_2 = \bar{\eta}_2;\ \ldots \eta_n = \bar{\eta}_n,$$

aber nicht mehr zugleich

$$\eta_1' = \bar{\eta}_1';\ \eta_2' = \bar{\eta}_2';\ \ldots \eta_n' = \bar{\eta}_n'.$$

Die zugehörige erste Variation des Integrals verschwindet wieder und die zweite wird dann dargestellt durch

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\xi \Omega(\eta, \eta')\,dx + \int_\xi^\beta \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')\,dx.$$

Da nun die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ in $\alpha\xi$ und die $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_n$ in $\xi\beta$ die für die Transformation in XXII (5) erforderlichen Bedingungen erfüllen, so ist

$$\int_\alpha^\xi \Omega(\eta, \eta')\,dx = \frac{1}{2}\int_\alpha^\xi \sum_{k=1}^{n} \eta_k \left[\frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta_k} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta_k'}\right] dx$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\eta_k \frac{\partial\Omega(\eta, \eta')}{\partial\eta_k'}\right]_\alpha^\xi$$

oder wegen XXII, 7*

$$\int_a^\xi \Omega(\eta_i, \eta_i')\,dx = \int_a^\xi \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}\psi_k(\eta_i, r)\,dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}\, r_i\right]_a^\xi.$$

Analog erhält man

$$\int_\xi^\beta \Omega(\eta_i, \eta_i')\,dx = \int_\xi^\beta \sum_{k=1}^{n} \bar\eta_{ik}\psi_k(\bar\eta_i, \bar r)\,dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \bar\eta_{ik}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega(\bar\eta_i, \bar\eta_i')}{\partial\bar\eta_{ik}'} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}\, \bar r_i\right]_\xi^\beta,$$

wo die $r_1, r_2 \ldots r_m$ und die analogen $\bar r_1, \bar r_2 \ldots \bar r_m$ unbestimmte Functionen von x sind. Man findet so

$$\delta^2 J = \int_a^\xi \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}\psi_k(\eta_i, r)\,dx + \int_\xi^\beta \sum_{k=1}^{n} \bar\eta_{ik}\psi_k(\bar\eta_i, \bar r)\,dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}\, r_i\right]_a^\xi$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \bar\eta_{ik}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega(\bar\eta_i, \bar\eta_i')}{\partial\bar\eta_{ik}'} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}\, \bar r_i\right]_\xi^\beta. \qquad (1)$$

Nun ist

$$\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} = \sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'\,\partial\eta_{il}}\,\eta_{il} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta_{ik}'\,\partial\eta_{il}'}\,\eta_{il}'\right]$$

und daher wird

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{ik}'} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}\, r_i\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{il}'\,\partial\eta_{ik}'}\,\eta_{il}'\eta_{ik} + \frac{\partial^2\Omega(\eta_i, \eta_i')}{\partial\eta_{il}\,\partial\eta_{ik}'}\,\eta_{il}\eta_{ik}\right\} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}\, r_i\eta_{ik}\right]$$

Analog ist

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}'_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \bar{r}_i \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}'_i \partial \bar{\eta}'_k} \bar{\eta}'_i \bar{\eta}_k + \frac{\partial^2 \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}_i \partial \bar{\eta}'_k} \bar{\eta}_i \bar{\eta}_k \right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \bar{r}_i \bar{\eta}_k \right].$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (1) und beachtet, dass die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ in α und die $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_n$ in β Null sind, so ergibt sich

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\xi \sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta, r)\, dx + \int_\xi^\beta \sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k \psi_k(\bar{\eta}, \bar{r})\, dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i \partial \eta'_k} \eta'_i \eta_k + \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i \partial \eta'_k} \eta_i \eta_k \right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} r_i \eta_k \right.$$

$$\left. - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}'_i \partial \bar{\eta}'_k} \bar{\eta}'_i \eta_k + \frac{\partial^2 \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}_i \partial \bar{\eta}'_k} \bar{\eta}_i \bar{\eta}_k + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} \bar{r}_i \bar{\eta}_k \right] \right\}_\xi, \quad (2)$$

wo also im Ausdruck innerhalb der Klammer $x = \xi$ zu nehmen ist. Da aber in ξ

$$\eta_1 = \bar{\eta}_1;\ \eta_2 = \bar{\eta}_2;\ \ldots \eta_n = \bar{\eta}_n$$

ist, so kann man dem Ausdruck (2) die Form geben

$$\delta^2 J = \int_\alpha^\xi \sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta, r)\, dx + \int_\xi^\beta \sum_{k=1}^{n} \bar{\eta}_k \psi_k(\bar{\eta}, \bar{r})\, dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i \partial \eta'_k} (\bar{\eta}_k \eta'_i - \eta_k \bar{\eta}'_i) + \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_k \partial \eta_i} (\eta_i \bar{\eta}_k - \bar{\eta}_i \eta_k) \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} (r_i \bar{\eta}_k - \bar{r}_i \eta_k) \right]_\xi.$$

Nun ist aber nach der Bezeichnung in XXIII (2)

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Omega(\eta_i,\eta_i')}{\partial\eta_i'\partial\eta_k'}(\eta_k\eta_i'-\eta_k\bar{\eta}_i')+\frac{\partial^2\Omega(\eta_i,\eta_i')}{\partial\eta_k'\partial\eta_i}(\eta_i\bar{\eta}_k-\bar{\eta}_i\eta_k)\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k'}(r_i\bar{\eta}_k-r_i\eta_k)=\psi(\bar{\eta}_i,\bar{r};\eta_i,r)$$

und somit findet man schliesslich

$$\delta^2 J=\int_\alpha^\xi\sum_{k=1}^{n}\eta_k\psi_k(\eta_i,r)\,dx+\int_\xi^\beta\sum_{k=1}^{n}\bar{\eta}_k\psi_k(\bar{\eta}_i,\bar{r})\,dx$$

$$+\psi(\bar{\eta}_i,r;\eta_i,r)_\xi, \tag{3}$$

wo also der Werth von $\psi(\bar{\eta}_i,r;\eta_i,r)$ an der Stelle ξ zu nehmen ist. Sind daher speciell η_i,r und $\bar{\eta}_i,r$ zwei Integralsysteme des accessorischen Systems von Differentialgleichungen, so wird

$$\psi_k(\eta_i,r)=\psi_k(\bar{\eta}_i,r)=0$$
$$(k=1,2\ldots n)$$

und es reducirt sich dann die zweite Variation des Integrals auf

$$\delta^2 J=\psi(\bar{\eta}_i,r;\eta_i,r), \tag{4}$$

wird also gleich dem in ab constanten Werthe von $\psi(\bar{\eta}_i,\bar{r};\eta_i,r)$.

2. Man kann diese Betrachtungen weiter auf n Punkte $\xi_1,\xi_2\ldots\xi_n$ ausdehnen, die zwischen $\alpha=\xi_0$ und $\beta=\xi_{n+1}$ angenommen werden. Es seien zu dem Ende

$$\begin{array}{l}\eta_{i1},\ \eta_{i2}\ldots\eta_{in};\ r_1,\ r_2\ldots r_m\\ \eta_{i1}^1,\ \eta_{i2}^1\ldots\eta_{in}^1;\ r_1^1,\ r_2^1\ldots r_m^1\\ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\\ \eta_{i1}^n,\ \eta_{i2}^n\ldots\eta_{in}^n;\ r_1^n,\ r_2^n\ldots r_m^n\end{array}$$

$(n+1)$ Grössensysteme, die den m Bedingungsgleichungen genügen und bezüglich mit (η_i,r); (η_i^1,r^1);$\ldots(\eta_i^n,r^n)$ bezeichnet werden mögen. Diese Systeme sind der Reihe nach den Intervallen

$$\xi_0\xi_1,\ \xi_1\xi_2\ldots\xi_n\xi_{n+1}$$

zugeordnet: also η^k, r^k dem Intervalle $\xi_k \xi_{k+1}$. Dabei sind in jedem dieser Intervalle, z. B. $\xi_k \xi_{k+1}$ die zugehörigen Grössen $r_1^k, r_2^k \ldots r_m^k$ unbestimmt, während die $\eta_1^k, \eta_2^k \ldots \eta_n^k$ daselbst die den Variationen der Veränderlichen in XXII auferlegten Bedingungen erfüllen. Ist nun stets für $k \begin{cases} > 0 \\ < n+1 \end{cases}$ in ξ_k

$$\eta_1^{k-1} = \eta_1^k;\ \eta_2^{k-1} = \eta_2^k;\ \ldots \eta_n^{k-1} = \eta_n^k,$$

hingegen in $\xi_0 = \alpha$:

$$\eta_1 = \eta_2 = \ldots \eta_n = 0$$

und in $\xi_{n+1} = \beta$:

$$\eta_1^n = \eta_2^n = \ldots \eta_n^n = 0,$$

so wird längs der ganzen Strecke $\alpha\beta$ eine Variation vorgenommen, wenn man in jeder einzelnen Theilstrecke $\xi_k \xi_{k+1}$ den $y_1, y_2 \ldots y_n$ bezüglich die Variationen $\eta_1^k, \eta_2^k \ldots \eta_n^k$ ertheilt.

Die dieser Variation der $y_1, y_2 \ldots y_n$ entsprechende erste Variation des Integrals ist dann wieder Null und für die zweite erhält man

$$\delta^2 J = \int_\alpha^{\xi_1} \Omega(\eta, \eta')\,dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(\eta^1, (\eta^1)')\,dx + \ldots + \int_{\xi_n}^{\beta} \Omega(\eta^n, (\eta^n)')\,dx$$

$$= \int_\alpha^{\xi_1} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \psi_k(\eta, r)\,dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sum_{k=1}^{n} \eta_k^1 \psi_k(\eta^1, r^1)\,dx + \ldots +$$

$$+ \int_{\xi_n}^{\beta} \sum_{k=1}^{n} \eta_k^n \psi_k(\eta^n, r^n)\,dx$$

$$+ \psi(\eta^1, r^1; \eta, r) + \psi(\eta^2, r^2; \eta^1, r^1) + \ldots + \psi(\eta^n, r^n; \eta^{n-1}, r^{n-1}). \quad (5)$$

Sind daher die

$$\eta, r;\ \eta^1, r^1;\ \ldots \eta^n, r^n$$

$(n+1)$ Integralsysteme des Systems accessorischer Differentialgleichungen, so vereinfacht sich obiger Ausdruck in

$$\delta^2 J = \psi(\eta_i^1, r^1; \eta_i, r) + \psi(\eta_i^2, r^2; \eta_i^1, r^1) + \ldots + \psi(\eta_i^n, r^n; \eta_i^{n-1}, r^{n-1})$$

$$= -[\psi(\eta_i, r; \eta_i^1, r^1) + \psi(\eta_i^1, r^1; \eta_i^2, r^2) + \ldots + \psi(\eta_i^{n-1}, r^{n-1}; \eta_i^n, r^n)], \quad (6)$$

wo nunmehr jeder einzelne Summand der rechtsstehenden Summe im ganzen Integrationsintervalle constant ist.

XXVII.

Um nun die Formel (4) des vorigen Paragraphen zur Ableitung von Kriterien für die Permanenz des Vorzeichens der zweiten Variation verwenden zu können, ist es zuvörderst nothwendig, dem Werthe dieser Constanten eine brauchbare Form zu geben.

1. In XXV wurde gezeigt, dass aus den Integralsystemen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^n, \rho^n$$

eines conjugirten Systems durch lineare Verbindung derselben sich ein neues

$$z^1, r^1; z^2, r^2; \ldots z^n, r^n$$

herleiten lässt, von dem $(n-1)$ Integralsysteme mit einem gegebenen Integralsysteme z, r wieder ein conjugirtes System bilden, sobald z, r nicht zu jedem der n Integralsysteme

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^n, \rho^n$$

conjugirt oder, was dasselbe ist, von ihnen linear unabhängig ist. Sollen

$$z, r; z^1, r^1; \ldots z^{n-1}, r^{n-1}$$

ein conjugirtes System bilden, während z, r und z^n, r^n zu einander nicht conjugirt sind, so hat man die n^2 Grössen α in

$$z^k = \alpha_1^k u^1 + \alpha_2^k u^2 + \ldots + \alpha_n^k u^n, \quad r^k = \alpha_1^k \rho^1 + \alpha_2^k \rho^2 + \ldots + \alpha_n^k \rho^n$$

$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

aus den n Gleichungen

$$\psi(z, r; z^k, r^k) = \alpha_1^k \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \ldots + \alpha_n^k \psi(z, r; u^n, \rho^n) = 0$$
$$k = 1, 2 \ldots n-1,$$

$$\psi(z, r; z^n, r^n) = \alpha_1^n \psi(z, r; u^1, \rho^1) + \ldots + \alpha_n^n \psi(z, r; u^n, \rho^n) = C \neq 0$$

so zu bestimmen, dass zugleich die Determinante A der α, die unbestimmt bleibt, nicht Null ist. Hieraus ergibt sich

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1}) = \begin{vmatrix} z_1; & u_1^1 \ldots u_1^n \\ z_2; & u_2^1 \ldots u_2^n \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ z_n; & u_n^1 \ldots u_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1; & 0; & 0 & \ldots 0 \\ 0; & \alpha_1^1; & \alpha_2^1 & \ldots \alpha_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ 0; & \alpha_1^{n-1}; & \alpha_2^{n-1} & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_k (-1)^{n+k} \Delta(z, u^1 \ldots u^{k-1}, u^{k+1} \ldots u^n) A_k^n$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_k \Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n) A_k^n .$$

Anderseits ergibt sich aus dem letzten Gleichungssysteme

$$A\psi(z, r; u^k, \rho^k) = \psi(z, r; z^n, r^n) A_k^n = C A_k^n$$

und daher

$$\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1}) =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} A}{\psi(z, r; z^n, r^n)} \sum_k \Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n) \psi(z, r; u^k, \rho^k).$$

Somit ist

$$\frac{\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1})}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)} =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\psi(z, r; z^n, r^n)} \sum_k \frac{\Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \psi(z, r; u^k, \rho^k). \quad (1)$$

2. Verschwindet die Determinante $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ des obigen conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

an einer Stelle ξ nicht — und solche conjugirte Systeme kann man bekanntlich zur vorgegebenen Stelle ξ finden (Mittheilung II. XVII, 2.) — so kann man stets ein Integralsystem v, t des accessorischen Gleichungssystems bestimmen, das linear mit den Integralsystemen

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

zusammenhängt und dessen Glieder $v_1, v_2 \ldots v_n$ der Reihe nach in ξ die vorgegebenen Werthe $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ annehmen. Man hat zu dem Behufe nur die $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ in

$$v_k = \beta_1 u_k^1 + \beta_2 u_k^2 + \ldots + \beta_n u_k^n$$
$$t_k = \beta_1 r_k^1 + \beta_2 r_k^2 + \ldots + \beta_n r_k^n$$

so zu bestimmen, dass sie den n Gleichungen

$$\zeta_k = \beta_1 (u_k^1)_\xi + \beta_2 (u_k^2)_\xi + \ldots + \beta_n (u_k^n)_\xi$$
$$k = 1, 2 \ldots n,$$

wo $(u_k^i)_\xi$ den Werth von u_k^i in ξ bezeichnet, genügen.

Man erhält hieraus

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)_\xi \beta_k = \Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, \zeta, u^{k+1} \ldots u^n)_\xi$$

und daher

$$v_i = \sum_k \left[\frac{\Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, \zeta, u^{k+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)}\right]_\xi u_i^k,$$
$$i = 1, 2 \ldots n.$$

Nun ist

$$\psi(z, r; v, t) = \sum_{k=1}^{n} \psi(z, r; u^k, \rho^k)\beta_k$$

und somit

$$\psi(z, r; v, t) =$$
$$= \sum_k \left[\frac{\Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, v, u^{k+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)}\right]_\xi \psi(z, r; u^k, \rho^k). \qquad (2)$$

Haben nun auch die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ des Integralsystems z, r in ξ die Werthe

$$z_1 = v_1 = \zeta_1;\ z_2 = v_2 = \zeta_2 \ldots z_n = v_n = \zeta_n,$$

so wird in ξ der Ausdruck (1)

$$\left.\frac{\Delta(z, z^1 \ldots z^{n-1})}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)}\right\}_\xi =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\psi(z, r;\ z^n, r^n)} \sum_k \left[\frac{\Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, z, u^{k+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)}\right]_\xi \psi(z, r;\ u^k, \rho^k)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{\psi(z, r;\ z^n, r^n)} \sum_k \left[\frac{\Delta(u^1 \ldots u^{k-1}, v, u^{k+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)}\right]_\xi \psi(z, r;\ u^k, \rho^k)$$

und daher ist wegen (2)

$$\left.\frac{\Delta(z^1, \ldots z^{n-1}, z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)}\right\}_\xi = \frac{\psi(z, r;\ v, \tau)}{\psi(z, r;\ z^n, r^n)}. \tag{3}$$

Nach Formel (10) in XXIII ist aber

$$\frac{d}{dx}\frac{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)} = \frac{-1}{\psi(z, r;\ z^n, r^n)} \frac{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)^2}.$$

Verschwinden daher an einer Stelle x_0 des Integrationsintervalls die $z_1, z_2 \ldots z_n$ und ist im Intervalle $x_0\xi$ die Determinante

$$\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n) = \Delta(u^1 \ldots u^{n-1}, u^n)A$$

nirgends Null, so ist

$$\left.\frac{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)}\right]_\xi = \frac{-1}{\psi(z, r;\ z^n, r^n)} \int_{x_0}^{\xi} \frac{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)^2} dx$$

und daher wegen (3)

$$\psi(z, r;\ v, \tau) = -\int_{x_0}^{\xi} \frac{\sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(z)\chi_\mu(z)}{\Delta(z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)^2} dx$$

oder

$$\psi(v, \tau; z, r) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{\sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx. \qquad (4)$$

XXVIII.

Diese Formel wurde ohne Verwendung der Bedingung I (XXIV) erhalten und soll nun zunächst benützt werden, um diese Bedingung selbst abzuleiten. Doch gelingt dies nur, wenn man im Vorhinein voraussetzt, dass jedem Punkte in ab ein System conjugirt sei, dessen Determinante in der Umgebung (Nachbarschaft) des Punktes nicht mehr identisch verschwindet. Es gibt dann offenbar auch kein Integralsystem z, r, dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ alle zugleich identisch in irgend einer Strecke des Integrationsintervalls verschwinden, ohne dass auch insgesammt die $r_1, r_2 \ldots r_m$ daselbst identisch Null sind. Denn wäre dies der Fall, so würde die Determinante des irgendwelchem Punkte der Strecke conjugirten Systems in ihr identisch verschwinden.

Ist nun

$$v^1, \tau^1; v^2, \tau^2; \ldots v^n, \tau^n$$

ein dem Punkte x_0 des Integrationsintervalls conjugirtes System, so erkennt man leicht, dass man durch lineare Transformation dieser n Integralsysteme ein neues Integralsystem z, r bilden kann, in dem die $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_0 verschwinden, während ihre ersten Derivirten $z'_1, z'_2 \ldots z'_n$ in x_0 der Reihe nach vorgegebene Werthe

$$\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$$

annehmen, welche den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_i}\right)_0 \zeta_i^0 = 0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots m)$$

genügen, wo $\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_i}\right)_0$ den Werth von $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_i}$ in x_0 bedeutet.

Denn sind

$$v^{n+1}, \tau^{n+1};\ v^{n+2}, \tau^{n+2};\ \ldots v^{2n}, \tau^{2n}$$

n andere Integralsysteme, die zusammen mit

$$v^1, \tau^1;\ v^2, \tau^2;\ \ldots v^n, \tau^n$$

ein Fundamentalsystem bilden, so können nicht sämmtliche Determinanten, die aus

$$\Delta = \begin{vmatrix} (v^1_{m+1})'; & \ldots (v^1_n)'; & v^1_1; & \ldots v^1_n; & \tau^1_1 & \ldots \tau^1_m \\ (v^2_{m+1})'; & \ldots (v^2_n)'; & v^2_1; & \ldots v^2_n; & \tau^2_1 & \ldots \tau^2_m \\ . & \ldots . & . & \ldots . & . & \ldots . \\ . & \ldots . & . & \ldots . & . & \ldots . \\ (v^{2n}_{m+1})'; & \ldots (v^{2n}_n)'; & v^{2n}_1; & \ldots v^{2n}_n; & \tau^{2n}_1 & \ldots \tau^{2n}_m \end{vmatrix}$$

erhalten werden, indem man in ihren $(n-m)$ ersten Colonnen an Stelle der unteren Indices: $(m+1)$, $(m+2) \ldots n$ alle Combinationen ohne Wiederholung der n ersten natürlichen Zahlen zur $(n-m)^{\text{ten}}$ Classe treten lässt, in x_0 verschwinden (Mittheilung I, S. 1241 [51]).

Da die sämmtlichen Elemente

$$\begin{matrix} v^1_1; & v^1_2 & \ldots v^1_n \\ v^2_1; & v^2_2 & \ldots v^2_n \\ . & . & \ldots . \\ . & . & \ldots . \\ v^n_1; & v^n_2 & \ldots v^n_n \end{matrix}$$

in x_0 Null sind, so reducirt sich Δ in x_0 auf das Product

$$\Delta_0 = \pm \begin{vmatrix} (v^1_{m+1})'; & \ldots (v^1_n)'; & \tau^1_1 \ldots \tau^1_m \\ (v^2_{m-1})'; & \ldots (v^2_n)'; & \tau^2_1 \ldots \tau^2_m \\ . & \ldots . & \ldots . \\ . & \ldots . & \ldots . \\ (v^n_{m+1})'; & \ldots (v^n_n)'; & \tau^n_1 \ldots \tau^n_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v^{n+1}_1; & \ldots v^{n+1}_n \\ v^{n+2}_1; & \ldots v^{n+2}_n \\ . & \ldots . \\ . & \ldots . \\ v^{2n}_1; & \ldots v^{2n}_n \end{vmatrix},$$

woraus sich durch die erwähnten Combinationen alle übrigen Determinanten ergeben.

Nimmt man nun an, dass etwa die angeschriebene Determinante Δ_0 nicht Null sei, so können in der Matrix

$$\left|\begin{matrix} (v^1_{m+1})'; & (v^2_{m+1})' & \ldots & (v^n_{m+1})' \\ (v^1_{m+2})'; & (v^2_{m+2})' & \ldots & (v^n_{m+2})' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (v^1_n)'; & (v^2_n)' & \ldots & (v^n_n)' \end{matrix}\right| \qquad (1)$$

nicht alle Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades Null sein. Aus der Relation in Mittheilung I (VIII, S. 1240 [50]):

$$D = C.\Delta = D\frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_2 \ldots y'_m)}$$

folgt dann, dass überdies auch

$$\frac{\partial(\varphi_1 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_1 \ldots y'_m)} \neq 0$$

ist in x_0.

Auf Grund dieser Vorbemerkung kann an die Berechnung von z, r geschritten werden.

Da im gesuchten Systeme z, r die $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_0 Null sein sollen, so muss es die Form

$$z_k = \alpha_1 v^1_k + \alpha_2 v^2_k + \ldots + \alpha_n v^n_k, \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$
$$r_k = \alpha_1 t^1_k + \alpha_2 t^2_k + \ldots + \alpha_n t^n_k, \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

haben, wo die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gemäss den Bedingungen

$$(z'_k)_0 = \alpha_1 (v^1_k)'_0 + \alpha_2 (v^2_k)'_0 + \ldots + \alpha_n (v^n_k)'_0 = \zeta^0_k \qquad (2)$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

zu bestimmen sind. Diese Bestimmung ist stets möglich, denn wie vorhin erwähnt wurde, können nicht sämmtliche Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades der Matrix (1) in x_0 Null sein, und daher lässt sich stets ein Werthesystem für die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, in dem nicht alle Null sind, finden, das die letzten $(n-m)$ Gleichungen des Gleichungssystems (2) befriedigt, so dass also

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v^i_k)'_0 = \zeta^0_k \qquad (k = m+1, m+2 \ldots n) \qquad (3)$$

ist. Diese $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ genügen aber auch den übrigen m Gleichungen. Die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_k^i + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_k^i)' \right] = 0$$
$$\lambda = 1, 2 \ldots m$$

reduciren sich nämlich in x_0 auf

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k} \right)_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_k^i)'_0 = 0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots m).$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k} \right)_0 \zeta_k^0 = 0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots m)$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k} \right)_0 \left[\zeta_k^0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_k^i)'_0 \right] = 0$$
$$\lambda = 1, 2 \ldots m,$$

welches System wegen (3) auf

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k} \right)_0 \left[\zeta_k^0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_k^i)'_0 \right] = 0$$
$$\lambda = 1, 2 \ldots m$$

zusammenschrumpft. Da die Determinante dieses Gleichungssystems

$$\frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial (y'_1, y'_2 \ldots y'_m)},$$

wie früher festgestellt wurde, in x_0 nicht Null ist, so folgt hieraus, dass auch

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (v_k^i)'_0 = \zeta_k^0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

ist.

Gemäss Voraussetzung verschwindet $\Delta(x, x_0)$ in x_0 nicht identisch, also besteht innerhalb ab eine Stelle x_1, in der $\Delta(x_1, x_0)$ nicht Null ist. Somit ist auch $\Delta(x, x_1)$, die Determinante eines zu x_1 conjugirten Systems, in x_0 nicht Null, da

$$\Delta(x_0, x_1) = \pm\Delta(x_1, x_0).$$

Ist nun

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

ein zu x_1 conjugirtes System, so kann man nach XXVII, 1 aus diesen Integralsystemen und dem gefundenen Systeme z, r, dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_0 insgesammt verschwinden, da die Integralsysteme

$$z, r; u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

von einander linear unabhängig sein müssen, zwei conjugirte Systeme

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^n, r^n$$

und

$$z, r; z^1, r^1 \ldots z^{n-1}, r^{n-1}$$

linear ableiten.

Die Grössen

$$\chi_\lambda(z) = \begin{vmatrix} z'_\lambda & ; z_1 \ldots z_n \\ (z^1_\lambda)' ; & z^1_1 \ldots z^1_n \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ (z^n_\lambda)' ; & z^n_1 \ldots z^n_n \end{vmatrix} \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

besitzen in x_0 die Werthe

$$\chi_\lambda(z)_0 = (z'_\lambda)_0 \Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)_0 = (z'_\lambda)_0 \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)_0 A.$$

Da nun A unbestimmt blieb und ihm jeder von Null verschiedene Werth beigelegt werden darf, so kann man

$$A = \frac{1}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)_0}$$

wählen. Die obigen Gleichungen (2) ergeben dann

$$\chi_\lambda(z)_0 = (z'_\lambda)_0 = \zeta_\lambda^0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n).$$

Man kann also unter den gemachten Voraussetzungen stets ein Integralsystem z, r finden, dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_0 Null sind und für das die $\chi_1(z), \chi_2(z) \ldots \chi_n(z)$ in x_0 vorgegebene Werthe $\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$ annehmen, welche den m Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y'_k}\right)_0 \zeta_k^0 = 0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots m)$$

genügen.

Ist nun dieses Werthesystem $\zeta_1^0, \zeta_2^0 \ldots \zeta_n^0$ so beschaffen, dass

$$\sum_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu})_0 \zeta_\lambda^0 \zeta_\mu^0$$

nicht Null ist, so besteht auch eine Umgebung (Nachbarschaft) von x_0, in der die quadratische Form

$$\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)$$

überall das Zeichen von

$$\sum_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu})_0 \chi_\lambda(z)_0 \chi_\mu(z)_0 = \sum_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu})_0 \zeta_\lambda^0 \zeta_\mu^0$$

besitzt. Desgleichen besteht auch eine Umgebung (Nachbarschaft) von x_0, in der $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ nirgends verschwindet. Ist nun δ der Radius einer Umgebung (Nachbarschaft), in der beides statthat und ξ eine Stelle in derselben zwischen x_0 und x_1, so besteht

$$\int_{x_0}^{\xi} \frac{\Sigma a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx,$$

ist von Null verschieden und hat das Zeichen von

$$\Sigma (a_{\lambda\mu})_0 \zeta_\lambda^0 \zeta_\mu^0,$$

wenn $x_0 < \xi$ ist, und das entgegengesetzte, wenn $x_0 > \xi$.

Da nun $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$, die Determinante eines zu x_1 conjugirten Systems, in ξ nicht Null ist, so kann man ein Integralsystem $\bar{z}, \bar{r}$ des Systems accessorischer Differentialgleichungen bilden, dessen Glieder $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_n$ insgesammt in x_1 Null sind und in ξ der Reihe nach dieselben Werthe besitzen, wie $z_1, z_2 \ldots z_n$. Die beiden Integralsysteme z, r und $\bar{z}, \bar{r}$ kann man nun benützen (XXVI), um den $y_1, y_2 \ldots y_n$ längs der Strecke $x_0 x_1$ eine Variation zu ertheilen. Ist $x_0 < x_1$, so ist die zugehörige zweite Variation des Integrals $\delta^2 J$ nach XXVI, 4 gegeben durch

$$\delta^2 J = \psi(\bar{z}, \bar{r}; z, r)$$

und daher ist nach XXVII, 4

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{\xi} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx.$$

Ist aber $x_1 < x_0$, so ist

$$\delta^2 J = \psi(z, r; \bar{z}, \bar{r}) = -\psi(\bar{z}, \bar{r}; z, r),$$

und somit ist

$$\delta^2 J = -\int_{x_0}^{\xi} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx$$

$$= \int_{\xi}^{x_0} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx,$$

wo nun $\xi < x_0$ ist.

Es hat also $\delta^2 J$ stets das Zeichen von

$$\Sigma (a_{\lambda\mu})_0 \, \zeta_\lambda^0 \, \zeta_\mu^0.$$

Hieraus ergibt sich weiter, in derselben Weise wie in Mittheilung III, XVII (S. 1393 [11]), dass die quadratische Form

$$\sum_{i,k} a_{ik} \zeta_i \zeta_k$$

für alle Systeme stetiger Grössen

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n,$$

welche im ganzen Integrationsintervalle den m Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \zeta_i = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

genügen

1. in jedem einzelnen Punkte des Integrationsintervalls definit und
2. in allen Punkten von derselben Art definit sein muss.

Da somit die Bedingung I besteht, so folgt weiter, dass die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems nicht allein im Punkte nicht identisch verschwindet, sondern dass für sie auch der Satz XXV, 4 gilt.

Während also aus der als giltig angenommenen Bedingung I für den Hauptfall der Variationsrechnung (XXIV) der Satz folgt, dass die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems in ihm nicht identisch verschwinden kann, ergibt sich umgekehrt, wenn man diesen Satz als giltig voraussetzt, dass ein Maximum oder Minimum nur dann eintreten kann, wenn die Bedingung I erfüllt ist, und dass dann der Hauptfall der Variationsrechnung vorliegt.

XXIX.

Zu jeder Stelle x_0 des Integrationsintervalls besteht (XXV, 4) eine Umgebung (Nachbarschaft) von x_0, in der die Determinante eines jeden x_0 conjugirten Systems nur x_0 zur Nullstelle hat.

Ist

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

ein x_0 conjugirtes System, so werde nun angenommen, dass die Determinante

$$\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n) = \Delta(x, x_0)$$

dieses und somit jedes anderen x_0 conjugirten Systems nochmals innerhalb des Integrationsintervalls, und zwar zunächst in x_0' verschwinde, wo x_0' etwa zwischen x_0 und dem Endpunkte b liege. Es besteht dann bekanntlich ein Integralsystem z, r, dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ sämmtlich in x_0 und x_0' verschwinden. Die Determinante $\Delta(x, x_0')$ eines zu x_0' conjugirten Systems hat nach (XXV, 4) in einer Umgebung von x_0' keine Nullstelle als x_0'. Ist x_1 eine Stelle dieser Umgebung zwischen x_0' und b, so ist $\Delta(x, x_1)$ in x_0' nicht Null, da

$$\Delta(x_0', x_1) = \pm \Delta(x_1, x_0') \neq 0$$

ist.

Also besteht eine Umgebung von x_0', in der $\Delta(x, x_1)$ nirgends verschwindet, und in dieser Umgebung werde beliebig zwischen x_0 und x_0' eine Stelle ξ angenommen.

Bezeichnet also

$$z^1, r^1; z^2, r^2; \ldots z^n, r^n$$

ein der Stelle x_1 conjugirtes System, von dem

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^{n-1}, r^{n-1}$$

auch zu z, r conjugirt sind (XXVII, 1), so ist dann

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$$

in ξ und in der Strecke $\xi x_0'$ nicht Null. Man kann daher ein Integralsystem v, t:

$$v_k = \beta_1 z_k^1 + \beta_2 z_k^2 + \ldots + \beta_n z_k^n$$
$$t_k = \beta_1 r_k^1 + \beta_2 r_k^2 + \ldots + \beta_n r_k^n$$
$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

construiren, dessen Glieder $v_1, v_2 \ldots v_n$ insgesammt in x_1 verschwinden und in ξ vorgegebene Werthe annehmen. Wählt man hiefür die Werthe, welche $z_1, z_2 \ldots z_n$ in ξ annehmen, so dass also

$$(v_1)_\xi = (z_1)_\xi;\ (v_2)_\xi = (z_2)_\xi; \ldots (v_n)_\xi = (z_n)_\xi$$

wird, so ist nach XXVII, 4, da $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$ in $\xi x_0'$ nicht verschwindet:

$$\psi(z, r; v, \tau) = \int_{\xi}^{x_0'} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx,$$

wo das Integral nicht Null sein kann, da die Systeme

$$z, r; z^1, r^1; z^2, r^2; \ldots z^n, r^n$$

linear unabhängig von einander sind.

Gibt man nun den $y_1, y_2 \ldots y_n$ längs der Strecke $x_0 \xi$ bezüglich die Variationen

$$kz_1, kz_2, \ldots kz_n$$

und längs $\xi x_0'$ in derselben Weise die Variationen

$$kv_1, kv_2 \ldots kv_n,$$

so ist nach XXVI, 4 die zugehörige zweite Variation des Integrals durch

$$\delta^2 J = \psi(kv, k\tau, kz, kr)$$

$$= -k^2 \int_{\xi}^{x_0'} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dz \tag{1}$$

gegeben.

Nimmt man hingegen innerhalb $x_0 x_0'$ einen Punkt x_2, so kann $\Delta(x, x_2)$, die Determinante irgend eines x_2 conjugirten Systems, weder innerhalb $x_0 x_1$, noch in x_0 verschwinden, da sonst x_0' nicht der erste auf x_0 folgende Nullpunkt von $\Delta(x, x_0)$ sein könnte (XXV, 3). Es besteht also eine Umgebung (Nachbarschaft) von x_0, innerhalb der die Determinante eines jeden zu x_2 conjugirten Systems nicht verschwindet. Ist ξ eine Stelle dieser Umgebung zwischen x_0 und x_2, so lässt sich, da auch $\Delta(x, x_0)$ in ξ nicht Null ist, ein Integralsystem z, r bilden, dessen Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ in x_0 verschwinden und in ξ vorgegebene Werthe $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ annehmen.

Ist dann, ähnlich wie vorhin,

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^n, r^n$$

ein zu x_2 conjugirtes System, von dem die Integralsysteme

$$z^1, r^1; z^2, r^2 \ldots z^{n-1}, r^{n-1}$$

auch zu z, r conjugirt sind (XXVII, 1), so ist also nach obiger Bemerkung

$$\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$$

weder in ξ, noch in $x_0 \xi$ Null. Man kann daher durch lineare Verbindung der Integralsysteme des obigen, zu x_2 conjugirten Systems ein Integralsystem v, t herstellen, dessen Glieder $v_1, v_2 \ldots v_n$ in ξ ebenfalls die vorgegebenen Werthe $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ annehmen, so dass an der Stelle ξ

$$z_1 = v_1 = \zeta_1; \; z_2 = v_2 = \zeta_2; \ldots z_n = v_n = \zeta_n.$$

ist.

Da nun die Determinante $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$ im Intervalle $x_0 \xi$ nicht verschwindet, so ist also nach XXVII, 4

$$\psi(v, t; z, r) = \int_{x_0}^{\xi} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx.$$

Das rechtsstehende Integral kann nicht Null sein, da die die $(n+1)$ Systeme

$$z, r; z^1, r^1; z^2, r^2; \ldots z^n, r^n$$

mit einander nicht linear zusammenhängen können und somit die definite quadratische Form

$$\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)$$

nicht identisch Null ist.

Gibt man daher, wie früher, den $y_1, y_2 \ldots y_n$ längs des Intervalls $x_0 \xi$ bezüglich die Variationen $kz_1, kz_2 \ldots kz_n$, längs ξx_2 der Reihe nach die Variationen $kv_1, kv_2 \ldots kv_n$, so ist die zugehörige zweite Variation des Integrals

$$\delta^2 J = k^2 \psi(v, t; z, r)$$

$$= k^2 \int_{x_0}^{\xi} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(z) \chi_\mu(z)}{\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx. \qquad (2)$$

Es haben somit die auf diese Weise erhaltenen zweiten Variationen (1) und (2) des Integrals entgegengesetzte Vorzeichen.

Fällt x_0', der auf x_0 zunächst folgende Nullpunkt von $\Delta(x, x_0)$, mit dem Endpunkte b des Integrationsintervalls, aber nicht zugleich x_0 mit seinem Anfangspunkte a zusammen, sondern liegt x_0 zwischen a und b, so lassen sich dieselben Betrachtungen anstellen, und man erhält Variationen der $y_1, y_2 \ldots y_n$, denen verschieden bezeichnete zweite Variationen des Integrals entsprechen.

Somit besteht der Satz:

Verschwindet die Determinante eines conjugirten Systems, das einem Punkte des Integrationsintervalls angehört, nochmals im Integrationsintervalle und sind nicht etwa Anfangs- und Endpunkt des Integrationsintervalls die einzigen Nullpunkte dieser Determinante, so bestehen verschieden bezeichnete zweite Variationen des Integrals.

Wendet man diesen Satz auf den Anfangspunkt des Integrationsintervalls an, so erhält er die Form:

Verschwindet die Determinante des Systems, das dem Anfangspunkte des Integrals conjugirt ist, innerhalb des Integrationsintervalls, so gibt es Variationen der Veränderlichen, denen entgegengesetzt bezeichnete zweite Variationen des Integrals entsprechen.

Es mag ausdrücklich bemerkt werden, dass der eben entwickelte Beweis keineswegs, wie der in Mittheilung III, XX gegebene, voraussetzt, dass die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems in keiner noch so kleinen Strecke des Integrationsintervalls identisch verschwinde. Er ist unabhängig davon, ob $\Delta(x, x_0)$ in x_0', auf der Seite nach b, identisch verschwindet oder nicht. Es lässt sich aber aus ihm auch nicht erschliessen, ob, wenn die Bedingung I für die Permanenz des Zeichens der zweiten Variation erfüllt ist, die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems im Integrationsintervalle ausserhalb des Punktes identisch verschwinden kann oder nicht, sondern aus ihm folgt nach Obigem nur:

Verschwindet die Determinante des einem Punkte conjugirten Systems identisch in einer Strecke des Integrationsintervalls, so gibt es verschieden bezeichnete zweite Variationen des Integrals.

Es sei noch erwähnt, dass aus dem Beweise dieses Satzes, da er mit Hilfe der Variationen im weiteren Sinne (XXVI) geführt wurde, keineswegs hervorgeht, dass der Satz auch gilt, wenn man sich auf die ursprünglichen Variationen allein beschränkt, in welchem Falle dann allerdings nur partielle Maxima und Minima in Betracht kommen können. In diesem Falle besteht dann bloss Satz 5 in XXV.

XXX.

Mit Benützung dieser weiteren Variationen lässt sich auch ein neuer Beweis für den in XIX bereits bewiesenen Satz geben.

Es wird angenommen, dass die Determinante irgend eines und somit eines jeden dem Anfangspunkte a des Integrationsintervalls conjugirten Systems im Integrationsintervalle (mit Einschluss der oberen Grenze b) nicht mehr verschwinde. Es kann dann auch die Determinante des irgendwelchem Punkte conjugirten Systems im Integrationsintervalle (incl. Grenzen) nur in diesem Punkte Null sein (XXV, 3).

η_i^1, r^1 bezeichne das Integralsystem, dessen Glieder $\eta_{i1}^1, \eta_{i2}^1 \ldots \eta_{in}^1$ in x_0 Null sind und in ξ_1, wo $a \leqq x_0 < \xi_1$ ist, bezüglich die vorgegebenen Werthe $\zeta_1^1, \zeta_2^1 \ldots \zeta_n^1$ annehmen; $\eta_i^3 r^3$ sei das Integralsystem, dessen Glieder $\eta_{i1}^3, \eta_{i2}^3 \ldots \eta_{in}^3$ ebenfalls in x_0 verschwinden und in ξ_2, wo $x_0 < \xi_1 < \xi_2$ ist, der Reihe nach die vorgegebenen Werthe $\zeta_1^2, \zeta_2^2 \ldots \zeta_n^2$ besitzen. Zu diesen beiden Integralsystemen lässt sich ein drittes η_i^2, r^2 herstellen, von dem $\eta_{i1}^2, \eta_{i2}^2 \ldots \eta_{in}^2$ in ξ_1 bezüglich die Werthe $\zeta_1^1, \zeta_2^1 \ldots \zeta_n^1$ und in ξ_2 die Werthe $\zeta_1^2, \zeta_2^2 \ldots \zeta_n^2$ annehmen, denn die Determinante des linearen Gleichungssystems, das zur Bestimmung von η_i^2, r^2 dient, kann nicht Null sein, da die Determinante des ξ_1 conjugirten Systems in ξ_2 nicht verschwindet.

Bildet man nun

$$V = \int_{x_0}^{\xi_1} \Omega(\eta_i^1, (\eta_i^1)')\,dx +$$
$$+ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(\eta_i^2, (\eta_i^2)')\,dx - \int_{x_0}^{\xi_2} \Omega(\eta_i^3, (\eta_i^3)')\,dx, \qquad (1)$$

so erhält man nach XXVI

$$V = \psi(\eta_i^2, r^2; \eta_i^1, r^1) + \psi(\eta_i^3, r^3; \eta_i^2, r^2)$$
$$= -\psi(\eta_i^2, r^2; \eta_i^3 - \eta_i^1, r^3 - r^1).$$

Setzt man

$$\eta = \eta^1 - \eta^3, \quad r = r^1 - r^3,$$

so ist η, r ein Integralsystem, dessen Glieder $\eta_{i1}, \eta_{i2} \ldots \eta_{in}$ insgesammt in x_0 verschwinden, und die obige Formel geht in

$$V = -\psi(\eta_i^2, r^2; \eta_i, r) = \psi(\eta_i, r; \eta_i^2, r^2) \qquad (2)$$

über. Ihrer rechten Seite kann man nun leicht eine andere Gestalt geben.

Ist

$$u^1, \rho^1; u^2, \rho^2; \ldots u^n, \rho^n$$

ein x_0 conjugirtes System, so werden die Glieder von

$$\eta^1 = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_n u^n$$
$$r^1 = \alpha_1 \rho^1 + \alpha_2 \rho^2 + \ldots + \alpha_n \rho^n$$

erhalten, indem man den η, u, r, ρ die unteren Indices $1, 2 \ldots n$ anfügt und die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ aus den n Gleichungen

$$(\eta_k^1)_{\xi_1} = (\eta_k^2)_{\xi_1} = \alpha_1 (u_k^1)_{\xi_1} + \alpha (u_k^2)_{\xi_1} + \ldots + \alpha_n (u_k^n)_{\xi_1} = \zeta_k^2$$
$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

berechnet. Bezeichnet Δ_k die Determinante, die aus

$$\Delta = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$$

entsteht, wenn hierin statt

$$(u_\lambda^k) : (\eta_{i\lambda}^2)$$
$$\lambda = 1, 2 \ldots n$$

setzt, so ergibt das obige Gleichungssystem

$$\eta_i^1 = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)_{\xi_1} u^1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right)_{\xi_1} u^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)_{\xi_1} u^n.$$

Analog findet man

$$\eta_i^2 = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)_{\xi_2} u^1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta}\right)_{\xi_2} u^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)_{\xi_2} u^n.$$

und somit ist

$$\psi(\eta_i, r; \eta_i^2, r^2) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\Delta_k}{\Delta}\right)_{\xi_2} - \left(\frac{\Delta_k}{\Delta}\right)_{\xi_1}\right] \psi(u^k, \rho^k; \eta_i^2, r^2). \quad (3)$$

Hierin können nicht sämmtliche

$$\psi(u^k, \rho^k; \eta_i^2, r^2) \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

Null sein, da anderenfalls η_i^2, r^2 zu jedem der n Integralsysteme des conjugirten Systems

$$u^1, \rho^1;\; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$$

conjugirt wäre, also linear von ihnen abhängen und somit mit η_i^1, r^1 zusammenfallen müsste.

Es sei etwa

$$\psi(u^1, \rho^1; \eta_i^2, r^2) \neq 0.$$

Dann bestimme man $n(n-1)$ Grössen

$$\alpha_k^i \qquad \begin{matrix} i = 2 \ldots n \\ k = 1, 2 \ldots n \end{matrix},$$

die den $(n-1)$ Gleichungen

$$\alpha_1^i \psi(u^1, \rho^1; \eta_i^2, r^2) + \alpha_2^i \psi(u^2, \rho^2; \eta_i^2, r^2) + \ldots + \alpha_n^i \psi(u^n, \rho^n; \eta_i^2, r^2) = 0$$
$$i = 2 \ldots n-1$$

genügen und zugleich die Determinante

$$A = \Sigma \pm \alpha_2^2 \alpha_3^3 \ldots \alpha_n^n$$

nicht zu Null machen.

Da diese Bedingungen sich immer erfüllen lassen, so erhält man $(n-1)$ Integralsysteme

$$z^i = \alpha_1^i u^1 + \alpha_2^i u^2 + \ldots + \alpha_n^i u^n$$
$$t^i = \alpha_1^i \rho^1 + \alpha_2^i \rho^2 + \ldots + \alpha_n^i \rho^n$$
$$i = 2, 3 \ldots n,$$

deren jedes sowohl zu η^2, r^2, als auch u^1, ρ^1 conjugirt ist. Es bilden somit

$$\eta^2, r^2; z^2, t^2 \ldots z^n, t^n$$
$$u^1, \rho^1; z^2, t^2 \ldots z^n, t^n$$

je ein conjugirtes System, da in jedem die Integralsysteme linear unabhängig sind. Wendet man auf diese beiden conjugirten Systeme die Formel (10) in XXIII an, so erhält man

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\Delta(\eta^2, z^2 \ldots z^n)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)} = \frac{1}{\psi(u^1, \rho^1; \eta^2, r^2)}\,\frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(\eta^2)\chi_\mu(\eta^2)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} \tag{5}$$

für alle von x_0 verschiedenen Punkte des Integrationsintervalls, da

$$\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n) = \Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)A$$

ist und somit nur in x_0 verschwindet, weil $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ nicht in zwei Punkten des Integrationsintervalls Null sein kann.

Der Zähler des obigen Bruches

$$\Delta(\eta^2, z^2 \ldots z^n) = \begin{vmatrix} \eta_1^2; & \eta_2^2 \ldots \eta_n^2 \\ z_1^2; & z_2^2 \ldots z_n^2 \\ . & \ldots\ldots \\ . & \ldots\ldots \\ z_1^n; & z_2^n \ldots z_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \eta_1^2; & u_1^1 \ldots u_1^n \\ \eta_2^2; & u_2^1 \ldots u_2^n \\ . & \ldots\ldots \\ . & \ldots\ldots \\ \eta_n^2; & u_n^1 \ldots u_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & 0 \ldots 0 \\ 0, & \alpha_1^2 \ldots \alpha_n^2 \\ . & \ldots\ldots \\ . & \ldots\ldots \\ 0, & \alpha_1^n \ldots \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

ist

$$= \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda-2} \Delta(\eta_i^2, u^1 \ldots u^{\lambda-1}, u^{\lambda+1} \ldots u^n) A_\lambda,$$

wo A_λ die Determinante bezeichnet, die aus A entsteht, wenn hierin für die Elemente mit dem unteren Index λ die α mit dem unteren Index 1 gesetzt werden. Für diese A_λ ergibt sich aber aus dem Gleichungssysteme (4)

$$\frac{A_\lambda}{A} = -\frac{\psi(u^\lambda, \rho^\lambda; \eta_i^2, r^2)}{\psi(u^1, \rho^1; \eta_i^2, r^2)} \qquad \lambda = 2, 3 \ldots n,$$

und somit wird

$$\frac{\Delta(\eta_i^2, z^2 \ldots z^n)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)} = \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda-2} \frac{\Delta(\eta_i^2, u^1 \ldots u^{\lambda-1}, u^{\lambda+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \frac{A_\lambda}{A}$$

$$= \sum_{\lambda} (-1)^{\lambda-1} \frac{\Delta(\eta_i^2, u^1 \ldots u^{\lambda-1}, u^{\lambda+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \frac{\psi(u^\lambda, \rho^\lambda; \eta_i^2, r^2)}{\psi(u^1, \rho^1; \eta_i^2, r^2)}$$

$$= \sum_{\lambda} \frac{\Delta(u^1 \ldots u^{\lambda-1}, \eta_i^2, u^{\lambda+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \frac{\psi(u^\lambda, \rho^\lambda; \eta_i^2, r^2)}{\psi(u^1, \rho^1; \eta_i^2, r^2)}.$$

Substituirt man diesen Werth in (5), so findet man

$$\frac{d}{dx} \sum_{\lambda} \frac{\Delta(u^1 \ldots u^{\lambda-1}, \eta_i^2, u^{\lambda+1} \ldots u^n)}{\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)} \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; \eta_i^2, r^2)$$

$$= \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta_i^2) \chi_\mu(\eta_i^2)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2}. \tag{6}$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_2, in welcher Strecke $\Delta(u^1, u^2 \ldots u^n)$ und somit auch $\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)$ nirgends verschwindet, so ergibt sich

$$\sum_{\lambda} \left[\left(\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}\right)_{\xi_2} - \left(\frac{\Delta_\lambda}{\Delta}\right)_{\xi_1} \right] \psi(u^\lambda, \rho^\lambda; \eta_i^2, r^2) =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta_i^2) \chi_\mu(\eta_i^2)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx.$$

daher wegen (3)

$$\psi(\eta, r; \eta^2, r^2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta^2) \chi_\mu(\eta^2)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx$$

und also

$$V = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta^2) \chi_\mu(\eta^2)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} dx. \tag{7}$$

Die quadratische Form

$$\sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta^2) \chi_\mu(\eta^2)$$

kann innerhalb $\xi_1 \xi_2$ nicht identisch verschwinden, weil sonst die Integralsysteme

$$\eta^2, r^2; u^1, \rho^1 \ldots u^n, \rho^n$$

nicht linear unabhängig wären (XXV). Daher hat V das Zeichen dieser definiten quadratischen Form, und es ist also

$$\int_{x_0}^{\xi_1} \Omega(\eta^1, (\eta^1)') dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(\eta^2, (\eta^2)') dx = V + \int_{x_0}^{\xi_2} \Omega(\eta^3, (\eta^3)') dx \tag{8}$$

und

$$\gtrless \int_{x_0}^{\xi_2} \Omega(\eta^3, (\eta^3)') dx,$$

je nachdem die quadratische Form in der reducirten zweiten Variation des Integrals definit positiv oder negativ ist.

XXXI.

Diese Bemerkung lässt sich noch in folgender Weise verallgemeinern:

Man ertheile den Ordinaten $y_1, y_2 \ldots y_n$ längs $\xi_1 \xi_2$ bezüglich die Variationen $H_1, H_2 \ldots H_n$, welche den Bedingungsgleichungen genügen. Besitzen $H_1, H_2 \ldots H_n$ in ξ_1 bezüglich die Werthe $\zeta_1^1, \zeta_2^1 \ldots \zeta_n^1$ und in ξ_2 die Werthe $\zeta_1^2, \zeta_2^2 \ldots \zeta_n^2$, so lässt sich, wie früher bemerkt wurde, ein Integralsystem η, r

des Systems accessorischer Differentialgleichungen bestimmen, dessen Glieder $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ in ξ_1 und ξ_2 der Reihe nach dieselben Werthe annehmen, wie die $H_1, H_2 \ldots H_n$.

Setzt man nun

$$H_k - \eta_k = \zeta_k \qquad (k = 1, 2 \ldots n),$$

so wird

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(H, H')\,dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \Omega(\eta, \eta')\,dx =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\Omega(\eta + \zeta, \eta' + \zeta') - \Omega(\eta, \eta')]\,dx. \quad (1)$$

Nun ist

$$\Omega(\eta + \zeta, \eta' + \zeta') = \Omega(\eta, \eta') + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i} \zeta_i + \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} \zeta'_i \right)$$

$$+ \Omega(\zeta, \zeta').$$

Hierin ist wieder

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i} \zeta_i + \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} \zeta'_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} \right] \zeta_i$$

$$+ \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} \zeta_i \right)$$

und daher

$$\Omega(\eta + \zeta, \eta' + \zeta') = \Omega(\eta, \eta') + \Omega(\zeta, \zeta')$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} \right] \zeta_i + \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} \zeta_i \right). \quad (2)$$

Es ist aber (XXII, 7)

$$\frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} =$$

$$= 2\psi_i(\eta, r) - 2 \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) \right]$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_i'}\right]\zeta_i = 2\sum_{i=1}^{n}\psi_i(\eta,r)\zeta_i$$

$$+2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\zeta_i\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}r_k\right)-\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}r_k\zeta_i\right]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\zeta_i r_k\right)-r_k\bar{\varphi}_k(\zeta)\right],$$

da

$$\psi_i(\eta,r)=0 \qquad (i=1,2\ldots n)$$

und

$$\bar{\varphi}_k(\zeta)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\zeta_i'+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\zeta_i\right)$$

ist. Aus

$$\bar{\varphi}_k(\zeta)=\bar{\varphi}_k(H-\eta)=\bar{\varphi}_k(H)-\bar{\varphi}_k(\eta)$$

folgt

$$\bar{\varphi}_k(\zeta)=0 \qquad (k=1,2\ldots m),$$

da

$$\bar{\varphi}_k(H)=\bar{\varphi}_k(\eta)=0 \qquad (k=1,2\ldots m)$$

ist und es erübrigt

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_i'}\right]\zeta_i = 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}r_k\zeta_i\right).$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (2), so erhält man

$$\Omega(\eta+\zeta,\eta'+\zeta')=\Omega(\eta,\eta')+\Omega(\zeta,\zeta')$$

$$+\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Omega(\eta,\eta')}{\partial\eta_i'}+2\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}r_k\right]\zeta_i. \qquad (3)$$

Berücksichtigt man nun, dass $\zeta_1, \zeta_2\ldots\zeta_n$ sowohl in ξ_1, als auch ξ_2 insgesammt Null sind, so ergibt sich hieraus

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(H,H')dx-\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(\eta,\eta')dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\Omega(\zeta,\zeta')dx. \qquad (3^*)$$

Das Integral rechts bedeutet hierin die zweite Variation, die das gegebene Integral erfährt, wenn man die $y_1, y_2 \ldots y_n$ im Intervalle $a\xi_1$ und $\xi_2 b$ ungeändert lässt, hingegen in der Strecke $\xi_1\xi_2$ bezüglich um $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$ ändert.

Es sei noch bemerkt, dass für die Ableitung der Formel (3*) nur erforderlich ist, dass die Formel (3) für alle Stellen der Strecke $\xi_1\xi_2$ gelte, höchstens mit Ausnahme einer nicht ausgedehnten Punktmenge in derselben, dass also die $H_1', H_2' \ldots H_n'$, die als im eigentlichen Sinne integrabel vorausgesetzt wurden, und somit auch die $\zeta_1', \zeta_2' \ldots \zeta_n'$ nur in den Punkten einer solchen Menge unstetig oder unbestimmt sind.

Längs der Strecke $x_0 x_1$, wo $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$ ist, seien den Ordinaten $y_1, y_2 \ldots y_n$ bezüglich die Variationen $H_1, H_2 \ldots H_n$ ertheilt worden, die sämmtlich in x_0 und x_1 verschwinden. Ist ξ eine Stelle zwischen x_0 und x_1, so werde mit η^1, r^1 das Integralsystem des Systems accessorischer Differentialgleichungen bezeichnet, dessen Glieder $\eta_1^1, \eta_2^1 \ldots \eta_n^1$ in x_0 verschwinden und in ξ der Reihe nach dieselben Werthe besitzen, wie $H_1, H_2 \ldots H_n$. Ist $\xi+\Delta\xi$, wo $\Delta\xi > 0$ sei, eine zweite innerhalb $x_0 x_1$ gelegene Stelle, so bezeichnen η^3, r^3 das analoge Integralsystem, dessen Glieder $\eta_1^3, \eta_2^3 \ldots \eta_n^3$ in x_0 Null sind und in $\xi+\Delta\xi$ bezüglich dieselben Werthe haben, wie $H_1, H_2 \ldots H_n$.

Setzt man nun

$$\int_{x_0}^{\xi} \Omega(H, H')\,dx - \int_{x_0}^{\xi} \Omega(\eta^1, (\eta^1)')\,dx = D(\xi),$$

so ist

$$D(\xi+\Delta\xi) = \int_{x_0}^{\xi+\Delta\xi} \Omega(H, H')\,dx - \int_{x_0}^{\xi+\Delta\xi} \Omega(\eta^3, (\eta^3)')\,dx$$

und daher

$$D(\xi+\Delta\xi) - D(\xi) = \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} \Omega(H, H)'\,dx$$

$$+ \int_{x_0}^{\xi} \Omega(\eta^1, (\eta^1)')\,dx - \int_{x_0}^{\xi+\Delta\xi} \Omega(\eta^3, (\eta^3)')\,dx.$$

Wegen XXX. (8) folgt hieraus

$$D(\xi+\Delta\xi) - D(\xi) = V + \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} \Omega(H, H')\,dx - \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} \Omega(\eta^2, (\eta^2)')\,dx,$$

worin also η^2, r^2 das Integralsystem, dessen Glieder $\eta_1^2, \eta_2^2 \ldots \eta_n^2$ in ξ und $\xi+\Delta\xi$ der Reihe nach dieselben Werthe besitzen, wie $H_1, H_2 \ldots H_n$ und V die quadratische Form (6) in XXX bezeichnet.

Setzt man nun

$$H_k - \eta_k^2 = \zeta_k \qquad (k = 1, 2 \ldots n),$$

so ist nach (3*)

$$\int_\xi^{\xi+\Delta\xi} \Omega(H, H')\, dx - \int_\xi^{\xi+\Delta\xi} \Omega(\eta^2, (\eta^2)')\, dx = \int_\xi^{\xi+\Delta\xi} \Omega(\zeta, \zeta')\, dx$$

und daher geht (4) über in

$$D(\xi+\Delta\xi) - D(\xi) = V + \int_\xi^{\xi+\Delta\xi} \Omega(\zeta, \zeta')\, dx.$$

Hieraus folgt, indem man für V seinen Werth aus XXX, 7 substituirt,

$$D(\xi+\Delta\xi) - D(\xi) =$$

$$= \Delta\xi \left[\frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta^2) \chi_\mu(\eta^2)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} + \Omega(\zeta, \zeta') \right]_{x=\xi+\theta\Delta\xi},$$

wo $0 < \theta < 1$ ist, oder

$$\frac{D(\xi+\Delta\xi) - D(\xi)}{\Delta\xi} =$$

$$= \left[\frac{\sum\limits_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta^2) \chi_\mu(\eta^2)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} + \Omega(\zeta, \zeta') \right]_{x=\xi+\theta\Delta\xi}.$$

Lässt man hierin $\Delta\xi$ gegen Null abnehmen, so wird

$$\eta_k^2 = (H_k)_\xi;\ (\eta_k^2)' = (H_k')_\xi;\ \zeta_k = 0,\ \zeta_k' = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

und man erhält somit an jeder Stelle ξ, wo auch die $H_1', H_2' \ldots H_n'$ stetig sind,

$$\frac{dD(\xi)}{d\xi} = \left[\frac{\sum\limits_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta) \chi_\mu(\eta)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} \right]_{x=\xi}, \tag{4}$$

wenn mit η, r das Integralsystem der accessorischen Differentialgleichungen bezeichnet wird, welches in ξ die Bedingungen erfüllt

$$\eta_k = H_k \text{ und } \eta'_k = H'_k \qquad (k = 1, 2 \ldots n).$$

Dass man ein derartiges System immer bestimmen kann, zeigt eine einfache Betrachtung, ähnlich der in XXVIII.

Bilden die Integralsysteme

$$u^1, \rho^1;\; u^2, \rho^2;\; \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

ein Fundamentalsystem, so sei

$$\Delta = \begin{vmatrix} (u^1_{m+1})'; & \ldots (u^1_n)'; & u^1_1 & \ldots u^1_n; & \rho^1_1 & \ldots \rho^1_m \\ (u^2_{m+1})'; & \ldots (u^2_n)'; & u^2_1 & \ldots u^2_n; & \rho^2_1 & \ldots \rho^2_m \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ (u^{2n}_{m+1})'; & \ldots (u^{2n}_n)'; & u^{2n}_1 & \ldots u^{2n}_n; & \rho^{2n}_1 & \ldots \rho^{2n}_m \end{vmatrix}$$

eine in ξ nicht verschwindende Determinante (Mittheilung I. S. 1241 [51]).

Dann ist auch

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_1, y'_2 \ldots y'_m)}$$

in ξ nicht Null (XXVIII, S. 1312) und mindestens eine der Determinanten $(2n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus den Elementen der $(2n-m)$ ersten Colonnen von Δ gebildet werden können, muss von Null verschieden sein. Es sei dies die aus ihren $(2n-m)$ ersten Colonnen und Zeilen bestehende Determinante Δ'.

Setzt man nun

$$\eta = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_{2n} u^{2n}$$
$$r = \alpha_1 \rho^1 + \alpha_2 \rho^2 + \ldots + \alpha_{2n} \rho^{2n},$$

so sind die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ gemäss den Gleichungen

$$H_k = \alpha_1 (u^1_k) + \alpha_2 (u^2_k) + \ldots + \alpha_{2n} (u^{2n}_k)$$
$$H'_k = \alpha_1 (u^1_k)' + \alpha_2 (u^2_k)' + \ldots + \alpha_{2n} (u^{2n}_k)'$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

zu bestimmen, worin die Klammern anzeigen sollen, dass $x = \xi$ zu nehmen ist.

Da Δ' nicht Null ist, so lassen sich immer für die

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$$

Systeme bestimmen, welche den $2n-m$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_1(u_k^1) + \alpha_2(u_k^2) + \ldots + \alpha_{2n}(u_k^{2n}) = H_k \\ (k = 1, 2 \ldots n) \\ \alpha_1(u_k^1)' + \alpha_2(u_k^2)' + \ldots + \alpha_{2n}(u_k^{2n})' = H_k' \\ (k = m+1 \ldots n) \end{array}\right\} \quad (5)$$

genügen. Nun ist aber in ξ sowohl

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} H_i' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} H_i\right] = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots m),$$

als auch

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda (u_i^\lambda)' + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda (u_i^\lambda)\right] = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots m),$$

daher ist auch

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\left(H_i' - \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda (u_i^\lambda)'\right) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\left(H_i - \sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda (u_i^\lambda)\right)\right] = 0$$
$$k = 1, 2 \ldots m,$$

welches Gleichungssystem wegen (5) auf

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\left(\sum_{\lambda=1}^{2n} \alpha_\lambda (u_i^\lambda)' - H_i'\right) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

zusammenschrumpft. Da aber in ξ

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y_1', y_2' \ldots y_m')} \neq 0,$$

so folgt hieraus, dass auch

$$\alpha_1 (u_k^1)' + \alpha_2 (u_k^2)' + \ldots + \alpha_{2n} (u_k^{2n})' = H_k' \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

ist und dass somit die gefundenen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ ein Integralsystem η, r von der geforderten Eigenschaft liefern. Vermöge des gefundenen Integralsystems η, r lassen sich dann nach XXX die Integralsysteme

$$z^2, r^2;\ z^3, r^3;\ \ldots z^n, r^n$$

bestimmen.

Es bestehen zwar unendlich viele solcher Integralsysteme η, r und dementsprechend unendlich viele Integralsysteme

$$z^2, r^2;\ z^3, r^3 \ldots z^n, r^n,$$

die den Bedingungen der Aufgabe genügen, aber wie die Gleichung (6) in XXX zeigt, hat für alle diese Integralsysteme der Quotient in (4) denselben Werth, den man aus XXX, 6 erhält, indem man in der linken Seite der Gleichung $x = \xi$ und

$$\eta_k^1 = (H_k)_\xi;\ (\eta_k^1)' = (H_k')_\xi$$

setzt.

Es lässt sich sonach zu jedem Punkte ξ des Intervalls $x_0 + 0$ bis x_1 die Gleichung (4) herstellen. Analoge Betrachtungen gelten für $\Delta\xi < 0$.

Wenn daher die zwischen x_1 und x_0 liegenden Unstetigkeitsstellen von

$$H_1', H_2' \ldots H_n'$$

— die $H_1, H_2 \ldots H_n$ sind daselbst nach Voraussetzung stetig — eine nicht ausgedehnte Menge bilden, so folgt aus dieser Gleichung für jedes ε, wofür $0 < \varepsilon < x_1 - x_0$,

$$D(x_1) - D(x_0 + \varepsilon) = \int_{x_0+\varepsilon}^{x_1} \frac{\sum\limits_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \chi_\lambda(\eta) \chi_\mu(\eta)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} d\xi.$$

Die quadratische Form unter dem Integralzeichen ist definit und könnte nur dann im ganzen Intervalle $x_0 + \varepsilon$ bis $x_1 - 0$ verschwinden, wenn daselbst überall

$$\chi_\lambda(\eta) = 0 \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n$$

wäre. Dies ist aber unmöglich, da anderenfalls im ganzen Intervalle von $x_0+\varepsilon$ bis x_1 die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$, die bezüglich gleich $H_1, H_2 \ldots H_n$ sind, von den Gliedern des x_0 conjugirten Systems: $u^1, z^2 \ldots z^n$ linear abhiengen und es somit eine lineare Verbindung der letzteren gäbe, die mit den $H_1, H_2 \ldots H_n$ in x_1 verschwände, d. h. es würde $\Delta(x, x_0)$ auch in x_1 Null sein.

Da nun die quadratische Form unter dem Integralzeichen in Punkten des Intervalls x_0+0 bis x_1-0 stetig und nicht Null ist, so ist auch das obige Integral von Null verschieden und hat das Zeichen der definiten quadratischen Form.

Nimmt man nun eine Grösse $\delta < \varepsilon$, so ist

$$\int_{x_0+\delta}^{x_1} \sum_{\lambda\mu} \frac{a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(\eta)\chi_\mu(\eta)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} d\xi \lesseqgtr \int_{x_0+\varepsilon}^{x_1} \frac{\sum\limits_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(\eta)\chi_\mu(\eta)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} d\xi,$$

und zwar gelten die beiden oberen oder unteren Zeichen, je nachdem die quadratische Form definit negativ oder positiv ist.

Bezeichnet man den Werth des Integrals

$$\int_{x_0+\varepsilon}^{x_1} \frac{\sum\limits_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(\eta)\chi_\mu(\eta)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} d\xi$$

für ein bestimmtes ε mit G, so ist diese Grösse nicht Null und hat das Zeichen der definiten quadratischen Form. Es ist also dann

$$D(x_1)-D(x_0+\delta) = \int_{x_0+\delta}^{x_1} \frac{\Sigma a_{\lambda\mu}\chi_\lambda(\eta)\chi_\mu(\eta)}{\Delta(u^1, z^2 \ldots z^n)^2} d\xi \lesseqgtr G.$$

Geht man in

$$D(x_1)-D(x_0+\delta) \lesseqgtr G$$

zur Grenze für $\delta = 0$ über und beachtet, dass

$$\lim_{\delta=0} D(x_0+\delta) = 0$$

ist, so erhält man

$$D(x_1) \lesseqgtr G \lessgtr 0,$$

je nachdem die definite quadratische Form negativ oder positiv ist.

Aus der Bedeutung von $D(x_1)$ folgt dann, da die zugehörigen $\eta_1^1, \eta_2^1 \ldots \eta_n^1$ Null sind,

$$\int_{x_0}^{x_1} \Omega(H, H') dx \lesseqgtr 0$$

in Übereinstimmung mit der definiten quadratischen Form.

Man hat somit den Satz:

Verschwindet die Determinante $\Delta(x, x_0)$ des einem Punkte x_0 conjugirten Systems weder innerhalb $x_0 x_1$, noch in x_1, wo $a \leqq x_0 < x_1 \leqq b$ ist, und ertheilt man den $y_1, y_2 \ldots y_n$ längs der Strecken ax_0 und $x_1 b$ die Variationen Null, längs $x_0 x_1$ aber stetige, von Null verschiedene Variationen, die überall in $x_0 x_1$, höchstens mit Ausnahme einer nicht ausgedehnten Punktmenge, erste Derivirte besitzen, die eine endliche obere und untere Grenze haben und wieder höchstens mit Ausnahme einer solchen Punktmenge überall in $x_0 x_1$ stetig sind, so entsprechen allen derartigen Variationen der Veränderlichen zweite Variationen des Integrals, die von Null verschieden sind und dasselbe Zeichen haben wie die definite quadratische Form.

Der Vollständigkeit halber soll noch der Beweis für die Behauptung

$$\lim_{\delta = 0} \mathrm{D}(x_0 + \delta) = 0$$

nachgetragen werden.

Da

$$\lim_{\delta = 0} \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \Omega(H, H') dx$$

zweifellos Null ist, so handelt es sich nur mehr um die Grenze des zweiten Integrals

$$\int_{x_0}^{x_0 + \delta} \Omega(\eta, \eta') dx,$$

wo also das Integralsystem η, r des accessorischen Gleichungssystems dadurch bestimmt ist, dass die Glieder $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ desselben in x_0 insgesammt verschwinden und in $x_0 + \delta$ der Reihe nach die Werthe von $H_1, H_2 \ldots H_n$ annehmen. Bezeichnet man mit $\bar{\eta}, \bar{r}$ das Integralsystem, dessen Glieder $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_n$ in x_1 verschwinden und in $x_0 + \delta$ ebenfalls beziehungsweise die Werthe von $H_1, H_2 \ldots H_n$ besitzen, so ist nach XXVI, 4

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \Omega(\eta, \eta')\,dx + \int_{x_0+\delta}^{x_1} \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')\,dx = \psi(\bar{\eta}, \bar{r}; \eta, r).$$

Den Werth der Constanten $\psi(\bar{\eta}, \bar{r}; \eta, r)$ erhält man, indem man in ihrem Ausdrucke (XXIII, 2) der Variablen x einen beliebigen Werth des Intervalls ab, also etwa x_0, ertheilt. $\psi(\bar{\eta}, \bar{r}; \eta, r)$ stellt sich dann als eine lineare Function der Werthe dar, welche $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_n$ in x_0 besitzen. Lässt man nun δ gegen Null convergiren, so nähern sich $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2 \ldots \bar{\eta}_n$ der Grenze Null, da die Zähler dieser Grössen zu Null werden, während der gemeinsame Nenner $\Delta(x, x_1)$ zu der von Null verschiedenen Grenze $\Delta(x_0, x_1)$ convergirt. Es ist daher

$$\lim_{\delta=0} \int_{x_0+\delta}^{x_1} \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')\,dx = \lim_{\delta=0} \psi(\bar{\eta}, \bar{r}; \eta, r) = 0$$

und somit ist auch

$$\lim_{\delta=0} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \Omega(\eta, \eta')\,dx = 0.$$

Zu derselben Erkenntniss würde man gelangen, wenn man $\psi(\bar{\eta}, \bar{r}; \eta, r)$ nach XXVII, 4 ausdrückte und dabei für z, r das System $\bar{\eta}, \bar{r}$, für $u^1, \rho^1; u^2, \rho^2 \ldots u^n, \rho^n$ ein conjugirtes System wählte, das im Intervalle $x_0 x_1$ (mit Einschluss der Grenzen) nirgends verschwindet (XIX).

Anmerkung I. Der Beweis für diesen Satz stützt sich auf die fundamentale Formel (10) in XXIII, aber bedarf nicht der Transformation der zweiten Variation in die reducirte Form.[1] Wollte man auch letztere verwenden, so kann man den Satz,

[1] Den Gedankengang für diesen Beweis habe ich schon früher an dem Jacobi'schen Falle (diese Sitzungsber., 1889, Bd. 98) auseinandergesetzt, doch enthält dort die Durchführung eine Lücke.

aber mit Beschränkung auf Variationen, die in $x_0 x_1$ den Bedingungen in XXII genügen,[1] in folgender Weise beweisen.

Ist ξ eine Stelle zwischen x_0 und x_1, so wende man auf die Integrale

$$\int_{x_0}^{\xi} \Omega(H, H')\,dx \quad \text{und} \quad \int_{\xi}^{x_1} \Omega(H, H')\,dx$$

die Formel (3*) an. Das Integral

$$\int_{x_0}^{\xi} \Omega(\zeta, \zeta')\,dx$$

kann man dann mittelst des x_1 und das Integral

$$\int_{\xi}^{x_1} \Omega(\zeta, \zeta')\,dx$$

vermöge des x_0 conjugirten Systems in die reducirte Form überführen. Für die Summe der beiden anderen Integrale erhält man aus XXVI, 4 und XXVII, 4 den Werth.

Anmerkung II. Aus dieser Bemerkung geht auch hervor, dass der obige Satz bei Beschränkung auf Variationen, die in $x_0 x_1$ den Bedingungen in XXII genügen,[1] allgemein — nicht allein für den Hauptfall — gilt. Denn verschwindet $\Delta(x, x_0)$ weder innerhalb $x_0 x_1$, noch in x_1, so ist auch $\Delta(x, x_1)$ in x_0 nicht Null, da $\Delta(x_0, x_1) = \pm \Delta(x_1, x_0)$. Also verschwindet $\Delta(x, x_1)$ auch in einer Umgebung (Nachbarschaft) von x_0 nicht. Nimmt man in derselben zwischen $x_0 x_1$ die Stelle ξ an, so kann man also auf die Integrale

$$\int_{x_0}^{\xi} \Omega(H, H')\,dx \quad \text{und} \quad \int_{\xi}^{x_1} \Omega(H, H')\,dx$$

die Überlegungen in Anmerkung I wiederholen.

XXXII.

Im Rückblick auf die bisherigen Entwickelungen stellt sich als die kürzeste und einfachste Ableitung der Sätze über die zweite Variation der einfachen Integrale folgende dar:

[1] Die Behauptung bleibt auch richtig, wenn diese Bedingungen in einer endlichen Anzahl Punkte nicht erfüllt sind.

Voranzugehen haben die Untersuchungen, welche die Kennzeichen für ein Fundamentalsystem des accessorischen Gleichungssystems feststellen und den Beweis liefern, dass mit der Integration der aus der ersten Variation stammenden Differentialgleichungen auch die des accessorischen Gleichungssystems geleistet ist (Mittheilung I, IX, S. 1237 [47] bis 1242 [52]). Von den anschliessenden Untersuchungen, die einen tieferen und klareren Einblick in die Natur dieses an sich merkwürdigen Systems von Differentialgleichungen und insbesondere ihrer conjugirten Integralsysteme gewähren (Mittheilung II, XIV, S. 1294 [28] bis XVI, S. 1326 [60]) ist für die directe Ableitung der Kriterien eigentlich nur der Satz unerlässlich, dass zu jedem Punkte des Integrationsintervalls conjugirte Systeme bestehen, deren Determinante im Punkte nicht verschwindet.

[Einfacher als der in Mittheilung II, S. 1323 [58] für diese Behauptung gegebene Beweis und auf weniger Voraussetzungen beruhend ist der folgende.

Es sei

$$u^1, \rho^1;\ u^2, \rho^2; \ldots u^n, \rho^n$$

ein dem Punkte x_0 conjugirtes System und

$$u^1, \rho^1; \ldots u^n, \rho^n;\ u^{n+1}, \rho^{n+1}; \ldots u^{2n}, \rho^{2n} \tag{1}$$

ein Fundamentalsystem. Man kann nun stets in (1) das Integralsystem $u^{n+\lambda}, \rho^{n+\lambda}$ durch ein neues v^λ, r^λ ersetzen, das mit allen übrigen Integralsystemen wieder ein Fundamentalsystem bildet und zu jedem der Integralsysteme

$$u^{n+1}, \rho^{n+1}; \ldots u^{n+\lambda-1}, \rho^{n+\lambda-1};\ u^{n+\lambda+1}, \rho^{n+\lambda+1}; \ldots u^{2n}, \rho^{2n}$$

conjugirt ist. Man hat zu dem Behufe bloss die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}$ in

$$v^\lambda = \alpha_1 u^1 + \ldots + \alpha_n u^n + \alpha_{n+1} u^{n+\lambda}$$
$$r^\lambda = \alpha_1 \rho^1 + \ldots + \alpha_n \rho^n + \alpha_{n+1} \rho^{n+\lambda}$$

so zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$\psi(u^{n+1}, \rho^{n+1}; v, r) = 0 \ldots \psi(u^{2n}, \rho^{2n}; v, r) = 0$$

erfüllt sind. Dies ist stets möglich und, wie die Determinante Ψ (Mittheilung II, XIV, S. 1300 [34]) des Systems (1) lehrt, kann α_{n+1} nicht Null sein. Das neue System der $2n$ Integralsysteme

$$u^1, \rho^1 \ldots u^{n+\lambda-1}, \rho^{n+\lambda-1}; v, r; u^{n+\lambda+1} \rho^{n+\lambda+1} \ldots u^{2n} \rho^{2n}$$

ist wieder ein Fundamentalsystem, da die zugehörige Determinante Ψ nicht verschwindet.

Indem man λ die Werthreihe $1, 2 \ldots n-1$ durchlaufen lässt, wird das Fundamentalsystem (1) in ein neues

$$u^1, \rho^1; \ldots u^n, \rho^n; v^1, r^1; \ldots v^n r^n \tag{2}$$

übergeführt, in dem auch die Integralsysteme

$$v^1, r^1; v^2, r^2 \ldots v^n, r^n$$

ein conjugirtes System bilden. Die Determinante $\Delta(v^1, v^2 \ldots v^n)$ dieses conjugirten Systems kann in x_0 nicht Null sein, da anderenfalls jede der Determinanten Δ in Mittheilung I, IX, S. 1241 [51] Null wäre. (Kann auch daraus gefolgert werden, dass die Determinante Ψ von (2) nicht Null ist.)]

Hieran ist zu reihen die Ableitung der fundamentalen Formel XXII, 10 und die Transformation der zweiten Variation in die reducirte Form, in der in XXII auseinandergesetzten Weise. Vermöge der reducirten Form vermag man nunmehr, wie in Mittheilung III, XVII, S. 1384 [2] bis 1394 [12] gezeigt wurde, die Bedingung I herzuleiten. Sie gilt, wie alle vorangegangenen Entwickelungen, noch für alle Fälle der Variationsrechnung, aber von nun ab muss die Beschränkung auf den Hauptfall eintreten, d. i. jenen Fall, wo von keinem Integralsystem z, r des accessorischen Systems von Differentialgleichungen, mit Ausnahme des trivialen Systems, die Glieder $z_1, z_2 \ldots z_n$ in einer Strecke des Integrationsintervalls zugleich identisch verschwinden. Es haben also die Entwickelungen in XXIV und XXV platzzugreifen, denen die vorbereitenden Sätze in XXVI und XXVII anzufügen sind. Die Ableitung der Kriterien II (XXXI) und III (XXIX) erfolgt dann in der hier XXIX—XXXI auseinandergesetzten Weise.

XXV. SITZUNG VOM 30. NOVEMBER 1899.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II. a, Heft VI und VII (Juni und Juli 1899). — Monatshefte für Chemie, Bd. 20, Heft IX (November 1899).

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingelangte Abhandlungen vor:

I. Von Herrn Prof. F. J. Obenrauch in Brünn: »Die erste Raumcurve der Pythagoräischen Schule, ihre Imaginärprojection und Tangentendeveloppable, ihre Normalenflächen und ihr Flächenbüschel«.

II. Von Herrn Prof. Dr. G. Jaumann in Prag: »Rotirendes Magnetfähnchen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Mach übersendet eine Abhandlung von Dr. H. Harting in Braunschweig, betitelt: »Über die Lage bei astigmatischen Bildflächen bei optischen Systemen«.

Herr Hofrath Prof. Ph. Knoll übersendet zwei Arbeiten aus dem Institute für allgemeine und experimentelle Pathologie in Wien, von Dr. Ludwig Braun und Dr. Wilhelm Mager, betitelt:

I. »Über die Wirkung der Digitaliskörper auf das isolirte Säugethierherz (Langendorff'sches Präparat)«.

II. »Über die Wirkung der Galle und der gallensauren Salze auf das isolirte Säugethierherz (Langendorff'sches Präparat)«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine am k. k. naturhistorischen Hofmuseum ausgeführte Arbeit von Dr. Rudolf Sturany, betitelt: »Lamellibranchiaten des Rothen Meeres«, mit einer Notiz.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. A. Pelikan, betitelt: »Die Schalsteine des Fichtelgebirges, aus dem Harz, von Nassau und aus den Vogesen«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Zur Theorie der Elimination«. (II. Theil.)

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über die Theilung der Spermatocyten bei den Säugethieren«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Adolf Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. Leopold Kohn: »Die Moleculargewichtsbestimmung der Aldole«. (I. Mittheilung.)

Herr Dr. Friedrich Bidschof, Adjunct an der k. k. Universitäts-Sternwarte zu Wien, macht Mittheilung über die von ihm in Verbindung mit dem Professor an der k. k. deutschen Oberrealschule in Karolinenthal, Dr. S. Oppenheim, dem k. k. Postbeamten A. Hnatek und dem Leiter des photographischen Bureau der k. k. Polizeidirection E. Wrbata auf dem Sonnwendstein erhaltenen Beobachtungen von Meteoren des Sternschnuppenschwarmes der Bieliden.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Adamkiewicz, Dr. A.: Die Kreislaufstörungen in den Organen des Centralnervensystems. Berlin und Leipzig, 1899; 8°.

Bachmetjew P.: Über die Temperatur der Insecten nach Beobachtungen in Bulgarien. Mit 5 Figuren im Text. Leipzig, 1899; 8°.

Cuniasse L. et Zwilling R.: Modes opératoires des essais du commerce et de l'industrie. Leçons pratiques d'analyse chimique faites aux laboratoires Bourbouze. Avec préface de Mr. Ch. Girard. Paris, 1900; 8°.

Landesregierung für Bosnien und die Hercegovina: Die Landwirtschaft in Bosnien und der Hercegovina. Mit 21 Kartogrammen, 14 Diagrammen und 20 Bildertafeln. Sarajevo, 1899; Gross 8°.

— Das Veterinärwesen in Bosnien und der Hercegovina seit 1879, nebst einer Statistik der Epizootien und des Viehexportes bis inclusive 1898. Mit 7 Diagrammen und 1 Karte. Sarajevo, 1899; Gross 8°.

Zur Theorie der Elimination

(II. Theil)

Anwendungen

von

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

14.

Wenn n Formen

$$g_1, g_2, \ldots g_n$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ alle in der Gestalt

$$[f_1, f_2, \ldots f_{n-1}]$$

erscheinen, wo $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, so verschwindet die Resultante derselben

$$R = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} Rt_x^r &= [g_1, g_2, \ldots g_n] \\ &= P_1 f_1 + P_2 f_2 + \ldots P_{n-1} f_{n-1}, \end{aligned}$$

wo $P_1, P_2, \ldots$ ganze Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen. Bildet man daher die Resultante der Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \; Rt_x^r - P_1 f_1 - P_2 f_2 - \ldots - P_{n-1} f_{n-1},$$

so verschwindet dieselbe und erscheint anderseits in der Gestalt

$$R^r \Theta^r,$$

wo Θ die Resultante der Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, t_x$$

und ν das Product der Gradzahlen von $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ bezeichnen. Es muss also $R = 0$ sein, weil Θ nicht identisch verschwindet.

Die Resultante R von n Formen verschwindet, wenn zwei Formen einen Factor von höherem als dem 0ten Grade gemein haben.

Es seien in der Formenreihe

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

zwei Formen, f_i, f_k, Producte $f\varphi_i, f\varphi_k$ einer allgemeinen Form f in je eine allgemeine Form φ_i, φ_k und die etwaigen übrigen allgemeine Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Alle Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ erscheinen dann, je nachdem $n = 2$ oder $n > 2$ ist, in der Gestalt $[f]$ oder $[f, f_\alpha, f_\beta, \ldots]$, wo $\alpha, \beta, \ldots$ die Zahlen $1, 2, \ldots n$ nach Weglassung von i, k bezeichnen, und es ist daher $R = 0$.

Der Satz folgt auch daraus, dass R in diesem Falle die Resultante einer Formenreihe als Factor enthält, in welcher die i^{te} und k^{te} Form $= f$ ist. Eine solche Resultante ändert sich aber nicht, wenn man die k^{te} Form f durch die Differenz $f - f$ der k^{ten} und i^{ten} ersetzt, und verschwindet daher identisch.

15.

Wenn für besondere Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ von n Veränderlichen die Resultante

$$\Theta = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n \end{bmatrix}$$

identisch in $u_1, u_2, \ldots u_n$ verschwindet, so verschwindet auch die Resultante

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \ldots \qquad x_n \end{bmatrix}$$

für eine allgemeine Form f_n.

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ allgemeine lineare Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und man setze

$$f_i + t\varphi_i^{m_i} = g_i$$

$$\begin{vmatrix} g_1, g_2, \dots g_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \dots \quad x_n \end{vmatrix} = \Theta_1$$

$$\begin{vmatrix} g_1, g_2, \dots g_{n-1}, f_n \\ x_1, x_2, \dots \quad x_n \end{vmatrix} = R_1$$

$$m_1 m_2 \dots m_n = p$$

$$m_1 m_2 \dots m_{n-1} = m_1 \mu_1 = m_2 \mu_2 = \dots = m_{n-1} \mu_{n-1},$$

wo $m_1, m_2, \dots m_n$ die Gradzahlen von $f_1, f_2, \dots f_n$ und t eine Unbestimmte bezeichnen. Der Ausdruck Θ_1 ist durch t theilbar, da er für $t = 0$ in den verschwindenden Ausdruck Θ übergeht, und verschwindet nicht identisch, da er bei der Potenz $t^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{n-1}}$ die $\frac{p}{m_n}$ te Potenz der Resultante der Formen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}, u_x$ als Coëfficienten hat. Θ_1 hat also die Gestalt $t^h L$, wo L nicht mehr durch t theilbar und $h > 0$ ist.

Man hat die Gleichung A. 5, Th. I

$$\Theta_1^{p-m_n} R_1 = N(A, A', \dots),$$

wo N eine ganze homogene Function p^{ten} Grades der Coëfficienten $A, A', \dots$ von Θ_1 bedeutet. Sind daher $B, B', \dots$ die Coëfficienten, welche in L bei denselben Potenzproducten der Unbestimmten $u_1, u_2, \dots u_n$ wie $A, A', \dots$ in Θ_1 stehen, so ist

$$A = t^h B, \; A' = t^h B', \dots$$

und demzufolge

$$t^{hp-hm_n} L^{p-m_n} R_1 = t^{hp} N(B, B', \dots)$$

oder

$$L^{p-m_n} R_1 = t^{hm_n} N(B, B', \dots).$$

R_1 ist also durch t theilbar. Anderseits ist $R_1 = R + [t]$ und daher $R = 0$.

16.

Wenn zwei Formen

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n), \; \psi(x_1, x_2, \dots x_n)$$

von $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche nicht beide identisch verschwinden, einen gemeinschaftlichen Factor von höherem als dem nullten Grade in $x_1, x_2, \ldots x_n$ haben, welcher selbstverständlich homogen sein muss, so verschwindet die Resultante R der Formen

$$\varphi(y_1X+z_1Y,\ y_2X+z_2Y,\ldots)$$
$$\psi(y_1X+z_1Y,\ y_2X+z_2Y,\ldots)$$

in Bezug auf X, Y, wo

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$
$$z_1, z_2, \ldots z_n$$

Unbestimmte bedeuten.

Ist nämlich $\chi(x_1, x_2, \ldots)$ ein solcher gemeinschaftlicher Factor, so haben $\varphi(y_1X+z_1Y,\ldots)$ und $\psi(y_1X+z_1Y,\ldots)$ den Factor $\chi(y_1X+z_1Y,\ldots)$ gemein.

Ist umgekehrt R identisch $=0$, so haben die Formen φ, ψ einen Factor von höherem als dem nullten Grade gemein.

Sucht man nämlich den grössten gemeinschaftlichen Theiler T der Functionen

$$\varphi(Xy_1+z_1,\ Xy_2+z_2,\ldots),\ \psi(Xy_1+z_1,\ Xy_2+z_2,\ldots)$$

in Bezug auf X, so kann derselbe in $y_1, y_2, \ldots z_1, z_2, \ldots$ ganz angenommen werden, und man hat eine Identität

$$MT = [\varphi(Xy_1+z_1,\ldots),\ \psi(Xy_1+z_1,\ldots)],$$

wo M eine nicht identisch verschwindende ganze Function von $y_1, y_2, \ldots z_1, z_2, \ldots$ bezeichnet. Macht man T durch Einführung von Y in X, Y homogen und nennt das Resultat T_1, wo T_1 nicht durch Y theilbar angenommen wird, so ist

$$MT_1Y^\rho = [\varphi(Xy_1+Yz_1,\ldots),\ \psi(Xy_1+Yz_1,\ldots)],$$

und es erhellt, dass die Resultante von $\varphi(Xy_1+Yz_1,\ldots)$ (oder $\psi(Xy_1+Yz_1,\ldots)$) und MT_1Y^ρ durch R algebraisch theilbar, also die Resultante von $\varphi(Xy_1+Yz_1,\ldots)$ und T_1 oder $\psi(Xy_1+Yz_1,\ldots)$ und T_1 verschwindet. T_1 kann also nicht vom Grade 0 sein.

Ersetzt man nun in T die Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots$ durch $x_1-Xy_1, x_2-Xy_2, \ldots$, so erhält man eine ganze Function χ

von $x_1, x_2, \ldots y_1, y_2, \ldots X$, welche in φ und ψ aufgeht, also $X, y_1, y_2, \ldots$ nicht enthalten kann oder eine blosse Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist. Dieselbe muss homogen und kann nicht vom Grade 0 sein, weil

$$\chi(Xy_1 + z_1, \ldots) = T$$

die Veränderliche X mindestens im Grade 1 enthält.

17.

Es seien

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n$$
$$v_x = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_n x_n$$
$$w_x = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n$$

allgemeine Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und φ, ψ die Resultanten

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots) = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n \end{bmatrix}$$

$$\psi(u_1, u_2, \ldots) = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-2}, f_n, & u_x \\ x_1, x_2, \ldots & x_{n-1}, x_n \end{bmatrix}.$$

Ersetzt man in φ, ψ die Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$ durch $Xv_1 + Yw_1, Xv_2 + Yw_2, \ldots$ und bildet die Resultante

$$\Omega = \begin{bmatrix} \varphi(Xv_1 + Yw_1, \ldots), & \psi(Xv_1 + Yw_1, \ldots) \\ X & , & Y \end{bmatrix},$$

so ist Ω durch die Resultante

$$R = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}$$

der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ algebraisch theilbar.

Denn aus den Identitäten

$$\Omega Y^{\varrho} = [\varphi(Xv_1 + Yw_1, \ldots), \psi(Xv_1 + Yw_1, \ldots)]$$
$$x_n^{r} \varphi = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x]$$
$$x_n^{s} \psi = [f_1, f_2, \ldots f_{n-2}, f_n, u_x]$$

folgt zunächst

$$x_n^r \varphi(Xv_1 + Yw_1, \ldots) = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, Xv_x + Yw_x]$$
$$x_n^s \psi(Xv_1 + Yw_1, \ldots) = [f_1, f_2, \ldots f_{n-2}, f_n, Xv_x + Yw_x]$$

und hieraus bei passender Wahl von σ

$$\Omega Y^\varrho x_n^\sigma = [f_1, f_2, \ldots f_n, u_x, Xv_x + Yw_x].$$

Nach Ersetzung von

$$X, Y, u_1, u_2, \ldots$$

durch

$$-w_x, v_x, w_x v_1 - v_x w_1, w_x v_2 - v_x w_2, \ldots$$

wird daher

$$\Omega v_x^\varrho x_n^\sigma = [f_1, f_2, \ldots f_n].$$

Ω besitzt also die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$.

18.

Ist Θ die Resultante der $n-1$ allgemeinen Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der linearen Form

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i} = \Theta_i,$$

so sind die Ausdrücke

$$f_1(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n), f_2(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n), \ldots f_{n-1}(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n)$$

alle durch Θ theilbar.

Denn es ist

$$\Theta x_n^r = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}] + Q u_x,$$

wo Q eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots u_x$ und der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet. Nimmt man die Ableitung nach u_i, so ergibt sich

$$x_n^r \Theta_i = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x] + Q x_i,$$

und es wird

$$x_n^{r m_k} f_k(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n) = [f_1, f_2, \ldots u_x] + Q^{m_k} f_k$$
$$= [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x].$$

Der Ausdruck $f_k(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n)$ hat also die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots u_x$ und muss demzufolge durch ihre Resultante Θ algebraisch theilbar sein.

19.

Es seien

$$s_1, \ s_2, \ldots s_n$$
$$t_1, \ t_2, \ldots t_n$$
$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

Unbestimmte und $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ gegebene besondere Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ von der Art, dass die Resultante

$$\Theta = \begin{vmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{vmatrix}$$

nicht identisch in $u_1, u_2, \ldots u_n$ verschwindet. Θ zerfalle in zwei in $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganze Factoren P^μ und Q, wo $\mu \geqq 1$ und P von höherem als dem 0ten Grade in $u_1, u_2, \ldots$ und sowohl zu Q, als auch zu

$$s_1 \frac{\partial P}{\partial u_1} + s_2 \frac{\partial P}{\partial u_2} + \ldots + s_n \frac{\partial P}{\partial u_n}$$

theilerfremd ist.

Man setze zur Abkürzung

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = P_i$$

$$t_1 P_1 + t_2 P_2 + \ldots + t_n P_n = P_t$$

und bezeichne den Grad von P in $u_1, u_2, \ldots u_n$ mit λ, das Product der Gradzahlen $m_1, m_2, \ldots m_{n-1}$ von $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ mit ν und einen Ausdruck von der Gestalt $[f_1, f_2, \ldots f_{n-1}]$ allgemein mit $\square_x$.

I. Jeder der Ausdrücke

$$f_1(P_1, P_2, \dots P_n), f_2(P_1, P_2, \dots), \dots f_{n-1}(P_1, P_2, \dots)$$

ist durch P algebraisch theilbar.

Man hat A. 10, Th. I die Identität

$$\Theta(t_x u_1 - u_x t_1, \dots) = P^\mu(t_x u_1 - u_x t_1, \dots) Q(t_x u_1 - u_x t_1, \dots)$$
$$= \square_x,$$

wo

$$\Theta(t_x u_1 - u_x t_1, \dots), P(t_x u_1 - u_x t_1, \dots), Q(t_x u_1 - u_x t_1, \dots)$$

die aus Θ, P, Q durch Verwandlung von $u_1, u_2, \dots$ in $t_x u_1 - u_x t_1$, $t_x u_2 - u_x t_2, \dots$ hervorgehenden Resultate bezeichnen. Nimmt man von beiden Seiten den μ^{ten} Differentialquotienten in Bezug auf $u_\alpha, u_\beta, \dots u_\varepsilon$ und setzt zur Abkürzung

$$t_x P_i - P_t x_i = y_i,$$

so folgt

$$\mu!\, t_x^{\mu(\lambda-1)} y_\alpha y_\beta \dots y_\varepsilon Q(t_x u_1 - u_x t_1, \dots)$$
$$+ [P, u_x] = \square_x.$$

Für jedes Potenzproduct

$$\mathfrak{P} = y_\alpha y_\beta \dots y_\varepsilon$$

μ^{ten} Grades der Ausdrücke $y_1, y_2, \dots y_n$ besteht also die Gleichung

$$t_x^{\nu-\mu} Q \mathfrak{P} = [u_x, P] + \square_x.$$

Da identisch

$$t_x^{m_i} f_i(P_1, P_2, \dots) = f_i(t_x P_1, t_x P_2, \dots)$$
$$= f_i(P_t x_1 + y_1, P_t x_2 + y_2, \dots)$$
$$= P_t^{m_i} f_i + [y_1, y_2, \dots y_n]$$
$$= [f_i, y_1, y_2, \dots y_n]$$

ist, so folgt durch Erhebung in die μ^{te} Potenz

$$t_x^{\mu m_i} f_i^\mu (P_1, P_2, \dots) = [f_i, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \dots],$$

wo $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots$ die verschiedenen Potenzproducte μ^{ten} Grades der Ausdrücke $y_1, y_2, \ldots y_n$ bedeuten. Der obigen Gleichung zufolge wird daher

$$Qf_i^{\mu}(P_1, P_2, \ldots) t_x^{\nu-\mu+\mu m_i} = [u_x, P] + \square_x.$$

Auf Grund dieser Identität erscheint die Resultante der Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \; Qf_i^{\mu}(P_1, P_2, \ldots) t_x^{\mu m_i+\nu-\mu}$$

in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ sowohl in der Gestalt

$$Q' f_i^{\mu\nu}(P_1, P_2, \ldots) \Theta(t_1, t_2, \ldots)^{\mu m_i+\nu-\mu},$$

als auch in der Gestalt

$$[\Theta, P] = [P].$$

Der Ausdruck

$$Q' f_i^{\mu\nu}(P_1, P_2, \ldots) \Theta(t_1, t_2, \ldots)^{\mu m_i+\nu-\mu}$$

ist daher durch P algebraisch theilbar. Dasselbe gilt also auch von $f_i^{\mu\nu}(P_1, P_2, \ldots)$, weil Q zu P theilerfremd ist, und somit auch von $f_i(P_1, P_2, \ldots P_n)$.

II. Wird zur Abkürzung

$$u_1 \frac{\partial P(s_1, s_2, \ldots)}{\partial s_1} + u_2 \frac{\partial P(s_1, s_2, \ldots)}{\partial s_2} + \ldots = P_u(s_1, s_2, \ldots)$$

gesetzt, so ist die Resultante

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} P(Xv_1 + Yw_1, \ldots), & P_u(Xv_1 + Yw_1, \ldots) \\ X & , \quad Y \end{bmatrix}$$

durch P algebraisch theilbar.

Es seien

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$$
$$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \ldots$$
$$\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \ldots$$

die Coëfficienten, welche beziehungsweise in der Entwicklung der Ausdrücke

$$P^{\mu}(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots), \; Q(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots)$$
$$P^{\mu}(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots) \; Q(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots)$$

nach den Unbestimmten $s_1, s_2, \ldots \; t_1, t_2, \ldots$ auftreten, und L_m irgend ein Potenzproduct m^{ten} Grades der Coëfficienten $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \ldots$ Es gibt[1] einen Exponenten e von der Art, dass alle Producte

$$\mathfrak{A} L_e, \mathfrak{A}' L_e, \ldots$$

sich als Vielfachsummen (ganze ganzzahlige linear-homogene Functionen) der Producte

$$\mathfrak{C} L_{e-1}, \mathfrak{C}' L_{e-1}, \ldots$$

darstellen lassen. Da der Identität

$$P^{\mu}(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots) \, Q(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots) = \square_x$$

zufolge alle Coëfficienten $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \ldots$ die Gestalt $\square_x$ haben, so gilt dasselbe von dem Producte

$$\mathfrak{C} L_{e-1}, \mathfrak{C}' L_{e-1}, \ldots,$$

und man hat

$$\mathfrak{A} L_e = \square_x \qquad \mathfrak{A}' L_e = \square_x \ldots,$$

also auch

$$Q^e(t_x u_1 - u_x t_1, \ldots) \, P^{\mu}(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots) = \square_x,$$

weil $Q^e(t_x u_1 - u_x t_1, \ldots)$ nach $t_1, t_2, \ldots u_1, u_2, \ldots$ entwickelt, lauter Vielfachsummen von Potenzproducten L_e, und $P^{\mu}(t_x s_1 - s_x t_1, \ldots)$, nach $t_1, t_2, \ldots \; s_1, s_2, \ldots$ entwickelt, $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots$ zu Coëfficienten haben.

Es wird also hienach

$$t_x^a Q^e P^{\mu}(s_1, s_2, \ldots) = \square_x + [s_x, u_x],$$

wo

$$a = \mu\lambda + e(\nu - \mu\lambda),$$

und die μmalige Vollziehung der Operation

$$u_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \ldots + u_n \frac{\partial}{\partial s_n}$$

---

[1] Mertens, diese Sitzungsber., 1892.

ergibt

$$\mu!\, t_x^\mu Q^\kappa P_u^\mu(s_1, s_2, \ldots) + [P(s_1, s_2, \ldots)] = \square_x + [s_x, u_x].$$

Wird nun

$$s_1 = v_1 X + w_1 Y \qquad s_2 = v_2 X + w_2 Y \ldots$$

gesetzt, so folgt

$$t_x^\mu Q^\kappa P^\mu(v_1 X + w_1 Y, \ldots) = \square_x + [u_x, v_x X + w_x Y]$$

$$t_x^\mu Q^\kappa P_u^\mu(v_1 X + w_1 Y, \ldots) + [P(v_1 X + w_1 Y, \ldots)]$$

$$= \square_x + [u_x, v_x X + w_x Y].$$

Hieraus ergibt sich für die Resultante $\mathfrak{R}$ die Gleichung

$$t_x^{(2\lambda-1)\mu} Q^{(2\lambda-1)\mu} \mathfrak{R}^{\mu\mu} = \square_x + [u_x].$$

Nach Ersetzung von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $P_1, P_2, \ldots P_n$ wird dann nach I

$$P_t^{(2\lambda-1)\mu} Q^{(2\lambda-1)\mu} \mathfrak{R}^{\mu\mu} = [P].$$

Es ist also, weil P_t, Q zu P theilerfremd sind, $\mathfrak{R}^{\mu\mu}$ durch P algebraisch theilbar und demnach auch $\mathfrak{R}$ selbst.

Setzt man

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{M} P,$$

so ist $\mathfrak{M}$ eine von $u_1, u_2, \ldots$ freie, nicht identisch verschwindende ganze Function der Determinanten

$$v_1 w_2 - v_2 w_1,\ v_1 w_3 - v_3 w_1, \ldots$$

III. Es sei zur Abkürzung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik}$$

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots) = \begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & \ldots & f_{1n} \\ f_{21}, & f_{22}, & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-1\,1}, & f_{n-1\,2}, & \ldots & f_{n-1\,n} \\ t_1, & t_2, & \ldots & t_n \end{vmatrix}$$

$$N = \Delta(P_1, P_2, \ldots P_n).$$

Ist $\mu > 1$, so ist N durch P algebraisch theilbar.

Man denke sich die Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ zunächst allgemein, und es sei zur Abkürzung

$$t_\xi x_i - t_x \xi_i = \eta_i$$
$$f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) = f_i^0$$
$$t_x^{m_i} f_i^0 - t_\xi^{m_i} f_i = g_i,$$

wo $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ Veränderliche bedeuten. Da

$$\begin{aligned} g_i &= f_i(t_x \xi_1, t_x \xi_2, \ldots) - f_i(t_\xi x_1, t_\xi x_2, \ldots) \\ &= f_i(t_x \xi_1, t_x \xi_2, \ldots) - f_i(\eta_1 + t_x \xi_1, \eta_2 + t_x \xi_2, \ldots) \\ &= [\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n] \end{aligned}$$

ist, so kann

$$g_i = \varphi_{i1}\eta_1 + \varphi_{i2}\eta_2 + \ldots + \varphi_{in}\eta_n$$

gesetzt werden, wo $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots \varphi_{in}$ ganze Functionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n, t_x, \xi_1, \xi_2, \ldots$ und der Coëfficienten von f_i bedeuten. Durch Differentiation nach x_r folgt hieraus

$$m_i t_x^{m_i-1} t_r f_i^0 - t_\xi^{m_i} f_{ir} =$$

$$\varphi_{i1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_r} + \varphi_{i2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_r} + \ldots + \varphi_{in} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_r}$$

$$+ \eta_1 \frac{\partial \varphi_{i1}}{\partial x_r} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x_r} + \ldots + \eta_n \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial x_r}.$$

Multiplicirt man mit η_r und summirt hierauf von $r = 1$ bis $r = n$, so wird den Gleichungen

$$t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \ldots + t_n\eta_n = 0$$

$$\eta_1 \frac{\partial \eta_k}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \eta_k}{\partial x_2} + \ldots + \eta_n \frac{\partial \eta_k}{\partial x_n} = t_\xi \eta_k$$

$$\eta_1 \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_2} + \ldots + \eta_n \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_n} =$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial \eta_\alpha}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_2} + \ldots\right) + \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial t_x}(t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \ldots)$$

$$= t_\xi \Sigma \eta_\alpha \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial \eta_\alpha}$$

zufolge nach Fortlassung von t_ξ

$$(-t_\xi^{m_i-1}f_{i1}-\omega_{i1})\eta_{i1}+(-t_\xi^{m_i-1}f_{i2}-\omega_{i2})\eta_{i2}+\ldots=g_i,$$

wo

$$\omega_{ik}=\sum_\alpha \eta_{i\alpha}\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial\eta_{i\alpha}}$$

ist.

Man hat also die $n-1$ Identitäten

$$\begin{array}{l}(t_\xi^{m_1-1}\;f_{11}\;+\omega_{11}\;)\eta_{i1}+(t_\xi^{m_1-1}\;f_{12}\;+\omega_{12}\;)\eta_{i2}+\ldots=-g_1\\(t_\xi^{m_2-1}\;f_{21}\;+\omega_{21}\;)\eta_{i1}+(t_\xi^{m_2-1}\;f_{22}\;+\omega_{22}\;)\eta_{i2}+\ldots=-g_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(t_\xi^{m_{n-1}-1}f_{n-1\,1}+\omega_{n-1\,1})\eta_{i1}+(t_\xi^{m_{n-1}-1}f_{n-1\,2}+\omega_{n-1\,2})\eta_{i2}+\ldots=-g_{n-1}\end{array}$$

Nimmt man noch die Gleichungen

$$t_1\eta_{i1}+t_2\eta_{i2}+\ldots+t_n\eta_{in}=0$$

$$-u_1\eta_{i1}-u_2\eta_{i2}-\ldots-u_n\eta_{in}+t_\xi u_x-u_\xi t_x=0$$

hinzu, so hat man $n+1$ lineare Gleichungen für die Ausdrücke

$$\eta_{i1},\eta_{i2},\ldots\eta_{in},\; t_\xi u_x-u_\xi t_x.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach $t_\xi u_x-u_\xi t_x$ ergibt, wenn A die Determinante

$$A=\begin{vmatrix}t_\xi^{m_1-1}\;f_{11}\;+\omega_{11}\;, & t_\xi^{m_1-1}f_{12}\;+\omega_{12}\;, & \ldots\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ t_\xi^{m_{n-1}-1}f_{n-1\,1}+\omega_{n-1\,1}, & t_\xi^{m_{n-1}-1}f_{n-1\,2}+\omega_{n-1\,2}, & \ldots\\ t_1 & ,\; t_2 & \ldots\end{vmatrix}$$

bezeichnet,

$$A(t_\xi u_x-u_\xi t_x)=[g_1,g_2,\ldots g_{n-1}].$$

Denkt man sich A nach den Ausdrücken $\omega_{11},\omega_{12},\ldots\omega_{nn}$ entwickelt und alle Glieder, welche wenigstens einen derselben als Factor enthalten, in einem Ausdruck $-\omega$ zusammengefasst, so hat ω die Gestalt $[\eta_{i1},\eta_{i2},\ldots\eta_{in}]$, und es wird

$$A=t_\xi^\sigma\Delta-\omega,$$

wo

$$\sigma=m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}-n+1$$

ist. Wird daher unter g eine allgemeine Form von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ vom Grade $\mu\sigma+\nu-\mu+1-m_1$, unter s eine Unbestimmte verstanden und

$$s t_\xi^{\nu-\mu+1}(t_\xi^{\mu\sigma}\Delta^\mu-\omega^\mu)+g f_1^0 = F$$

$$\begin{bmatrix} t_x^{m_1} F - g t_\xi^{m_1} f_1, g_2, \ldots g_{n-1}, u_\xi \\ \xi_1 \quad , \xi_2, \ldots \quad \xi_n \end{bmatrix} = \Omega$$

$$\begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, u_\xi \\ \xi_1, \xi_2, \ldots \quad \xi_n \end{bmatrix} = \Theta^0$$

$$\frac{\nu}{m_1} = \rho$$

gesetzt, so ist $(F-gf_1^0)u_x$ durch $At_\xi u_x$ theilbar, also nach dem Obigen von der Gestalt

$$[g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, u_\xi];$$

dasselbe gilt also auch von dem Ausdrucke

$$(t_x^{m_1} F - g t_\xi^{m_1} f_1) u_x$$

und die Resultante $u_x^\rho \Omega$ der Formen

$$(t_x^{m_1} F - g t_\xi^{m_1} f_1) u_x, g_2, \ldots g_{n-1}, u_\xi$$

in Bezug auf $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ muss demzufolge durch Θ^0 theilbar sein. Es sei

$$\Omega u_x^\rho = H\Theta^0.$$

Θ^0 ist durch u_x, aber nicht mehr durch u_x^2 theilbar; denn es ist

$$\Theta^0 = t_x^{(n-1)\nu}\Theta + \square_x$$

und es müsste, wenn Θ^0 durch u_x^2 theilbar wäre, $\frac{\partial\Theta}{\partial u_n}$ die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x$ haben, was nicht der Fall ist. H muss also durch $u_x^{\rho-1}$ theilbar sein. Setzt man

$$H = u_x^{\rho-1} K$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} F, f_2^0, \ldots f_{n-1}^0, u_\xi \\ \xi_1, \xi_2, \ldots \quad \xi_n \end{bmatrix}$$

$$\nu+(n-2)\nu(\mu\sigma+\nu-\mu+1) = \tau-1,$$

so wird

$$\Omega u_x = K\Theta^0 = K t_x^{\nu(n-1)}\Theta + \square_x$$

und anderseits

$$\Omega = t_x^{\nu-1}\Phi + \square_x,$$

also

$$t_x^{\nu-1} u_x \Phi = [\Theta] + \square_x$$

und nach Vollziehung der Operation

$$\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right) = t_1\frac{\partial}{\partial u_1} + t_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + t_n\frac{\partial}{\partial u_n}:$$

$$t_x^{\nu}.\Phi = \left[\Theta, \left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)\Theta, u_x\right] + \square_x.$$

Wird diese Identität auf die gegebenen Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ angewendet und überdies

$$s = Q$$
$$x_1 = P_1 \quad x_2 = P_2 \ldots x_n = P_n$$

gesetzt, wodurch Φ, F, ω, η_{i} in Φ^0, F^0, ω_0, η_i^0 übergehen mögen, so sind Θ, $\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)\Theta$ und

$$f_1(P_1, P_2, \ldots), f_2(P_1, P_2, \ldots P_n), \ldots$$

durch P theilbar, und es muss demnach $P_i^{\nu}\Phi^0$, also auch Φ^0 selbst durch P theilbar sein. Anderseits ist

$$F^0 = QN^{\mu} t_{\xi}^{\mu\lambda+\nu-\mu+1} - Q t_{\xi}^{\nu-\mu+1}\omega_0^{\mu} + g f_1^0;$$

da aber jedes Potenzproduct μ^{ten} Grades $\eta_{i\alpha}^0 \eta_{i\beta}^0 \ldots \eta_{i\varepsilon}^0$ der Ausdrücke $\eta_{i1}^0, \eta_{i2}^0, \ldots \eta_{in}^0$ nach I einer Gleichung

$$Q t_{\xi}^{\nu-\mu+1}\eta_{i\alpha}^0 \eta_{i\beta}^0 \ldots \eta_{i\varepsilon}^0 = [P, u_{\xi}, f_1^0, \ldots f_{n-1}^0]$$

genügt, so hat $Q t_{\xi}^{\nu-\mu+1}\omega_0^{\mu}$ die Gestalt

$$\psi f_1^0 + [f_2^0, f_3^0, \ldots f_{n-1}^0, u_{\xi}, P],$$

und es wird

$$F^0 = QN^{\mu} t_{\xi}^{\mu\lambda+\nu-\mu+1} + (g-\psi) f_1^0$$
$$+ [f_2^0, \ldots f_{n-1}^0, u_{\xi}, P].$$

Verfügt man über die Form g so, dass $g = \psi$ gesetzt wird, was in Anbetracht der gleichen Gradzahlen von g und ψ gestattet ist, so wird

$$\Phi^0 = \begin{bmatrix} QN^{\mu} t_\xi^{\mu\sigma+\nu-\mu+1} + [P], f_2^0, \dots f_{n-1}^0, u_\xi \\ \xi_1 \qquad , \xi_2, \dots \qquad \xi_n \end{bmatrix}$$

$$= \pm\, Q^\rho N^{\mu\rho} L^{\mu\sigma+\nu-\mu+1} + [P],$$

wo

$$L = \begin{bmatrix} f_2, f_3, \dots f_{n-1}, t_x, u_x \\ x_1, x_2, \dots \qquad x_n \end{bmatrix}$$

ist. Es ist daher auch

$$Q^\rho L^{\mu\sigma+\nu-\mu+1} N^{\mu\rho} = [P].$$

Der Ausdruck L kann nach A. 15 nicht identisch verschwinden und muss zu P theilerfremd sein, weil er die Unbestimmten $t_1, t_2, \dots u_1, u_2, \dots$ nur innerhalb der Determinanten $t_1 u_2 - t_2 u_1, \dots$ enthält. Hätten nämlich L und P einen Factor T von höherem als dem 0ten Grade in $u_1, u_2, \dots$ gemein, so wäre $L = [T]$ also nach Ersetzung von $u_1, u_2, \dots$ durch $u_1 + st_1$, $u_2 + st_2, \dots$

$$L = [T(u_1 + st_1, u_2 + st_2, \dots)],$$

was unmöglich ist, weil L die Unbestimmte s nicht enthält.

Da also $Q^\rho L^{\mu\sigma+\nu-\mu+1}$ zu P theilerfremd ist, so folgt

$$N^{\mu\rho} = [P]$$

und daher auch

$$N = [P].$$

20.

Sind $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$ allgemeine Formen von $x_1, x_2, \dots x_n$, welche nicht alle linear sind, und setzt man

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik}$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots f_{2n} \\ f_{n-1\,1} & f_{n-1\,2} & \dots f_{n-1\,n} \\ u_1 & u_2 & \dots u_n \end{vmatrix} = \Delta_u$$

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix}$$

$$\Psi' = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \Delta_n \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix},$$

so ist Ψ' durch Θ theilbar.

Denn man hat

$$x_n \Delta_n = \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots f_{1\,n-1}, x_1 f_{11} + x_2 f_{12} + \ldots + x_n f_{1n} \\ f_{21}, f_{22}, \ldots f_{2\,n-1}, x_1 f_{21} + x_2 f_{22} + \ldots + x_n f_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1, \; u_2, \ldots u_{n-1} \;, u_x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_{11}, f_{12}, \ldots f_{1\,n-1}, m_1 f_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1, \; u_2, \ldots u_{n-1} \;, u_x \end{vmatrix}$$

$$= [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x].$$

Aus der Identität

$$\Psi' x_n^{\nu} = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \Delta_n]$$

folgt aber

$$x_n^{\nu+1} \Psi' = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, x_n \Delta_n],$$

und es wird daher

$$x_n^{\nu+1} \Psi' = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x].$$

Ψ' hat also die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x$.

Wird

$$\Psi' = D\Theta$$

gesetzt, so ist D eine von $u_1, u_2, \ldots u_n$ unabhängige ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, welche nach Kronecker die Discriminante dieser Formen genannt wird.

Ist

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i} = \Theta_i$$

$$\Theta_i(t_1, t_2, \ldots) = t_1 \Theta_1 + t_2 \Theta_2 + \ldots + t_n \Theta_n.$$

so wurde früher die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \Theta(v_1X+w_1Y,\dots),\ \Theta_t(v_1X+w_1Y,\dots) \\ X \qquad , \qquad Y \end{bmatrix} = M\Theta(t_1,\dots)$$

gefunden, wo M eine ganze Function der Coëfficienten von $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$ und der Determinanten

$$v_1w_2 - v_2w_1,\ v_1w_3 - v_3w_1, \dots$$

ist. Der Ausdruck M ist durch D algebraisch theilbar.

Um dies darzuthun, sei

$$u_x = f_n \qquad \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = f_{ni} = u_i$$

$$f_i(t_nX_1 + x_1X_n,\ t_nX_2 + x_2X_n, \dots - t_1X_1 - t_2X_2 - \dots + x_nX_n) = g_i$$
$$\nu = m_1m_2\dots m_{n-1}.$$

Die Form f_i hat bei den Potenzproducten

$$X_1X_n^{m_i-1},\ X_2X_n^{m_i-1}, \dots X_n^{m_i}$$

die Coëfficienten

$$t_nf_{i1} - t_1f_{in},\ t_nf_{i2} - t_2f_{ni}, \dots f_i$$

und die Resultante von $g_1, g_2, \dots g_n$ in Bezug auf $X_1, X_2, \dots X_n$ ist einerseits $t_n^{\nu(n-2)}t_x^\nu\Theta$ und hat anderseits nach A. 12, Th. I die Gestalt

$$Q\begin{vmatrix} t_nf_{11} - t_1f_{1n},\ t_nf_{12} - t_2f_{1n}, \dots f_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_nf_{n1} - t_1f_{nn},\ t_nf_{n2} - t_2f_{nn}, \dots f_n \end{vmatrix} + H,$$

wo Q, H ganze Functionen der Coëfficienten von $f_1, f_2, \dots f_n$ und der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots$ bezeichnen und H in $f_1, f_2, \dots f_n$ von höherer als der ersten Dimension ist. Man hat daher

$$t_n^{\nu(n-2)}t_x^\nu\Theta = [u_x\Delta_t] + [f_1, f_2, \dots f_{n-1}] + H.$$

Nach Vollziehung der Operation

$$t_1\frac{\partial}{\partial u_1} + t_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + t_n\frac{\partial}{\partial u_n}$$

und Ersetzung von $u_1, u_2, \ldots$ durch $v_1 w_x - w_1 v_x$, $v_2 w_x - w_2 v_x, \ldots$ ergibt sich

$$t_n^{(n-2)\nu} t_x^\nu \Theta_t(v_1 w_x - w_1 v_x, \ldots) = [t_x \Delta_t] + [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}].$$

Wird nun von den Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-1},\ t_n^{(n-2)\nu} t_x^\nu \Theta_t(v_1 w_x - w_1 v_x, \ldots)$$

die Resultante in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ genommen, so erscheint dieselbe sowohl in der Gestalt

$$t_n^{(n-2)\nu} \Theta^\nu(t_1, t_2, \ldots) . M\Theta(t_1, t_2, \ldots),$$

als auch in der Gestalt

$$[\Theta(t_1, t_2, \ldots) . D\Theta(t_1, t_2, \ldots)].$$

Man hat demnach

$$t_n^{(n-2)\nu} \Theta^{\nu+1}(t_1, t_2, \ldots) M = [D\Theta^2(t_1, t_2, \ldots)]$$

und erhält nach Forthebung von $t_n^{(n-2)\nu} \Theta^{\nu+1}(t_1, t_2, \ldots)$:

$$M = [D].$$

Die Discriminante D verschwindet, wenn Θ einen mehrfachen Factor in $u_1, u_2, \ldots u_n$ besitzt. Es ist dann nämlich auch

$$\Theta = P^\mu Q,$$

wo $\mu \geqq 2$ und P sowohl zu Q, als auch zu

$$P_t = t_1 \frac{\partial P}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial P}{\partial u_2} + \ldots$$

theilerfremd ist. Aus der Identität

$$D\Theta(t_1, t_2, \ldots) t_x^\nu = [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \Delta_t]$$

folgt aber, wenn

$$x_1 = \frac{\partial P}{\partial u_1},\ x_2 = \frac{\partial P}{\partial u_2}, \ldots x_n = \frac{\partial P}{\partial u_n}$$

gesetzt wird, nach A. 19

$$D\Theta(t_1, t_2, \ldots) P_t^\nu = [P]$$

und der Ausdruck $D\Theta(t_1, t_2, \ldots)$ muss verschwinden, weil er $u_1, u_2, \ldots$ nicht enthält. Weil aber $\Theta(t_1, t_2, \ldots)$ nicht identisch in $t_1, t_2, \ldots$ verschwindet, so ist

$$D = 0.$$

Die Discriminante D verschwindet aber auch, wenn Θ identisch in $u_1, u_2, \ldots$ verschwindet.

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ allgemeine Formen von denselben Graden wie $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$, t eine Unbestimmte und man setze

$$f_i + t\varphi_i = g_i$$

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix}$$

und bezeichne die Discriminante der Formen $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}$ mit D_0. Man hat dann, unter N eine ganze homogene Function der Coëfficienten $A, A', \ldots$ von Θ_0 vom Grade

$$q = m_1 m_2 \ldots m_{n-1}(m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - n + 1)$$

verstanden, nach A. 5, Th. I

$$\Theta_0(t_1, \ldots)^{q - m_1 - m_2 - \ldots - m_{n-1} + n} D_0 = N(A, A', \ldots).$$

Θ_0 verschwindet nicht identisch und ist durch t theilbar. Ist t^h die höchste in allen Coëfficienten von Θ_0 aufgehende Potenz von t und

$$\Theta_0 = F t^h$$
$$A = B t^h,\ A' = B' t^h, \ldots,$$

so ergibt die vorstehende Gleichung

$$F^{q - m_1 - m_2 - \ldots - m_{n-1} + n} D_0 = t^{h(m_1 + m_2 \ldots - n)} N(B, \ldots).$$

Wenn also

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - n > 0$$

ist, so ist D_0 durch t theilbar und somit $D = 0$.

In dem Falle

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} - n = 0$$

ist eine der Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ quadratisch, etwa f_1, die übrigen linear, und die Behauptung folgt aus der Gleichung

$$D = \pm \Sigma a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_\alpha \partial u_\beta},$$

wo

$$f_1 = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

ist.

21.

Eine gegebene Form F von $u_1, u_2, \ldots u_n$ lässt sich immer in der Gestalt

$$F = C \varphi^\lambda \psi^\mu \ldots$$

darstellen, wo die Formen $\varphi, \psi, \ldots$ beziehungsweise zu den Formen

$$t_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \ldots + t_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}$$

$$t_1 \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial \psi}{\partial u_2} + \ldots + t_n \frac{\partial \psi}{\partial u_n}$$

. . . .

und, wofern ihre Anzahl > 1 ist, auch unter einander theilerfremd sind und C eine Constante, $t_1, t_2, \ldots t_n$ Unbestimmte bezeichnen.

Es sei $\left(t \frac{\partial}{\partial u}\right)$ die Operation

$$\left(t \frac{\partial}{\partial u}\right) = t_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + t_n \frac{\partial}{\partial u_n}$$

und

$$F' = \left(t \frac{\partial}{\partial u}\right) F$$

$$F'' = \left(t \frac{\partial}{\partial u}\right) F' = \left(t \frac{\partial}{\partial u}\right)^2 F$$

. . . .

Sind F und F' theilerfremd in $u_1, u_2, \ldots u_n$, so braucht man nur $\varphi = F$ zu setzen, um die Darstellung

$$F = \varphi$$

zu erhalten.

Haben F und F' einen Theiler von höherem als dem 0ten Grade in $u_1, u_2, \ldots u_n$ gemein, so können eintretendenfalls auch noch F, F', F'' oder F, F', F'', F''' u. s. w. einen solchen besitzen. Es sei λ die grösste Zahl von der Art, dass

$$F, F', \ldots F^{(\lambda-1)}$$

noch einen Theiler von höherem als dem 0ten Grade in $u_1, u_2, \ldots$ gemein haben, und φ der grösste gemeinschaftliche Theiler dieser Functionen. Es ist dann φ zu der Form

$$\varphi' = \left(t\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi$$

theilerfremd, da im Gegenfalle auch noch $F, F', \ldots F^{(\lambda)}$ einen Theiler gemein haben müssten.

F ist durch φ^λ theilbar. Denn es sei

$$F^{(i)} = A_i\varphi,$$

wenn $i < \lambda$. Aus der Identität

$$F^{(\lambda-2)} = A_{\lambda-2}\varphi$$

folgt durch Vollziehung der Operation $\left(t\,\frac{\partial}{\partial u}\right)$

$$F^{(\lambda-1)} = \varphi' A_{\lambda-2} + \varphi\left(t\,\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-2}$$

und man hat

$$\varphi' A_{\lambda-2} = \varphi A_{\lambda-1} - \varphi\left(t\,\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-2}.$$

$\varphi' A_{\lambda-2}$ muss also durch φ theilbar sein und daher auch $A_{\lambda-2}$ selbst. Wird

$$A_{\lambda-2} = B\varphi$$

gesetzt, so ergibt sich

$$F^{(\lambda-2)} = B\varphi^2.$$

Ist also $\lambda = 2$, so ist

$$F = B\varphi^2$$

und die Behauptung bewiesen.

Ist $\lambda > 2$, so folgt wieder aus der Identität

$$F^{(\lambda-3)} = A_{\lambda-3}\varphi$$

durch Vollziehung der Operation $\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)$

$$F^{(\lambda-2)} = \varphi' A_{\lambda-3} + \varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-3}$$

und man hat

$$\varphi' A_{\lambda-3} = B\varphi^2 - \varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)A_{\lambda-3}.$$

$A_{\lambda-3}$ muss also durch φ theilbar sein. Wird $A_{\lambda-3} = B_1\varphi$ gesetzt, so folgt

$$\varphi' B_1 = B\varphi - \left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)B_1\varphi$$

oder

$$2\varphi' B_1 = B\varphi - \varphi\left(t\frac{\partial}{\partial u}\right)B_1.$$

B_1 muss also ebenfalls durch φ theilbar sein. Setzt man $B_1 = C\varphi$, so ergibt sich

$$F^{(\lambda-3)} = C\varphi^3.$$

Fährt man in dieser Schlussweise fort, so ergibt sich

$$F = \varphi^\lambda G,$$

und es leuchtet ein, dass φ zu G theilerfremd ist.

Ist die Form G noch nicht vom Grade 0 in $u_1, u_2, \ldots u_n$, so ist sie in derselben Weise wie F zu behandeln.

So ist fortzufahren, bis man auf eine Form vom Grade 0 stosst.

22.

Aufgabe. Es sind $n-1$ Formen

$$f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$$

der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben; es sollen alle Lösungen der Gleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots f_{n-1} = 0,$$

d. h. alle Systeme von n Grössen ermittelt werden, welche nicht alle $= 0$ sind und, statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ gesetzt, diesen Gleichungen genügen. Zwei Lösungen

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$$
$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n$$

gelten nur dann als wesentlich verschieden, wenn die Grössen der einen nicht denen der anderen beziehungsweise proportional, wenn also nicht alle Determinanten

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1, \; \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1, \ldots$$

verschwinden. Vorausgesetzt wird, dass die Resultante

$$\Theta = \begin{bmatrix} f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix}$$

nicht identisch in $u_1, u_2, \ldots u_n$ verschwindet und dass $n > 2$ ist.

Ist

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$$

irgend eine Lösung der gegebenen Gleichungen und $\mathfrak{a}_h$ nicht $= 0$, so folgt aus der Identität

$$\Theta x_h^r = | f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, u_x |,$$

wenn

$$x_1 = \mathfrak{a}_1 \quad x_2 = \mathfrak{a}_2 \ldots x_n = \mathfrak{a}_n$$

gesetzt wird,

$$\Theta \mathfrak{a}_h^r = [u_\mathfrak{a}].$$

Θ ist demnach durch $u_\mathfrak{a}$ theilbar.

Um also alle Lösungen der gegebenen Gleichungen zu finden, hat man alle linear-homogenen Formen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ zu suchen, welche in Θ aufgehen. Zwei solche Formen gelten hiebei als unwesentlich verschieden, wenn sie proportionale Coëfficienten haben.

Der Ausdruck Θ ist nun wirklich in ν linear-homogene Factoren zerlegbar, wo ν das Product der Gradzahlen $m_1, m_2, \ldots$ von $f_1, f_2, \ldots$ oder den Grad von Θ bezeichnet.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Discriminante D der Formen $f_1, f_2, \ldots f_n$ einen von Null verschiedenen Werth hat oder verschwindet.

I. Es sei D von Null verschieden.

Setzt man

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_i} = \Theta_i$$

$$t_1 \Theta_1 + t_2 \Theta_2 + \ldots + t_n \Theta_n = \Theta_t(u_1, u_2, \ldots),$$

so sind die Functionen Θ, Θ_t in dem vorliegenden Falle theilerfremd in $u_1, u_2, \ldots u_n$, da andernfalls Θ einen mehrfachen Theiler hätte und D verschwinden würde. Die Resultante $M\Theta(v_1, v_2, \ldots)$ der Formen

$$\Theta(v_1 X + w_1 Y, \ldots), \; \Theta_t(v_1 X + w_1 Y, \ldots)$$

in Bezug auf X, Y verschwindet also nicht identisch in $v_1, v_2, \ldots w_1, w_2, \ldots$, und man kann für $v_1, v_2, \ldots w_1, w_2, \ldots$ besondere Werthe $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ von der Art setzen, dass M einen von Null verschiedenen Werth M_0 annimmt und zugleich $\Theta(a_1, a_2, \ldots)$ von Null verschieden ausfällt.

Es sei

$$\Theta(a_1 X + b_1, a_2 X + b_2, \ldots) = F(X)$$
$$\Theta_i(a_1 X + b_1, a_2 X + b_2, \ldots) = F_i(X).$$

Die Wurzeln $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ der Gleichung

$$F(X) = 0$$

sind alle verschieden, da

$$F'(X) = \Theta_a(a_1 X + b_1, a_2 X + b_2, \ldots)$$

und daher die Discriminante von $F(X) = M_0 \Theta(a_1, a_2, \ldots)$ ist.

Man hat für die Resultante $M_0 \Theta$ der Formen

$$\Theta(a_1 X + b_1 Y, \ldots), \; \Theta_u(a_1 X + b_1 Y, \ldots)$$

die Gleichung

$$M_0 \Theta = \Theta(a_1, a_2, \ldots)^{\nu-1} \prod_i \Theta_u(r_i a_1 + b_1, \ldots),$$

und es wird daher

$$\Theta = \frac{\Theta(a_1, a_2, \ldots)^{\nu-1}}{M_0} \prod_i (u_1 F_1(r_i) + u_2 F_2(r_i) + \ldots + u_n F_n(r_i))$$

Hiemit ist Θ in ν linear-homogene Factoren zerlegt.

Die gegebenen Gleichungen können also nur die ν Lösungen

$$x_1 = F_1(r_i) \; x_2 = F_2(r_i) \dots x_n = F_n(r_i)$$
$$i = 1, 2, 3, \dots \nu$$

besitzen.

Dass aber auch umgekehrt jedes dieser Werthsysteme eine Lösung bildet, folgt aus der Identität A. 18

$$f_k(\Theta_1, \Theta_2, \dots \Theta_n) = [\Theta],$$

wenn man

$$u_1 = a_1 r_i + b_1, \; u_2 = a_2 r_i + b_2, \dots$$

setzt.

Die ν Lösungen sind alle unter einander verschieden.

II. Es sei $D = 0$.

In diesem Falle verschwindet der durch D theilbare Ausdruck M, und die Formen Θ, Θ_t haben einen Factor von höherem als dem 0ten Grade in $u_1, u_2, \dots$ gemein. Man kann demnach

$$\Theta = P^\rho Q^\sigma \dots$$

setzen, wo $P, Q, \dots$ unter einander und beziehungsweise zu

$$P_t = t_1 \frac{\partial P}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial P}{\partial u_2} + \dots$$

$$Q_t = t_1 \frac{\partial Q}{\partial u_1} + t_2 \frac{\partial Q}{\partial u_2} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

theilerfremd sind und mindestens einer der Exponenten $\rho, \sigma, \dots$ die Einheit übersteigt.

Die Resultante der Formen

$$P(v_1 X + w_1 Y, \dots), \; P_u(v_1 X + w_1 Y, \dots)$$

in Bezug auf X, Y hat die Gestalt $\mathfrak{M}P$, wo $\mathfrak{M}$ eine nicht identisch verschwindende ganze Function der Determinanten $v_1 w_2 - v_2 w_1, \dots$ ist. Ähnliches gilt von der Resultante der Formen

$$Q(v_1 X + w_1 Y, \dots), \; Q_u(v_1 X + w_1 Y, \dots)$$

u. s. f. Man kann daher für $v_1, v_2, \ldots w_1, w_2, \ldots$ besondere Werthe $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ von der Art setzen, dass alle genannten Resultanten von Null verschiedene Werthe annehmen und zugleich $\Theta(a_1, a_2, \ldots)$ von Null verschieden ausfällt.

Man ziehe nun irgend einen der Factoren von Θ in Betracht, etwa P, und setze

$$P(a_1 X + b_1, \ldots) = F(X)$$
$$P_i(a_1 X + b_1, \ldots) = F_i(X),$$

wo

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial u_i}.$$

Die Gleichung

$$F(X) = 0$$

hat λ verschiedene Wurzeln

$$r_1, r_2, \ldots r_\lambda,$$

wenn P in $u_1, u_2, \ldots$ vom Grade λ ist, und man hat für die Resultante $\mathfrak{M}_0 P$ der Formen

$$P(a_1 X + b_1 Y, \ldots), \; P_n(a_1 X + b_1 Y, \ldots)$$

die Gleichung

$$\mathfrak{M}_0 P = P(a_1, a_2, \ldots)^{\lambda-1} \prod_i P_n(a_1 r_i + b_1, \ldots).$$

Hieraus folgt die Zerlegung

$$P = \frac{P(a_1, a_2, \ldots)^{\lambda-1}}{\mathfrak{M}_0} \prod_i (u_1 F_1(r_i) + u_2 F_2(r_i) + \ldots).$$

Da eine solche Zerlegung für jeden der Factoren $P, Q, \ldots$ von Θ statthat, so ist auch Θ in ν linear-homogene Factoren zerlegt.

Jedes der λ Werthsysteme

$$\begin{array}{c} F_1(r_1), \; F_2(r_1), \ldots F_n(r_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_1(r_\lambda), \; F_2(r_\lambda), \ldots F_n(r_\lambda) \end{array}$$

ist eine Lösung der gegebenen Gleichungen, da der Identität

$$f_k(P_1, P_2, \ldots P_n) = [P]$$

zufolge

$$f_k(F_1(r_i), F_2(r_i), \ldots) = [F(r_i)] = 0$$

ist. Man hat daher wieder ν Lösungen, wenn jede der vorstehenden, aus einem Factor P von Θ hervorgehenden Lösungen so oft gezählt wird, als der Exponent Einheiten enthält, mit welchem P in der Zerlegung von Θ vorkommt.

Es gibt also in allen Fällen, wo Θ nicht identisch verschwindet, eine Zerlegung von der Gestalt

$$\Theta = u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{b}} \ldots u_{\mathfrak{e}},$$

und man hat für je zwei Coëfficienten A und $\mathfrak{A}$, A' und $\mathfrak{A}'$, ..., welche in Θ und $u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{b}} \ldots u_{\mathfrak{e}}$ bei denselben Potenzproducten ν^{ten} Grades von $u_1, u_2, \ldots$ stehen

$$A = \mathfrak{A},\ A' = \mathfrak{A}', \ldots$$

Ist f_n eine allgemeine Form von $x_1, x_2, \ldots x_n$, R die Resultante der Formen $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n$ und wird

$$f_n(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots) = f_n(\mathfrak{a})$$
$$f_n(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots) = f_n(\mathfrak{b})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gesetzt, so hat man nach A. 5, Th. I

$$\Theta^{p-m_n} R = N(A, A', \ldots)$$
$$(u_{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{b}} \ldots)^{p-m_n} f_n(\mathfrak{a}) f_n(\mathfrak{b}) \ldots f_n(\mathfrak{e}) = N(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \ldots).$$

Hieraus folgt

$$R = f_n(\mathfrak{a}) f_n(\mathfrak{b}) \ldots f_n(\mathfrak{e}).$$

23.

Wenn n homogene Gleichungen mit n Unbekannten

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \ldots f_n = 0$$

eine gemeinsame Lösung

$$x_1 = \mathfrak{a}_1 \quad x_2 = \mathfrak{a}_2 \ldots x_n = \mathfrak{a}_n$$

besitzen, so verschwindet die Resultante

$$R = \begin{vmatrix} f_1, f_2, \ldots f_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{vmatrix}.$$

Denn aus der Identität

$$Rx_h^r = |f_1, f_2, \ldots f_n|$$

folgt, wenn $\mathfrak{a}_h$ nicht $= 0$ ist,

$$R\mathfrak{a}_h^r = 0,$$

also $R = 0$.

24.

m homogene Gleichungen

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \ldots f_m = 0$$

mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ besitzen, wenn $m < n-1$ ist und die Resultante $\Theta(uv\ldots w)$ von $f_1, f_2, \ldots f_m$ und $n-m$ allgemeinen linearen Formen $u_x, v_x, \ldots w_x$ nicht identisch verschwindet, unendlich viele Lösungen, welche eine $n-m-1$-fache Mannigfaltigkeit bilden.

Man kann $n-m-1$ beliebige lineare Gleichungen

$$a_x = 0 \quad b_x = 0 \ldots d_x = 0$$

von der Art hinzunehmen, dass $\Theta(ab\ldots du)$ nicht identisch in $u_1, u_2, \ldots$ verschwindet, und erhält durch Auflösung der Gleichungen

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \ldots f_m = 0 \quad a_x = 0 \ldots d_x = 0$$

eine oder mehrere Lösungen.

25.

Aufgabe.[1] Es ist irgend eine Anzahl von homogenen Gleichungen

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \ldots f_m = 0$$

mit den Unbekannten

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

[1] Vergl. Kronecker's Festschrift, §. 10.

gegeben. Es sollen alle Lösungen derselben ermittelt oder doch festgestellt werden, dass es keine solche gibt.

Es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ die Gradzahlen der Formen $f_1, f_2, \ldots f_m$ und $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\epsilon$ diejenigen unter diesen Formen, welche die höchste Gradzahl μ besitzen. Man stelle die Formenreihe

$$f_1', f_2', \ldots f_r'$$

auf, welche aus den Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\epsilon$ und, falls unter $f_1, f_2, \ldots f_m$ noch Formen $f_\rho, f_\sigma, \ldots$ von geringerem als dem μ^{ten} Grade vorkommen, aus den Producten

$$\begin{array}{l} x_1^{\mu-\mu_\rho} f_\rho,\; x_2^{\mu-\mu_\rho} f_\rho, \ldots x_n^{\mu-\mu_\rho} f_\rho \\ x_1^{\mu-\mu_\sigma} f_\sigma,\; x_2^{\mu-\mu_\sigma} f_\sigma, \ldots x_n^{\mu-\mu_\sigma} f_\sigma \\ \dotfill \end{array}$$

besteht, so dass alle Formen $f_1', f_2', \ldots f_r'$ von demselben Grade μ sind. Aus den Formen

$$f_1', f_2', \ldots f_r'$$

bilde man mittelst unbestimmter Coëfficienten $t_{11}, t_{12}, \ldots t_{nr}$ die n Formen

$$\begin{array}{l} g_1 = t_{11} f_1' + t_{12} f_2' + \ldots + t_{1r} f_r' \\ g_2 = t_{21} f_1' + t_{22} f_2' + \ldots + t_{2r} f_r' \\ \dotfill \\ g_n = t_{n1} f_1' + t_{n2} f_2' + \ldots + t_{nr} f_r' \end{array}$$

und aus diesen die Resultanten

$$R_0 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_n \\ x_1, x_2, \ldots x_n \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, y_1 \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-2}, y_1, y_2 \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_{n-1}, x_n \end{bmatrix}$$

$$\dotfill,$$

wo $y_1, y_2, \ldots$ allgemeine lineare Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten. Die Resultante R_0 möge kurz als Resultante 0ter Stufe und die Resultante von $n-k$ Formen der Reihe $g_1, g_2, \ldots$ und k

allgemeinen linearen Formen als Resultante $k$ter Stufe bezeichnet werden.

Besitzen die gegebenen Gleichungen gemeinsame Lösungen und ist $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ eine solche, so genügt dieselbe den Gleichungen

$$g_1 = 0 \quad g_2 = 0 \ldots g_n = 0,$$

und die Resultante R_0 muss identisch in allen Unbestimmten $t_{11}, t_{12}, \ldots$ verschwinden.

Man hat hienach verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I. Die Resultante R_0 verschwindet nicht identisch.

In diesem Falle besitzen die gegebenen Gleichungen keine gemeinschaftliche Lösung.

II. R_0 verschwindet identisch in den Unbestimmten

$$t_{11}, t_{12}, \ldots t_{nr},$$

aber die Resultante erster Stufe

$$R_1 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots \qquad x_n \end{bmatrix}$$

nicht identisch in

$$t_{11}, t_{12}, \ldots t_{n-1\,r}, u_1, u_2, \ldots u_n.$$

Haben die gegebenen Gleichungen gemeinschaftliche Lösungen und ist $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ eine solche, so erfüllt dieselbe die Gleichungen

$$g_1 = 0 \quad g_2 = 0 \ldots g_{n-1} = 0$$

und die Resultante R_1 enthält, wie die Identität

$$R x_n^{l} = [g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, u_x]$$

nach Ersetzung von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ zeigt, den von den Unbestimmten

$$t_{11}, t_{12}, \ldots t_{n-1\,r}$$

unabhängigen Factor $u_{\mathfrak{a}}$. Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzproducte dieser Unbestimmten müssen also alle einen gemeinsamen Factor in $u_1, u_2, \ldots u_n$ besitzen.

Dies ist nun wirklich der Fall.

Man bilde die Resultante

$$R_1' = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-2}, g_n, u_x \\ x_1, x_2, \ldots \quad x_n \end{bmatrix}$$

und bezeichne die Resultate, welche aus R_1, R_1' durch Verwandlung von

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

in

$$p_1 X + q_1 Y,\; p_2 X + q_2 Y, \ldots p_n X + q_n Y$$

hervorgehen, mit

$$R_1(p_1 X + q_1 Y, \ldots),\; R_1'(p_1 X + q_1 Y, \ldots).$$

Die Resultante

$$\Omega = \begin{bmatrix} R_1(p_1 X + q_1 Y, \ldots), & R_1'(p_1 X + q_1 Y, \ldots) \\ X & , \quad Y \end{bmatrix}$$

ist nach A. 17 durch R_0 algebraisch theilbar, also identisch 0 in $p_1, p_2, \ldots q_1, q_2, \ldots q_n, t_{11}, t_{12}, \ldots$ und die Ausdrücke R_1, R_1' müssen demzufolge einen Factor von höherem als dem 0ten Grade in $u_1, u_2, \ldots u_n$ gemein haben.

Es sei T der grösste gemeinschaftliche Factor von R_1 und R_1' in allen Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n, t_{11}, t_{21}, \ldots t_{nr}$. Derselbe enthält die Unbestimmten

$$t_{n1}, t_{n2}, \ldots t_{nr}$$

nicht, weil er in R_1 aufgeht, und die Unbestimmten

$$t_{n-1\,1}, t_{n-1\,2}, \ldots t_{n-1\,r}$$

nicht, weil er in R_1' aufgeht. Er kann also überhaupt keine der Unbestimmten $t_{11}, t_{12}, \ldots t_{nr}$ enthalten, weil dieselben nach A. 11, Th. I in R_1 nur innerhalb der Determinanten $n-1$ter Ordnung des Elementesystems

$$\begin{matrix} t_{11} & t_{12} & \ldots t_{1r} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots t_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n-1\,1} & t_{n-1\,2} & \ldots t_{n-1\,r} \end{matrix}$$

vorkommen.

Setzt man

$$R_1 = TQ$$
$$R_1' = TQ',$$

so kann Q keinen von den Unbestimmten $t_{11}, t_{12}, \ldots$ freien Factor in $u_1, u_2, \ldots u_n$ mehr besitzen, da ein solcher auch in Q' aufgehen müsste, während Q, Q' theilerfremd sind. Es sind also auch T und Q in $u_1, u_2, \ldots u_n$ theilerfremd. Nach früheren Sätzen (A. 22) ist T in lineare Factoren

$$u_{\mathfrak{a}}, u_{\mathfrak{b}}, \ldots u_{\mathfrak{c}}$$

zerfällbar. Die Werthysysteme

$$\begin{array}{c} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n \\ \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n \\ \ldots\ldots \\ \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{c}_n \end{array}$$

sind dann von den Unbestimmten $t_{11}, t_{12}, \ldots$ unabhängig und die einzigen möglichen gemeinschaftlichen Lösungen der gegebenen Gleichungen. Dass diese Werthsysteme in der That Lösungen sind, folgt daraus, dass für alle möglichen Werthe von $t_{11}, t_{12}, \ldots$

$$\begin{array}{c} g_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \\ g_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_n) = 0 \end{array}$$

und daher auch, weil $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n, \ldots \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \mathfrak{c}_n$ von $t_{11}, t_{12}, \ldots$ unabhängig sind,

$$f_1'(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \qquad f_2'(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \ldots$$
$$f_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \qquad f_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \ldots$$

ist. Ebenso folgt

$$f_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n) = 0 \qquad f_2(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n) = 0 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

III. Die Resultante erster Stufe

$$R_1 = \begin{vmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-1}, u_x \\ x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, aber nicht die Resultante zweiter Stufe

$$R_2 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-2}, u_x, v_x \\ x_1, x_2, \ldots \qquad x_n \end{bmatrix}.$$

Man setze

$$R'_2 = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \ldots g_{n-3}, g_{n-1}, u_x, v_x \\ x_1, x_2, \ldots \qquad x_n \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} R_2(p_1 X + q_1 Y, \ldots), & R'_2(p_1 X + q_1 Y, \ldots) \\ X & , \qquad Y \end{bmatrix},$$

wo

$$R_2(p_1 X + q_1 Y, \ldots)$$
$$R'_2(p_1 X + q_1 Y, \ldots)$$

durch Verwandlung von

$$v_1, v_2, \ldots v_n$$

in

$$p_1 X + q_1 Y, \; p_2 X + q_2 Y, \ldots p_n X + q_n Y$$

aus R_2, R'_2 hervorgehen. Ω ist durch R_1 algebraisch theilbar und verschwindet daher in dem vorliegenden Falle identisch. R_2 und R'_2 müssen also einen Factor von höherem als dem 0ten Grade in $v_1, v_2, \ldots v_n$ gemein haben.

Ist T der grösste gemeinschaftliche Factor von R_2 und R'_2, so erhellt wie vorher, dass T die Unbestimmten $t_{11}, t_{12}, \ldots$ nicht enthält. Da ferner R_2, R'_2 die Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_n$, $v_1, v_2, \ldots v_n$ nur innerhalb der Determinanten II. Ordnung

$$(u_1 v_2) = u_1 v_2 - u_2 v_1, \; (u_1 v_3) = u_1 v_3 - u_3 v_1, \ldots$$

enthalten, so gilt dasselbe von T. Denn T muss ungeändert bleiben sowohl, wenn

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

durch

$$u_1 + t v_1, \; u_2 + t v_2, \ldots u_n + t v_n,$$

als auch, wenn

$$v_1, v_2, \ldots v_n$$

durch

$$v_1 + t u_1, \; v_2 + t u_2, \ldots v_n + t u_n$$

ersetzt werden, wo t eine Unbestimmte bezeichnet. Es muss also

$$v_1 \frac{\partial T}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial u_2} + \ldots + v_n \frac{\partial T}{\partial u_n} = 0$$

$$u_1 \frac{\partial T}{\partial v_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial v_2} + \ldots + u_n \frac{\partial T}{\partial v_n} = 0$$

sein, welche Gleichungen für die Darstellbarkeit von T durch die genannten Determinanten hinreichend sind.

Setzt man

$$R_2 = TQ,$$

$$R'_2 = TQ',$$

so sind Q, Q' ebenfalls blosse Functionen der Determinanten $(u_1 v_2)$, $(u_1 v_3), \ldots$, und man hat nach A. 10, Th. I identisch

$$R_2(t_x(u_1 v_2) - u_x(t_1 v_2) + v_x(t_1 u_2), \ldots) \\ = [g_1, g_2, \ldots g_{n-2}].$$

Für jede Lösung $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ der gegebenen Gleichungen hat man daher identisch in allen in Betracht kommenden Unbestimmten

$$R_2(t_\mathfrak{a}(u_1 v_2) - u_\mathfrak{a}(t_1 v_2) + v_\mathfrak{a}(t_1 u_2), \ldots) = 0,$$

und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ müssen einer der beiden Gleichungen

$$T(t_x(u_1 v_2) - u_x(t_1 v_2) + v_x(t_1 u_2), \ldots) = 0$$

$$Q(t_x(u_1 v_2) - u_x(t_1 v_2) + v_x(t_1 u_2), \ldots) = 0$$

genügen.

Hienach kann es zweierlei Lösungen der gegebenen Gleichungen geben, und es mögen die Lösungen, welche der ersten der vorstehenden Gleichungen genügen, kurz Hauptlösungen, die der anderen Gleichung genügenden Lösungen Nebenlösungen genannt werden. Es ist nicht ausgeschlossen, dass eine Lösung zugleich Haupt- und Nebenlösung ist.

Nebenlösungen kann es selbstverständlich nur geben, wenn Q in den Determinanten $(u_1 v_2)$, $(u_1 v_3), \ldots$ mindestens vom ersten Grade ist.

Denkt man sich die Ausdrücke

$$T(t_x(u_1v_2)-u_x(t_1v_2)+v_x(t_1u_2),\ldots)$$
$$Q(t_x(u_1v_2)-u_x(t_1v_2)+v_x(t_1u_2),\ldots)$$

nach den Potenzproducten aller Unbestimmten ausser $x_1, x_2, \ldots x_n$ entwickelt und die Coëfficienten dieser Entwickelung mit

$$\varphi_x,\ \varphi'_x,\ \varphi''_x,\ldots$$

beziehungsweise

$$\psi_x,\ \psi'_x,\ \psi''_x,\ldots$$

bezeichnet, so fallen die Hauptlösungen mit den Lösungen der Gleichungen

$$\varphi_x=0\quad \varphi'_x=0\quad \varphi''_x=0\ldots,$$

die Nebenlösungen mit den Lösungen der Gleichungen

$$\psi_x=0\quad \psi'_x=0\quad \psi''_x=0\ldots$$

zusammen. Jede Lösung $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ eines dieser Gleichungssysteme, etwa des ersten, ist in der That eine Lösung der gegebenen Gleichungen. Denn es wird, wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ so bestimmt werden, dass

$$a_\mathfrak{a}=a_1\mathfrak{a}_1+a_2\mathfrak{a}_2+\ldots+a_n\mathfrak{a}_n=0$$

ist und $R_2((a_1u_2),\ldots)$ nicht identisch in $u_1, u_2, \ldots$ verschwindet,

$$T(a_\mathfrak{a}(u_1v_2)-u_\mathfrak{a}(a_1v_2)+v_\mathfrak{a}(a_1u_2),\ldots)=0,$$

weil die linke Seite eine linear-homogene Verbindung von $\varphi_\mathfrak{a}, \varphi'_\mathfrak{a}, \varphi''_\mathfrak{a}, \ldots$ bildet. Es ist daher auch

$$T(-u_\mathfrak{a}(a_1v_2)+v_\mathfrak{a}(a_1u_2),\ldots)=0,$$

also

$$v_\mathfrak{a}^\nu T((a_1u_2),\ldots)=[u_\mathfrak{a}],$$

wo ν den Grad von T in den Determinanten $(u_1v_2)\ldots$ bedeutet.

$T((a_1u_2),\ldots)$ enthält demnach den Factor $u_\mathfrak{a}$. Dasselbe gilt also auch von $R_2((a_1u_2),\ldots)$, und man hat

$$g_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots\mathfrak{a}_n)=0$$
$$f_1(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots\mathfrak{a}_n)=0\quad f_2(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\ldots\mathfrak{a}_n)=0,\ldots.$$

Die etwaigen Nebenlösungen können nur in endlicher Anzahl vorkommen. Um dieselben zu erhalten, wende man auf die Gleichungen

$$\psi_x = 0 \quad \psi'_x = 0 \dots$$

dasselbe Verfahren wie auf die gegebenen an.

Zu diesem Zwecke hat man wieder mittelst unbestimmter Coëfficienten $t_1, t'_1, \dots t_2, t'_2, \dots t_n, t'_n, \dots$ n Formen

$$\begin{aligned} h_1 &= t_1 \psi_x + t'_1 \psi'_x + \dots \\ h_2 &= t_2 \psi_x + t'_2 \psi'_x + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ h_n &= t_n \psi_x + t'_n \psi'_x + \dots \end{aligned}$$

herzustellen und die Resultante der verschiedenen Stufen dieser Formen zu untersuchen.

Die Resultante erster Stufe verschwindet hier nicht identisch. Da nämlich Q, Q' theilerfremd in $v_1, v_2, \dots v_n$ sind, wenn $u_1, u_2, \dots u_n$ unbestimmt sind, so verschwindet die Resultante

$$S = \begin{bmatrix} Q(p_1 X + q_1 Y, \dots), & Q'(p_1 X + q_1 Y, \dots) \\ X & , \qquad Y \end{bmatrix}$$

nicht identisch in $u_1, u_2, \dots u_n$ und man kann besondere Werthe $a_1, a_2, \dots a_n$ von der Art ermitteln, dass die genannte Resultante nach Ersetzung von $u_1, u_2, \dots u_n$ durch $a_1, a_2, \dots a_n$ von Null verschieden ausfällt.

Die Gleichungen

$$\psi_x = 0 \quad \psi'_x = 0 \dots a_x = 0$$

haben dann keine gemeinschaftliche Lösung, da für eine solche Lösung $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots \mathfrak{a}_n$ nach dem Vorhergehenden $Q((a_1 v_2), \dots)$ den Factor v_2 enthielte. Dasselbe wäre dann auch mit $Q'((a_1 v_2), \dots)$ der Fall und die Resultante S würde für

$$u_1 = a_1 \quad u_2 = a_2 \dots u_n = a_n$$

identisch verschwinden, was der Wahl von $a_1, a_2, \dots a_n$ widerspricht.

Es kann also hier nur der Fall I oder II stattfinden und man kann entweder feststellen, dass es keine Nebenlösung gibt oder aber alle Nebenlösungen angeben.

Alle etwaigen Lösungen, welche zugleich Haupt- und Nebenlösungen sind, gewinnt man durch Behandlung des vereinigten Gleichungssystems

$$\varphi = 0 \quad \varphi' = 0 \ldots \psi = 0 \quad \psi' = 0 \ldots.$$

Hauptlösungen gibt es immer in unendlicher Anzahl. Wählt man nämlich $a_1, a_2, \ldots a_n$ so, dass die Gleichung

$$a_x = 0$$

für keine eigentliche Nebenlösung erfüllt ist und der Ausdruck $T((a_1 v_2), \ldots)$ nicht identisch in $v_1, v_2, \ldots v_n$ verschwindet, so ist letzterer in lineare Factoren $v_{\mathfrak{a}}, v_{\mathfrak{b}}, \ldots$ zerfällbar, und man hat

$$g_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0$$
$$g_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

also

$$f_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0, \quad f_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \ldots$$
$$f_1(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n) = 0, \quad f_2(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n) = 0 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da aber überdies

$$a_{\mathfrak{a}} = 0 \quad a_{\mathfrak{b}} = 0 \ldots$$

ist, so können

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$$
$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

keine eigentlichen Nebenlösungen sein und müssen Hauptlösungen bilden.

IV. Es verschwinde allgemein die Resultante $k-1^{\text{ter}}$ Stufe R_{k-1}, dagegen nicht die Resultante k^{ter} Stufe R_k, wo

$$2 < k < n.$$

Man setze

$$R_k = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \dots g_{n-k}, u_x & \dots & v_x & , w_x \\ x_1, x_2, \dots x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots & & x_{n-1}, & x_n \end{bmatrix}$$

$$R'_k = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \dots g_{n-k-1}, g_{n-k+1}, u_x, \dots v_x, w_x \\ x_1, x_2, \dots \qquad\qquad x_n \end{bmatrix}$$

$$R_{k-1} = \begin{bmatrix} g_1, g_2, \dots g_{n-k+1}, u_x, \dots v_x \\ x_1, x_2, \dots \qquad x_n \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} R_k(p_1 X + q_1 Y, \dots), & R'_k(p_1 X + q_1 Y, \dots) \\ X & , & Y \end{bmatrix},$$

wo

$$R_k(p_1 X + q_1 Y, \dots), \; R'_k(p_1 X + q_1 Y, \dots)$$

aus R_k, R'_k durch Verwandlung von

$$w_1, w_2, \dots w_n$$

in

$$p_1 X + q_1 Y, \; p_2 X + q_2 Y, \dots$$

hervorgehen.

Ω ist durch R_{k-1} algebraisch theilbar, also identisch Null, und R_k, R'_k haben einen Factor von höherem als dem 0ten Grade in $w_1, w_2, \dots$ gemein. Ist T der grösste gemeinschaftliche Factor von R_k und R'_k, so erhellt, wie vorher, dass T keine der Unbestimmten $t_{11}, t_{12}, \dots t_{n-k,r}$ und die Unbestimmten $u_1, u_2, \dots$ $v_1, v_2, \dots w_1, w_2, \dots$ nur innerhalb der Determinante $k$ter Ordnung

$$(u_1 v_2 \dots w_k), \dots$$

des Elementesystems

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, \dots u_n \\ v_1, & v_2, \dots v_n \\ \dots & \dots \\ w_1, & w_2, \dots w_n \end{matrix}$$

enthalten kann.

Setzt man

$$R_k = TQ,$$
$$R'_k = TQ',$$

so sind auch Q, Q' blosse Functionen der Determinanten $(u_1 v_2 \ldots w_k), \ldots$, und es ist, wenn R_k, T, Q, Q' als Functionen dieser Determinanten kurz mit

$$R_k((u_1 v_2 \ldots w_k), \ldots)$$
$$T\ ((u_1 v_2 \ldots w_k), \ldots)$$
$$Q\ ((u_1 v_1 \ldots w_k), \ldots)$$
$$Q'\ ((u_1 v_1 \ldots w_k), \ldots)$$

bezeichnet werden, nach A. 10, Th. I identisch

$$R_k(t_x(u_1 \ldots v_{k-1} w_k) - u_x(t_1 \ldots w_k) + \ldots \pm w_x(t_1 u_2 \ldots v_k)) \\ = [g_1, g_2, \ldots g_{n-k}].$$

Für jede Lösung $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ der gegebenen Gleichungen ist daher entweder

$$T(t_x(u_1 \ldots v_{k-1} w_k) - u_x(t_1 \ldots v_{k-1} w_k) + \ldots \pm w_x(t_1 u_2 \ldots v_k), \ldots) = 0$$

oder

$$Q(t_x(u_1 \ldots v_{k-1} w_k) - u_x(t_1 \ldots v_{k-1} w_k) + \ldots \pm w_x(t_1 u_2 \ldots v_k), \ldots) = 0,$$

und man kann wieder die der ersten Gleichung genügenden Lösungen kurz als Hauptlösungen, die der zweiten Gleichung genügenden als Nebenlösungen bezeichnen.

Nebenlösungen kann es nur geben, wenn Q die Determinanten $(u_1 \ldots v_{k-1} w_k), \ldots$ mindestens im ersten Grade enthält.

Entwickelt man wieder die Ausdrücke

$$T(t_x(u_1 \ldots v_{k-1} w_k) - u_x(t_1 \ldots v_{k-1} w_k) + \ldots)$$
$$Q(t_x(u_1 \ldots v_{k-1} w_k) - u_x(t_1 \ldots v_{k-1} w_k) + \ldots)$$

nach den Potenzproducten aller Unbestimmten ausser $x_1, x_2, \ldots x_n$ und bezeichnet die Coëfficienten mit

$$\varphi_x, \varphi'_x, \varphi''_x, \ldots$$
$$\psi_x, \psi'_x, \psi''_x, \ldots,$$

so fallen die Hauptlösungen mit den Lösungen der Gleichungen

$$\varphi_x = 0 \quad \varphi'_x = 0 \ldots,$$

die Nebenlösungen mit den Lösungen der Gleichungen

$$\psi_\nu = 0 \quad \psi'_\nu = 0 \ldots$$

zusammen. Denn jede Lösung $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ eines dieser Gleichungssysteme, etwa des zweiten, genügt, wenn man $k-1$ Lösungen

$$\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots a_n \\ b_1, b_2, \ldots b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_1, d_2, \ldots d_n \end{array}$$

der Gleichung

$$\mathfrak{a}_1 s_1 + \mathfrak{a}_2 s_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n s_n = 0$$

so bestimmt, dass

$$R_k((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots)$$

nicht identisch verschwindet, der Gleichung

$$Q(t_\mathfrak{a}(a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k) - a_\mathfrak{a}(t_1 b_2 \ldots w_k) + \ldots \pm w_\mathfrak{a}(t_1 a_2 \ldots d_k), \ldots)$$
$$= Q(t_\mathfrak{a}(a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k) \pm w_\mathfrak{a}(t_1 a_2 \ldots d_k), \ldots) = 0 \quad .$$

und man hat

$$t_\mathfrak{a}^\nu \, Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k) \ldots) = [w_\mathfrak{a}],$$

wo ν den Grad von Q in den Determinanten $(u_1 \ldots v_{k-1} w_k)$ bedeutet. Der Ausdruck $Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots)$ hat also den von den Unbestimmten $t_{11}, t_{12}, \ldots$ unabhängigen Factor $w_\mathfrak{a}$. Dasselbe gilt somit auch von $R_k((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots)$ und man hat

$$g_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0$$

$$f_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \quad f_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \ldots$$

Die etwaigen Nebenlösungen gewinnt man, indem man auf die Gleichungen

$$\psi_\lambda = 0 \quad \psi'_\lambda = 0 \ldots$$

dasselbe Verfahren wie auf die gegebenen anwendet. Diese Gleichungen sind aber insofern einfacher als die gegebenen, als

die Resultante $k-1^{\text{ter}}$ Stufe für dieselben nicht verschwindet. Wählt man nämlich die $k-1$ Werthsysteme

$$\begin{matrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \\ \cdots\cdots \\ d_1 d_2 \ldots d_n \end{matrix}$$

so, dass die Resultante

$$S = \begin{bmatrix} Q(p_1 X + q_1 Y, \ldots), & Q'(p_1 X + q_1 Y, \ldots) \\ X & , & Y \end{bmatrix}$$

nicht verschwindet, wenn

$$\begin{matrix} u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_1 = d_1, \quad v_2 = d_2, \ldots \end{matrix}$$

gesetzt wird, — was immer möglich ist, weil S nicht identisch in $u_1, u_2, \ldots u_n, v_1, v_2, \ldots v_n, p_1, \ldots q_1 \ldots$ verschwindet, so können die Gleichungen

$$\begin{matrix} \psi_x = 0 \quad \psi'_x = 0 \ldots \\ a_x = 0 \quad b_x = 0 \ldots d_x = 0 \end{matrix}$$

keine gemeinschaftliche Lösung besitzen. Denn für eine solche Lösung $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ wäre nach dem Obigen

$$Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots) = [w_\mathfrak{a}],$$

also auch

$$Q'((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots) = [w_\mathfrak{a}]$$

und daher

$$S = 0$$

für

$$\begin{matrix} u_1 = a_1 \quad u_2 = a_2 \ldots u_n = a_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_1 = d_1 \quad v_2 = d_2 \ldots v_n = d_n, \end{matrix}$$

was mit der Wahl von $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ in Widerspruch steht

Hauptlösungen gibt es unendlich viele. Man wähle

$$a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots d_1, d_2, \ldots$$

beliebig, aber so, dass S und R_k für

$$u_1 = a_1 \quad u_2 = a_2 \ldots u_n = a_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_1 = d_1 \quad v_2 = d_2 \ldots v_n = d_n$$

nicht identisch verschwinden.

$T((a_1 b_2 \ldots w_k), \ldots)$ ist dann in lineare Factoren $w_a, w_b, \ldots$ zerlegbar. Ist w_a einer dieser Factoren, so ist $R_k((a_1 b_2 \ldots w_k) \ldots)$ durch denselben theilbar, also

$$f_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \quad f_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n) = 0 \ldots$$

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ können aber keine Nebenlösung bilden, weil für eine solche

$$Q((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots)$$
$$Q'((a_1 b_2 \ldots d_{k-1} w_k), \ldots)$$

den Factor w_a gemein hätten, was der Wahl von $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots d_1, d_2, \ldots d_n$ widerspricht.

Folgerung.

Wenn die Resultante R von n homogenen Gleichungen

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \ldots \quad f_n = 0$$

verschwindet, so haben dieselben mindestens eine Lösung gemein. Denn in diesem Falle ist die Resultante 0ter Stufe R_0 durch R theilbar, also $= 0$, und es findet einer der Fälle II, III, ... statt.

Über die Lage der astigmatischen Bildflächen bei optischen Systemen

von

Dr. **H. Harting** in Braunschweig,

Director der optischen Anstalt Voigtländer & Sohn, A. G.

Unter gewissen Bedingungen lassen sich die u. a. in S. Czapski's Buch: »Theorie der optischen Instrumente nach Abbe«[1] entwickelten Ausdrücke für Astigmatismus und Bildfeldwölbung optischer Systeme [vergl. ebenda, S. 109 (5) und (6)] bedeutend vereinfachen und leisten so für die numerische Rechnung erspriessliche Dienste. Es sollen im Folgenden nachstehende Bezeichnungen eingeführt werden:

r_k der Radius der k^{ten} brechenden Fläche;

s_k und s'_k die Schnittweiten des vom Object ausgehenden und an der $(k-1)^{\text{ten}}$, bezüglich k^{ten} Fläche gebrochenen paraxialen Strahles, gerechnet vom Scheitel der k^{ten} Fläche;

x_k und x'_k die Schnittweiten des vom Blendenmittelpunkte ausgehenden und an der $(k-1)^{\text{ten}}$, bezüglich k^{ten} Fläche gebrochenen paraxialen Hauptstrahles, gerechnet vom Scheitel der k^{ten} Fläche;

h_k und y_k die Höhen, in denen die k^{te} Fläche von dem paraxialen Object-, bezüglich Hauptstrahl geschnitten wird;

n_k der Brechungsquotient des zwischen der k^{ten} und $(k+1)^{\text{ten}}$ Fläche befindlichen Mediums, n_0 der des Mediums, in dem sich Object und Blende befinden;

r_s und r_t die Scheitelkrümmungshalbmesser der sagittalen (äquatorealen), bezüglich tangentialen (meridionalen)

---

[1] Breslau, Verlag von Eduard Trewendt, 1893.

astigmatischen Bildflächen, f die **Brennweite** des ganzen Systems, f_k die der k^{ten} Linse.

Die griechischen Buchstaben dienen zur Bezeichnung der reciproken Werthe der angeführten Grössen.

Dann werden die optischen Invarianten:

$$Q_{s_k} = n_{k-1}(\rho_k - \sigma_k) = n_k(\rho_k - \sigma'_k).$$
$$Q_{t_k} = n_{k-1}(\rho_k - \tau_k) = n_k(\rho_k - \tau'_k).$$

Bezeichnen wir die Differenz eines Ausdruckes vor und nach der Brechung an einer Fläche durch ein vorgesetztes Δ, so wird die durch die Brechung an der k^{ten} Fläche bewirkte Krümmungszunahme für die im **Äquatorealschnitt** gelegenen Strahlen:

$$\Delta\left(\frac{\rho_{s_k}}{n_k}\right) = \rho_k \Delta\left(\frac{1}{n_k}\right) - \left(\frac{Q_{t_k}}{Q_{t_k} - Q_{s_k}}\right)^2 \Delta\left(\frac{\sigma_k}{n_k}\right),$$

für die im **Meridionalschnitt** gelegenen:

$$\Delta\left(\frac{\rho_{t_k}}{n_k}\right) = \rho_k \Delta\left(\frac{1}{n_k}\right) - 3\left(\frac{Q_{t_k}}{Q_{t_k} - Q_{s_k}}\right)^2 \Delta\left(\frac{\sigma_k}{n_k}\right).$$

Wir erhalten schliesslich durch Summation über alle Flächen unter der Annahme, dass das Object eben und das Bild sich in Luft befindet, für die Reciproken der Krümmungsradien:

$$\rho_s = \sum_k \rho_k \Delta\left(\frac{1}{n_k}\right) - \sum_k \left(\frac{Q_{t_k}}{Q_{t_k} - Q_{s_k}}\right)^2 \Delta\left(\frac{\sigma_k}{n_k}\right)$$

und

$$\rho_t = \sum_k \rho_k \Delta\left(\frac{1}{n_k}\right) - 3\sum_k \left(\frac{Q_{t_k}}{Q_{t_k} - Q_{s_k}}\right)^2 \Delta\left(\frac{\sigma_k}{n_k}\right).$$

Diesen Formeln liegt die Annahme zu Grunde, dass die vom Blendenmittelpunkt ausfahrenden Hauptstrahlen **kleine** Winkel mit der optischen Axe bilden; dagegen gelten sie auch für Linsen, deren Dicken **nicht** als unendlich klein angenommen sind. Bemerkenswerth ist die ausserordentliche Einfachheit dieser Gleichungen, die nur durch die Einführung der optischen Invarianten nach **Abbe** zu erreichen war, im Gegensatz zu den schwerfälligen Herleitungen früherer Autoren.

Aus den Definitionsgleichungen der Q folgt nun sofort:

$$Q_{x_k} = n_{k-1}\rho_k - (n_{k-1} - n_{k-2})\frac{y_{k-1}}{y_k}\rho_{k-1} - (n_{k-2} - n_{k-3})\frac{y_{k-2}}{y_k}\rho_{k-2} - \dots$$

$$- (n_1 - n_0)\frac{y_1}{y_k}\rho_1 - n_0\xi_1\frac{y_1}{y_k};$$

$$Q_{s_k} = n_{k-1}\rho_k - (n_{k-1} - n_{k-2})\frac{h_{k-1}}{h_k}\rho_{k-1} - (n_{k-2} - n_{k-3})\frac{h_{k-2}}{h_k}\rho_{k-2} - \dots$$

$$- (n_1 - n_0)\frac{h_1}{h_k}\rho_1 - n_0\sigma_1\frac{h_1}{h_k}.$$

Jetzt mache ich, um die beiden Invarianten in Zusammenhang zu bringen, die weitere Voraussetzung, dass sämmtliche Linsen unendlich dünn seien; dann werden die Quotienten $\frac{y_{k-1}}{y_k}, \frac{y_{k-2}}{y_k} \dots, \frac{h_{k-1}}{h_k}, \frac{h_{k-2}}{h_k} \dots$ Eins und ich erhalte:

$$Q_{x_k} = n_{k-1}\rho_k - (n_{k-1} - n_{k-2})\rho_{k-1} \dots - (n_1 - n_0)\rho_1 - n_0\xi_1$$
$$Q_{s_k} = n_{k-1}\rho_k - (n_{k-1} - n_{k-2})\rho_{k-1} \dots - (n_1 - n_0)\rho_1 - n_0\sigma_1$$

Da also

$$Q_{x_k} - Q_{s_k} = n_0(\sigma_1 - \xi_1),$$

ferner

$$\varphi_k = (n_{k-1})(\rho_k - \rho_{k-1})$$

und

$$\sum^k \rho_k \Delta\left(\frac{1}{n_k}\right) = -\sum^k \frac{\varphi_k}{n_k}$$

ist, so wird unter Berücksichtigung dieser Gleichungen

$$\rho_s = -\sum\frac{\varphi}{n} - \frac{1}{n_0^2(\xi_1 - \sigma_1)^2}\sum Q_s^2\Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right) +$$
$$+ \frac{2}{n_0(\xi_1 - \sigma_1)}\sum Q_s\Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right) - \sum\Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right)$$

$$\rho_t = -\sum\frac{\varphi}{n} - \frac{3}{n_0^2(\xi_1 - \sigma_1)^2}\sum Q_s^2\Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right) +$$
$$+ \frac{6}{n_0(\xi_1 - \sigma_1)}\sum Q_s\Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right) - 3\sum\Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right).$$

In diesen Gleichungen ist der Index k zur Vereinfachung fortgeblieben. Da ferner:

$$\sum \Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right) = \varphi - \frac{\sigma_1}{n_0}$$

ist und zur Abkürzung

$$S_2 = \sum Q_s^2 \Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right)$$

$$S_1 = \sum Q_s \Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right)$$

gesetzt wird, ergibt sich:

$$p_s = -\sum \frac{\varphi}{n} - \varphi + \frac{\sigma_1}{n_0} - \frac{S_2}{n_0^2(\xi_1 - \sigma_1)^2} + \frac{2 S_1}{n_0(\xi_1 - \sigma_1)}$$

$$p_t = -\sum \frac{\varphi}{n} - 3\varphi + \frac{3\sigma_1}{n_0} - \frac{3 S_2}{n_0^2(\xi_1 - \sigma_1)^2} + \frac{6 S_1}{n_0(\xi_1 - \sigma_1)}.$$

Nun ist aber für unendlich dünne Linsen:

$S_2 = \sum Q_s^2 \Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ der Ausdruck für die sphärische Aberration zweiter Ordnung (auf der Axe),

$S_1 = \sum Q_s \Delta\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ der Ausdruck für die sphärische Aberration erster Ordnung (ausserhalb der Axe, Koma),

in beiden Fällen von den Coëfficienten der Summen abgesehen.

Diese Gleichungen geben also, immer unter der Voraussetzung unendlich dünner Linsen und kleiner Neigungen der Hauptstrahlen gegen die Axe, einen Zusammenhang zwischen der Lage der astigmatischen Bildflächen einerseits und dem Zustande der sphärischen Correction auf und ausser der Axe anderseits.

Soll die Lage der astigmatischen Bildflächen unabhängig von dem Blendenabstand x_1 werden, so müssen S_2 und S_1 verschwinden, d. h. das System muss nach Abbe'scher Bezeichnung aplanatisch sein. In der That ergibt sich sofort aus der Definition der Koma, dass für alle unter einem gewissen Winkel gegen die Axe im Meridionalschnitt und naturgemäss

auch im Äquatorealschnitt einfallenden Strahlen die Vereinigung nach der Brechung in einem aplanatischen System eine punktförmige ist. Die reciproken Krümmungsradien der Bildflächen im Scheitel sind in diesem Falle gegeben durch die Gleichungen:

$$\rho_s = -\varphi - \sum \frac{\varphi}{n}$$

$$\rho_t = -3\varphi - \sum \frac{\varphi}{n}$$

unter der Annahme, dass sich das Object in Luft und unendlich weit entfernt befindet.

Für den speciellen Fall der Bildfeldebenung in übertragenem Sinne:

$$\rho_s = -\rho_t$$

ergibt sich für ein nicht aplanatisches System der reciproke Blendenabstand ξ_1 von der ersten brechenden Fläche aus der Gleichung:

$$\frac{S_2}{n_0^2(\xi_1 - \sigma_1)^2} - \frac{2S_1}{n_0(\xi_1 - \sigma_1)} = -\varphi - \frac{1}{2}\sum \frac{\varphi}{n} + \frac{\sigma_1}{n_0},$$

wo σ_1 das Reciproke des Objectabstandes ist.

Nehmen wir den Fall an, welcher der Wirklichkeit am meisten entspricht, dass sich das Object in Luft unendlich weit entfernt befindet, so wird

$$x_1^2 S_2 - 2x_1 S_1 = -\varphi - \frac{1}{2}\sum \frac{\varphi}{n};$$

die astigmatische Differenz, d. h. der Abstand der Projectionen beider astigmatischen Bildpunkte auf die optische Axe wird für den Fall der Bildfeldebenung in übertragenem Sinne:

$$\Delta = f^2 \frac{i^2}{2} \sum \frac{\varphi}{n},$$

wo i der Winkel des Hauptstrahles mit der Axe vor der Brechung ist. Die astigmatische Differenz ist also bei Systemen mit unendlich dünnen Linsen, so lange es sich um kleine

Winkel handelt und die beiden Bildflächen symmetrisch zur Einstellebene liegen, unabhängig von dem Zustande der sphärischen Correction auf und ausserhalb der Axe.

Ist in einem System die sphärische Aberration auf der Axe gehoben, also

$$S_2 = 0,$$

so hat man den Blendenabstand aus der Gleichung:

$$x_1 = \frac{2\varphi + \sum \frac{\varphi}{n}}{4 S_1}$$

zu entnehmen, um Bildfeldebenung in übertragenem Sinne zu bekommen.

Diese Formel ist von Werth für die Berechnung einer Aplanathälfte, die für einen unendlich weiten Punkt chromatisch und sphärisch auf der Axe corrigirt sein soll. Der Vollständigkeit halber will ich noch die Gleichungen anführen, aus denen sich die Radien eines aus zwei mit einander verkitteten Linsen bestehenden Systems ergeben, das bei der Brennweite Eins diesen Bedingungen genügt.

Sind n_1, n_2 die Berechnungsquotienten, dn_1, dn_2 die Dispersionen der beiden Linsen, so berechne man:

$$\alpha = \frac{dn_2}{(n_1 - 1) dn_2 - (n_2 - 1) dn_1}$$

$$\beta = \frac{dn_2 - dn_1}{(n_1 - 1) dn_2 - (n_2 - 1) dn_1}$$

$$A = +1 + 2(\beta + 1) \frac{n_2 - 1}{n_2^2} - 2\alpha \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2^2} (n_1 + n_2 - n_1 n_2)$$

$$B = +\alpha^2 \frac{n_2 - n_1}{n_2^2} (3 n_1 + n_2 - n_1 n_2) - (\beta + 1)^2 \frac{n_2 - 1}{n_2^2} - \\ - 2(\beta + 1)\left(1 + \frac{n_2 - n_1}{n_2^2} \alpha\right)$$

$$C = -\alpha^3 n_1^2 \frac{n_2 - n_1}{n_2^2} + (\beta + 1)^2 \left(1 + \frac{n_2 - n_1}{n^2} \alpha\right).$$

Dann werden die reciproken Radien:

$$\rho_1 = -\frac{1}{2A}(B \mp \sqrt{B^2 - 4AC})$$

$$\rho_2 = \rho_1 - \alpha$$

$$\rho_3 = \rho_1 - \beta.$$

Mit diesen Werthen berechne man:

$$\varphi_1 = (n_1 - 1)\alpha, \qquad \varphi_2 = 1 - (n_1 - 1)\alpha$$

$$Q_1 = \rho_1 \qquad \Delta_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1^2}\rho_1$$

$$Q_2 = \rho_2 - \varphi_1 \qquad \Delta_2 = \frac{\varphi_1}{n_2^2} + \frac{n_2 - 1}{n_2^2}\rho_2 - \frac{n_1 - 1}{n_1^2}\rho_1$$

$$Q_3 = \rho_3 - 1 \qquad \Delta_3 = 1 - \frac{\varphi_1}{n_2^2} - \frac{n_2 - 1}{n_2^2}\rho_2$$

$$S_1 = Q_1\Delta_1 + Q_2\Delta_2 + Q_3\Delta_3$$

$$S_2 = Q_1^2\Delta_1 + Q_2^2\Delta_2 + Q_3^2\Delta_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{2 + \frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2}}{4S_1}.$$

Zur Erläuterung gebe ich das Resultat der Anwendung vorstehender Formeln auf folgende Combination:

$n_1 = 1 \cdot 56448 \qquad dn_1 = 0 \cdot 01018$ Barytleichtflint

$n_2 = 1 \cdot 60551 \qquad dn_2 = 0 \cdot 01585$ Leichtflint

$$\alpha = +5 \cdot 696, \qquad \beta = +2 \cdot 037$$

$$A = +2 \cdot 351, \qquad B = -6 \cdot 837 \qquad C = +2 \cdot 864$$

$$\rho_1 = +0 \cdot 5075$$

$$\rho_2 = -5 \cdot 188$$

$$\rho_3 = -1 \cdot 530$$

$$\varphi_1 = +3\cdot215, \qquad \varphi_2 = -2\cdot215$$

$$S_1 = -1\cdot655$$

$$x_1 = -0\cdot4042$$

Das Objectiv hat also bei 100 *mm* Brennweite die Radien

$$r_1 = +197\cdot0 \ mm$$

$$r_2 = -\ 19\cdot27\ mm$$

$$r_3 = -\ 65\cdot36\ mm.$$

Für einen Blendenabstand von 40·42 *mm* ist Bildfeldebenung in übertragenem Sinne erreicht.

Die beiden specifischen Wärmen des Wasserdampfes

von

Prof. Dr. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

In der Abhandlung »Die Zustandsgleichung des Wasserdampfes«[1] habe ich aus den Versuchen des H. Battelli[2] den Schluss gezogen, dass der Wasserdampf zwischen der Isotherme von —6·16° C. und der Isotherme von +231·41° C. die Zustandsgleichung

$$p(v+0\cdot 008402) = 3\cdot 4348\, T \qquad 1)$$

befolgt, wobei T die absolute Temperatur, p den Druck (in Millimeter Quecksilbersäule gemessen) und v das Volumen von 1 *kg* Wasserdampf (in Kubikmeter gemessen) bedeuten. Wird p in Kilogramm pro Quadratmeter ausgedrückt, so lautet die Gleichung

$$p(v+0\cdot 008402) = 46\cdot 698\, T. \qquad 1a)$$

Die Gleichung gilt bis in die Nähe der Condensationsgrenze, dagegen nicht mehr für den Zustand der Sättigung. Die Zahl 46·698 soll in der folgenden Rechnung kurz mit R bezeichnet werden.

Mit Hilfe der Gleichung 1 *a*) und anderer später angeführter Ergebnisse sind wir in der Lage, die beiden specifischen Wärmen des Wasserdampfes für das Geltungsgebiet der

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 108, Abth. II. a, Juli 1899.

[2] A. Battelli, Mem. della r. acad. di Torino. Ser. II, t. XLIII, 1893, p. 63—98.

Gleichung 1) zu ermitteln. Die Thermodynamik führt zu der Gleichung

$$C_p - C_v = \frac{T}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v}, \tag{2}$$

in welcher C_p und C_v die beiden specifischen Wärmen für constanten Druck, beziehungsweise für constantes Volumen, beide nach mechanischem Maasse gemessen, bedeuten. Da aus der Gleichung 1 *a*)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p = \frac{p}{R} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v = \frac{v + 0 \cdot 008402}{R}$$

folgt, so ist

$$C_p - C_v = R = 46 \cdot 698. \tag{3}$$

Ferner führt die Thermodynamik zu der Beziehung

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p.$$

Da nun wieder aus der Gleichung 1 *a*)

$$p\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = R, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p = 0$$

folgt, so ist

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = 0. \tag{4}$$

Verbinden wir dies mit der Beziehung 3), so erhalten wir auch

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial p}\right)_T = 0. \tag{4a}$$

Einen neuen Aufschluss über die beiden specifischen Wärmen erhalten wir aus den Versuchen von Hirn und Cazin über die adiabatische Ausdehnung der Wasserdampfes.[1] Bei diesen Versuchen wurde überhitzter Wasserdampf in einem Kupfercylinder, welcher sich in einem Ölbad von der Temperatur ϑ' befand, auf einen solchen Druck p' gebracht, dass er

[1] Annales de chimie et de physique, S. IV, t. 10, p. 349, 1867.

beim Entweichen durch eine weite Öffnung in die freie Atmosphäre (Druck p'') gerade die dem Drucke p'' entsprechende Siedetemperatur ϑ'' annahm. Um diesen Zustand zu erreichen, wurde zunächst bei einer bestimmten Anfangstemperatur ϑ' ein höherer Anfangsdruck gewählt, so dass beim Ausfluss ein dichter Nebel erschien. Hierauf wurde der Anfangsdruck bei derselben Anfangstemperatur allmälig herabgesetzt, bis der Nebel, der bei jedem folgenden Versuche immer schwächer wurde, schliesslich nach dem Durchgange durch eine Reihe von Färbungen überhaupt nicht mehr erschien. Schliesslich wurde derjenige Grenzwerth p' des Anfangsdruckes, bei dem der Nebel gerade ausblieb, durch wiederholte Versuchsreihen bestimmt, wobei die Fehlergrenze kleiner als 0·02 Atmosphären war. Dass diese Zustandsänderung des Wasserdampfes wirklich eine adiabatische war, habe ich in der Abhandlung »Die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke«[1] dargelegt.

Grashof[2] hat nun zuerst darauf aufmerksam gemacht, dass, wenn man die Versuchsergebnisse nach der Formel

$$\frac{p'}{p''} = \left(\frac{273+\vartheta'}{273+\vartheta''}\right)^n \qquad 5)$$

prüft, man für n Werthe erhält, welche auf eine Constante hinweisen. Es ergaben sich nämlich die Werthe

$n = 4 \cdot 260,\ 4 \cdot 102,\ 4 \cdot 214,\ 4 \cdot 220,\ 4 \cdot 247,\ 4 \cdot 260,\ 4 \cdot 236,\ 4 \cdot 286,$
$4 \cdot 240,\ 4 \cdot 254.$

Hirn und Cazin haben ihre Versuchsresultate, um sie leichter miteinander vergleichen zu können, auf einen und denselben Endwerth des Druckes, nämlich auf den Druck einer Atmosphäre reducirt. Wir wollen diesen Druck mit p_a bezeichnen; ihm entspricht die Siedetemperatur $\vartheta_a = 100°$ C. Die Reduction geschah in der Weise, dass jener Druck p_0 und jene Temperatur ϑ_0 ermittelt wurden, für welche die Beziehungen

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. IIa, Juli 1897.

[2] Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, XI, S. 404, 1867.

$$\frac{p_0}{p_a} = \frac{p'}{p''} \quad \text{und} \quad \frac{273+\vartheta_0}{273+100} = \frac{273+\vartheta'}{273+\vartheta''}$$

bestehen. Da die rechten Seiten dieser Beziehungen die Gleichung 5) erfüllen, so thun es auch die linken Seiten, d. h. die Werthe p_0, ϑ_0 gehören einer und derselben Adiabate an, und zwar jener, welche durch den Punkt ($p_a = 1$ Atmosphäre, $\vartheta_a = 100°$ C.) der Condensationsgrenze hindurchgeht. Die so erhaltenen Werthe p_0 und ϑ_0 sind die folgenden:

$p_0 =$ 1·419, 1·712, 2·156, 2·262, 2·503, 2·577,
$\vartheta_0 =$ 131·94, 152·25, 174·60, 179·60, 189·94, 192·81.

$p_0 =$ 2·703, 3·314, 3·870, 4·420.
$\vartheta_0 =$ 198·68, 220·32, 240·24, 255·98.

Durch die Grashof'sche Beziehung

$$\frac{p_0}{p_a} = \left(\frac{273+\vartheta_0}{273+100}\right)^n$$

sind alle Anfangszustände (p_0, ϑ_0) mit demselben Endzustand (p_a, ϑ_a), welcher in der Condensationsgrenze liegt, verknüpft, es ist aber viel zweckmässiger, die Anfangszustände allein zu betrachten und miteinander in Beziehung zu bringen. Die Grashof'sche Beziehung lässt erkennen, dass für die Anfangszustände eine Beziehung von der Form

$$\frac{p_0}{(273+\vartheta_0)^m} = A \tag{6}$$

gilt, wo m und A Constante bedeuten. Bestimmen wir diese Constanten aus den obigen 10 Werthepaaren mittelst der Methode der kleinsten Quadrate, so erhalten wir

$$m = 4·3045, \ \log A = -11·07614.$$

Um die Formel 6) zu prüfen, werden wir jetzt die soeben erhaltenen Werthe in die Gleichung 6) einsetzen und daraus für die obigen Temperaturen ϑ_0 die zugehörigen Drucke p_0 berechnen. Man erhält auf diese Weise

p_0 (ber.) $=$ 1·404, 1·733, 2·160, 2·266, 2·498, 2·565, 2·706, 3·285, 3·894, 4·434 Atm.

Die Differenzen zwischen diesen Werthen und den obigen Werthen für p_0 sind

—0·015, +0·021, +0·004, +0·004, —0·005, —0·012, +0·003, —0·029, +0·024, +0·014 Atm.

Vergleichen wir diese Differenzen mit dem oben erwähnten Umstande, dass die Fehlergrenze der Versuche kleiner als 0·02 Atm. war, so sehen wir, dass die Differenzen von derselben Grössenordnung wie die gemachten Versuchsfehler sind, oder dass die Gleichung 6) mit den für m und A gefundenen Werthen thatsächlich für die adiabatische Zustandsänderung des Wasserdampfes gilt.

Wir wollen nun aus der Gleichung 6) für die Bestimmung der beiden specifischen Wärmen des Wasserdampfes Schlüsse ziehen. Zu dem Ende betrachten wir jene Gleichung, welche für die Zunahme der Entropie S gilt, nämlich

$$dS = \frac{C_p}{T}\, dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dv.$$

Zu Folge der Gleichung 1a) erhält diese Gleichung die Form

$$dS = \frac{C_p}{T}\, dT - \frac{R}{p}\, dp. \tag{7}$$

Ist die Zustandsänderung adiabatisch, so ist $S =$ const. und $dS = 0$, also

$$\frac{C_p}{T}\, dT = \frac{R}{p}\, dp \quad \text{oder} \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T}\, dT = R \log\text{nat} \frac{p_2}{p_1}. \tag{8}$$

Aus der Gleichung 6) folgt nun

$$\frac{p_2}{T_2^m} = \frac{p_1}{T_1^m} \quad \text{oder} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^m.$$

Wir erhalten daher

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T}\, dT = Rm \log\text{nat} \frac{T_2}{T_1}$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} C_p &= Rm = 46\cdot698 \times 4\cdot3045 \\ C_v &= C_p - R = 46\cdot698 \times 3\cdot3045 \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Wir kommen also zu dem Schlusse, dass in dem Intervall, in welchem die Gleichung 1) gilt, sowohl die specifische Wärme bei constantem Druck, als auch die specifische Wärme bei constantem Volumen Constante sind. Dividiren wir diese Zahlen durch 424, so erhalten wir die specifischen Wärmen nach calorischem Maasse, und zwar

$$c_p = 0\cdot4741, \quad c_v = 0\cdot3639, \quad \frac{c_p}{c_v} = 1\cdot3026. \qquad 9a)$$

Regnault[1] hat zur Bestimmung der specifischen Wärme des Wasserdampfes für constanten Druck vier Versuchsreihen bei dem Druck einer Atmosphäre ausgeführt und die folgenden Werthe erhalten:

1. Reihe von	127·7°	bis	231·11° C.	..... $c_p =$	0·46881
2. »	» 137·73°	»	225·86	.....	0·48111
3. »	» 124·31	»	210·44	.....	0·48080
4. »	» 122·75	»	216·03	.....	0·47963

Den ersten Werth 0·46881 erklärte Regnault für nicht ganz zuverlässig. Der oben berechnete Werth von c_p stimmt mit den Regnault'schen Zahlen gut überein.

Die Werthe 9*a*) der specifischen Wärmen gelten, wie schon hervorgehoben wurde, nur für das Gebiet des überhitzten Wasserdampfes. In der Abhandlung »Die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke« habe ich gefunden, dass die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Druck von der Condensationsgrenze bis zu jener Adiabate, welche die Condensationsgrenze in dem Punkte $p = 1$ Atm., $\vartheta = 100°$ C. trifft, für jeden Druck denselben mittleren Werth hat. Dieser Werth ist 0·5256. Dieser Werth darf jedoch nicht direct mit dem obigen Werthe von c_p verglichen werden, weil die Gleichung 1) wohl bis in die Nähe der Condensationsgrenze.

[1] Mem. de l'Acad. 26, p. 1, 1862.

nicht mehr aber für diese selbst gilt. Betrachten wir 1 *kg* überhitzten Wasserdampf bei dem Drucke p und der absoluten Temperatur T und lassen wir den Dampf sich bei constantem p abkühlen, so nimmt sein Volumen bis in in die Nähe der Condensationsgrenze nach der Gleichung 1) ab, dann aber ändert sich sein Verhalten. Wäre z. B. $p = 1$ Atm., so würde das Volumen, wenn die Geichung 1) bis zur Condensationsgrenze Geltung hätte, in dieser gleich $1\cdot6774\, m^3$ werden, thatsächlich wird aber das Volumen in der Condensationsgrenze gleich $1\cdot6508\, m^3$.

Kommt also bei dem Druck einer Atmosphäre der Zustand des Wasserdampfes in die Nähe der Condensationsgrenze, dann nimmt das Volumen rascher ab als nach der Gleichung 1). Da der Wasserdampf, solange er das Gesetz der Gleichung 1) befolgt, keine inneren Kräfte hat, so müssen wir die raschere Volumsabnahme in der Nähe der Condensationsgrenze auf das Auftreten innerer Kräfte zurückführen. Geht umgekehrt der Wasserdampf aus dem Zustand der Sättigung in den überhitzten Zustand über, so müssen zu Beginn dieser Zustandsänderung die inneren Kräfte überwunden werden. Ausserdem ist wegen der rascheren Volumszunahme eine grössere äussere Arbeit zu leisten. Beide Umstände kommen in dem höheren Werthe der Zahl 0·5256 zum Ausdruck.

Wir wollen in einem Falle die Arbeit der inneren Kräfte berechnen. Dem Druck von 3·314 Atm. entspricht der Siedepunkt 137·34° C. Wird der Wasserdampf bei diesem constanten Druck von 137·34° bis 220·32° C. erwärmt, so befindet sich der Zustand zuletzt auf der früher betrachteten Adiabate. Setzt man nun

$$\int_{137\cdot34}^{220\cdot32} \frac{c_p d\vartheta}{273+\vartheta} = (c_p)_m \int_{137\cdot34}^{220\cdot32} \frac{d\vartheta}{273+\vartheta} = (c_p)_m \log\text{nat} \frac{493\cdot32}{410\cdot34},$$

so ist nach der in der genannten Abhandlung durchgeführten Rechnung

$$(c_p)_m = 0\cdot5356.$$

Die Erwärmung des Wasserdampfes von 137·34° bis 220·32° C. können wir uns in zwei Abschnitte zerlegt denken,

nämlich in die Erwärmung von 137·34° bis 144·21° und von 144·21° bis 220·32°. Da dem Drucke von 3·314 Atm. eine Quecksilbersäule von 2518·64 *mm* entspricht, so zeigen die Versuche des Herrn Battelli, dass der Zustand $p = 2518{\cdot}64$, $\vartheta = 144{\cdot}21$ bereits die Zustandsgleichung 1) erfüllt, so dass wir

$$\int_{137\cdot34}^{220\cdot32} \frac{c_p d\vartheta}{273+\vartheta} = \int_{137\cdot34}^{144\cdot21} \frac{c_p d\vartheta}{273+\vartheta} + 0\cdot4741 \int_{144\cdot21}^{220\cdot32} \frac{d\vartheta}{273+\vartheta}$$

oder

$$0\cdot5356 \log \text{nat} \frac{493\cdot32}{410\cdot34} =$$

$$= \int_{137\cdot34}^{144\cdot21} \frac{c_p d\vartheta}{273+\vartheta} + 0\cdot4741 \log \text{nat} \frac{493\cdot32}{417\cdot21}$$

oder

$$\int_{137\cdot34}^{144\cdot21} \frac{c_p d\vartheta}{273+\vartheta} = 0\cdot01925$$

erhalten. Dieses Integral kann wieder gleich

$$\frac{1}{273+\vartheta_m} \int_{137\cdot34}^{144\cdot21} c_p d\vartheta$$

gesetzt werden, wo ϑ_m ein zwischen 137·34 und 144·21 liegender Werth ist. Wir wollen die Rechnung angenähert durchführen und setzen

$$\vartheta_m = \frac{137\cdot34 + 144\cdot21}{2} = 140\cdot775.$$

Dadurch wird

$$\int_{137\cdot34}^{144\cdot21} c_p d\vartheta = 7\cdot965 \text{ Cal.}$$

Würde der Wasserdampf sich in dem Intervalle von 137·34° bis 144·21° genau so wie in dem Geltungsgebiete der Gleichung 1) verhalten, so wäre c_p gleich 0·4741 und die dem Dampfe zugeführte Wärme gleich 3·257 Cal. In Wirklichkeit verlangt also der Wasserdampf in dem genannten Intervalle um 4·708 Cal. mehr Wärme. Dieser Betrag wird theils zur

Überwindung der inneren Kräfte, theils zur stärkeren Ausdehnung verwendet.

Nun beträgt der Unterschied zwischen dem specifischen Volumen, welches der Wasserdampf bei dem Siedepunkt 135° C. haben würde, wenn er die Gleichung 1) erfüllte, und dem specifischen Volumen, welches er wirklich hat, 0·0160 m^3. Bei 140° C. ist dieser Unterschied 0·0148 m^3, also ist er bei 137·34° C. gleich 0·01544 m^3. Nimmt das specifische Volumen unter dem Drucke von 3·314 Atm. um 0·01544 m^3 zu, so erfordert die zur Überwindung des äusseren Druckes nöthige Arbeit 1·247 Cal. Ziehen wir diesen Betrag von dem früher gefundenen Werthe 4·708 ab, so erhalten wir die der Arbeit der inneren Kräfte äquivalente Wärmemenge, und zwar

3·461 Cal.

Zum Schluss soll noch der Werth $\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_p$ für den gesättigten Wasserdampf von 100° C. berechnet werden. Wir benützen zu diesem Zwecke eine Beziehung, welche H. Planck[1] abgeleitet hat, nämlich

$$(c_p)_1-(c_p)_2 = \frac{dr}{d\vartheta} - \frac{r}{273+\vartheta} + \frac{r}{v_1-v_2}\left\{\left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p - \left(\frac{\partial v_2}{\partial \vartheta}\right)_p\right\} \qquad 10)$$

Hierin bedeuten $(c_p)_1$ die specifische Wärme des gesättigten Dampfes bei constantem Drucke, $(c_p)_2$ die specifische Wärme der tropfbaren Flüssigkeit bei constantem Drucke, beide für die Siedetemperatur ϑ (Celsius), r die Verdampfungswärme und v_1, v_2 die specifischen Volumina des gesättigten Dampfes, beziehungsweise der Flüssigkeit für den Siedepunkt. Herr Planck hat aus dieser streng giltigen Gleichung die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes bei constantem Druck für die Temperatur 100°, also für den Atmosphärendruck berechnet und dafür den Werth $(c_p)_1 = 0·47$ gefunden. Bei dieser Rechnung ist aber ein Rechenfehler unterlaufen und deshalb will ich zunächst diese Rechnung noch einmal durchführen.

Wir wollen die Gleichung 10) in der Form

$$(c_p)_1 = (c_p)_2 + \frac{dr}{d\vartheta} - \frac{r}{273+\vartheta} + \frac{r}{v_1-v_2}\left\{\left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p - \left(\frac{\partial v_2}{\partial \vartheta}\right)_p\right\} \qquad 10a)$$

[1] Thermodynamik, S. 138, 1897.

schreiben. Regnault hat aus seinen Messungen für das Wasser die Beziehung

$$r+\int_0^{\vartheta} c_p \, d\vartheta = 606\cdot 5+0\cdot 305\,\vartheta$$

abgeleitet, wo c_p die specifische Wärme des Wassers bedeutet; aus ihr folgt

$$\frac{dr}{d\vartheta}+(c_p)_2 = 0\cdot 305.$$

Ferner ist in die Gleichung 10a) $r = 536\cdot 5$ und $\vartheta = 100$ einzusetzen. Um v_1 und $\left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p$ zu bestimmen, benützt H. Planck eine Messung von Hirn, nach welcher 1 kg Wasserdampf unter Atmosphärendruck bei 100° das Volumen $1\cdot 6504\ m^3$, bei 118·5° das Volumen $1\cdot 740\ m^3$ einnimmt. Daraus ergibt sich

$$v_1 = 1\cdot 6504\ m^3, \left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p = \frac{1\cdot 740-1\cdot 6504}{18\cdot 5} = 0\cdot 004843\ m^3.$$

Endlich ist

$$v_2 = 0\cdot 001\ m^3, \quad \left(\frac{\partial v_2}{\partial \vartheta}\right)_p = 0\cdot 000001\ m^3.$$

Setzt man diese Zahlen in die Gleichung 10a) ein, so folgt

$$(c_p)_1 = 0\cdot 442.$$

Es unterliegt keinem Zweifel, dass der Werth, welchen H. Planck für $\left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p$ annimmt, nicht richtig ist. Ich will nun die Planck'sche Gleichung umgekehrt dazu benützen, um daraus den Werth für $\left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p$ zu berechnen. Ich habe a. a. O. gefunden, dass die specifische Wärme des Wasserdampfes für constanten Druck bei dem Druck einer Atmosphäre und bei 100° C. gleich 0·5256 ist. Setzen wir diesen Werth in die Gleichung 10a) ein und benützen wir für v_1-v_2 den von H. Zeuner ausgerechneten Werth $1\cdot 6498\ m^3$, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p - \left(\frac{\partial v_2}{\partial \vartheta}\right)_p = 0\cdot 005100\, m^3$$

und

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \vartheta}\right)_p = 0\cdot 005101\, m^3.$$

Hingegen folgt aus der Gleichung 1*a*)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_p = \frac{46\cdot 698}{p}.$$

Ist der Druck gleich einer Atmosphäre, so ist $p = 10333$, also

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_p = 0\cdot 004519\, m^3.$$

Daraus folgt wieder, dass der Wasserdampf unter dem Drucke einer Atmosphäre bei der Condensationsgrenze eine stärkere Ausdehnung hat, als im überhitzten Zustande, ein Verhalten, von dem schon oben die Rede war.

System der Sensitometrie photographischer Platten

von

J. M. Eder in Wien.

Aus dem photochemischen Laboratorium der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien.

(Mit 16 Tafeln und 5 Textfiguren.)

Die Lichtmenge, welche nothwendig ist, um einen eben bemerklichen photographischen Effect (z. B. erste Spur der Schwärzung einer Bromsilbergelatineplatte im Entwickler) hervorzurufen, nennt man den Schwellenwerth einer photographischen Platte. Die Höhe des Schwellenwerthes des zur photographischen Bilderzeugung nöthigen Lichtreizes für Bromsilbergelatineplatten lässt sich am besten in Secunden-Meter-Kerzen ausdrücken. Diese Grösse liegt knapp über der oberen Grenze der zulässigen »Vorbelichtung« einer photographischen Platte, welche man vornehmen kann, ohne eine Bildspur (»Belichtungs-Schleier«) zu erzielen.[1]

Wenn auch dieser Schwellenwerth keine ganz constante Grösse ist (siehe unten bei »Abweichungen von der Reciprocitätsregel« und »Effect von intermittirender Beleuchtung«), so charakterisirt er doch in gewissen Grenzen die Lichtempfindlichkeit photographischer Platten. Während langer Zeit war

[1] Da das Belichten einer Platte bis zum Vorbelichtungsmaximum mitunter ihre Empfindlichkeit günstig (wenn auch nur beschränkt und nicht in hohem Grade) beeinflusst (Eder, Handbuch der Photographie, 2. Aufl., I. Bd., Abth. 1, S. 313), so ist die Kenntniss dieses Schwellenwerthes auch in dieser Richtung erwünscht. — Über den Einfluss der Vorbelichtung auf die »Photographische Photometrie der Gestirne« s. Schwarzschild (Publicationen d. Kuffner'schen Sternwarte in Wien, 1900, C. S. 35).

die Messung der Lichtempfindlichkeit photographischer Präparate (die sogenannte Sensitometrie) nur auf der Bestimmung dieses Schwellenwerthes des zur photographischen Bilderzeugung eben zureichenden Lichtreizes basirt, und dieser Vorgang entspricht auch zunächst den Bedürfnissen der praktischen Photographie. In neuerer Zeit wurden die Methoden der Sensitometrie wesentlich weiter ausgedehnt und bedürfen besserer Beobachtungsmittel, auf welche hier näher eingegangen werden soll.

Im Allgemeinen nimmt man an, dass innerhalb weiter Grenzen den gleichen Producten aus Lichtintensität *(J)* und Belichtungszeit *(t)* dieselben photographischen Wirkungen entsprechen (Bunsen-Roscoe-Gesetz,[1] auch photographische Reciprocitätsregel genannt).

Nach dieser Regel, welche bekanntlich beschränkte Wirksamkeit hat, muss bei photographischen Processen umso kürzer belichtet werden, je grösser die Lichtintensität ist, und in der That wird dieser Vorgang in der Praxis gewöhnlich eingehalten.

Das Product $J.t$ gibt die auf die Flächeneinheit einfallende Lichtmenge, welche bei photographischen Processen in Betracht kommt.

Die Lichtempfindlichkeit von photographischen Platten wird entsprechend diesen einfachen Voraussetzungen umgekehrt proportional der bis zur Erreichung des ersten (schwächsten) Lichteindruckes erforderlichen Lichtmenge.

Bei der Bestimmung der Lichtempfindlichkeit (Sensitometrie) von Bromsilbergelatineplatten mit Hervorrufung kommt ihre Schwärzung im Entwickler in Betracht. Die Schwärzung photographischer Bromsilberplatten hängt ab:

1. von der Intensität und Wellenlänge des einwirkenden Lichtes;

2. von der Belichtungsdauer;

3. von der Lichtempfindlichkeit der Platte und der Dicke der sensiblen Schichte;[2]

---

[1] Pogg. Annalen, 1862, Bd. 117, S. 529.

[2] Vergl. »Über den Einfluss der Dicke der photographischen Emulsionsschichte«: Baylay (Eder's Jahrbuch für Phot. 1895, S. 408) und Abney (Eder's Jahrbuch für Phot. 1899).

4. von der Art (chemischen Zusammensetzung,[1] Zeitdauer, Temperatur etc.) der Entwicklung.

Die sensitometrischen Methoden sind für die Beurtheilung der Lichtempfindlichkeit der photographischen Platten wichtig, und zwar sowohl aus wissenschaftlichen Gründen, als auch bezüglich ihres Handelswerthes. Jedoch kommt bei Beurtheilung der Eignung photographischer Platten nicht nur die Lichtempfindlichkeit allein, sondern auch ihre Fähigkeit, die Abstufung von Licht und Schatten (sogenannte Gradation) annähernd richtig wiederzugeben, in Betracht, ferner die sogenannte Schleierbildung etc.

Dieselben Methoden, welche zur Sensitometrie photographischer Platten dienen, können auch zur photometrischen Bestimmung der Helligkeit zweier Lichtquellen benützt werden. Man nimmt an, dass Lichtquellen in jenem Falle als photographisch gleich hell zu bezeichnen sind, wenn sie auf denselben photographischen Platten in gleicher Zeit und unter sonst gleichen Umständen gleiche Schwärzungen erzeugen.

Für die Durchführung sensitometrischer Untersuchungen ist in erster Linie die Wahl einer constanten Normallichtquelle nothwendig. Auch wurde auf Grund meines Referates am III. Internationalen Congresse für angewandte Chemie 1898[2] für die Verwendung der Normallichtquelle das Princip acceptirt: »*Die Strahlen der Normallichtquelle sollen direct auf die photographische Schicht wirken, ohne dass absorbirende oder reflectirende Schichten eingeschaltet werden*«.[3]

[1] Die chemische Zusammensetzung und die damit innig verbundene entwickelnde Kraft des Entwicklers übt einen entscheidenden Einfluss auf die Lichtempfindlichkeit photographischer Platten. Es sei besonders hervorgehoben, dass die verschiedenen photographischen Entwickler keineswegs die gleiche entwickelnde Kraft besitzen, wie J. Precht irrthümlich angab (Phot. Corresp., 1899, S. 22), sondern vielmehr unter sich verschieden sind, wie M. Andresen (Phot. Corresp., 1899, S. 208) bewies. Die im Handel vorfindlichen Entwicklerpräparate zeigen allerdings in der Regel nur mässige Unterschiede in ihrer Wirksamkeit.

[2] Phot. Corresp., 1898, S. 470. — Eder, Jahrbuch für Photographie und Reproductionstechnik, 1899, S. 37.

[3] Es sind also bei der Construction von Normal-Sensitometern sogenannte Scalenphotometer mit staffelförmig geschichteten transparenten Papierschichten etc. nicht zulässig.

Als Normallichtquelle ist für die Zwecke der praktischen Sensitometer photographischer Schichten die Hefner'sche Amylacetatlampe sowohl vom Pariser »Congrès de Photographie«, 1889,[1] als auch vom genannten Congresse für angewandte Chemie in Wien 1898 angenommen worden.[2] Man blendet die Flamme der Hefner-Lampe für Zwecke der Sensitometrie von Bromsilbergelatineplatten mitunter durch vorgeschaltete Schlitzblenden ab, einerseits um die Helligkeit der Flamme zu verringern, anderseits um grössere Constanz zu erzielen, und berechnet die Helligkeit der geblendeten Flamme auf die Hefner'sche Originallampe. Oder man benützt eine Benzinkerze[3] mit einem seitlich ausgeschnittenen Glascylinder, welche Flamme ruhiger brennt und sich spectroskopisch sehr ähnlich der Amylacetatflamme verhält und deshalb leicht auf diese letztere Normalflamme reducirt werden kann.[4] Beide Arten von Normalflammen sind leider viel ärmer an Blauviolett als das diffuse Tageslicht, was Störungen verursachen kann, wenn man aus der bei Benzinlicht gefundenen Empfindlichkeit photographischer Platten unmittelbar auf ihr Verhalten gegen Tageslicht Schlüsse ziehen will.

Trotzdem ist die Benzin-, sowie Amylacetatflamme zur Prüfung der Empfindlichkeit von Bromsilbergelatine, sowie Jodbromgelatine-Platten sehr geeignet. Sie liefern völlig constante, unter sich sehr gut vergleichbare und für die Expositionszeit der praktischen Photographie völlig befriedigende Resultate, indem meine experimentellen Untersuchungen ergaben, dass die relative Empfindlichkeit bei gewöhnlichen Bromsilberplatten für Amylacetat- und Tageslicht parallel lauft.

[1] Eder's Ausfuhrliches Handbuch der Photographie, 2. Aufl., 1892, Bd. I, Abth. 1, S. 355.

[2] Phot. Corresp., 1898. — Eder's Jahrbuch für Photographie, 1899, S. 37

[3] D. i. eine mit Petroleum-Benzin gespeiste und mit einem runden, verstellbaren Baumwolldocht versehene Lampe mit regulirbarer Flammenhöhe. Man beachte, dass etwas flüssiges Benzin in dem mit einem Schwamme gefullten Lampenkörper vorhanden sein muss, wenn die Flamme mit constanter Helligkeit brennen soll.

[4] Die Benzinkerze wird von Weber, sowie Scheiner und anderen als Vergleichsflamme für photometrische Zwecke benützt.

Orthochromatische Platten geben aber abweichende Resultate,[1] und bei der Photometrie von Lichtquellen mit stark abweichender spectraler Zusammensetzung, wie auch bei Sternphotographien scheinen sich Abweichungen geltend zu machen.

Bei sensitometrischen Versuchen muss eine Scala von regelmässig und in genau bekannter Progression ansteigenden Lichtmengen auf die photographische Schichte einwirken. Als besonders bequem erweisen sich die bei optisch-photometrischen Untersuchungen schon lange mit Erfolg angewandten rotirenden Scheiben mit Ausschnitten, und als beste Variante

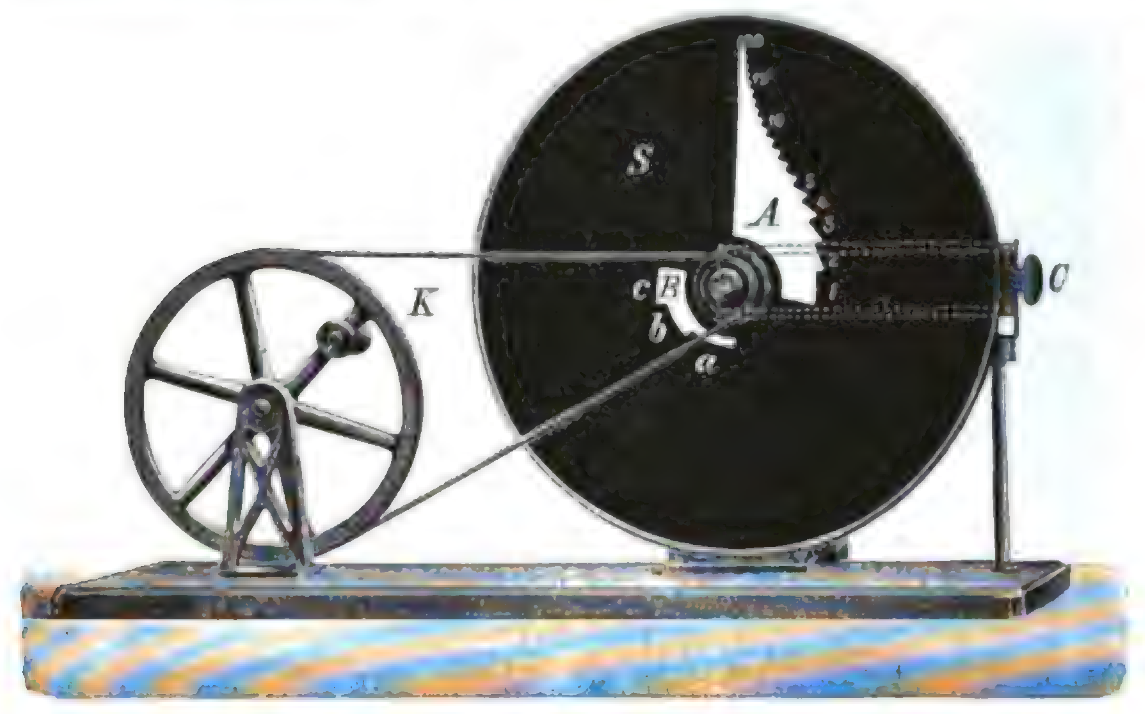


Fig. 1.

dieses Sensitometerprincipes erscheint das Scheiner'sche Sensitometer (ausgeführt vom Mechaniker Toepfer in Potsdam). Über dieses Instrument habe ich bereits früher ausführlich berichtet und einige kleine Abänderungen, welche Scheiner acceptirte, daran angebracht.[2]

Scheiner's Universalsensitometer besteht aus einer rotirenden Scheibe *S* mit dem Ausschnitte *a* (Fig. 1); sie wird durch ein kleines Kurbelrad *K* mit Schnurlauf durch Handbetrieb in Rotation versetzt (ein- bis zweimalige Kurbeldrehung

[1] Zuerst erwähnt von Eder, diese Sitzungsberichte.

[2] Beseitigung von allen vorgeschalteten durchsichtigen Medien; genaue Abstufung der aneinander stossenden, gleichmässig beleuchteten Felder an Stelle der continuirlich abgestuften Scala.

pro 1 Secunde bewirkt Rotation der Scheibe 400—800mal[1] pro 1 Minute). Hinter der Scheibe ist die Cassette *C* mit der photographischen Platte angebracht. Die Belichtung erfolgt also intermittirend. Als Normallicht dient eine Benzinkerze; es wird die Flamme durch eine 1 *mm* breite horizontale Spaltblende abgeblendet und die Flammenhöhe durch einen Metallring markirt. Ein rother Glascylinder schliesst die Flamme ein und lässt nur vorne durch eine runde Öffnung das Licht frei auf die Sensitometerscheibe fallen; diese Lichtquelle wird gegenüber der Mitte der photographischen Platte (Mitte der Scala) aufgestellt. Für unsere Zwecke ist der gezähnte Ausschnitt der Scheibe empfehlenswerth.

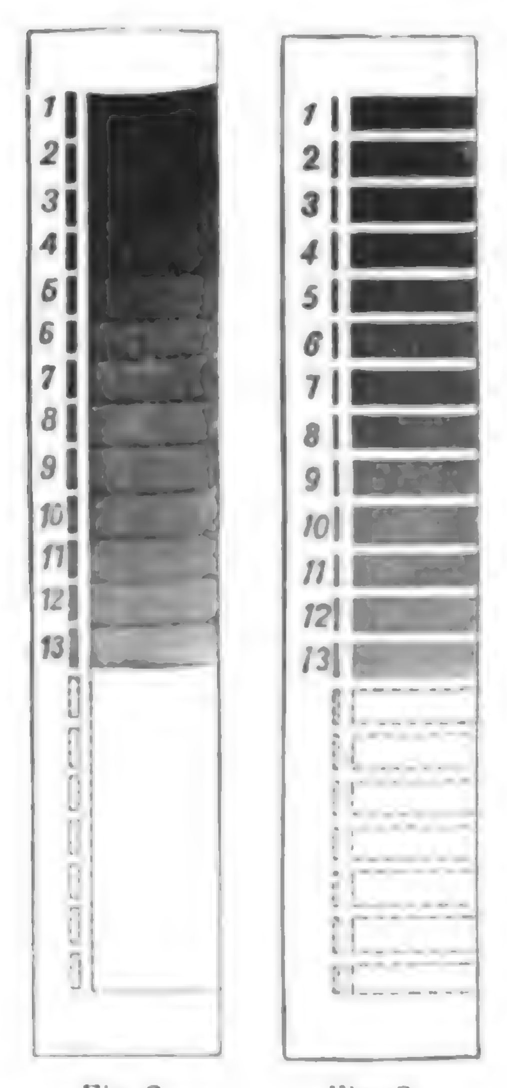


Fig. 2. Fig. 3.

Bei Scheiner's Universalsensitometer kommen Intensitätsunterschiede = 1 : 1·27 zur Wahrnehmung, und zwar beim grossen Modell innerhalb der Grenze von 1 bis 200. Der Ausschnitt bei Nr. 1 bei Scheiner's Sensitometer hat 100° Winkelöffnung; den grösseren Ausschnitten entsprechen die Nummern *a*, *b*, *c*, den kleinen die Nummern 1 bis 20, welche letztere, an der Peripherie der Scheibe liegend, am wenigsten Licht empfängt.

Fig. 1 zeigt die auf meinen Vorschlag angebrachte neue Form der Scheibe mit eckigen Ausschnitten.

Die Scalenfelder der entwickelten Platte stossen unmittelbar aneinander (Fig. 2). Durch diese Anordnung kann man ungemein deutlich erkennen, bei welcher Intensität des einwirkenden Lichtes die einzelnen Felder sich noch unterscheiden, respective ohne dass die Dichtigkeitsdifferenz

[1] Die Anzahl der Umdrehungen beeinflusst innerhalb dieser Grenzen das Resultat keineswegs (Scheiner).

verwischt erscheint. Jene Phasen der Über- und Unterexposition, in welchen die zu prüfende Bromsilberplatte keine Trennung der benachbarten Felder erkennen lässt, sind für die Charakteristik der Platte und die Ermittlungsperiode der correcten Expositionszeit von Wichtigkeit. Daneben befinden sich aber in der Sensitometercassette auch in Blech geschnittene Ziffern und Streifen, welche die Controle erleichtern, bis zu welchem Sensitometerfelde die schwächste Lichtwirkung sich erstreckte. Eine zweite Cassette enthält schmale gitterförmige Einlagen, um die Felder zu trennen, was bei der Ablesung der schwächsten sichtbaren Nummern die Beobachtung erleichtert (Fig. 3).

Die Distanz der Benzinlampe (mit Cylinder und Blende) von der rotirenden Scheibe ist $= 1\,m$, die Anzahl der Umdrehungen der letzteren 400 bis 800 pro Minute, die Belichtungsdauer = 1 Minute.

Die Reduction der Scheiner'schen Benzinlampe auf die Hefner'sche Amylacetatlampe hatte ich bereits vor einem Jahre vorgenommen,[1] und zwar durch Ermittlung des Lichtabstandes beider Lichtquellen, welche bei gleicher Belichtungsdauer den gleichen photographischen Effect ergeben. Die damaligen Befunde habe ich neuerdings revidirt und dieselben Werthe gefunden. Es ergab sich nämlich die chemische Helligkeit (für Bromsilbergelatine) der abgeblendeten Scheiner'schen Benzinlampe $= 0\cdot076$ ($= {}^1/_{13\cdot2}$) der Hefner'schen Amylacetatlampe, wobei die erstere mit Petroleumbenzin des Handels[2] vom specifischen Gewichte $0\cdot704$ bei 15° C. mit einer Siedegrenze von 60—100° C. benützt wurde.[3] Mittelst dieser Zahlen ist eine Reduction dieser Werthe und Umrechnung der Wirkung auf »Secunden-Meter-Kerzen« leicht möglich.

Aus der Verhältnisszahl 1 Scheiner'sche Benzinkerze = ${}^1/_{13\cdot2}$ Hefner-Kerzen resultirt für die erste Nummer des Scheiner'schen Sensitometers bei der Normalexpositionszeit

[1] Phot. Corresp., 1898, S. 469.

[2] Gewöhnliches Petroleumbenzin für »Ligroinlampen«, bezogen von der Petroleumraffinerie Wagenmann in Wien.

[3] Über den Einfluss verschiedener Benzinsorten (siehe meine Abhandlung Phot. Corresp., 1899, S. 714).

von 60 Secunden eine Lichtwirkung von 1·263 Secunden-Meter-Kerzen. Zur Bestimmung des Schwellenwerthes oder der Empfindlichkeitszahl werden die entwickelten,[1] fixirten und getrockneten Platten mit der Schichtseite auf weisses Schreibpapier gedrückt und die letzten (schwächsten) Nummern derart abgelesen; bei Beurtheilung kräftigerer Niederschläge betrachtet man die Platten gegen den hellen Himmel in der Durchsicht.

Beim Scheiner'schen Sensitometer (grosses Modell) kommen Intensitätsunterschiede der Lichtabstufungen der 23 Felder (*a*, *b*, *c*, 1 bis 20) von 2·614 bis 0·013 Secunden-Meter-Kerzen zur Wirkung. Dies genügt bei Bromsilbergelatineplatten für die Bestimmung der zur Erzielung des ersten entwickelbaren Lichteindruckes erforderlichen Lichtmenge.

Mitunter benöthigt man grössere Lichtintensitäten, z. B. um intensivere Schwärzungen der zu prüfenden Platten beim Entwickeln zu erzielen (namentlich bei unempfindlichen Plattensorten). Die Vermehrung der Lichtintensität (unter Beibehaltung derselben Benzinkerze) kann man durch Nähern der Lichtquelle erreichen. (Man benützt dann am besten die in Fig. 2 angedeutete Cassettenform.)

Während bei normaler Anwendung des Scheiner'schen Sensitometers der Lichtabstand = 1 *m* ist, pflege ich zur Vermehrung der Lichtintensität die Benzinkerze = $^{1}/_{2\cdot 94}$ *m* zu nähern. Es entspricht dann Nummer 1 der normalen Anordnung nach der Rechnung genau Nummer 10 bei genäherter Lichtquelle.[2]

Nr. *c* bei genäherter Lichtquelle (wir wollen kurz rund von $^{1}/_{3}$ *m* sprechen) erhält 8·84mal mehr Licht als Nr. *c* bei normaler Distanz der Lichtquelle (1 *m*). Bei Vornahme zweier Sensitometerbestimmungen im Scheiner'schen Sensitometer

[1] Man entwickelt bis zur beginnenden Verschleierung, also reichlich und lange.

[2] Bei der Rechnung der Distanz $^{1}/_{2\cdot 94}$ ist berücksichtigt, dass bei genäherter Lichtquelle ein umso grösserer Theil der Flammen von einem Punkte der Platte durch das Diaphragma hindurch sichtbar wird. Genaue Correctionstabellen für beliebige Näherung der Lichtquelle beim Scheiner'schen Sensitometer gab Schwarzschild (Publicationen der Kuffner'schen Sternwarte in Wien, Bd. 5, 1900; C. S. 20. Auch Eder's Jahrbuch für Phot., 14. Jahrgang).

— einmal mit dem Lichtabstand = 1 *m*, das zweitemal $^1/_3$ *m* Abstand (genauer = $^1/_{2\cdot94}$ *m*) — konnte ich also die Wirkungen von Intensitätsunterschieden von 1 bis 1830 zur Wahrnehmung bringen, was bei den Bromsilbergelatine-Trockenplatten vollkommen ausreicht, um ihre Empfindlichkeit und die Zunahme der Schwärzung von der ersten wahrnehmbaren Bildspur bis zur tiefsten Schwärzung zu verfolgen.

Eine weitere Näherung der Lichtquelle ist nicht gut thunlich, weshalb man bei besonders unempfindlichen photographischen Platten zur Verlängerung der Belichtungszeit greifen muss.

Nummer *a* bei normalem Lichtabstande (1 *m*) und der normalen Belichtungszeit (1 Minute) entspricht derselben berechneten Lichtmenge wie Nr. 20 bei $^1/_{2\cdot94}$ *m* Lichtabstand und einer Exposition von 14 Minuten 24 Secunden.

Nach diesen Voraussetzungen berechnete ich folgende Tabelle I einer sehr ausgedehnten Scala abgestufter Lichtwirkungen, welche den Lichtmengen 1 bis 26400 entsprechen.

Um sensitometrische Bestimmungen leicht durchführen und auf das Normalmass von Secunden-Meter-Kerzen (d. s. Hefner-Kerzen) zurückführen zu können, nahm ich die betreffenden Werthe in die nachstehende Tabelle I auf. Darnach erhält man auf Grund weniger (höchstens drei) Sensitometerproben alle nothwendigen Daten bequemer, als es bisher möglich war.

Zunächst wird eine Sensitometerprobe im Scheiner'schen Sensitometer bei 1 *m* Lichtabstand und 60 Secunden Exposition gemacht; dann wird bei $^1/_{2\cdot94}$ *m* Lichtabstand während 60 Secunden und schliesslich (bei sehr unempfindlichen Platten) bei einem Lichtabstande von $^1/_{2\cdot94}$ *m* während 14 Minuten 24 Secunden exponirt und alle Platten in völlig gleicher Weise (am besten mit Eisenoxalatentwickler[1]) bei der mittleren Temperatur von 18° C. entwickelt und fixirt. Die Sensitometernummern können dann leicht abgelesen werden. Die Colonnen 1, 2 und 3 geben die Nebeneinanderstellung der correspondirenden Sensitometernummern, z. B. soll Nr. 20 bei $^1/_3$ *m* Abstand identisch sein mit Nr. 11 bei 1 *m* Lichtabstand u. s. w.

---

[1] Als Normalentwickler für Bromsilbergelatineplatten verwende ich ebenso wie Hurter, Driffield, Rae, Andresen u. A. meinen Eisenoxalat-Entwickler. Derselbe reducirt das Silberbild mit grauer Farbe; die Bildstellen

Setzt man die schwächste Lichtmenge in diesem Systeme = 1, so ergibt die zweite Rubrik der Tabelle I die relativen Lichtmengen, welche den betreffenden Sensitometernummern entsprechen. Da man zur Construction der charakteristischen Schwärzungscurve (siehe unten) den Logarithmus dieser relativen Lichtmengen braucht, so sind die entsprechenden Logarithmen der relativen Maasszahlen der Lichtmengen in der dritten Rubrik dieser Tabelle beigegeben. Die Bestimmung der Schwellenwerthe ersieht man am besten in Secunden-Meter-Kerzen (Hefner-Einheiten), welche Werthe ich nach meinen eigenen Bestimmungen in der vierten Rubrik anschliesse. Die relative Lichtempfindlichkeit einer Platte kann aus der fünften Rubrik entnommen werden (reciproker Werth der Lichtmengen, die grösste Empfindlichkeit = 100 gesetzt); liegt z. B. die schwächste, eben sichtbare Sensitometernummer (Schwelle) einer Plattensorte bei 0·143 Secunden-Meter-Kerzen (= 10° Scheiner), dagegen bei einer anderen Sorte bei 0·013 Secunden-Meter-Kerzen (= 20° Scheiner), so ist letztere Plattensorte im Verhältniss von $\frac{100}{8 \cdot 9}$ lichtempfindlicher als erstere.

---

bestehen nach dem Fixiren aus metallischem Silber, welches frei von Farbstoffen ist (die mit Pyrogallol entwickelten Platten sind z. B. durch gelbbraune Oxydationsproducte gefärbt). Zur Herstellung dieses Entwicklers löst man

A. Neutrales Kaliumoxalat . . . . 1 Theil,
Wasser . . . . 4 Theile.

B. Eisenvitriol . . . . 1 Theil.
Citronensäure . . . . 0·01 Theil,
Wasser . . . . 3 Theile.

Man mischt unmittelbar vor dem Gebrauche 100 cm^3 der Oxalatlösung *A* und 25 cm^3 der Eisenlösung *B*. Zusatz von Bromkaliumlösung soll beim normalen Eisenoxalatentwickler unterbleiben, weil schleierlose Platten auch ohne diesen Zusatz sich klar entwickeln lassen. Schleierige Platten benöthigen den Zusatz von Bromkaliumlösung (1 : 10) z. B. im Ausmasse von 1 cm^3 auf 100 cm^3 des Eisenoxalatgemisches. Man verwende reine (nicht angesäuerte) Fixirnatronlösung.

Tabelle I.

Nummer des Scheiner-Sensitometers			Relative Lichtmenge	Logarithmus der Lichtmenge	Lichtintensität in Secunden-Meter-Kerzen	Relative Lichtempfindlichkeit der Platten
Licht-Abstand $^1/_{2\cdot94}$ m, Exposition 14 Min. 24 Sec.	Licht-Abstand $^1/_{2\cdot94}$ m, Exposition 1 Minute	Licht-Abstand 1 m, Exposition 1 Minute				
		20	1	0·00	0·013	100
		19	1·27	0·10	0·016	78·5
		18	1·62	0·21	0·021	61·6
		17	2·07	0·32	0·026	48·3
		16	2·64	0·42	0·033	37·9
		15	3·36	0·53	0·042	29·8
		14	4·28	0·63	0·054	23·4
		13	5·45	0·74	0·069	18·3
		12	6·95	0·84	0·088	14·4
	20	11	8·86	0·95	0·112	11·3
	19	10	11·3	1·05	0·143	8·9*
	18	9	14·4	1·16	0·182	7·0
	17	8	18·3	1·26	0·232	5·5
	16	7	23·4	1·37	0·295	4·3
	15	6	29·8	1·47	0·376	3·4
	14	5	37·9	1·58	0·478	2·6
	13	4	48·3	1·68	0·610	2·1
	12	3	61·6	1·79	0·779	1·6
	11	2	78·5	1·89	0·994	1·3
	10	1	100·0	2·00	1·263	1·00
20	9	*a*	127	2·10	1·604	0·79
19	8	*b*	162	2·21	2·046	0·62
18	7	*c*	207	2·32	2·614	0·48
17	6		264	2·42	3·3	0·38
16	5		336	2·53	4·2	0·30
15	4		428	2·63	5·4	0·23
14	3		545	2·74	6·9	0·18
13	2		695	2·84	8·8	0·14
12	1		886	2·96	11·2	0·11
11	*a*		1130	3·07	14·3	0·089
10	*b*		1440	3·17	18·2	0·070
9	*c*		1830	3·29	23·2	0·055
8			2340	3·37	29·5	0·043
7			2980	3·47	37·6	0·034
6			3790	3·58	47·8	0·026
5			4830	3·68	61·0	0·021
4			6160	3·79	77·9	0·016
3			7850	3·89	99·4	0·013
2			10000	4·00	126	0·010
1			12700	4·10	160	0·0079
a			16200	4·21	205	0·0062
b			20700	4·32	261	0·0048
c			26400	4·42	330	0·0038

* Mittlere Empfindlichkeit von Bromsilbergelatineplatten.

Nach meinen Versuchen zeigen photographische Bromsilbergelatineplatten guter mittlerer Empfindlichkeit (wie sie zu Porträtaufnahmen verwendet werden) die Empfindlichkeit 10° Scheiner = 0·143 Secunden-Meter-Kerzen Schwellenwerth; rapide Platten für Momentaufnahmen zeigen in günstigen Fällen die Empfindlichkeit von 16—17° Scheiner = 0·03 Secunden-Meter-Kerzen Schwellenwerth, während unempfindliche Bromsilbergelatine-Trockenplatten (feinkörnige für Reproductionszwecke) circa 4° Scheiner = 2·0 Secunden-Meter-Kerzen Schwellenwerth besitzen. Knapp unter diesem Schwellenwerthe muss man sich halten, wenn man »Vorbelichtungen« vornehmen will, welche eben noch unter der Grenze der nachweislichen photographischen Bilderzeugung (Lichtschleier) stehen.

Die in der Praxis meistens übliche Angabe der Empfindlichkeit durch Angabe des geringsten Schwärzungsgrades gibt für bestimmte Entwickler ziemlich constante Zahlen, wenn man die zu prüfenden photographischen Platten jedesmal bis zur beginnenden Verschleierung entwickelt. Die Bestimmungen verschiedener Beobachter differiren in der Regel nur um 1 Grad des Scheiner'schen Sensitometers, selten um 2 Grade. Da diese Differenzen in der praktischen Photographie für die Beurtheilung der Empfindlichkeit und Verwendbarkeit einer Plattensorte nicht stark ins Gewicht fallen, so kann die Fehlergrenze von 1 bis höchstens 2 Grade des Scheiner'schen Sensitometers bei praktischen photographischen Arbeiten als zulässig erklärt werden, worauf ich schon früher hingewiesen habe.[1]

Die Empfindlichkeit einer Trockenplatte (Angabe des Schwellenwerthes) allein ist nicht massgebend für deren photographische Verwendbarkeit. Die Platten sollen auch frei von Schleier sein und überdies die Licht- und Schattenabstufungen gut wiedergeben, d. h. gute »Gradation« zeigen.

Ein Diapositiv wird gut und richtig graduirt sein, wenn die von den verschiedenen Stellen durchgelassenen Lichtintensitäten annähernd in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die wirklichen Lichtintensitäten an den betreffenden Stellen des photographirten Objectes.

---

[1] Photogr. Corresp. 1898, S. 657.

Zur Ermittlung des Umstandes, ob eine photographische Platte fähig ist, bei gewisser Belichtung eine richtige Gradation zu geben, muss man den Schwellenwerth und überdies die Zunahme der photographischen Schwärzung bei zunehmender Lichtwirkung kennen.

Eine genügend umfassende Scala der fortschreitenden Schwärzung wird bei Bromsilbergelatineplatten am besten erhalten, wenn man im Scheiner-Sensitometer Lichtmengen von 0·112 bis 23·2 Secunden-Meter-Kerzen einwirken lässt. Dies erreicht man nach meinen Versuchen am besten bei einem Abstande der Benzinkerze vom Scheiner-Sensitometer $= {}^{1}/_{2\cdot 94}\, m$ und 1 Minute Expositionszeit. Die Schwärzungsscala umfasst dann meistens die schwächsten und stärksten, eben noch mit Sicherheit messbaren Nummern, welche für die Schwärzungscurve (siehe unten) massgebend sind.

Methoden zur Bestimmung verschiedener Schwärzungsgrade bei Bromsilbergelatineplatten.

Die exacte Bestimmung der Schwärzung photographischer Platten (im Hervorrufer) kann durch directe absolute Messung der Lichtundurchlässigkeit des Silberniederschlages erzielt werden.

Bei der absoluten Messung der Schwärzung der einzelnen Felder einer solchen Normalscala ging ich folgendermassen vor: Es wurde mit dem grossen Scheiner-Sensitometer eine Scala progressiver photographischer Schwärzungen auf einer Bromsilberplatte (mit Eisenoxalatentwickler) hergestellt und deren verschieden geschwärzte Felder in einem Weber'schen Photometer (von Schmidt und Haensch in Berlin) auf ihre Undurchlässigkeit gegen Licht untersucht; es wurde das Intensitätsverhältniss des auffallenden zum durchgelassenen Lichte $\left(\frac{i}{i'}\right)$ bestimmt, indem die photographische Platte unmittelbar an die durchscheinende Milchglasplatte des Weber'schen Photometers gelegt wurde. Diese Verhältnisszahl gibt das Maass der Lichtundurchlässigkeit der photographischen, mehr oder weniger geschwärzten Schichten.

Derartige Messungen wurden an mehreren Streifen von Bromsilbergelatine, welche im Scheiner-Sensitometer eine allmälig steigende Schwärzung erlitten hatten, wiederholt und dadurch Normalscalen[1] von genau gemessener, gradatim steigender Lichtundurchlässigkeit erhalten.

Die Undurchsichtigkeits-Messungen photographischer Platten im Weber'schen oder ähnlichen Photometern sind in hohem Grade zeitraubend und wurden von mir nur durchgeführt, um möglichst genau bestimmte Schwärzungsscalen zu erhalten,

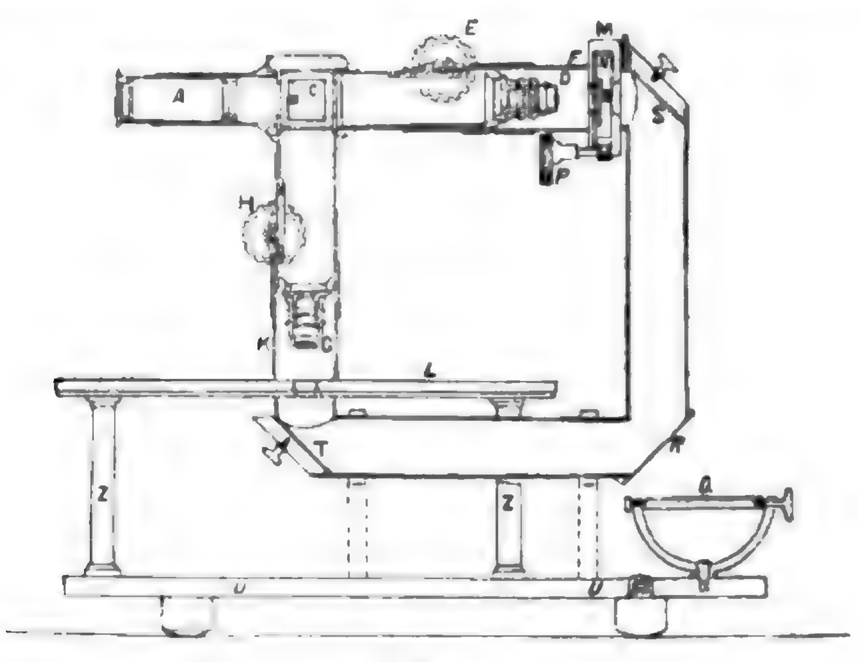


Fig. 4.

welche als Standards für die weitaus expeditiveren und höchst genauen Undurchlässigkeitsmessungen mittelst Hartmann's Mikrophotometer dienten. Das von J. Hartmann construirte Mikrophotometer[2] ist ausserordentlich gut geeignet, um die Schwärzung grosser oder auch sehr kleiner Stellen zu ermöglichen, setzt aber eine genau gemessene Scala von allmälig steigender Undurchsichtigkeit voraus.

In Fig. 4 ist ein verticaler Durchschnitt desselben gegeben. Parallel zu einer horizontalen Grundplatte *U* wird von vier Säulen *Z* ein in der Mitte durchlochter runder Tisch von 25 *cm*

[1] Dieselben waren grauschwarz, weil als Entwickler Eisenoxalat diente. Bei solchen Scalen geht die optische und photographische Dichtigkeit annähernd parallel.

[2] Eder's Jahrbuch für Photographie, 1899, S. 106.

Durchmesser, auf welchen die photographische Platte gelegt wird, getragen. Senkrecht über der Tischöffnung befindet sich das Objectiv eines gebrochenen Mikroskopes *ABC*, welches ein scharfes Bild des Plattenkornes in der Mitte der Basis des rechtwinkeligen Reflexionsprismas *B* entwirft und mit dem Ocular *A* beobachtet werden kann.

Das Prisma besitzt die von Lummer und Brodhun[1] angegebene Einrichtung.

In *D* befindet sich ein zweites, genau gleiches Mikroskopobjectiv *G*, welches mittelst des Triebes *E* auf die Schicht einer in *O* befindlichen Platte so eingestellt werden kann, dass das Bild ebenfalls in der Mitte des Doppelprismas liegt. In das Ocular *A* sehend, wird man demnach in der Mitte des Gesichtsfeldes ein kleines Stück der auf den Tisch *L* gelegten Platte erblicken, während rings das übrige Gesichtsfeld vom Bilde der Platte *O* erfüllt wird.

Die Platte *O* ist der eigentlich messende Theil, man kann sie als einen auf photographischem Wege hergestellten Photometerkeil bezeichnen, welcher in der Längsrichtung der Platte eine gleichmässig zunehmende Schwärzung zeigt.

Diese Keile stellte ich nach Hartmann's Vorschlag mittelst des früheren Scheiner'schen Sensitometers her, dessen rotirende Scheibe eine ununterbrochene Curve enthielt. Der Keil wird in einem Schieber *N* befestigt, der innerhalb des Rahmens *M* durch den Zahntrieb *G* senkrecht zur Mikroskopaxe verschoben werden kann. Die Stellung des Schiebers im Rahmen wird an einer Millimetertheilung abgelesen.

Als Lichtquelle diente eine Lampe, die ihr Licht direct senkrecht auf die Platte *R* wirft. Schwankungen in der Helligkeit der Lichtquelle sind auf die Messungen ohne jeden Einfluss. Die Spiegel *S* und *T* können zur Reinigung bequem aus den Rohren herausgezogen werden. Um alles Seitenlicht fernzuhalten, sind über die Objectivenden der Mikroskope noch Hülsen *F* und *K* geschoben.

Auf den Tisch *L* legt man zuerst die zu prüfende Platte und verschiebt den Keil so lange, bis diese Stelle in der Mitte

[1] Vergl. »Zeitschrift für Instrumentenkunde«, 9, 1889, S. 23.

des Prismas genau dieselbe Schwärzung zeigt, wie ihre Umgebung.

Durch Vergleich des Scalenwerthes meines Photometerkeiles im Hartmann'schen Mikrophotometer mit dem thunlichst genau auf ihre Lichtundurchlässigkeit im Weber'schen Photometer gemessenen Normalstreifen (entwickelten Bromsilbergelatineplatten) wurde die Scala meines Mikrophotometers geaicht. Tabelle II zeigt den Werth der Scalentheile an dem Mikrophotometer auf Grund meiner Messungen der Lichtundurchlässigkeit[1] mehrerer Normalstreifen.

Die nunmehr mittelst des Mikrophotometers ablesbare Undurchlässigkeit photographischer, entwickelter und fixirter Platten geben mit geringer Mühe Zahlen von sehr hoher Genauigkeit, welche wohl die bisher gemachten Messungen dieser Art an Sicherheit übertreffen.

Mit Hilfe dieser expeditiven und genauen Methode stellte ich eine Reihe von Untersuchungen an, welche für die Kenntniss der photographischen Verfahren (Hervorrufungsprocesse auf Silberschichten) von Interesse sind.

Die Schwärzung photographischer Platten.

Der Silberniederschlag einer entwickelten photographischen Platte erscheint umso dichter, undurchsichtiger, schwärzer im durchfallenden Lichte, je weniger Licht er durchlässt, d. h. je mehr metallisches Silber auf die Flächeneinheit der Schicht niedergeschlagen ist; hiebei übt jedoch der moleculare Zustand, Korngrösse und Zahl des Silberniederschlages einen bemerkenswerthen Einfluss.[2]

[1] Das ist das Verhältniss des auffallenden Lichtes zu dem durch die Schichte durchgegangenen Lichte.

[2] Es handelt sich hier um sogenanntes feinvertheiltes »moleculares« Silber, d. i. Silber, dessen Molecule durch irgendwelche andere Theilchen von einander getrennt sind; zum Unterschiede von cohärentem metallischem Silber (vergl. Wernicke, Wied. Ann. Physik u. Chemie, 1894, Bd. 52, S. 523; ferner O. Wiener, Wied. Ann. 1899, Bd. 69, S. 499).

Tabelle II.

Werth der Scalentheile an meinem Mikrophotometer.

Licht-Undurch-lässigkeit	Opacität oder Schwärzung (Logarithmus der Undurch-lässigkeit)	Scalen-theile	Licht-Undurch-lässigkeit	Opacität oder Schwärzung (Logarithmus der Undurch-lässigkeit)	Scalen-theile
1000	3·0	74	15·9	1·2	52·2
500	2·7	72	14·1	1·15	51·6
316	2·5	70·0	12·6	1·1	50·9
250	2·4	69·0	11·2	1·05	50·1
200	2·3	68·0	10·0	1·0	49·3
160	2·2	66·7	9·0	0·95	48·5
141	2·15	66·0	8·0	0·9	47·7
126	2·1	65·4	7·1	0·85	46·5
112	2·05	64·7	6·3	0·8	45·5
100	2·0	64·0	5·6	0·75	44·5
89	1·95	63·3	5·0	0·7	43·5
79·5	1·9	62·5	4·5	0·65	42·5
70·8	1·85	61·8	4·0	0·6	41·5
63	1·8	61·0	3·5	0·55	40·5
56·3	1·75	60·2	3·2	0·5	39·5
50	1·7	59·5	2·8	0·45	38·4
44·7	1·65	58·8	2·5	0·4	37·2
40	1·6	58·0	2·2	0·35	36·0
35·5	1·55	57·3	2·0	0·3	34·5
31·6	1·5	56·5	1·8	0·25	32·9
28·2	1·45	55·7	1·6	0·2	31·0
25·1	1·4	55·0	1·4	0·15	29·0
22·4	1·35	54·2	1·26	0·1	25·5
20·0	1·3	53·5	1	0·00	—
17·8	1·25	52·9			

Ist a für eine gewisse Schwärzung das Intensitätsverhältniss vom auffallenden zum durchfallenden Lichte $\left(\frac{i}{i'}\right)$, so setzt man (analog den bei dem Durchgange des Lichtes durch verschieden dicke, durchlässige Medien beobachteten Erscheinungen):

$$a = e^D,$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und betrachtet die der Dicke der durchlässigen Medien analoge Grösse D als Dichtigkeit der photographischen Platten.

In diesem Sinne ist die Dichtigkeit einer Platte oder, wie man auch sagt, ihre Schwärzung oder Opacität somit der Logarithmus ihrer Undurchlässigkeit gegen Licht. Die Einführung dieser Grösse hat sich in der Sensitometrie bewährt, entsprechend den sensitometrischen Untersuchungen von Hurter und Driffield,[1] sowie von Schwarzschild.[2]

Aus praktischen Gründen entschied ich mich für gewöhnliche Brigg'sche Logarithmen, da mit natürlichen Logarithmen schlecht zu rechnen ist. Es empfiehlt sich für die Zwecke der praktischen Sensitometrie

$$a = 10^S$$

zu setzen und S als praktisches Maass der Schwärzung zu benützen, wie dies in vorliegender Abhandlung von mir geschah. S ist dann der gewöhnliche Logarithmus von a, und es besteht die Gleichung

$$S = D \log e = 0\cdot 4343\, D.$$

Die Zahl, welche das Maass der »Schwärzung« repräsentirt, ist bei ein und derselben Plattensorte und Entwicklungsart dem Gewichte des metallischen Silbers auf der Flächeneinheit proportional und entspricht dem auf das Auge hervorgerufenen Licht-, respective Dunkelheitseindrucke.[3]

Die »Schwärzung« gewöhnlicher guter Negative liegt bei Porträtaufnahmen (Studienköpfen) vom Schatten bis zum

---

[1] Eder's Jahrbuch für Photographie, 1899.

[2] Phot. Corresp. 1899.

[3] Hurter und Driffield, Eder's Jahrbuch für Photogr., 1899, S. 219.

hellsten Lichte zwischen 0 bis 1·5, bei Landschaften oder kräftigen Negativen zwischen 2 bis höchstens 2·5, welche letztere Dichtigkeit nur besonders contrastreichen Negativen mit intensiver Schwärzung der hellsten Lichter zukommt. Die Schwärzung = 1 entspricht einem kräftigen Mittelton des photographischen Negativs, sie entspricht einer Undurchlässigkeit gegen Licht = 10, d. h. Licht von der Intensität 1 wird beim Durchgang auf $^1/_{10}$ geschwächt (lg 10 = 1).

Man kann die Silbermenge quantitativ bestimmen, welche, auf eine gewisse Plattenfläche vertheilt, die »Schwärzung« = 1 hervorruft. Nach Hurter und Driffield bewirkt eine Menge von 0·0131 *g* metallischem Silber auf eine Plattenfläche von 100 cm^2 die »Schwärzung« (»Opacität«) = 1, falls das Bromsilberbild mittelst Eisenoxalat entwickelt war.

Um die Angaben zu controliren, belichtete ich mehrere photographische Trockenplatten vom Flächenausmaasse 18 × 24 *cm* verschieden lang und entwickelte mit Eisenoxalat. Es resultirten gleichmässig geschwärzte Platten, welche beim Untersuchen im Mikrophotometer die mittlere Schwärzung von 0·5, 0·8, 1·0, 1·5 und 2·0 zeigten. Diese Platten wurden mittelst eines Gemisches Chromsäure und Salzsäure in Chlorsilber übergeführt, gewaschen, das Chlorsilber in Ammoniak gelöst und mit Salpetersäure gefällt; bei anderen Proben wurden die Gelatineschichten in warmem Wasser gelöst, die Lösung mit Salpetersäure gekocht, das Silber mit Salzsäure gefällt und das Chlorsilber gewogen. Es ergab sich für verschiedene Opacitäten bei Schattera- und Schleussner-Gelatineplatten untenstehendes Quantum von metallischem Silber. Nasse Jodbromcollodionplatten (mit Eisenvitriol-Entwickler und Cyankalium-Fixirung) wurden in analoger Weise analysirt.

	Metallisches Silber pro 100 cm^2	
	Bromsilber-Gelatineplatte	Nasse Collodionplatte
Opacität 0·5	0·0057 *g*	
» 0·8	0·0070 »	
» 1·0	0·0109 »	0·0070 *g*
» 1·5	0·0160 »	0·0097 »
» 2·0	0·0195 »	0·0130 »

Die Zahlen für Bromsilbergelatine (»Porträtplatten«) stimmen mit Hurter und Driffield's Angaben befriedigend überein. Ferner zeigt es sich, dass wirklich das Maass der Schwärzung dem Gewichte des auf die Flächeneinheit ausgeschiedenen metallischen Silbers annähernd proportional ist.

Bei anderen Proben wurde die Platte mittelst Rodinal, Glycin, Hydrochinon entwickelt und im sauren Fixirbade fixirt, und ich fand pro 100 cm^2 Fläche die Silbermenge von 0·0110 *g* für die Opacität = 1. Diese Zahl nähert sich also sehr dem Befunde für Eisenoxalat-Entwickler.

Bei nassen Collodionplatten werden dieselben Opacitäten mit geringeren Quantitäten Silber erzielt, als bei Bromsilber-Gelatineplatten (siehe Tabelle). Cohärentes Silber in Form von versilberten Glasspiegeln ist relativ noch undurchlässiger gegen Licht; denn nach meinen Analysen wird die Opacität 1·5 bereits durch 0·0039 *g* Silber, die Opacität 2·0 durch 0·0052 *g* Silber bewirkt. Der moleculare Zustand der metallischen Silberschichte ist also von Einfluss auf die Opacitätsverhältnisse.

Besteht das photographische Silberbild nicht aus reinem metallischen Silber, sondern fallen die Oxydationsproducte des Entwicklers (z. B. bei Pyrogallol) als braungelbes Farbstoffbild an die Silberbildstellen an, so ist zur Erzielung derselben optischen Opacität weniger Silber erforderlich, als beim Eisenoxalat; z. B. entsprechen 0·0104 *g* mittelst Pyrogallol reducirten Silbers pro 100 cm^2 der Opacität = 1, welche von Hurter und Driffield angegebene Zahl ich nicht weiter prüfte.

Empfindlichkeitsbestimmung einer Platte nach dem System des Pariser photographischen Congresses 1889 und Reduction auf absolute sensitometrische Maasse.

Es genügt nicht, dass eine Bromsilberplatte bei sehr schwacher Lichtwirkung (Momentaufnahmen) schwache, gerade noch nachweisbare Schwärzungen im Entwickler gibt, denn diese liefern beim Copiren ungenügende Deckung. Wenn die Sensitometerprobe aber eine Schwärzungsscala liefert, bei welcher auf die schwächsten Nummern bald besser deckende, merklich stärker geschwärzte Nummern folgen, so gibt ein bei

kurzer Belichtungszeit hergestelltes Negativ genügend kräftige, copirfähige photographische Matrizen. In den gewöhnlichen Fällen der Photographie erscheint jene Bromsilberplatte als empfindlichere, deren schwächeres Ende der Schwärzungsscala (unter sonst gleichen Verhältnissen) die grössere Schwärzung aufweist.

Ähnliche Erwägungen bewogen den Internationalen photographischen Congress in Paris, 1889,[1] bei der Sensitometrie der photographischen Trockenplatten nicht die schwächste, letzte, eben noch sichtbare Sensitometernummer als Maass der Empfindlichkeit anzunehmen, sondern eine etwas dunklere Schwärzung, welche als Normalton bei der Ablesung der Empfindlichkeit acceptirt wurde. Zur Ermittlung solcher Tonscalen wird folgendes Princip eingehalten. Man lässt z. B. die Hälfte einer rein weissen Scheibe vor einem schwarzen Hintergrunde rotiren. Diese Nuance erhält man auch, wenn man schwarze Linien auf weissem Papiere derartig zieht, dass die weissen und schwarzen Stellen gleich breit sind. Diese Nuance wird in dem Congress-Beschlusse 1889 als mittlerer Normalton Nr. 5 bezeichnet. Nach ähnlichen Principien erhält man auch andere grauschwarze Töne, welche den Congress-Protokollen in Kupferdruck beigegeben sind. Die relative Empfindlichkeit zweier Platten wird bestimmt, indem man beim Lichte einer abgeblendeten Amylacetat-Normallampe (1 *m* Abstand) Streifen von Bromsilbergelatine stufenweise (von 5 zu 5 Secunden) exponirt, entwickelt, fixirt und dann vergleicht, welche Lichtmenge erforderlich ist, um im gegebenen Falle die Normalschwärzung zu erzielen.

Mittelst einer mir zur Verfügung stehenden Originalscala des Pariser Congresses 1889 stellte ich genaue Messungen über die entsprechende Schwärzungszahl an, um das (übrigens in der Praxis nirgends acceptirte) Pariser System mit dem Scheiner'schen System in Beziehungen zu bringen.

---

[1] Congrès International de Photographie, Paris 1889; Brüssel 1891. Die Congressprotokolle erschienen Paris 1892 (Auszug der Sensitometrie-Methode siehe A. Londe, La photographie moderne, Paris 1896, p. 226).

Zu diesem Zwecke bestimmte ich bei 16 Sensitometerstreifen jene Stelle, welche (auf weisses Papier gelegt) identisch mit der Schwärzung des Normaltones des Pariser Congresses sich zeigte. Die Schwärzung dieser Stellen bestimmte ich mittelst des Mikrophotometers (siehe unten) genau und es ergab sich, dass der Pariser Normalton einer mit Eisenoxalat entwickelten Bromsilbergelatineplatte (auf weisses Papier gelegt) dann vorliegt, wenn die Schwärzung[1] = 0·35 beträgt.

Dieses System der Bestimmung eines grauen Normaltones bringt die grosse Schwierigkeit mit sich, dass etwa auftretende »Schleier« der Platte (s. d.) die Schwärzung stark beeinflussten und dass bei stark schleierigen Platten die Ablesungen ganz werthlos werden, wenn man nicht die »Schleierschwärzung« in Abrechnung bringt, was dann keine einfache Sache mehr ist.

Deshalb bleibt man in der photographischen Praxis mit Recht dabei, die mit grösserer Sicherheit ablesbare letzte, schwächste Sensitometernummer als Empfindlichkeitsmaass (Schwellenwerth, Empfindlichkeit) anzugeben.

Prüfung der Übereinstimmung der correspondirenden Sensitometernummer mit Scheiner's Sensitometer bei verschiedenem Lichtabstande.

Unter der Voraussetzung der strengen Giltigkeit der Reciprocitätsregel gab ich in der Tabelle I auf S. 1417 drei correspondirende Beobachtungsreihen beim Scheiner'schen Sensitometer an und stellte die bei 1 *m*, ferner die bei $^1/_3$ *m* Lichtabstand mit 60 Secunden Expositionszeit und bei $^1/_3$ *m* Lichtabstand und 14 Minuten 24 Secunden Expositionszeit erhaltenen gleichwerthigen[2] Sensitometernummern gegenüber.

Es wurden nun unter sonst gleichen Verhältnissen (gleichartigen Bromsilberplatten, gleichzeitiger Hervorrufung etc.) thatsächliche Schwärzungsmessungen an den verschiedenen Serien mittelst des Mikrophotometers angestellt.

---

[1] Schwärzung = Logarithmus der Undurchlässigkeit der Schicht für Licht.

[2] Das sind die derselben berechneten Lichtmenge entsprechenden Sensitometernummern.

Es ergab sich aber bei der Messung der Schwärzung der Bromsilberplatten keineswegs eine völlige Übereinstimmung, sondern nur eine ziemliche Annäherung der bei 1 *m* Lichtabstand und $^1/_3$ *m* Abstand correspondirenden (gleichen Lichtmengen entsprechenden) Sensitometernummern.

Die nachstehende Tabelle III zeigt den photographischen Effect (Schwärzung der Bromsilberplatte im Entwickler) ein und derselben »Lichtmenge« bei verschiedenem Lichtabstande und entsprechend variirter Expositionszeit; die nebeneinanderstehenden horizontalen Zahlenreihen entsprechen dem gleichen Producte $i.t$, aber die dazu gehörigen Schwärzungen sind nicht gleich.

Aus diesen Beobachtungen geht hervor, dass beim Scheiner'schen Sensitometer es nicht ganz einerlei ist, ob man die Bestimmung der Empfindlichkeit oder der Schwärzungscurve bei 1 *m* Lichtabstand und 1 Minute Expositionszeit oder wesentlich grösserem oder kleinerem Lichtabstand und entsprechend kürzerer oder längerer Expositionszeit vornimmt. Es stellen sich mitunter Differenzen von ungefähr 1° Scheiner (in einzelnen Fällen 2° Scheiner) ein.

Um denselben Betrag differiren auch die berechneten Sensitometerangaben bei $^1/_3$ *m* Abstand und 1 Minute Expositionszeit (verglichen mit den correspondirenden Sensitometerzahlen bei 1 *m* Abstand und 1 Minute Exposition). Nach der Rechnung soll 1° Scheiner bei 1 *m* Abstand und 1 Minute Exposition mit 10° Scheiner bei $^1/_{2\cdot 94}$ *m* Abstand und 1 Minute Exposition übereinstimmen. Bei meinen Experimenten traf dieser Fall bei Rapidplatten annähernd ein, aber in mehreren Fällen blieb die Sensitometerangabe bei $^1/_{2\cdot 94}$ *m* Abstand um eine Nummer des Scheiner'schen Sensitometers zurück.

Immerhin wird es für die Praxis vollkommen genügen, wenn man die bei $^1/_{2\cdot 94}$ *m* Abstand und 1 Minute Expositionszeit im Scheiner'schen Sensitometer ermittelte Schwärzungscurve als normale gelten lässt und die absolute Empfindlichkeit oder der Schwellenwerth (letzte sichtbare Nummer in der Periode der Unterexposition) in der Distanz von 1 *m* Lichtabstand und 1 Minute Expositionszeit bestimmt.

Tabelle III.

Schwärzung einer Bromsilbergelatineplatte im Scheiner-Sensitometer bei verschiedenem Lichtabstande.

Secunden-Meter-Kerzen	Bei 1 *m* Kerzenabstand und 1 Minute Belichtung		Bei 4 *m* Kerzenabstand und 16 Minuten Belichtung	Bei $^1/_8$ *m* Kerzenabstand und 1 Minute Belichtung		
	Sensit.-Nr.	Schwärzung	Schwärzung	Sensit.-Nr.	Schwärzung	
2·6	*c*	0·89	0·70	7	0·85	Schuttern-Platte (Eisenoxalat-Entwickler)
2·0	*b*	0·78	0·57	8	0·74	
1·6	*a*	0·68	0·50	9	0·65	
1·3	1	0·59	0·46	10	0·54	
1·0	2	0·51	0·42	11	0·48	
0·79	3	0·41	0·40	12	0·39	
0·61	4	0·38	0·37	13	0·36	
0·48	5	0·35	0·35	14	0·34	
2·6	*c*	0·85	0·72			Schleussner-Platte
2·0	*b*	0·71	0·57			
1·6	*a*	0·57	0·50			
1·3	1	0·48	0·41			
1·0	2	0·38	0·36			
0·79	3	0·33	0·33			
0·61	4	0·31	0·29			
0·48	5	0·29	0·25			
0·38	6	0·26	0·23			
2·6	*c*	1·37		7	1·35	länger entwickelt
1·3	1	0·79		10	0·84	
0·61	4	0·53		13	0·55	
0·3	7	0·36		16	0·35	
2·6	*c*	0·90		7	0·88	kürzer entwickelt
1·3	1	0·56		10	0·55	
0·61	4	0·41		13	0·40	
0·3	7	0·29		16	0·29	

Die Beobachtungsfehler von 1—2° Scheiner können bei dem gegenwärtigen Stand der praktischen Sensitometrie vielleicht vernachlässigt werden oder man kann entsprechende Correcturen vornehmen, wozu meine Tabellen alle Behelfe darbieten.

Für wissenschaftliche Untersuchungen, bei welchen grösstmögliche Genauigkeit verlangt wird, sind diese Abweichungen zu berücksichtigen. Sie haben ihren Grund darin, dass die Reciprocitätsregel nicht strenge giltig ist und auch das Verhalten photographischer Platten gegen intermittirende Belichtung spielt hiebei eine Rolle.

Belichtet man Bromsilbergelatineplatten unter dem Einflusse gleicher Lichtmengen (constantem $i.t$) bei geändertem Lichtabstande, so macht sich ein Einfluss der Lichtintensität auf die photographische Wirkung geltend.

Meine mikrophotometrischen Messungen zeigen deutlich die Abweichungen von der Reciprocitätsregel, wobei allerdings auch noch die Phänomene der intermittirenden Beleuchtung eine Complication herbeiführen.

Exponirt man z. B. in Scheiner's Sensitometer bei einer Kerzendistanz von 1 *m* 1 Minute lang, bei 4 *m* Distanz 16 Minuten und bei $^1/_3$ *m* entsprechend kürzer, so soll man gleiche Schwärzungen der Bromsilberplatte im Entwickler erwarten. Das Experiment zeigt aber bei meinen Versuchen mit Lumière-, Schleussner- und Schattera-Platten,[1] dass bei schwachen Lichtintensitäten (4 *m* Lichtabstand und 16 Minuten Exposition im Scheiner-Sensitometer) die photographische Schwärzung des Bromsilbers im Entwickler meistens um 1° bis höchstens 2° Scheiner zurückbleibt (in den Halbtönen bleiben die Schwärzungszahlen um 0·15 zurück[2]), d. h. um diesen Betrag kleiner ist, als wenn man bei 1 *m* Lichtabstand 1 Minute lang belichtet.

Steigert man die Lichtintensität durch Annäherung der Kerze auf $^1/_3$ *m* Abstand, so war bei vereinzelten Versuchs-

---

[1] Durchwegs reine Bromsilbergelatineplatten.

[2] In einigen Fällen waren bei beiden Fällen die Schwärzungen nahezu constant.

reihen die photographische Schwärzung stärker als bei 1 *m* Abstand (Lumière-Platten), während bei der Mehrzahl der Fälle auffallender Weise die Schwärzung bei $^1/_5$ *m* Abstand um 1° Scheiner geringer war, als bei 1 *m* (bei constantem Product *i.t*).

Diese Differenz ist wohl im Mikrophotometer messbar. aber in der Praxis kaum bemerkbar.

Diese ohne Zweifel vorhandenen Abweichungen von der Reciprocitätsregel, welche am genauesten Dr. Schwarzschild[1] bei seinen Versuchen an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien und an der Kuffner'schen Sternwarte in Ottakring feststellte, erfolgen in folgendem Sinne: Bei Verringerung der Lichtintensität muss man zur Erzielung einer bestimmten photographischen Schwärzung von Bromsilbergelatineplatten im Entwickler unverhältnissmässig länger belichten, als die Reciprocitätsregel verlangt, oder wie Schwarzschild (a. a. O.) zuerst präcise ausdrückte: Die Bromsilbergelatine hat die Eigenschaft, von der einstrahlenden Lichtenergie umso weniger für den photographischen Zweck zu verwenden, je langsamer die Energie zuströmt. Dazu kommt, dass eine gewisse Anfangswirkung zur Auslösung des photochemischen Processes nothwendig ist; sie ist je nach der Natur der lichtempfindlichen Schichte variabel. was namentlich bei dem Sensibilisirungsmaximum verschiedener Farbstoffe bei orthochromatischen Platten bemerkbar ist.

Gilt das Reciprocitätsgesetz, so ist die erzeugte Schwärzung S eine Function der eingestrahlten Lichtmenge. Nennt man letztere l, so ist also

$$S = \varphi(l), \qquad l = i.t.$$

In den Fällen, wo das Reciprocitätsgesetz nicht gilt, hat Schwarzschild nachgewiesen,[2] dass gleiche Schwärzung auf einer bestimmten Platte immer dann eintritt. wenn das Product

[1] Photogr. Corresp. 1899, S. —. Ferner Untersuchungen von Michalke. Abney, Miethe (Eder's Handbuch der Photogr. 2. Aufl., Bd. II, S. 3), Precht (Eder's Jahrb. f. Photogr. 1899, S. 457) und Englisch her.

[2] Phot. Corresp. 1899. — Publicationen der Kuffner'schen Sternwarte in Wien, Bd. V.

$$\lambda = i \, . \, t^p$$

denselben Werth hat; λ ist hiebei die Lichtmenge, i die Lichtintensität, t die Belichtungsdauer und p eine innerhalb weiter Grenzen der Intensität und der Expositionszeit für die betreffende Platte charakteristische Constante. Es ist also das Reciprocitätsgesetz nur ein specieller Fall obiger Formel, aus der es entsteht, wenn man $p = 1$ setzt. Die Constante wechselt von Platte zu Platte, sie ist im Allgemeinen kleiner als 1; Schwarzschild fand bei einer Handelssorte von rapiden Bromsilbergelatineplatten[1] und einer Schwankung der 1- bis 1000fachen Belichtungszeit, dass $p = 0 \cdot 86$ ist, während der kleinste bisher bei Laboratoriumsexperimenten beobachtete Werth $p = 0 \cdot 78$ sich aus Versuchen von Abney[2] für ein Bromsilberpapier ergibt.

Die Wirkung intermittirender Beleuchtung auf Bromsilbergelatine ist stets etwas geringer als die Wirkung derselben Lichtmenge bei continuirlicher Beleuchtung. Diese Thatsache beobachtete Abney, dann R. Englisch und wurde in neuerer Zeit von K. Schwarzschild[3] genau studirt.

Nach Schwarzschild's[4] eingehenden Untersuchungen hängt die Wirkung des Intermittirens bei der Belichtung von Bromsilberplatten von zwei Grössen ab:

---

[1] Für Schleussnerplatten war der Werth des Exponenten $p = 0 \cdot 89$; für Lumièreplatten 0·96; für Schatteraplatten 0·86; für Platten der Berliner Anilinfabrik 0·86; für wenig empfindliche Smithplatten 0·97 und für wenig empfindliche Wratten'sche Platten 0·82 (Schwarzschild, Publicationen der Kuffner-schen Sternwarte in Wien, 1900).

[2] Photographic-Journal 1893—1894, S. 58.

[3] Phot. Correspondenz, 1899, S. 111.

[4] K. Schwarzschild (Phot. Corresp. 1899, S. 171) variirte die intermittirende Belichtung von Bromsilbergelatineplatten durch Änderung:

1. des Verhältnisses der Pausenlänge zur Dauer der Einzelbelichtung q;

2. der Dauer von Einzelbelichtung und darauffolgender Pause zusammengenommen t;

3. der wirksamen Lichtintensität J;

4. der Gesammtversuchsdauer von der ersten bis zur letzten Belichtung T.

Mit diesen vier Grössen, die aus Gründen der Darstellung gerade so gewählt wurden, sind auch alle anderen gegeben, die eventuell interessiren könnten, z. B. die Dauer der Einzelbelichtung:



1. Von dem Verhältnisse der Pause zur Dauer der Einzelbelichtung, je länger im Verhältnisse die Pause, umso stärker die Abschwächung;

2. von der Lichtmenge, welche die Einzelbelichtung auf die Platte sendet. Ein bestimmtes Verhältniss der Pause zur Dauer der Einzelbelichtung schwächt umsomehr, je weiter diese Lichtmenge unter dem Schwellenwerthe liegt. Von geringem Einflusse ist hingegen der Grad der Schwärzung und die absolute Grösse der Belichtungszeit oder der Lichtintensität für sich genommen.

Um das verschiedene Verhalten der Platte gegen continuirliches und intermittirendes Licht zu bestimmen, genügt ein einfacher Versuch unter Benützung derselben Normallichtquelle beim Abstande von 1 *m*.

Da 1 Scheiner-Kerze $= \frac{1}{13 \cdot 2}$ Hefner-Normalkerzen entspricht, so muss man die in der Tabelle I, vierte Rubrik, angegebenen Zahlen für Secunden-Meter-Kerzen mit 13·2 multipliciren, wenn man die Belichtungszeiten finden will (Lichtabstand der Scheiner'schen Kerze = 1 *m*), welche den zugeführten Lichtmengen, ausgedrückt in Secunden-Meter-Kerzen, entsprechen. Belichtet man ruckweise durch Aufziehen des Cassettenschiebers eine photographische Platte im Abstande von 1 *m* mit einer Scheiner'schen Benzinkerze während der so gefundenen Belichtungszeit, so kann man eine Scala der

---

$$t_1 = \frac{t}{1+q},$$

die Dauer der Pause:

$$t_2 = \frac{t.q}{1+q},$$

die Summe der Belichtungszeit:

$$T_1 = \frac{T}{1+q},$$

die Zahl der Unterbrechungen:

$$u = \frac{T}{t}.$$

Die Wirkung des Intermittirens wird aber nicht von den vier genannten Grössen, sondern nur von dem sub 1) genannten Verhältnisse und von der Lichtmenge, welche die Einzelbelichtung auf die Platte sendet, abhängen.

Schwärzungen bei continuirlicher Beleuchtung erhalten, welche mit den Lichtmengen der intermittirenden Beleuchtung mit der Scheiner'schen rotirenden Scheibe correspondirt.

Es genügt, in Intervallen von je zwei bis drei Nummern des Scheiner'schen Sensitometers Stichproben zu machen, und zwar entsprechen die Scheiner'schen Sensitometernummern bei $^1/_3$ *m* Lichtabstand und 1 Minute Belichtungsdauer den in nachfolgender Tabelle IV danebengestellten berechneten continuirlichen Belichtungen bei einem Abstande der Scheiner'schen Benzinkerze von 1 *m*.

Tabelle IV.

Sensitometernummern bei einem Abstande der Scheiner'schen Benzinkerze = $^1/_3$ *m* und einer Belichtungsdauer von 1 Minute (intermittirende Beleuchtung des normalen Scheiner-Sensitometers)	Entsprechende Sensitometernummern bei 1 *m* Kerzenabstand und 1 Minute Belichtungsdauer	Entsprechende Belichtungsdauer einer frei und continuirlich einwirkenden Scheiner'schen Benzinkerze bei 1 *m* Abstand
20	11	0·11 × 13·2 = 1·45 Sec.
18	9	0·18 × 13·2 = 2·38 »
16	7	0·30 × 13·2 = 3·96 »
13	4	0·61 × 13·2 = 8·05 »
10	1	1·26 × 13·2 = 16·63 »
7	*c*	2·61 × 13·2 = 34·45 »
4	. . . .	5·4 × 13·2 = 71·28 »
1	. . . .	11·2 × 13·2 = 147·84 »
c	. . . .	23·2 × 13·2 = 306 »

Beschränkt man sich auf die Sensitometernummern für $^1/_3$ *m* Abstand

c, 1, 4, 7, 10, 13, 16

im Scheiner-Sensitometer (mit rotirender Scheibe), so kann man dieselben berechneten Lichtmengen[1] erhalten, wenn man die Scheiner'sche Benzinkerze $\left(=\frac{1}{13\cdot 2}\right.$ Hefner-Kerzen$\left.\right)$ in 1 *m* Abstand auf eine photographische Cassette (mit photographischer Platte) einwirken lässt (Lichtquelle gegenüber der Mitte der Platte) und den Cassettenschieber ruckweise aufzieht; die nachfolgenden Belichtungen addiren sich hiebei zu den vorhergegangenen. Man muss demzufolge die Schieber in folgenden Zeitabschnitten von der Platte ruckweise wegziehen:

158^s, 77^s, 37^s, 18^s, 8^s, 4^s, 4^s.

Somit wird das erste Stück durch die Summe aller dieser Theilexposition belichtet werden (= 306 Secunden), das letzte Stückchen aber nur 4 Secunden lang, was der Sensitometernummer 16 bei $^1/_3$ *m* Lichtabstand genügend genau entspricht.

Eine Reihe derartiger Versuche stellte ich an, um die Richtigkeit der folgenden Schwarzschild'schen Angaben zu prüfen:

»Der Unterschied in der Wirkung continuirlicher und intermittirender Belichtung hat aber noch zur Folge, dass mit der rotirenden Scheibe dieses Sensitometers nicht ganz die ursprüngliche Absicht erreicht wird, eine genaue Scala der Expositionszeiten bei constanter Lichtintensität zu bilden. Die höheren Nummern sind durch die relativ längeren Belichtungspausen zu sehr geschwächt. Wenn man aber statt einer Scala der Expositionszeiten eine Scala der Intensitäten durch Schwächung des Lichtes in bestimmten Verhältnissen, wie z. B. beim Vogel'schen Papierscalen-Photometer oder Warnerke'schen Sensitometer herstellen würde, so würde dieselbe

[1] Hiebei sind die Lichtverluste durch schräges Auffallen des Lichtes an den entfernteren Plattenenden nicht berücksichtigt; sie sind gering (circa 0·2° Scheiner).

im gleichen Sinne von der genauen Scala der Expositionszeiten abweichen, wie die Scala des Scheiner'schen Sensitometers. Denn in Folge der früher nachgewiesenen Abweichungen vom Reciprocitätsgesetze wird eine Verringerung der Intensität eine geringere Schwärzung erzeugen, als eine Verkürzung der Expositionszeit im selben Verhältnissnis, und die höheren Nummern der Intensitätsscala würden wieder schwächer als die der genauen Zeitscala ausfallen«.

Zur Prüfung dieser Frage und zur Feststellung der Beziehungen einerseits zwischen dem Effecte continuirlicher Beleuchtung photographischer Trockenplatten und anderseits der Wirkung intermittirender Beleuchtung im Scheiner'schen Sensitometer stellte ich folgende Versuchsreihe an. Es wurden Belichtungen in Scheiner's Sensitometer bei 1 *m* und $^1/_3$ *m* Abstand und verschiedenen Belichtungszeiten gemacht und die Schwärzung der einzelnen Felder gemessen. In der folgenden Tabelle V sind die gleichen Lichtmengen entsprechenden Sensitometernummern (intermittirende Beleuchtung) in den horizontalen Reihen nebeneinandergestellt und mit der correspondirenden continuirlichen Lichtwirkung verglichen.

Aus diesen Zahlen kann man die Abweichungen, welche bei der Sensitometrie mit continuirlichem Lichte und bei verschiedener Anwendung des Scheiner'schen Sensitometers (intermittirende Beleuchtung) entstehen, erkennen.

Wenn man dieselbe Lichtmenge bei constantem Lichtabstande dem Scheiner-Sensitometer zuführt, so geben die höheren Nummern (mit kleinen Belichtungsdauern und grossen Ruhepausen) etwas niedrigere Zahlen, als ihnen nach der Reciprocitätsregel zukommt; z. B. geben die hohen Nummern (an der Peripherie der rotirenden Scheibe gelegen) bei 14 Minuten langer Belichtung einen geringeren photographischen Effect (geringere Schwärzung), als die correspondirenden niederen Nummern bei 1 Minute langer Belichtung. Der hiebei auftretende Fehler (Abweichung nach der Reciprocitätsregel) beträgt nach meinen Messungen (siehe Tabellen) $^1/_2$—1° Scheiner; die für die verwendeten Plattensorten geltenden Correctionszahlen sind aus den Tabellen V und VI ersichtlich.

Tabelle V.[1]

Intermittirende Beleuchtung im Scheiner-Sensitometer				Lichtmenge in Secunden-Meter-Kerzen	Continuirliche Beleuchtung durch dieselben Lichtmengen bei 1 *m* Lichtabstand mit Scheiner's Benzinkerze
1 *m* Lichtabstand, 1 Minute Belichtung		1/3 *m* Lichtabstand, 1 Minute Belichtung			
Sensitometer-Nr.	Schwärzung	Sensitometer-Nr.	Schwärzung		Schwärzung
		c	2·09	23·2	
		b	1·95	18·2	
		a	1·90	14·3	
		1	1·74	11·2	1·76
		2	1·55	8·8	
		3	1·42	6·9	
		4	1·23	5·4	1·24
		5	1·11	4·2	
		6	0·94	3·3	
c	0·86	7	0·83	2·6	0·88
		8	0·70	2·0	
		9	0·63	1·6	
1	0·56	10	0·54	1·3	0·62
		11	0·48	0·99	
		12	0·42	0·78	
4	0·40	13	0·36	0·61	0·42
		14	0·32	0·48	
		15	0·29	0·38	
7	0·29	16	0·27	0·30	0·32

[1] In Tabelle V und VI sind diejenigen Sensitometernummern und continuirlichen Belichtungszeiten in den horizontalen Reihen nebeneinander gestellt, für welche die Rechnung gleichen Werth (gleiche Lichtmengen) ergibt. Die thatsächlich beobachteten Schwärzungen ergeben für continuirliches Licht Abweichungen von durchschnittlich 1° Scheiner, höchstens 2° Scheiner.

Tabelle VI.

Intermittirende Beleuchtung im Scheiner-Sensitometer								Lichtmenge in Secunden-Meter-Kerzen	Continuirliche Beleuchtung durch dieselbe Lichtmenge bei 1 *m* Lichtabstand mit Scheiner's Benzinkerze
1 *m* Lichtabstand, 1 Minute Belichtung		1 *m* Lichtabstand, 14 Min. 24 Sec. Belichtung		1/3 *m* Lichtabstand, 1 Minute Belichtung		1/3 *m* Lichtabstand, 14 Min. 24 Sec. Belichtung			
Sensitom.-Nr.	Schwärzung	Sensitom.-Nr.	Schwärzung	Sensitom.-Nr.	Schwärzung	Sensitom.-Nr.	Schwärzung		
Erste Versuchsreihe									
		c	2·7					37·6	
		b	2·4					29·5	
		a	2·16	*c*	2·4			23·2	2·42
		1	1·94	*b*	2·20			18·2	
		2	1·76	*a*	1·94			14·3	
		3	1·60	1	1·75			11·2	1·76
		4	1·35	2	1·54			8·3	
		5	1·06	3	1·29			6·9	
		6	0·90	4	1·00			5·4	1·02
		7	0·75	5	0·87			4·2	
		8	0·57	6	0·70			3·3	
c	0·53	9	0·49	7	0·55			2·6	0·60
b	0·41	10	0·36	8	0·40			2·0	
a	0·32	11	0·29	9	0·31			1·6	
1	0·27	12	0·26	10	0·25			1·3	0·33
2	0·22	13	.	11	0·19			1·0	
3	0·18	14	.	12	.			0·8	
Zweite Versuchsreihe									
						8	2·70	29·5	
				c	2·50	9	2·25	23·2	2·70
				b	2·16	10	1·91	18·2	
				a	1·83	11	1·65	14·3	
				1	1·70	12	1·45	11·2	1·80
				2	1·45	13	1·08	8·3	
				3	1·24	14	0·86	6·9	
				4	0·95	15	0·66	5·4	1·10
				5	0·75	16	0·52	4·2	
				6	0·56	17	0·35	3·3	
				7	0·41	18	0·30	2·6	0·57
				8	0·30	19	0·22	2·0	
				9	0·25	20	.	1·6	
				10	0·18	.	.	1·3	0·25

Es ist durch meine Versuche die Schwarzschild'sche Ansicht bestätigt, dass für die Praxis der Photographie sich am besten ein Mittelding zwischen Zeitscala und Intensitätsscala eigne, da man es hier weder mit constanten Intensitäten, noch constanten Expositionszeiten zu thun hat und z. B. hochempfindliche Platten bald für Momentaufnahmen heller Gegenstände, bald für Daueraufnahmen lichtschwacher Objecte sucht. Das Scheiner'sche Sensitometer wird daher gerade durch sein Hinneigen von der Zeitscala zur Intensitätsscala, das die intermittirende Belichtung bewirkt, im Allgemeinen für die Praxis geeignete Empfindlichkeitsangaben liefern.

Bestimmung des Schleiers photographischer Platten.

Unter »Schleier« beim Entwickeln photographischer Platten versteht man die Silberreduction, welche die nicht belichtete Schichte photographischer Platten beim Behandeln mit Entwicklersubstanzen erleidet. »Schleierlose« Platten bleiben während der normalen Dauer der Entwicklung (z. B. 5—10 Minuten) an den unbelichteten Stellen vollkommen intact. Ein geringer Schleier, welchen die hochempfindlichen Bromsilbergelatineplatten des Handels fast immer aufweisen, gilt in der Praxis mit Recht als vollkommen unschädlich. Starke Schleier aber sind unzulässig und schädigen die Qualität der Negative.

Um einen Maassstab für die ziffermässige Bestimmung der Stärke des Schleiers zu gewinnen, bestimmte ich mittelst des Mikrophotometers die Opacität (Schwärzung) von unschädlichen geringen Schleiern und mehr oder weniger starken Schleiern. Eine vollständig schleierlose Platte zeigt die Schwärzung = 0.

Nach meinen Messungen ist ein Schleier, welcher die Schwärzung 0·1 aufweist (durchschnittlich ganz unschädlich in der Praxis) als sehr gering zu bezeichnen. Auch Schleier von der Schwärzung = 0·2 ist noch nicht störend und die Platten können immer noch als genügend klar arbeitend bezeichnet werden, während Platten mit einer grösseren Schwärzung als 0·3 schon als mittelmässig schleierig zu bezeichnen wären und Schwärzungen von 0·6 und 0·7 schon sehr starke Schleier

repräsentiren, welche die Copirdauer, sowie die Gradation der Negative schon stark beeinflussen.

Die Schleierbildung ist nicht nur von der Art der photographischen Bromsilberschichte abhängig, sondern ist auch eine Function der Art des Entwicklers, der Zeitdauer seiner Wirkung und der Temperatur.

Zum Beispiel gab eine gute Handelssorte einer für Porträtaufnahmen beliebten rapiden Trockenplatte, welche der Praktiker als »ein wenig schleierig« bezeichnen würde, folgende Messungsergebnisse des Schleiers: Eisenoxalat nach 3 Minuten langer Einwirkung erzeugte Schleier mit der Schwärzung 0·13, nach 5 Minuten 0·22, nach 10 Minuten 0·25 bei einer Temperatur von 17—18° C. — Adurol (Brom- oder Chlorhydrochinon) gab nach 1 Minute den Schleier (Schwärzung) = 0·13, nach 2 Minuten 0·25, nach 4 Minuten 0·3, nach 5 Minuten 0·4—0·5. — Hydrochinon (mit Pottasche, siehe das Gutachten in der Photographischen Correspondenz, 1899, S. 465 u. s. f.) gab in äquivalenter Zusammensetzung nach 2 Minuten den Schleier 0·12, nach 4 Minuten den Schleier 0·4, nach 5 Minuten den Schleier 0·6 und nach 8 Minuten 0·9.

Es lassen sich auf Grund dieser Angaben charakteristische Schleiercurven mit Berücksichtigung der Temperatur und Entwicklungsdauer construiren (siehe unten), worauf ich im Septemberhefte der »Photographischen Correspondenz« (1899, S. 529) aufmerksam machte und was von Andresen (Novemberheft der »Photographischen Correspondenz«, 1899) als wichtig für die Prüfung von Entwicklersubstanzen anerkannt wurde.

Construction der charakteristischen Curve oder Schwärzungscurve.

Um die Beziehungen zwischen Belichtungszeiten, respective Lichtmengen und der hiedurch bedingten Reduction photographischer Platten im Entwickler übersichtlich auszudrücken, wird am besten der Weg der graphischen Darstellung eingeschlagen, und zwar in der von Hurter und Driffield angegebenen Art und Weise. Man ertheilt einer photographischen Platte mit der Normallampe eine Reihe verschieden starker

Belichtungen, wobei die successive einwirkenden Lichtintensitäten eine geometrische Reihe bilden, und trägt in ein Coordinatennetz die Logarithmen dieser Intensitäten (respective der Lichtmengen) als Abscissen, die entsprechenden Schwärzungszahlen (Logarithmen der Undurchlässigkeit der Silberschichten gegen Licht) als Ordinaten ein und verbindet die gefundenen Punkte durch eine Curve. Die so erhaltene Curve nennt man »charakteristische Curve« oder »Schwärzungscurve« einer photographischen Platte. Das steilere oder mässigere Ansteigen dieser Curve repräsentirt die »Gradation« der Platte.

Das von mir vorhin erläuterte Sensitometersystem gestattet ebenso bequem als präcise die Construction der Schwärzungscurve, wenn man das Coordinatennetz Tafeln I—IX[1] benützt. Als Abscissen sind die Grade des Scheiner'schen Sensitometers eingetragen beim Benzinkerzenabstand 1 *m* und 1 Minute Exposition im Scheiner'schen Sensitometer, ferner bei $^1/_{2\cdot 94}$ *m* Lichtabstand und 1 Minute lange, sowie 14 Minuten 24 Secunden dauernde Belichtung. In der Regel findet man mit einer Belichtung von 1 Minute bei $^1/_{2\cdot 94}$ *m* Lichtabstand vollkommen das Auslangen. Man misst die Schwärzung der Felder Nr. *c, b, a,* 1 bis 20, und trägt an den bezeichneten Stellen die ermittelten Schwärzungszahlen als Ordinaten auf.

Auf diese Weise ist z. B. in Tafel I dargestellt, wie eine Bromsilbergelatine-Trockenplatte des Handels (Schattera-Platte) nach 3—10 Minuten langer Entwicklung im Eisenoxalat-Entwickler progressiv geschwärzt wird. Ganz ähnlich verhielten sich bei meinen Proben Schleussner-Platten.

Man ersicht aus dem Beginne der Curven, dass die Plattensorte, deren Schwärzungscurve in Tafel I dargestellt ist, sich etwas schleierig entwickelt, während z. B. die in Tafel II und III gezeichnete Curve auf grosse Klarheit (Schleierlosigkeit) der Schichte deutet.

[1] In diesen, vorliegender Abhandlung beigegebenen Tafeln wurde wegen des Platzersparnisses mit Sensitometer-Nummer 12 (links) begonnen; bei meinem Original-Coordinatennetz ist mit 20° Scheiner bei 1 *m* Abstand (im Nullpunkte des Coordinatennetzes) begonnen worden.

Tafel IV zeigt das Verhalten einer guten Bromsilberplattensorte des Handels, welche mit Hydrochinon-Pottasche-Entwickler[1] hervorgerufen war. Es ist eine Erfahrungsthatsache, dass dieser Entwickler viel mehr zu Schleier neigt, als z. B. Oxalat-Entwickler. Schon bei 4 Minuten langer Entwicklung war bei meiner Versuchsplatte der Schleier merklich, nach 10 Minuten aber schon sehr stark. Die vollausgezogenen Curven (Tafel IV) repräsentiren die gemessenen Schwärzungen inclusive Schleier.

Da der Schleier die ganze Platte gleichmässig bedeckt, so muss berücksichtigt werden, dass die Schwärzung jedes Sensitometerfeldes in einem gewissen Verhältnisse durch die Schwärzung des Hintergrundes (Schleier) beeinflusst wird. Sei die Schwärzung des Schleiers $= s'$ und jene eines Sensitometerfeldes s'', so muss man die Ordinate s'' um s' vermindern und erhält dann die Schwärzungscurve exclusive Schleier. Dies ist in Tafel IV durch die gestrichelten Curven gezeigt.

Es geht daraus hervor, dass die exclusive Schleier construirten Schwärzungscurven naturgemäss nicht parallel den inclusive Schleier ermittelten Schwärzungscurven verlaufen, wenn man Parallelcurven solche nennt, die in der ihnen senkrechten Richtung überall gleichen Abstand haben. Ferner geht unmittelbar hervor, dass bei gleichmässiger Entfernung einer homogenen Silberschichte (Wegschaffung durch chemische oder mechanische Mittel) von der gesammten photographischen Matrize eine Schwärzungscurve resultiren müsste, welche keineswegs parallelen Verlauf zeigt.

Da der Verlauf der Schwärzungscurve bei progressiver Belichtung die Gradation (Verlauf der Schwärzung von Licht gegen Schatten) einer photographischen Platte bezeichnet, so ist bei schleierigen Platten die Construction dieser Curve sowohl inclusive, als auch exclusive Schleier empfehlenswerth.

---

[1] Hydrochinon-Pottasche wurde hergestellt durch Lösen von *a)* 10 *g* Hydrochinon, 40 *g* Natriumsulfit, 400 cm^3 Wasser; *b)* 20 *g* Pottasche und 200 cm^3 Wasser. Man mischt gleiche Theile der Lösungen *a* und *b* (Eder's Recepte und Tabellen für Photographie und Reproductionstechnik, welche an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien angewendet werden. 1896, S. 12).

Tafel V zeigt die Schwärzungscurven von Adurol-Entwickler (Adurol-Pottasche); die Versuche wurden an genau derselben Plattensorte, wie jenen mit Hydrochinon, angestellt. Die voll ausgezogenen Linien zeigen die Schwärzung inclusive, die punktirten aber exclusive Schleier bei verschiedenen Entwicklungszeiten.

Nasse Jodbromcollodionplatten mit saurer Eisenvitriol-Hervorrufung zeigten bei Benzinlicht den Schwellenwerth von circa 15 Secunden-Meter-Kerzen, Eosin-Bromsilbercollodion mit alkalischer Entwicklung (Albert'sche Emulsion) aber circa 4 Secunden-Meter-Kerzen. Die drei sich kreuzenden Curvensysteme Tafel X repräsentiren die Schwärzungscurve des nassen Jodbromcollodion mit verschieden langer Entwicklungsdauer; die beiden links liegenden, stark gekrümmten Curven zeigen den etwas unregelmässigen Gang der Eosin-Bromsilber-Collodion-Emulsion in verschieden dick gegossenen Schichten.

Die Schwärzungscurve photographischer Platten besteht aus drei deutlich unterscheidbaren Theilen:

1. Das untere, anfangs stark gekrümmte und dann allmälig der horizontalen sich nähernde Stück repräsentirt die Periode der kurzen Belichtungen oder die Periode der Unterexposition. In dieser Periode erfolgt bei Bromsilbergelatineplatten mit Hervorrufung (als Normal-Entwickler dient Eisenoxalat) die Schwärzung annähernd proportional der einwirkenden Lichtmenge.[1]

2. Das nahezu geradlinige Mittelstück der Schwärzungscurven entspricht im Allgemeinen der Periode der richtigen Exposition oder correcten Aufnahmezeit. In dieser Periode ist die Schwärzungszunahme der Bromsilberplatten im Entwickler annähernd proportional der Zunahme des Logarithmus der einwirkenden Lichtmenge.

3. Das obere gekrümmte Ende der Curve stellt die Periode der Überexposition vor, bei welcher weitere Lichtwirkung

[1] Zuerst angegeben von Hurter und Driffield (Eder's Jahrbuch der Phot. 1893, S. 20.

keine merkliche Zunahme der photographischen Schwärzung herbeiführt,[1] was namentlich auf unserer Curve der Collodionplatten sichtbar ist, während ich bei den anderen Platten dieses Stück nicht gemacht habe.

Bei den Bromsilbergelatineplatten mittlerer Empfindlichkeit tritt nach meinen Beobachtungen die Periode der Unterexposition zwischen 0·1 und beiläufig 1—3 Secunden-Meter-Kerzen und darüber ein.

Dann kommt ein annähernd gerades Stück der Curve (Periode der normalen Exposition), welche bis 20 Secunden-Meter-Kerzen sich erstreckt; dann biegt sich die Curve (nähert sich der Periode der Überexposition). Diese Zahlen sollen nur als Beispiel gelten, haben aber keine absolute Giltigkeit, weil sie mit der Entwicklungsart schwanken.

Die nachfolgende Tabelle VII gibt einige Messungsbefunde bei einer gangbaren englischen (*A*) und österreichischen (*B*) Bromsilbergelatineplatte und der Periode der Unterexposition und normalen Belichtung.

Setzt man die Schwärzung bei Nr. 10 als Einheit und berechnet daraus die Schwärzungen der anderen Nummern proportional der einwirkenden Lichtmenge, so ergibt sich:

1. dass die geringen Schwärzungen (an den Stellen geringster Lichtwirkung) so ziemlich im geraden Verhältnisse mit der einwirkenden Lichtmenge wachsen (Periode der sehr kurzen Belichtung, sogenannte Unterexposition).

2. An den Stellen stärkerer Lichtwirkung, d. i. bei den stärker geschwärzten Nummern des Sensitometers, wächst die Schwärzung der Bromsilberplatten im Entwickler annähernd proportional dem Logarithmus der einwirkenden Lichtmenge (Periode der richtigen Exposition). Bei sogenannten weich (zart) arbeitenden Trockenplatten ist dabei der Proportionalitätsfactor klein, bei hart, kräftig und contrastreich arbeitenden Platten ist er grösser, die Curve steigt steiler auf. Dies geht aus meinen in Tabelle VII mitgetheilten Opacitätsmessungen klar hervor.

---

[1] Daran schliesst sich die Periode der Solarisation (siehe Eder's Handbuch, Bd. II, 2. Aufl., S. 72), auf welche an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll.

Tabelle VII.

Bromsilbergelatineplatte.

(Belichtet im Scheiner-Sensitometer bei $^{1}/_{3}$ *m* Kerzenabstand durch 1 Minute. 5 Minuten lang im Eisenoxalatentwickler entwickelt).

Sensitometer-Nr.	Secunden-Meter-Kerzen	Relative Lichtmenge	Beobachtete Schwärzung	Schwärzung berechnet proportional der Lichtmenge	Schwärzung berechnet proportional dem Logarithmus der Lichtmenge [1]	
Erste Versuchsreihe						
13	0·61	48	0·09	0·13	0·12	Weich arbeitende Edward's Platte
12	0·78	62	0·13	0·17	0·19	
11	0·99	79	0·20	0·22	0·26	
10	1·26	100	0·28	0·28*	0·33	
9	1·60	127	0·35	0·36	0·41	
8	2·05	162	0·47	0·45	0·48	
7	2·61	207	0·55	0·58	0·55	
6	3·3	264	0·69	0·74	0·62	
5	4·2	336	0·77	0·94	0·69	
4	5·4	428	0·81	1·20 (von da ab nicht übereinstimmend)	0·76	
3	6·9	545	0·89	.	0·84	
2	8·3	695	0·92	.	0·91	
1	11·2	886	0·95	.	0·98	
a	14·3	1130	1·00	.	1·04	
b	18·2	1440	1·06	.	1·11	
c	23·2	1830	1·10	.	1·19	

Sensito-meter-Nr.	Secunden-Meter-Kerzen	Relative Licht-menge	Beob-achtete Schwär-zung	Schwärzung berechnet proportional		
				der Licht-menge	dem Loga-rithmus der Licht-menge [1]	
Zweite Versuchsreihe						
14	0·48	38	0·10	0·10	.	Kräftig und contrastreich arbeitende Platte
13	0·61	48	0·11	0·13	.	
12	0·78	62	0·16	0·17	.	
11	0·99	79	0·20	0 22	0·17	
10	1·20	100	0·28	0·28*	0·26	
9	1·60	127	0·32	0·36	0·36	
8	2·05	162	0·47	0·45	0·45	
7	2·61	207	0·52	0·58	0·55	
6	3·3	264	0 60	0·74	0·64	
5	4·2	336	0·77	0·94 (von da ab nicht übereinstimmend)	0·73	
4	5·4	428	0 85	1·20	0·83	
3	6·9	545	0·95	.	0·92	
2	8·3	695	1·04	.	1·02	
1	11·2	886	1·10	.	1·11	
a	14·3	1130	1·19	.	1·21	
b	18·2	1440	1·25	.	1·30	
c	23·2	1830	1·36	.	1·39	

* Als Ausgangspunkt für die Berechnung der proportionalen Schwärzung gewählt.

[1] Berechnet nach den Formeln:

$$\text{Schwärzung} = 0{\cdot}68 \log K + 0{\cdot}26 \text{ (1. Reihe)},$$
$$\text{Schwärzung} = 0{\cdot}89 \log K + 0{\cdot}17 \text{ (2. Reihe)},$$

wobei K die Secunden-Meter-Kerzen bedeutet. Die Constanten sind so gewählt, dass die Schwärzungen für ein möglichst grosses Stück der Schwärzungscurven angenähert dargestellt werden.

Es gibt Plattensorten, welche ziemlich lange sich in der Periode der Unterexposition bewegen.

Diese werden mit verlängerter Belichtung nur sehr langsam die im photographischen Negativprocess nöthige Schwärzung erlangen. Solche Platten geben bei kurzen Belichtungen nur dünne, flaue Negative. Die hohe Sensitometerempfindlichkeit entspricht in diesem Falle keineswegs einer guten Lichtempfindlichkeit bei der Herstellung photographischer Halbtonbilder in der Camera. Diese Eigenthümlichkeit verschiedener Sorten von photographischer Gelatine-Emulsion hängt in erster Linie von der molecularen Form des Bromsilbers (dem Reifezustand) ab und steht auch in Beziehung zu seinem Verhalten gegen das Spectrum; alle Formen von Bromsilber oder Jodbromsilber, welche in meiner früheren Abhandlung: »Über das Verhalten der Silberhaloidverbindungen gegen das Sonnenspectrum« (Sitzungsber. der k. Akad. der Wissensch. in Wien, 1884) durch flachgezeichnete, wenig ansteigende Curven der Spectralwirkung (Sonnenspectrum) gekennzeichnet wurden. weichen auch stark von der normalen Schwärzungscurve ab; sie haben die Tendenz, im Stadium der Unterexposition zu bleiben, trotzdem ihr Schwellenwerth klein oder das, was man gewöhnlich als »Lichtempfindlichkeit« bezeichnet, ziemlich gross ist.

Hurter und Driffield's Methode der Bestimmung der »Inertia«.

Hurter und Driffield leiten die Empfindlichkeit der Platte aus der Schwärzungscurve ab. Sie führen das gerade Stück der Curve nach unten fort, bis es die untere Scala, welche die wirkenden Secunden-Meter-Kerzen angegeben enthält, schneidet. Die Zahl, welche man in diesem Schnittpunkt abliest, wird »Inertia« [1] (Trägheit, Beharrungsvermögen) genannt.

[1] Hurter und Driffield construirten einen Aktinograph (Apparat zur Bestimmung der Expositionszeit) mit gewissen Constanten und Berücksichtigung von Objectivblenden, Plattenempfindlichkeit, Helligkeit des Tageslichtes etc. Diese empirische »aktinographische Zahl« zu ihrem Aktinographen finden Hurter und Driffield, indem sie mit der Inertia-Zahl in 35 dividiren. Also ergeben z. B. Rapidplatten von der Inertia 0·7 den Werth

Die Inertia kann mit Hilfe des Scheiner-Photometers und meines Coordinatennetzes unter Benützung der Tabelle I leicht bestimmt werden. Ich fand sie z. B. bei gewöhnlichen Bromsilbergelatineplatten des Handels 0·7, bei unempfindlichen 1·5 bis 2 Secunden-Meter-Kerzen, jedoch ergaben sich bei meinen Versuchen der Bestimmung der Inertia grosse Schwankungen und Unsicherheiten.

Diese Unsicherheit war mir befremdend, denn auf die Bestimmung der Inertia legen Hurter und Driffield den grössten Werth; sie geben an, dass der Schnittpunkt der Verlängerung des geraden Theiles der Schwärzungscurve mit der Abscisse (Logarithmus der Lichtmenge) constant sei und praktisch unabhängig von der Länge der Entwicklungsdauer; nach Hurter und Driffield soll der geradlinige Theil der Curve, welche Neigung er auch immer gemäss der variabeln Entwicklungszeit haben mag, in seiner Verlängerung die Abscisse im selben Punkte schneiden.

Die Experimente, welche Hurter und Driffield (a. a. O.) beschrieben, scheinen diese Ansicht zu bestätigen. Nach meinen Versuchen ist die Lage der Inertia aber keineswegs

---

35 : 0·7 = 50 als aktinographische Zahl (vergl. Rae, Eder's Jahrbuch für Phot. 1899, S. 58).

Die aktinographische Zahl wird in »Phot. News« 1896, 463, auf das Warnerke'sche Sensitometer (siehe Eder's Handbuch der Phot. und Reprod. Bd. I, 1. Hälfte, S. 429, 2. Aufl.) bezogen. Meine eigenen Untersuchungen ermöglichen die Reduction der Warnerke'schen Grade auf Grade des Scheiner'schen Sensitometers (siehe Eder's Jahrb. f. Phot. 1899, S. 44), soweit überhaupt bei der Verschiedenheit der Principien diese Arten der Sensitometerreductionen möglich sind. Leider sind die Scalen des Warnerke-Sensitometers durch Fabrications-Ungenauigkeiten ungleichartig. In meiner folgenden Tabelle sind Warnerke-Scalen von mittlerer Transparenz einbezogen. Die englischen Trockenplattenfabrikanten benützen, wie ich durch Parallelversuche feststellte, Warnerke-Sensitometer, welche mit den stärker transparenten käuflichen Scalen dieser Art ausgestattet sind, so dass man eine um circa 3—4° Warnerke höhere Sensitometeranzeige erhält; z. B. zeigen die extrarapiden Films der Eastman-Comp. in London 15—16° Scheiner, was bei meinem Warnerke-Sensitometer circa 25° Warnerke entspricht, während sie an dem von der Eastman-Comp. verwendeten Sensitometer 30° Warnerke zeigen. — Um annähernde Reductionstabellen der Empfindlichkeitsangabe nach

constant,[1] wenn man die Entwicklungsdauer innerhalb der in der praktischen Photographie üblichen Grenze von 3—10 Minuten variirt. Dies ergibt sich aus der Besichtigung der von mir ermittelten und in beigegebenen Tafeln reproducirten Schwärzungscurven unmittelbar und kann an denselben leicht ausconstruirt werden.

aktinographischen Zahlen auf Scheiner- und Warnerke-Grade in der erwähnten Grenze zu ermöglichen, gebe ich folgende Tabelle:

Tabelle VIII.

Scheiner-Grade	Hurter und Driffield's aktinographische Zahl	Warnerke-Grade	
		Scalen mittlerer Transparenz	Scalen grösserer Transparenz
c	3·2	8	11
b	4·0	9	12
a	5·0	10	13
1	6·5	11	14
2	8	12	15
3	10	13	16
4	13	14	17
5	16	15	18
6	20	16	19
7	26	17	20
8	32	18	21
9	40	19	22
10	52	20	23
11	60	21	24
12	80	22	25—26
13	100	23	26—27
14	130	24	27—28
15	160	25	28—29
16	200	26	29—30
17	260	27	30—31
18	320	28	31—32

[1] Die Abweichung meines Befundes von jenem Hurter und Driffield's dürfte darin liegen, dass Hurter und Driffield's Methode zur Bestimmung der Schwärzungscurve weniger genau als die von mir eingeschlagene Methode ist, somit die existirenden Abweichungen von Hurter und Driffield nicht bemerkt wurden.

Da die Inertia nicht nur bei geänderter Entwicklungszeit, sondern auch bei anderen Temperaturen eine variable Grösse ist, so kann ich der Eruirung derselben nicht jene Bedeutung für die Sensitometrie zuerkennen, welche ihr Hurter und Driffield zuschreiben.

Die Entwicklungsconstante.

Die Schwärzungscurve wird von Hurter und Driffield auch benützt, um zu bestimmen, wie lange man eine Bromsilberplatte entwickeln muss, um eine bestimmte Neigung des geraden Theiles der Schwärzungscurve zu erzielen.

Der Neigungswinkel (α) des geraden Stückes der Schwärzungscurve zur Abscisse bestimmt die Gradation der Platte. Bei correcter Wiedergabe des Helligkeitswerthes bei einer Halbtonphotographie ist $\alpha = 45°$ oder tang $\alpha = 1$, die Schwärzung wächst für jeden Scheiner-Grad um $\log 1 \cdot 27 = 0 \cdot 105$ (vergl. S. 1445).

Die Tangente des Neigungswinkels nennen Hurter und Driffield »Entwicklungsconstante« oder »Entwicklungsfactor«. Ist dieselbe grösser als 1, so sind die Contraste gesteigert, d. h. die Platte arbeitet härter. Auf diese Weise kann man die Gradation schätzen und es genügt die graphische Construction zur Ermittlung des Entwicklungsfactors.

Kennt man diese Constante (den Entwicklungsfactor) für eine Entwicklungszeit, so kann man mittelst einer Näherungsformel Hurter und Driffield's[1] annähernd die Zeit bestimmen, welche zur Erreichung einer anderen Constante nöthig ist.[2]

---

[1] Eder's Jahrbuch f. Phot. 1893, S. 21, und 1899, S. 194. Vergl. auch Eder's Ausf. Handbuch d. Phot. Bd. II (2. Aufl.) S. 5.

[2] Hurter und Driffield führen an, dass das photographische Bromsilberbild im Allgemeinen bei lang andauernder Entwicklung einer oberen Dichtigkeitsgrenze (Maximalschwärzung) zustrebt. Das Gesetz über den Zusammenhang der verschiedenen Schwärzungen und der Länge der Entwicklungszeit (t) wurde von Hurter und Driffield durch die Formel

$$D_f = D(1 - a^t)$$

ausgedrückt, worin D_f die Schwärzung nach einer f Minuten langen Entwicklung, D die mögliche Maximalschwärzung und a eine Constante bezeichnet, welche für die von den Genannten benützten englischen Bromsilbergelatineplatten den Zahlenwerth 0·9015 hatte (Eder's Jahrbuch f. Phot., 1899, S. 194).



Wir wollen hier zunächst von dieser Anwendung des Entwicklerfactors absehen und erwähnen bloss seine Bestimmungsmethode, weil sie in englischen Fachkreisen bei Begutachtung von Plattensorten mitunter angegeben wird.

Vollständige Empfindlichkeitsbestimmung einer photographischen Platte.

Die vorhin geschilderten Methoden liefern alle Daten, welche zur vollständigen Empfindlichkeitsbestimmung nach Schwarzschild's Vorschlag[1] erforderlich sind. Man muss zunächst die Schwärzungscurve bestimmen; ferner muss man die Abweichungen vom Reciprocitätsgesetze für die betreffende Plattensorte bestimmen, indem man ermittelt, bei welchen Expositionszeiten zwei verschiedene Lichtquellen von bekanntem Helligkeitsverhältnisse auf der Platte gleiche Schwärzungen hervorbringen (Bestimmung des Exponenten p aus der auf S. 1433 erwähnten Formel $\lambda = i \, . \, t^p$).

Um zu jeder Lichtintensität i_0 die zugehörige Zeit, welche zur Erzeugung einer bestimmten Schwärzung erforderlich ist, und umgekehrt berechnen zu können, bedarf man der Kenntniss der Abscisse σ_0 der betreffenden Schwärzung in der Schwärzungscurve und des Exponenten p. Sind beide bekannt, so lassen sich beide Aufgaben lösen durch die Schwarzschild'schen Formeln

$$\log t_0 = \sigma_0 - \frac{1}{p} \, . \log i_0$$

und

$$\log i_0 = p \, . \, \sigma_0 - p \, . \log t_0 .$$

Hiebei ist angenommen, dass die Wirkungsweise des Entwicklers eine genau bekannte und keinen Schwankungen unterworfene ist.

Würden alle Bromsilberplattensorten sich beim Hervorrufungsprocess gleichmässig verhalten, so wäre die Aufgabe mit einer Hervorrufungsart (z. B. einem normalen Eisenoxalat-Entwickler bei 18° C. und bestimmter Entwicklungsdauer, z. B.

[1] Phot. Corresp. 1899, S. 399.

5 Minuten) zu lösen. In der That wird dieser Vorgang von Hurter und Driffield empfohlen.

Leider entwickeln sich aber die Bromsilbergelatineplatten selbst in einem und demselben Entwickler verschieden rasch, was von der Härte der Gelatineschicht (Qualität der Gelatine, Gehalt an Alaun, Grad des Austrocknens beim Aufbewahren), sowie dem Zustande des Bromsilbers abhängt. Man erreicht bei manchen Platten nach 7 Minuten langer Entwicklung genau dieselbe Schwärzungscurve und Empfindlichkeit, wie bei anderen Platten in 5 Minuten. Deshalb halte ich es für erforderlich, dass bei der Prüfung der Platten mindestens vier Entwicklungszeiten versucht werden, z. B. $2^1/_2$, 5, $7^1/_2$ und 10 Minuten; die dazugehörigen Schwärzungscurven sind zu construiren.

Untersuchung von Verstärkungs- und Abschwächungsmethoden photographischer Schichten auf Grund mikrophotometrischer Messungen.

Durch Anlagerung von Niederschlägen auf die Silberschichte der Negative können mittelst chemischer Doppelzersetzung Verstärkungen erzielt werden; z. B. bewirkt

$$HgBr_2 + Ag = AgBr + HgBr,$$

wobei die Bildschichte gebleicht wird.[1] Behandelt man sie mit Natriumsulfit,[2] so entsteht metallisches, grauschwarzes Quecksilber und ein Theil des Bromsilbers wird gelöst; der Schlusseffect ist eine mässige Verstärkung. Ausgiebiger ist die Schwärzung mit Ammoniak[3] (Bildung schwarzer Mercurammonium-Verbindungen), am ausgiebigsten die Totalreduction mit starken Reductionsmitteln (z. B. Diamidophenol [Amidol] und Natriumsulfit[4]).

Tabelle IX gibt die Übersicht der Wirkungsweise dieser Verstärker.

[1] Quecksilberverstärker: 100 Th. Wasser, 2 Th. Bromkalium, 2 Th. Quecksilberchlorid.

[2] Lösen von 1 Th. neutralem krystallisirten Natriumsulfit in 10 Th. Wasser.

[3] Ammoniak verdünnt mit 10—20 Th. Wasser.

[4] 500 Th. Wasser, 20 *g* Natriumsulfit, 2 *g* Amidol (= salzs. Diamidophenol).

Tabelle IX.

Sensitometerzahlen 1·3 *m* Lichtabstand	Opacität einer Bromsilbergelatineplatte vor und nach dem Verstärken, respective Abschwächen						
			mit Quecksilber völlig verstärkt				
	Opacität der unverstärkten Platte	mit Quecksilberbromid wenig verstärkt, mit Natriumsulfit geschwächt	mit Natriumsulfit geschwärzt	mit Ammoniak geschwärzt	mit Amidolentwickler geschwärzt	mit Ferridcyankalium und Fixirnatron normal abgeschwächt	mit Ferridcyankalium und Fixirnatron stark abgeschwächt
11	—	—	0·16	0·15	0·22	—	—
10	0·15	0·2	0·19	0·22	0·27	—	—
9	0·21	0·24	0·27	0·33	0·35	0·13	—
8	0·27	0·35	0·42	0·52	0·47	0·18	—
7	0·38	0·55	0·59	0·71	0·65	0·29	0·17
6	0·51	0·78	0·79	0·90	0·83	0·36	0·23
5	0·66	0·95	1·02	1·30	1·01	0·53	0·38
4	0·81	1·25	1·31	1·56	1·26	0·70	0·50
3	0·91	1·50	1·61	1·92	1·57	0·85	0·60
2	1·05	1·70	1·38	2·35	1·84	1·00	0·75
1	1·19	1·91	2·25	3·00	2·12	1·15	0·85
a	1·43	2·12	2·70	ganz undurchsichtig	2·60	1·30	0·96
b	1·55	2·30	3·00		3·00	1·37	1·06
c	1·65	2·70	total undurchsichtig		undurchsichtig	1·47	1·20

Die von mir ermittelte Schwärzungscurve vor und nach der Verstärkung (Tafel VI) geben ein völlig klares Bild dieser Phänomene.

Die voll ausgezogene Curve Tafel VI (1) zeigt die Gradation der ursprünglich benützten unverstärkten Bromsilberplatten. Curve 2 und 3 zeigt den Effect der Quecksilber-Natriumsulfit-Verstärkung. Die Curve steigt steiler an, der Entwicklungsfactor (tang α) wächst, die Platte zeichnet mit gesteigertem Contraste. Noch etwas mehr ist das bei Ammoniakschwärzung der Fall; in beiden Fällen werden die zartesten Bildstellen weniger verstärkt, als die dichten Stellen. Merklich günstiger in dieser letzteren Beziehung wirkt die Schwärzung der durch Quecksilberbromid gebleichten Platte mit dem Amidol-Entwickler; die Wirkung kommt zwar der Natriumsulfitschwärzung nahe, aber die zarten Bildstellen kommen besser zur Geltung.[1]

In ähnlicher Weise habe ich auch die Wirkung der gebräuchlichen Abschwächer festgestellt. Tafel VII zeigt die Schwärzung durch das Gemisch von Ferridcyankalium und Fixirnatron bei geringerer und stärkerer Concentration. Es geht daraus hervor, dass hiebei die zarten Bildstellen weggeätzt werden und verloren gehen; die übrigbleibenden Bildtheile aber weisen fast dieselbe Gradation auf, wie die ursprüngliche Platte. Dies ist nur dadurch möglich, dass an den ganz dichten Stellen relativ etwas mehr Silber aufgelöst wird, als an den dünneren Bildstellen. Bei gleichartiger Auflösung (Abtragung) der Silberschichten müsste sich die Schwärzungscurve nach der Abschwächung asymptotisch stark nähern, was aber thatsächlich nicht der Fall ist. Diese Verhältnisse sind bisher unbekannt gewesen.

Das von Lumière zuerst als Abschwächer empfohlene Ammoniumpersulfat soll merkwürdiger Weise die zarten Bildstellen schonen und nur die dichten Silberpartien auflösen. In der That geht dies aus den Curven, Tafel VI, klar hervor. Die Platten werden durch das Abschwächen weicher und zarter. Die dichten Stellen verflachen sich aber rasch und verlieren an

---

[1] Analoge Messungen über verschiedene andere Verstärker werde ich in der »Phot. Correspondenz« (Jänner 1900) mittheilen.

Abstufung. Die Opacitätsmessungen (siehe folgende Tabelle X) geben klaren Aufschluss.

Tabelle X.

Wirkung des Ammoniumpersulfat-Abschwächers auf Emulsionsnegative.

Scheiner-Grade bei 1/3 *m* Lichtabstand und 1 Minute Belichtung	Ursprüngliche Schwärzung der Schichte	Schwärzung nach kurzer Behandlung mit 3procentigem Persulfat	Schwächung nach dem Trocknen und nochmaligem Abschwächen der vorigen Platte
10	0·22	0·20	0·19
9	0·25	0·23	0·23
8	0·30	0·28	0·27
7	0·40	0·40	0·39
6	0·53	0·50	0·50
5	0·67	0·62	0·60
4	0·81	0·65	0·65
3	0·91	0·78	0·74
2	1·05	0·88	0·77
1	1·19	0·93	0·79
a	1·43	0·99	0·83
b	1·55	1·06	0·84
c	1·65	1·15	0·85

Diese Tabelle X zeigt die ursprüngliche Dichte (Schwärzung) eines Streifens von Bromsilbergelatine, welcher im Sensitometer belichtet, entwickelt, fixirt und getrocknet wurde. Die dritte Colonne zeigt die Abnahme der Schwärzung in dreiprocentiger Ammoniumpersulfatlösung; es wird an den dünneren Stellen fast gar kein Silber gelöst; erst bei der Schwärzung 0·5 bis 0·7 beginnt stärkere Wirkung, welche bei den stärkeren Schwärzungen unverhältnissmässig stark auftritt. Bei den dichtesten Stellen (Nr. *a* bis *c*) sind bei längerer Einwirkung des Persulfates sogar die anfänglich sehr starken Schwärzungsunterschiede nahezu ganz zum Verschwinden gebracht und statt gut graduirten Abstufungen macht sich Monotonie in der Gradation geltend.

Tabelle XI.

Wirkung des Blutlaugensalz-Abschwächers auf ein stark schleieriges Negativ, dessen Schleier die Opacität 0·67 hatte.

Scheiner-Grade bei $^1/_3$ *m* Lichtabstand und 1 Minute Belichtung	Schwärzung der ursprünglichen schleierigen Platte	Schwärzung nach dem Abschwächen mit Ferridcyankalium und Fixirnatron bis zum Verschwinden des Schleiers	Differenz der Schwärzung vor und nach dem Abschwächen
19	0·75	—	—
18	0·77	—	—
17	0·80	—	—
16	0·83	0·23	0·60
15	0·85	0·29	0·56
14	0·88	0·34	0·54
13	1·00	0·37	0·63
12	1·05	0·46	0·59
11	1·22	0·60	0·62
10	1·36	0·73	0·63
9	1·60	0·87	0·53
8	1·83	1·00	0·83
7	1·99	1·16	0·83
6	2·20	1·36	0·84
5	2·6	1·57	1·03
4	3·0	1·76	1·24
3	undurchsichtig	1·89	—
2	undurchsichtig	2·10	—
1	undurchsichtig	2·30	—
a	undurchsichtig	2·60	—
b	undurchsichtig	3·00	—
c	undurchsichtig	undurchsichtig	

Beseitigung des Schleiers durch Abschwächungsmittel.

Nach dem Gesagten ist unmittelbar klar, dass Persulfat zur Beseitigung des Schleiers von photographischen Platten nicht gut dienen kann, weil es die Gradation an den dichten Stellen zerstört, ohne den schwächeren, über die ganze Plattenfläche sich erstreckenden Schleier rechtzeitig zu zerstören.

Das Ferridcyankalium und Fixirnatron dagegen ist sehr geeignet. Es hinterlässt nach dem Wegbeizen des Schleiers ein Silberbild, welches eine genügend correcte Gradation aufweist.

Vorstehende Tabelle XI zeigt, dass der Ferridcyan-Abschwächer thatsächlich geeignet ist, übermässig dichte und schleierige Stellen eines photographischen Negativs so abzuschwächen, dass ein gut graduirtes Bild zum Vorschein kommt. Ferner ergibt sich die bisher unbekannt gewesene Thatsache, dass auch Ferridcyankalium an den dichtesten (schwärzesten) Stellen des Silberbildes verhältnissmässig etwas mehr Silber auflöst, als an den dünneren Stellen; eine schleierige Platte wird demzufolge nach dem Abschwächen grössere Weichheit aufweisen.

Einfluss der Temperatur des Eisenoxalat-Entwicklers auf die Schwärzungscurve.

Der Eisenoxalat-Entwickler, welcher als Normalentwickler für Bromsilbergelatineplatten verwendet wird, hängt in seiner Wirkung (wie alle Entwicklersubstanzen) von der Temperatur ab. In der Regel benützt man ihn bei einer Normaltemperatur von 18° C.

Die Abweichungen der Wirkung mit steigender und sinkender Temperatur sind bisher noch niemals an der Hand von Schwärzungsmessungen studirt worden. Der Effect des Entwicklers hängt selbstverständlich von der Plattensorte ab; ich studirte sie an Platten von Schleussner (Frankfurt am Main), Schattera (Wien), welche sich in dieser Hinsicht analog verhalten. Von den umfassenden Messungen theile ich die complete Beobachtungsreihe für die ersteren mit, da sie typisch sind. Die Schwellenwerthe waren bei:

0° C.	$2^1/_2$ Minuten	3° Scheiner,
	5 »	4° »
	$7^1/_2$ »	7° »
	10 »	9° »
10° C.	$2^1/_2$ Minuten	5° Scheiner,
	5 »	6° »
	$7^1/_2$ »	9° »
	10 »	9° »
18° C.	$2^1/_2$ Minuten	7° Scheiner,
	5 »	9° »
	$7^1/_2$ »	10° »
	10 »	11° »
25° C.	$2^1/_2$ Minuten	7° Scheiner,
	5 »	9° »
	$7^1/_2$ »	10° »
	10 »	11° »

Die vollständige Übersicht der erhaltenen Schwärzungszahlen für Eisenoxalat-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen enthält Tabelle XII.

Mittelst derselben Methode untersuchte ich die Wirkung der isomeren Entwicklersubstanz Brenzcatechin, ferner Hydrochinon, sowie des Monobromhydrochinon, welches letztere als Adurol in den Handel kommt. Von diesen drei Substanzen wurden äquivalente Mengen zu Entwicklerflüssigkeiten gelöst[1] (Tabelle XIII, XIV, XV).

Es ergibt sich daraus, dass beim Hydrochinon-Entwickler Temperatureinflüsse sich sehr stark bemerkbar machen; bei 0° C. ist er sehr wenig wirksam, bei 25° C. wirkt er übermässig und erzeugt ziemlich starken Schleier. Brenzcatechin wird von

[1] Als Mischungsverhältniss wird benützt: 900 cm^3 Wasser, 75 *g* Natriumsulfit, 150 *g* krystallisirtes Soda und 10 *g* Hydrochinon (siehe Eder's Recepte und Tabellen für Photographie und Reproductionsverfahren, welche an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien angewendet werden, 5. Aufl., 1900, S. 12). Für Brenzcatechin-Entwickler wurde dieselbe Menge von Hydrochinon, von Monobromhydrochinon die äquivalente Menge eingesetzt

Temperatureinflüssen weniger tangirt, gibt aber immerhin kräftige, contrastreiche Negative. Ferner zeigen die Messungen, dass Monobromhydrochinon entschieden charakteristisch andere Entwicklungseigenschaften besitzt, als Hydrochinon, d. h. dass es rascher und kräftiger als letzteres entwickelt.

Pyrogallol (Tabelle XVI) wurde in der allgemein üblichen Form (mit Soda) verwendet,[1] Glycin (*p*-Oxyphenylglycin $C_6H_4(OH).NH.CH_2.COOH$) wurde mit Pottasche[2] combinirt (Tabelle XVII), Metol-Entwickler,[3] welcher der rapidestwirkende der modernen Entwickler ist, wurde gleichfalls einbezogen (Metol ist das Sulfat des Methyl-*p*-Amidophenol, $C_6H_4.OH.NH.CH_3$) (Tabelle XVIII) und nebst dem in neuerer Zeit mit vielem Erfolge verwendeten Ortol (Gemisch oder Doppelverbindung von gleichen Molekülen Methyl-Orthol-Amidophenol und Hydrochinon) Tabelle XIX, verglichen,[4] ferner zog ich Amidol (salzsaures oder essigsaures Diamidophenol) in die Vergleichung ein, weil diese Substanz (zum Unterschiede von der vorhin erwähnten) mit Natriumsulfit allein (ohne Alkalicarbonat) einen kräftigen Entwickler von guter Arbeitsleistung liefert[5] (Tabelle XX).

---

[1] Pyrogallol-Soda-Entwickler:

A. 500 cm^3 Wasser, 4 *g* Pyrogallol, 6 Tropfen conc. Schwefelsäure.

B. 50 *g* krystallisirtes Soda, 500 cm^3 Wasser.

Man mischt 1 Volumen von *A*, 1 Volumen von *B*, 1 Volumen Wasser.

[2] Glycin-Entwickler: 25 *g* krystallisirtes Natriumsulfit werden in 4 cm^3 Wasser warm gelöst, 10 *g* Glycin zugesetzt, bis zum Kochen erhitzt, 50 *g* Pottasche zugesetzt und schliesslich auf das Volumen von 75 cm^3 gebracht. Zum Gebrauche verdünnt man 1 Volumen dieses Breies mit 12 Volumen Wasser.

[3] Metol-Soda-Entwickler:

A. 1000 cm^3 Wasser, 100 *g* Natriumsulfit, 10 *g* Metol.

B. 1000 cm^3 Wasser, 100 *g* krystallisirtes Soda.

Gemischt zu gleichen Theilen *A* und *B*.

[4] Ortol-Entwickler:

A. 7·5 *g* Ortol, 3·75 *g* Kaliumbisulfit (pyroschwefligsaures Kali).

B. 60 *g* krystallisirtes Soda, 60 *g* Natriumsulfit, 500 cm^3 Wasser.

Gemischt zu gleichen Theilen *A* und *B*.

[5] Amidol-Entwickler: 1000 cm^3 Wasser, 200 *g* Natriumsulfit, 20 *g* Amidol.

Ein gleichfalls in der Praxis vorfindlicher guter Entwickler ist Rodinal[1] (*p*-Amidophenolnatrium) (Tabelle XXI).

Tabelle XXI zeigt das Verhalten des Rodinal[2] (1 : 25). Es geht daraus hervor, dass es mindestens zweimal so rasch entwickelt als Eisenoxalat; während letzteres bei 0° C. sehr träge entwickelt und es schwierig ist, gute Deckung zu erhalten, gelingt dies bei Rodinal, Metol und anderen Rapidentwicklern noch gut. Dagegen erzeugt Rodinal bei 25° C. starken Schleier, während Eisenoxalat noch klare Negative liefert.

Ich verzichte hier darauf, die Discussion meiner Opacitätsmessungen des Temperatureinflusses der Entwicklungsdauer bei verschiedenen Entwicklern nach verschiedenen Richtungen hin vorzunehmen, da dies zuviel Raum beanspruchen würde und dies übrigens an der Hand meiner Tabellen und Curven keine Schwierigkeiten verursacht. Selbstverständlich gelten die Resultate strenge nur für die untersuchten Sorten von Bromsilbergelatineplatten; jedoch kann man immerhin über den allgemeinen Charakter der verschiedenen Entwicklersubstanzen mit grosser Sicherheit Rückschlüsse machen.

Es sei hier nur erwähnt, dass diese Ergebnisse ein für allemal die irrthümliche ursprüngliche Ansicht Hurter und Driffield's (welche dieselbe in ihrer letzten Abhandung über Entwicklung des latenten Bildes [Eder's Jahrbuch für Phot. 1899, S. 193] nicht mehr aufrecht erhalten konnten) zu Falle bringen; Hurter und Driffield hatten in ihren ersten Publicationen geglaubt, dass die Gradation des entwickelten Bildes nur von der Belichtungsscala, nicht von der Entwicklerart abhängig sei, welche Ansicht sicherlich unhaltbar ist.

---

[1] In concentrirter Lösung von der Berliner Actiengesellschaft für Anilinfabrication in den Handel gebracht (100 Theile Wasser, 30 Theile Kaliummetabisulfit, 10 *g* salzsaures Paramidophenol und Ätznatronlauge bis zur Wiederauflösung des entstandenen Niederschlages). 1 Volumen der concentrirten Rodinallösung wird vor dem Gebrauche mit 25 Volumen Wasser verdünnt.

[2] Bezogen von der Berliner Actiengesellschaft für Anilinfabrication. Rodinal ist eine alkalische Lösung von Paramidophenol mit Zusatz von Natriumsulfit (siehe Eder's Jahrb. für Phot., 1892, S. 33 und 1893, S. 412).

Tabelle XII.

Schwärzung für Eisenoxalat-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei ½ m Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19		—		—				—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·26
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·24	0·29
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·23	0·35
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·35	—	—	0·27	0·39
14	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	0·40	—	0·29	0·30	0·42
13		—		—			0·27	0·36	—	0·33	0·33	0·45	—	0·33	0·36	0·48
12	—	—	—	0·27	—	0·22	0·34	0·37	—	0·35	0·34	0·49	—	0·35	0·41	0·54
11	—	—	0·24	0·28	—	0·25	0·41	0·41	0·22	0·38	0·40	0·54	0·26	0·38	0·45	0·62
10	—	0·26	0·25	0·30	0·21	0·27	0·45	0·47	0·25	0·44	0·45	0·61	0·27	0·44	0·57	0·65
9	—	0·30	0·26	0·33	0·22	0·31	0·50	0·53	0·27	0·47	0·54	0·69	0·29	0·48	0·71	0·71
8	—	0·34	0·36	0·40	0·25	0·34	0·55	0·65	0·29	0·51	0·61	0·76	0·32	0·54	0·77	0·89
7	0·22	0·36	0·42	0·46	0·28	0·40	0·64	0·74	0·34	0·55	0·71	0·85	0·37	0·68	0·83	0·94
6	0·23	0·39	0·51	0·56	0·33	0·50	0·71	0·79	0·40	0·66	0·85	0·94	0·45	0·77	0·91	1·13
5	0·26	0·47	0·61	0·68	0·37	0·57	0·84	0·93	0·49	0·77	0·95	1·19	0·54	0·89	1·07	1·34
4	0·31	0·54	0·74	0·86	0·43	0·70	0·97	1·07	0·54	0·88	1·23	1·43	0·61	1·05	1·35	1·55
3	0·36	0·65	0·80	0·94	0·52	0·86	1·19	1·29	0·61	1·00	1·47	1·59	0·70	1·23	1·52	1·80
2	0·18	0·73	0·96	1·12	0·64	0·87	1·40	1·47	0·69	1·16	1·67	1·77	0·80	1·47	1·77	2·01
1	0·42	0·80	1·13	1·37	0·60	1·00	1·56	1·70	0·75	1·31	1·89	2·00	0·90	1·69	2·04	2·35
[illegible]	[illegible]	0·87	1·25	1·5	0·67	1·20	1·74	1·92	0·80	1·47	2·01	2·25	0·94	1·77	2·25	2·5
[illegible]	0·52	0·95	1·40	1·84	0·70	1·36	1·85	2·13	0·84	1·57	2·16	2·50	1·00	1·85	2·4	—
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1·94	0·75	1·45	1·90	2·25	0·89	0·62	2·35	2·80	1·07	1·90	2·55	—

Tabelle XIII.

Schwärzung für Brenzcatechin-Soda-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei $1/_3$ *m* Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·48	0·54	—	—	—	0·80
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·52	0·57	—	—	—	0·84
14	—	—	0·25	0·30	—	—	—	—	—	0·37	0·56	0·65	—	0·55	0·74	0·87
13	—	—	0·28	0·32	—	—	—	0·23	0·32	0·43	0·60	0·70	0·41	0·62	0·77	0·88
12	—	—	0·32	0·34	—	0·26	0·33	0·33	0·36	0·47	0·69	0·77	0·46	0·70	0·87	0·95
11	—	—	0·35	0·37	—	0·28	0·35	0·35	0·41	0·55	0·80	0·90	0·54	0·79	1·03	1·07
10	—	0·25	0·42	0·45	0·24	0·33	0·39	0·41	0·48	0·67	0·90	1·12	0·65	0·87	1·26	1·30
9	—	0·28	0·49	0·52	0·26	0·40	0·41	0·50	0·56	0·80	0·93	1·39	0·74	1·00	1·45	1·54
8	—	0·32	0·56	0·62	0·27	0·45	0·50	0·62	0·67	0·99	1·27	1·64	0·87	1·29	1·66	1·70
7	—	0·40	0·65	0·73	0·30	0·52	0·60	0·75	0·79	1·15	1·61	1·97	1·03	1·54	1·95	2·05
6	0·22	0·45	0·77	0·82	0·34	0·60	0·70	0·87	0·87	1·36	1·94	2·25	1·20	1·89	2·15	2·34
5	0·23	0·50	0·84	0·94	0·36	0·70	0·80	1·05	0·96	1·55	2·15	2·50	1·49	2·19	2·39	2·90
4	0·25	0·55	0·95	1·04	0·40	0·76	0·88	1·23	1·14	1·87	2·57	2·80	1·69	2·62	2·62	—
3	0·26	0·59	1·05	1·20	0·45	0·83	1·03	1·45	1·28	2·04	2·90	—	1·87	—	3·00	—
2	0·28	0·65	1·20	1·35	0·50	0·90	1·16	1·68	1·36	2·15	—	—	2·09	—	—	—
1	0·32	0·69	1·30	1·50	0·52	0·97	1·37	1·90	1·45	2·29	—	—	2·33	—	—	—
a	0·35	0·75	1·37	1·63	0·56	1·03	1·45	2·07	1·50	2·45	—	—	2·55	—	—	—
b	0·36	0·77	1·45	1·70	0·57	1·07	1·49	2·17	1·57	2·60	—	—	2·80	—	—	—
c	0·40	0·80	1·47	1·74	0·59	1·11	1·52	2·26	1·60	2·80	—	—	2·95	—	—	—
Schleier	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·20	—	0·18	0·32	0·26

Tabelle XIV.

Schwärzung für Hydrochinon-Soda-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei $^1/_8$ *m* Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10
20		—		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18															—	—
17														—		
16								0·53		—	—	—	—	—	1·13	1·55
15						0·33	0·45	0·54	—	0·62	0·80	0·95	—	0·87	1·16	1·69
14	—	—	—	0·25	—	0·34	0·50	0·60	0·37	0·63	0·83	1·00	0·50	0·90	1·24	1·77
13			0·20	0·30	0·22	0·36	0·57	0·64	0·40	0·69	0·87	1·07	0·55	0·95	1·30	1·80
12			0·27	0·30	0·25	0·41	0·65	0·70	0·43	0·75	0·87	1·14	0·60	1·00	1·33	1·85
11		—	0·30	0·32	0·27	0·47	0·74	0·75	0·43	0·77	0·95	1·21	0·63	1·05	1·42	1·90
10		0·26	0·33	0·39	0·31	0·57	0·83	0·86	0·49	0·83	1·01	1·30	0·67	1·23	1·50	2·14
9		0·27	0·37	0·45	0·33	0·66	0·95	1·00	0·55	0·87	1·12	1·45	0·71	1·40	1·75	2·45
8		0·30	0·40	0·50	0·36	0·80	1·14	1·21	0·65	0·96	1·30	1·69	0·83	1·62	2·05	2·90
7		0·32	0·47	0·57	0·40	0·90	1·35	1·45	0·73	1·15	1·55	1·95	0·87	1·79	2·45	—
6	—	0·35	0·55	0·67	0·45	1·04	1·57	1·70	0·83	1·37	1·77	2·25	1·03	2·03	3·00	—
5		0·38	0·63	0·78	0·49	1·15	1·77	1·91	0·87	1·55	2·02	2·74	1·13	2·40	—	—
4	0·22	0·42	0·69	0·87	0·53	1·35	1·95	2·11	1·00	1·75	2·43	—	1·35	2·85	—	—
3	0·23	0·45	0·77	0·95	0·55	1·45	2·10	2·43	1·10	1·98	2·80	—	1·48	—	—	—
2	0·25	[illegible]	0·85	1·07	0·59	1·55	2·32	2·90	1·15	2·24	—	—	1·60	—	—	—
1	0·26	0·55	0·90	1·21	0·63	1·61	2·53		1·30	2·55	—	—	1·75	—	—	—
a	0·27	0·57	1·01	1·37	0·65	1·77	2·85		1·37	2·80	—	—	1·84	—	—	—
b	0·28	0·61	1·10	1·50	0·67	1·90			1·44	—	—	—	1·86	—	—	—
c	0·29	0·63	1·19	1·61	0·70	1·95			1·49	—	—	—	1·91	—	—	—
Schleier									—	0·29	0·43	0·57	—	0·48	0·75	1·12

Tabelle XV.

Schwärzung für Adurol-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei 1/3 m Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10
20	—	—	—	—		—		—		—	—	—	—	—		—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—		—		—		—	0·84	0·84	—	—	0·83	1·05
16	—	—	—	0·48	—	—	—	—	—	0·66	0·85	0·87	—	0·59	0·87	1·10
15	—	—	—	0·52	—	—	—	0·43	—	0·70	0·87	0·91	—	0·64	0·90	1·15
14	—	—	—	0·59	—	—	0·43	0·54	0·45	0·73	0·95	0·94	0·42	0·69	0·95	1·25
13	—	—	0·47	0·62	—	0·37	0·55	0·61	0·49	0·77	1·05	1·00	0·47	0·74	1·01	1·35
12	—	0·40	0·54	0·67	0·30	0·42	0·62	0·67	0·54	0·85	1·18	1·06	0·55	0·77	1·09	1·43
11	0·30	0·45	0·65	0·76	0·36	0·51	0·70	0·74	0·65	0·94	1·35	1·16	0·63	0·87	1·21	1·53
10	0·33	0·54	0·75	0·87	0·43	0·63	0·84	0·85	0·75	1·14	1·55	1·37	0·74	1·05	1·45	1·63
9	0·37	0·61	0·86	1·04	0·49	0·73	0·95	1·00	0·85	1·38	1·84	1·63	0·85	1·47	1·63	1·94
8	0·44	0·70	1·03	1·28	0·60	0·85	1·20	1·25	1·00	1·62	2·35	1·84	1·00	1·55	1·93	2·32
7	0·52	0·85	1·22	1·54	0·69	0·94	1·49	1·50	1·26	1·90	2·52	2·25	1·21	1·85	2·33	2·99
6	0·60	0·93	1·43	1·75	0·77	1·11	1·62	1·70	1·50	2·25	2·83	2·70	1·47	2·20	2·80	—
5	0·69	1·13	1·70	2·10	0·86	1·35	1·88	1·95	1·71	2·78	—	—	1·67	2·52		—
4	0·77	1·30	1·94	2·49	0·95	1·55	2·10	2·22	1·95	—	—	—	1·89	2·98	—	—
3	0·83	1·52	2·16	2·85	1·06	1·78	2·40	2·65	2·17	—	—	—	2·09	—		—
2	0·89	1·69	2·49	—	1·19	1·97	2·72	3·00	2·40	—	—	—	2·28	—	—	—
1	0·97	1·89	2·91	—	1·35	2·08	—	—	2·73	—	—	—	2·85	—	—	—
a	1·04	2·06	—	—	1·42	2·24	—	—	2·85	—	—	—	—	—	—	—
b	1·10	2·19	—	—	1·54	2·35	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
c	1·15	2·39	—	—	1·62	2·53	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Schleier	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·24	0·40	0·45	—	0·16	0·30	0·59

Tabelle XVI.

Schwärzung für Pyrogallol-Soda-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei ½ m Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10
20	—		—							—	—	—	—	—	—	—
19	—		—	—				—		—	—	—	—	—	—	—
18										—	—	—	—	—	—	—
17								—		—	—	—	—	—	—	—
16			—	0·28			—	0·33	—	0·30	0·36	0·41	—	—	0·43	0·54
15			0·25	0·32	—		0·32	0·37		0·34	0·37	0·45	—	0·35	0·45	0·57
14		—	0·30	0·34	0·26	0·28	0·33	0·43	—	0·35	0·39	0·47	0·29	0·37	0·47	0·63
13		0·25	0·33	0·39	0·28	0·31	0·35	0·49	0·30	0·38	0·44	0·50	0·33	0·43	0·52	0·65
12		0·27	0·37	0·43	0·32	0·33	0·40	0·56	0·33	0·45	0·50	0·53	0·34	0·45	0·57	0·79
11	0·23	0·31	0·43	0·53	0·36	0·38	0·45	0·67	0·34	0·49	0·57	0·67	0·37	0·50	0·65	0·77
10	0·27	0·36	0·48	0·60	0·43	0·45	0·53	0·77	0·36	0·57	0·64	0·77	0·40	0·56	0·75	0·85
9	0·30	0·43	0·54	0·70	0·52	0·54	0·65	0·87	0·41	0·70	0·77	0·88	0·45	0·66	0·88	1·03
8	0·33	0·51	0·63	0·85	0·60	0·63	0·72	1·03	0·49	0·80	0·86	1·06	0·50	0·75	1·00	1·21
7	0·37	0·60	0·74	0·95	0·68	0·70	0·82	1·20	0·55	0·92	1·00	1·29	0·57	0·85	1·16	1·43
6	0·42	0·69	0·83	1·07	0·75	0·78	0·90	1·35	0·63	1·09	1·25	1·50	0·67	0·95	1·36	1·66
5	0·47	0·76	0·94	1·29	0·82	0·87	1·00	1·49	0·70	1·30	1·43	1·69	0·75	1·07	1·56	[illegible]
4	0·52	0·82	1·05	1·43	0·87	0·93	1·10	1·63	0·75	1·42	1·56	1·90	0·82	1·26	1·75	2·10
3	0·56	0·8[illegible]	1·29	1·62	0·95	1·06	1·2[illegible]	1·76	0·80	1·62	1·69	2·11	0·90	1·43	1·91	2·31
2	0·60	0·95	1·35	1·70	1·06	1·05	1·33	1·82	0·88	1·80	1·84	2·35	1·00	1·56	2·09	2·51
1	0·63	1·01	1·35	1·88	1·07	1·10	1·40	1·95	0·92	1·97	1·97	2·62	1·09	1·73	2·25	2·8[illegible]
[illegible]	0·66	1·06	1·37	1·95	1·11	1·16	1·56	2·07	0·99	2·16	2·04	2·75	1·19	1·81	2·49	undurchsichtig
0	0·69	1·07	1·40	2·0[illegible]	1·15	1·20	1·60	2·17	1·03	2·10	2·30	2·80	1·30	1·85	2·60	
[illegible]	[illegible]	1·14	1·44	[illegible]	[illegible]	1·27	1·6[illegible]	2·[illegible]	1·05	2·12	2·42	3·00	1·37	1·90	2·80	
										—	—	—	—	—	0·18	0·25

Tabelle XVII.

Schwärzung für Glycin-Pottasche-Entwickler (1:12) bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei 1/2 m Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	2 1/2	5	7 1/2	10	2 1/2	5	7 1/2	10	2 1/2	5	7 1/2	10	2 1/2	5	7 1/2	10
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1·29
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·70	—	0·70	0·95	1·35
15	—	—	—	0·30	—	—	—	0·35	—	—	—	0·73	0·46	0·73	1·00	1·40
14	—	0·24	0·27	0·33	—	—	0·30	0·37	—	0·42	0·62	0·77	0·47	0·75	1·07	1·47
13	—	0·26	0·30	0·37	—	0·27	0·34	0·41	—	0·46	0·65	0·79	0·55	0·79	1·14	1·57
12	—	0·29	0·32	0·40	—	0·33	0·37	0·45	0·30	0·48	0·70	0·83	0·57	0·84	1·25	1·74
11	—	0·32	0·37	0·45	—	0·35	0·41	0·52	0·33	0·52	0·73	0·86	0·60	0·87	1·37	1·83
10	—	0·35	0·42	0·50	0·26	0·38	0·45	0·53	0·36	0·55	0·78	0·94	0·69	1·02	1·55	1·93
9	—	0·40	0·47	0·60	0·28	0·43	0·51	0·60	0·39	0·61	0·82	1·15	0·79	1·30	1·77	2·22
8	0·27	0·47	0·57	0·68	0·31	0·48	0·57	0·69	0·45	0·73	0·95	1·35	0·87	1·42	2·02	2·60
7	0·28	0·54	0·67	0·77	0·33	0·57	0·68	0·80	0·53	0·84	1·15	1·63	1·01	1·63	2·34	3·00
6	0·29	0·63	0·77	0·79	0·37	0·64	0·80	0·90	0·60	0·95	1·43	1·95	1·21	1·94	2·80	—
5	0·33	0·70	0·87	1·01	0·40	0·72	0·89	1·05	0·70	1·13	1·65	2·10	1·35	2·25	—	—
4	0·38	0·79	1·00	1·20	0·43	0·77	1·03	1·30	0·77	1·35	1·90	2·60	1·55	2·60	—	—
3	0·43	0·87	1·15	1·38	0·45	0·87	1·22	1·47	0·84	1·55	2·15	3·00	1·70	2·80	—	—
2	0·51	0·95	1·30	1·60	0·47	0·95	1·37	1·67	0·89	1·72	2·45	—	1·90	—	—	—
1	0·57	1·05	1·37	1·69	0·50	1·08	1·50	1·84	0·95	1·93	2·90	—	2·09	—	—	—
a	0·63	1·12	1·45	1·77	0·54	1·09	1·57	1·96	1·03	2·08	—	—	2·39	—	—	—
b	0·64	1·20	1·52	1·85	0·57	1·11	1·65	2·05	1·07	2·13	—	—	2·52	—	—	—
c	0·67	1·24	1·60	1·87	0·61	1·24	1·70	2·08	1·10	2·17	—	—	2·80	—		
Schleier	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·14	0·20	0·12	0·33	0·79	0·82

Tabelle XVIII.

Schwärzung für Metol-Soda-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei 1/2 m Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10
20									—	—	—	—	—	—	—	—
19									—	—	—	—	—	—	—	—
18									—	—	—	0·70	—	0·43	0·57	0·73
17								0·35		0·45	0·55	0·72	0·33	0·45	0·63	0·73
16			0·40	0·40			0·35	0·38	0·30	0·50	0·59	0·73	0·34	0·47	0·64	0·75
15			0·44	0·44		0·33	0·39	0·45	0·33	0·56	0·65	0·77	0·34	0·52	0·66	0·77
14	0·27	0·31	0·45	0·48		0·36	0·43	0·50	0·36	0·63	0·67	0·80	0·37	0·57	0·70	0·82
13	0·30	0·32	0·47	0·53	0·31	0·41	0·49	0·56	0·40	0·65	0·71	0·85	0·41	0·58	0·73	0·86
12	0·33	0·35	0·51	0·61	0·34	0·45	0·58	0·65	0·45	0·69	0·78	0·87	0·45	0·64	0·77	0·87
11	0·35	0·44	0·55	0·69	0·37	0·52	0·65	0·77	0·50	0·74	0·87	1·02	0·51	0·70	0·83	0·99
10	0·38	0·50	0·63	0·80	0·44	0·63	0·79	0·87	0·60	0·86	1·05	1·15	0·60	0·80	0·95	1·15
9	0·45	0·57	0·71	0·90	0·52	0·71	0·87	1·03	0·67	0·97	1·25	1·37	0·71	0·90	1·14	1·35
8	0·51	0·67	0·84	1·04	0·57	0·86	1·03	1·25	0·78	1·15	1·47	1·61	0·80	1·06	1·35	1·55
7	0·60	0·77	0·95	1·24	0·67	0·94	1·21	1·45	0·89	1·37	1·75	1·85	0·90	1·29	1·58	1·76
6	0·69	0·87	1·15	1·40	0·76	1·07	1·44	1·62	1·00	1·57	1·98	2·15	1·06	1·50	1·83	2·01
5	0·75	0·98	1·35	1·69	0·84	1·23	1·61	1·80	1·16	1·77	2·17	2·45	1·23	1·67	2·03	2·10
4	0·84	1·15	1·49	1·92	0·93	1·46	1·75	2·07	1·29	1·95	2·42	2·80	1·34	1·85	2·39	2·25
3	0·94	1·29	1·71	2·10	1·02	1·60	1·96	2·25	1·46	2·17	2·70	3·00	1·50	2·15	2·80	2·51
2	1·05	1·40	1·95	2·32	1·16	1·77	2·20	2·51	1·62	2·35	3·00	—	1·58	2·25	3·00	2·80
1	1·15	1·59	2·12	2·55	1·29	1·90	2·41	2·80	1·75	2·60	—	—	1·74	2·50	—	3·00
0	1·21	1·69	2·52	2·80	1·40	2·00	2·80		1·94	2·80	—	—	1·89	2·80	—	3·00
b	1·28	1·77			1·46	2·10			2·09	—	—	—	1·95	3·00	—	2·40
[illegible]	1·33	1·80			1·57	2·20			2·15		—	—	1·99	—	—	2·38
Schleier										0·10	0·19	0·39	—	0·13	0·2?	0·42

Tabelle XIX.

Schwärzung für Ortol-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei 1/3 *m* Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·70	—	0·49	0·82	—
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·41	0·54	0·72	—	0·52	0·84	—
15	—	—	—	—	—	—	—	—	0·30	0·47	0·60	0·76	0·41	0·57	0·87	1·07
14	—	—	—	0·28	—	—	0·32	0·32	0·33	0·51	0·66	0·83	0·43	0·60	0·88	1·13
13	—	—	0·29	0·29	—	—	0·37	0·37	0·37	0·60	0·73	0·87	0·49	0·64	0·94	1·17
12	—	0·30	0·32	0·32	0·26	0·32	0·45	0·43	0·42	0·69	0·83	0·95	0·55	0·67	1·04	1·23
11	—	0·32	0·36	0·37	0·27	0·37	0·55	0·55	0·49	0·80	0·94	1·15	0·65	0·74	1·13	1·33
10	0·33	0·37	0·39	0·43	0·33	0·45	0·67	0·69	0·60	1·00	1·15	1·37	0·73	0·85	1·28	1·40
9	0·35	0·41	0·46	0·49	0·37	0·55	0·79	0·85	0·73	1·21	1·37	1·70	0·83	0·95	1·43	1·56
8	0·37	0·47	0·52	0·61	0·45	0·65	0·90	1·00	0·85	1·46	1·63	1·90	0·90	1·15	1·66	1·82
7	0·40	0·55	0·63	0·72	0·53	0·76	1·09	1·26	0·99	1·72	1·89	2·15	1·05	1·36	1·90	2·18
6	0·43	0·60	0·77	0·84	0·61	0·85	1·34	1·54	1·15	1·95	2·56	2·45	1·25	1·55	2·15	2·50
5	0·47	0·67	0·80	1·00	0·70	0·95	1·55	1·75	1·37	2·20	3·00	2·80	1·37	1·80	2·60	3·00
4	0·52	0·76	0·88	1·13	0·77	1·12	1·77	1·94	1·55	2·60	—	—	1·54	2·03	2·97	—
3	0·56	0·84	0·99	1·30	0·85	1·30	1·95	2·25	1·76	3·00	—	—	1·70	2·33	—	—
2	0·60	0·88	1·09	1·49	0·91	1·41	2·17	2·53	1·94	—	—	—	1·87	2·65	—	—
1	0·63	0·98	1·23	1·75	1·00	1·73	2·44	2·90	2·10	—	—	—	2·02	3·00	—	—
a	0·65	1·07	1·29	1·89	1·08	1·75	2·57	3·00	2·25	—	—	—	2·14	—	—	—
b	0·68	1·14	1·36	2·00	1·11	1·80	3·00	—	2·42	—	—	—	2·19	—	—	—
c	0·73	1·21	1·45	2·10	1·15	1·82	—	—	2·60	—	—	—	2·22	—	—	—
Schleier	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·13	0·39	—	—	0·39	0·66

Tabelle XX.

Schwärzung für Amidol-Entwickler bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei $^1/_2$ *m* Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10	$2^1/_2$	5	$7^1/_2$	10
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	—	—	—	—	—	—	—	0·52	—	—	—	0·78	—	—	—	—
15	—	—	—	0·54	—	—	0·48	0·55	—	—	0·81	0·83	—	—	—	1·15
14	—	—	0·48	0·56	—	0·43	0·54	0·57	—	0·56	0·85	0·87	—	—	1·10	1·21
13	—	0·38	0·55	0·63	0·41	0·44	0·57	0·64	0·37	0·62	0·87	0·94	—	0·77	1·14	1·34
12	—	0·43	0·65	0·67	0·45	0·47	0·60	0·67	0·43	0·69	0·91	1·00	0·64	0·85	1·23	1·39
11	0·32	0·45	0·69	0·73	0·47	0·53	0·65	0·74	0·47	0·76	0·92	1·06	0·71	0·94	1·32	1·45
10	0·36	0·50	0·75	0·80	0·49	0·57	0·72	0·80	0·59	0·84	1·07	1·16	0·80	1·15	1·47	1·63
9	0·42	0·57	0·83	0·87	0·53	0·58	0·80	0·84	0·69	0·95	1·23	1·36	0·90	1·35	1·67	1·83
8	0·45	0·66	0·93	1·01	0·63	0·70	0·87	0·97	0·77	1·14	1·47	1·63	1·07	1·51	1·90	2·15
7	0·50	0·75	1·05	1·19	0·70	0·80	1·05	1·20	0·87	1·37	1·70	1·95	1·30	1·76	2·18	2·59
6	0·60	0·85	1·25	1·39	0·75	0·90	1·23	1·43	1·05	1·56	1·94	2·17	1·45	1·98	2·60	2·99
5	0·65	0·94	1·44	1·58	0·83	1·06	1·43	1·62	1·26	1·82	2·17	2·52	1·60	2·35	3·00	—
4	0·74	1·08	1·55	1·72	0·87	1·21	1·55	1·76	1·36	1·97	2·53	3·00	1·75	2·58	—	—
3	0·80	1·24	1·70	1·90	0·95	1·25	1·70	1·95	1·45	2·21	2·86	—	1·92	—	—	—
2	0·86	1·37	1·84	2·10	1·00	1·37	1·83	2·10	1·56	2·60	—	—	2·05	—	—	—
1	0·95	1·49	2·04	2·38	1·06	1·45	1·97	2·24	1·69	2·82	—	—	2·25	—	—	—
[illegible]	1·03	1·67	2·17	2·60	1·14	1·54	2·10	2·53	1·76	—	—	—	2·45	—	—	—
[illegible]	1·10	1·79	2·30	2·90	1·23	1·65	2·25	2·82	1·83	—	—	—	2·60	—	—	—
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1·90		1·29	1·71	2·32	3·00	1·90	—	—	—	2·80	—	—	—
[illegible]										0·10	0·33	0·39	0·16	0·33	0·56	0·73

Tabelle XXI.

Schwärzung für Rodinal-Entwickler (1:25) bei verschiedenen Temperaturen.

Scheiner-Grade bei 1/3 m Abstand, 1 Min. Exposition	Temperatur															
	0° Celsius				10° Celsius				18° Celsius				25° Celsius			
	Entwicklungsdauer in Minuten															
	2½	5	7½	10	2½	5	7½	10	2½	5	7½*	10*	2½	5	7½*	10*
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·77
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·37	0·55	0·80
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·47	0·60	0·29	0·41	0·60	0·82
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·34	0·50	0·63	0·30	0·45	0·62	0·85
15	—	—	—	0·25	—	—	0·25	0·30	0·29	0·39	0·52	0·65	0·33	0·50	0·65	0·88
14	—	—	0·25	0·27	—	—	0·27	0·33	0·30	0·42	0·57	0·69	0·39	0·55	0·67	0·92
13	—	0·22	0·29	0·32	—	0·25	0·32	0·36	0·36	0·47	0·63	0·73	0·43	0·61	0·70	0·95
12	0·22	0·24	0·33	0·40	0·22	0·30	0·34	0·41	0·43	0·52	0·69	0·75	0·50	0·70	0·79	1·03
11	0·23	0·27	0·39	0·46	0·27	0·34	0·37	0·47	0·50	0·65	0·77	0·83	0·60	0·80	0·84	1·11
10	0·25	0·83	0·45	0·59	0·30	0·44	0·47	0·57	0·60	0·77	0·89	0·91	0·72	0·95	0·95	1·30
9	0·29	0·40	0·55	0·70	0·37	0·53	0·59	0·71	0·70	0·90	1·07	1·09	0·85	1·14	1·15	1·49
8	0·32	0·46	0·67	0·80	0·45	0·65	0·74	0·85	0·77	1·05	1·31	1·37	0·99	1·37	1·42	1·71
7	0·37	0·59	0·77	0·90	0·53	0·80	0·87	1·01	0·87	1·26	1·57	1·63	1·16	1·58	1·65	1·95
6	0·45	0·69	0·88	1·06	0·62	0·90	1·02	1·20	1·00	1·45	1·79	1·90	1·37	1·83	1·94	2·27
5	0·50	0·80	1·06	1·30	0·70	1·03	1·24	1·43	1·14	1·58	1·97	2·13	1·50	2·05	2·10	2·65
4	0·55	0·87	1·21	1·45	0·80	1·21	1·44	1·57	1·30	1·70	2·13	2·5	1·64	2·30	2·31	3·00
3	0·60	0·99	1·35	1·62	0·88	1·41	1·61	1·76	1·47	1·83	2·28	3·0	1·77	2·6	2·55	—
2	0·65	1·05	1·50	1·77	0·98	1·55	1·81	1·97	1·60	1·95	2·6	—	1·90	3·0	3·00	
1	0·70	1·16	1·63	1·90	1·05	1·63	1·95	2·14	1·67	2·16	2·9	—	2·02			
a	0·75	1·24	1·70	2·03	1·15	1·75	2·14	2·30	1·73	2·4	—	—	2·11	—	—	—
b	0·77	1·29	1·78	2·17	1·21	1·83	2·39	2·35	1·79	2·8	—	—	2·17	—	—	—
c	0·83	1·34	1·85	2·25	1·29	1·86	2·60	2·62	1·85	—	—	—	2·25	—	—	—
Schleier	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0·08	0·20	0·34	—	0·10	0·22	0·46

* Inclusive Schleier.

Einen Theil dieser Resultate stellte ich graphisch dar (Tafel VII, VIII, IX und X). Es geht aus den Schwärzungscurven hervor, dass der Eisenoxalatentwickler bei 10 Minuten langer Entwicklung kaum die für Negative nöthige Deckkraft in den Lichtern liefert und dass zur Erzielung der Schwärzung 1·5 bei 0° C. und 10 Minuten langer Entwicklung eine viermal längere Belichtung erforderlich ist, als bei 25° C. binnen 10 Minuten langer Entwicklung oder eine zweimal längere Belichtung als bei 10° C. in derselben Zeit. Eine Hervorrufung bei 10° C. hat binnen 10 Minuten denselben Effect, wie die Hervorrufung bei 25° C. binnen 5 Minuten. Ferner ist zu erwähnen, dass der Eisenoxalat-Entwickler selbst bei 25° C. (10 Minuten langer Entwicklung) wenig Tendenz zur Schleierbildung hat, während bei 10—18° C. der Schleier kaum bemerklich ist, falls die Platte an und für sich unzersetzt und correct hergestellt war. Der Entwickler ist somit für mittlere und hohe Temperatur sehr geeignet, lässt aber nahe 0° C. an Energie bedeutend nach.

Für die sensitometrische Untersuchung einer Bromsilbergelatineplatte wird somit die Entwicklungsprobe bei 18° C. bei einer Dauer von 5 und 10 Minuten genügen. Wirklich »schleierlose« Platten sollen mit diesem Entwickler (auch ohne Zusatz von Bromkalium, welches schleierwidrig und verzögernd wirkt), sich genügend klar oder nur mit geringerem Schleier entwickeln.

Zur Bestimmung des Schwellenwerthes ist meistens die Dauer von 10 Minuten genügend; zur Construction der Schwärzungscurve ist wohl die Entwicklungsdauer von 5 Minuten gleichfalls anzuwenden. Bei schleierigen Platten bestimme man den erforderlichen Zusatz von Bromkalium pro 100 Theilen Eisenoxalat-Entwickler, welcher erforderlich ist, um die Platte 5 respective 10 Minuten lang genügend schleierlos zu erhalten und die dabei auftretenden Schwärzungszahlen.

Sensitometrie und Schwärzungscurve von Bromsilbergelatineplatten unter dem Einflusse verschiedenfarbigen Lichtes im Spectrum.

Bei den vorgehend beschriebenen Versuchen wurde die Sensitometrie der Bromsilberplatten gegen Kerzenlicht besprochen, ohne Rücksicht darauf, dass dieses ein Gemisch von Lichtstrahlen verschiedenster Wellenlänge ist.

Es fragt sich nun, wie die Schwärzungscurven der Bromsilberplatten im Spectrum bei Einwirkung von einheitlichen Lichtstrahlen genau bekannter Wellenlänge verlaufen?

Hiebei kommen nicht nur gewöhnliche Bromsilberplatten in Betracht, welche das Maximum der Empfindlichkeit im Blau, Violett und Ultraviolett besitzen, sondern insbesondere sogenannte orthochromatische Platten. Die letzteren sind durch Farbstoffzusatz für Grün oder Gelb, eventuell Roth empfindlich gemacht (sensibilisirt) und weisen ein zweites Maximum (Sensibilisirungsmaximum) in diesen Spectralzonen längerer Wellenlänge auf, welches vom Maximum der Eigenempfindlichkeit des Bromsilbers im Blauviolett fast immer durch ein Minimum der photographischen Wirkung getrennt ist.[1] Hiebei stellte ich mir die Frage: Folgen die Schwärzungsvorgänge photographischer Platten mit Hervorrufung in der Gegend der Farben-Sensibilisirung denselben Regeln, wie an der Stelle der grössten Eigenempfindlichkeit des Bromsilbers im Blauviolett? Und welchen Einfluss haben etwaige Abweichungen für die correcte Gradation bei der photographischen Wiedergabe farbiger Objecte?

Das Verhalten der orthochromatischen Platten und der für ihre Herstellung in Betracht kommenden Farben-Sensibilisatoren prüft man sonst am besten mit Glasspectrographen kleiner Dispersion (im Sonnenspectrum oder bei Gaslicht mit hineinphotographirter Na-Linie), weil sich die Lage des Sensibilisirungsmaximums hiebei mit grösster Sicherheit schätzen lässt;

[1] Vergl. meine Abhandlungen über sensibilisirende Wirkung von Farbstoffen auf photographische Platten. Diese Sitzungsber., 1884, 1885, 1886.

auch kann man hienach die Wirkung schematisch in Curven (bezogen auf das Sonnenspectrum) bequem und übersichtlich zeichnen, wie ich dies selbst für zahlreiche Sensibilisatoren gethan habe.

Zum Studium der Schwärzungscurven des Bromsilbers für Licht verschiedener Wellenlänge muss aber ein anderer Weg eingeschlagen werden, um genügende Dispersion im Spectrum zu erreichen.

Deshalb arbeitete ich bei den folgenden Versuchen mit einem kleinen Concavgitter, dessen Spectrum erster Ordnung von Roth bis Anfang Ultraviolett circa 30 *cm* Länge hatte. Als Lichtquelle diente ein Gas-Argandbrenner mit Cylinder von weissem Glase; zur Ortsbestimmung wurde am Anfange und Schlusse das Spectrum von circa 10—20 *cm* brennenden Magnesiumband hineinphotographirt. Der Spalt des Spectrographen war ziemlich weit, so dass schon nach ungefähr 30 Secunden auf Erythrosin-Bromsilberplatten eine erkennbare Wirkung im Gelbgrün erzielt werden konnte. Unmittelbar vor der photographischen Platte war eine horizontale, 3 *mm* breite Schlitzblende angebracht, welche das Gitterspectrum nur im schmalen Streifen eintreten liess; die genau eingepasste Cassette wurde nun nach jeder Belichtung um die Schlitzbreite verschoben, so dass auf ein und derselben Platte 12—15 Spectralaufnahmen mit steigender Belichtungszeit gemacht werden konnten.

Um die an diesen Platten zu machenden Opacitätsmessungen in mein Coordinatennetz eintragen zu können, wählte ich die Progression der Expositionszeit genau entsprechend jener beim Scheiner-Sensitometer (siehe Tabelle I, S. 1417), d. h. ich exponirte bei constantem Lichte meistens mit nachfolgenden Belichtungszeiten:

	30 Secunden,
	49 »
1 Minute,	19 »
2 Minuten,	8 »
3 »	28 »
5 »	39 »
9 »	9 »

14 Minuten 54 Secunden,
24 »
39 »
63 »

wobei jede Belichtungszeit einem Sprunge von 2° zu 2° Scheiner entspricht. Die Platten wurden mit Eisenoxalat entwickelt, fixirt, gewaschen und getrocknet. Dann wurden die entsprechenden Wellenlängen des Lichtes von 50 zu 50 Angström'schen Einheiten eingetragen und für die verschiedenen Expositionszeiten die Zonen gleicher Wellenlänge im Mikrophotometer der Opacitätsmessung unterzogen. Dadurch gelangte ich zur genaueren Kenntniss:

1. der Empfindlichkeitscurve für reine Bromsilberplatten, sowie orthochromatischer Platten im Spectrum des Gaslichtes, und zwar sicherer als dies mit den bisher angewendeten Methoden möglich war;

2. fand ich die bisher nicht näher bekannte charakteristische Schwärzungscurve für Lichtstrahlen genau bestimmter Wellenlänge.

Bestimmung der Empfindlichkeitscurve photographischer Platten im Gitterspectrum bei Gaslicht.

Zunächst bestimmte ich das Verhalten reiner Bromsilbergelatineplatten (Schattera in Wien, Schleussner in Frankfurt a. M.) gegen das Gaslicht eines Argandbrenners mittelst des Gitterspectrographen. Es war ausser dem dünnen Glascylinder kein absorbirendes Medium eingeschaltet.

Das Maximum der Eigenempfindlichkeit lag unter diesen Verhältnissen für Gaslicht bei $\lambda = 4550$ bis 4570 AE.[1] Ähnlich wie Gaslicht verhält sich das Licht der Benzinkerze.[2] Man wird

---

[1] Im Sonnenspectrum macht sich grössere Intensität der blauvioletten Strahlen gegenüber dem Gaslichte geltend.

[2] Setzt man die Helligkeit im Gelbgrün (bei $\lambda = 3600$) bei einer Benzinkerze und einem Siemens'schen Präcisionsbrenner (modificirter Argand-Gasbrenner) beiderseits = 1, so ist nach meinen Bestimmungen die Helligkeit im Indigoblau (nächst dem Maximum der Empfindlichkeit der Bromsilbergelatine zwischen *F* und *G*, bei circa $\lambda = 4600$) beim Siemens-Gasbrenner 1·10 bis 1·20 mal grösser (photographisch wirksamer) als jene der Benzinkerze in derselben Region. (E.)

also nicht fehlgehen, wenn man die so erhaltenen Resultate auch für das spectrale Verhalten photographischer Platten bei der Scheiner'schen Benzinkerze verwendet.[1]

Die nachstehende Tabelle XXII enthält meine Opacitätsmessungen an einer reinen Bromsilberplatte (mit Eisenoxalat-Entwickler) für die Wellenlängen 5100 bis 4000 A. E.

Construirt man die charakteristischen Schwärzungscurven für die Spectralstrahlen der Maximalwirkung im Blau ($\lambda = 4500$ und 4600) und für die Strahlen, welche an der Grenze der Wirksamkeit im Blaugrün stehen (z. B. $\lambda = 5000$ bis 5100) siehe Tafel XIII, so ergibt sich ein sehr bemerkenswerthes Resultat: Die Strahlen in der Zone der Maximalwirkungen bringen das Bromsilber rasch vom Stadium der Unterexposition in jenes normaler Exposition und die Curve steigt rasch an. Die Strahlen an der Grenze der Wirksamkeit gegen Spectralgrün aber vermögen selbst bei verlängerter Belichtung das Bromsilber kaum aus dem Stadium der Unterexposition zu bringen, oder mit anderen Worten, mit zunehmender Belichtung nimmt die Schwärzung nur schwierig zu. Die Schwärzungscurve steigt sehr langsam an.

Die schwache Wirkung des für reines Bromsilber wenig aktinischen grünen Lichtes verläuft typisch anders, als die schwache Wirkung stark gedämpften blauvioletten Lichtes. Selbst wenn man letzteres soweit schwächt, dass die Anfangswirkung in beiden Fällen gleich gross ist, und wenn man dann im grünen und blauvioletten Strahl genau im selben Maasse die Belichtung steigert, macht sich alsbald ein charakteristischer Unterschied geltend.

---

[1] Bei Sonnenlicht ist die Lichtintensität viel grösser; da die Anfangswirkung hiebei beschleunigt wird, so ist der Verlauf der Curve ein anderer als bei Verwendung von schwachem Lampenlichte. Es gibt Farbensensibilisatoren, welche bei grosser Lichtintensität sehr grosse Empfindlichkeit aufweisen, bei schwachem Licht aber ganz versagen, und solche, welche auch in letzterem Falle bei verlängerter Belichtung gute Negative geben, was günstiger ist. Bei meinen Untersuchungen beschränkte ich mich vorläufig auf die Untersuchung der Wirkung des Gaslichtes, weil das Verhalten photographischer Platten gegen mittlere und geringe Lichtintensitäten zunächst Interesse für die Praxis hat.

Tabelle XXII.

Schwärzung einer reinen Bromsilbergelatineplatte im Entwickler unter dem Einflusse verschiedener Spectralstrahlen bei steigender Belichtung.

Exposition	Schwärzung bei der Wellenlänge λ =											
	5100	5000	4900	4800	4700	4600	4500	4400	4300	4200	4100	4000
Erste Versuchsreihe												
2 Min. 7 Sec.	—	—	—	—	0·19	0·22	0·18	0·16	—	—	—	—
3 » 27 »	—	—	—	0·16	0·23	0·26	0·21	0·18	—	—	—	—
5 » 36 »	—	—	0·18	0·18	0·26	0·30	0·27	0·24	0·18	0·18	—	—
9 » 5 »	—	0·18	0·21	0·23	0·41	0·44	0·42	0·35	0·31	0·22	0·19	—
14 » 46 »	0·20	0·22	0·26	0·40	0·64	0·73	0·75	0·63	0·47	0·33	0·23	0·17
24 »	0·22	0·26	0·35	0·63	0·84	0·97	1·00	0·87	0·70	0·44	0·31	0·26
39 »	0·25	0·30	0·52	0·83	1·13	1·35	1·35	1·20	0·99	0·74	0·51	0·33
63 »	0·29	0·40	0·74	1·05	1·42	1·57	1·60	1·47	1·28	0·94	0·73	0·46

Exposition	Schwärzung bei der Wellenlänge λ =												
	5000	4900	4800	4700	4600	4571	4550	4500	4400	4300	4200	4100	4000
Zweite Versuchsreihe (kürzer entwickelt als die erste Reihe)													
3 M. 27 S.	—		0·26	0·34	0·31	0·27	0·30	0·33	0·28	0·25	—	—	—
5 » 36 »	—	0·26	0·30	0·40	0·43	0·44	0·44	0·47	0·35	0·34	0·25	—	—
9 » 5 »	—	0·29	0·41	0·55	0·63	0·60	0·62	0·57	0·49	0·43	0·33	0·24	—
14 » 46 »	—	0·35	0·54	0·67	0·76	0·83	0·77	0·75	0·69	0·56	0·40	0·29	0·22
24 »	0·33	0·44	0·73	0·86	0·99	0·95	0·92	0·93	0·88	0·77	0·56	0·43	0·27
39 »	0·37	0·59	0·85	1·07	1·20	1·23	1·21	1·20	1·10	0·87	0·70	0·56	0·40

Tabelle XXIII.

Exposition	Schwärzung bei der Wellenlänge λ =										
	5000	4900	4800	4700	4600	4500	4400	4300	4200	4100	4000
2 Min. 7 Sec.	—	—	0·33	0·34	0·35	0·35	0·31	0·27	—	—	—
3 » 27 »	—	0·30	0·35	0·40	0·43	0·43	0·36	0·32	0·30	—	—
5 » 36 »	—	0·34	0·41	0·53	0·59	0·56	0·47	0·42	0·33	0·25	—
9 » 5 »	0·30	0·40	0·53	0·69	0·77	0·77	0·64	0·47	0·40	0·30	—
14 » 46 »	0·33	0·47	0·69	0·91	0·95	0·98	0·84	0·63	0·49	0·37	0·32
24 »	0·40	0·57	0·83	1·16	1·26	1·17	1·03	0·83	0·64	0·47	0·36
39 »	0·50	0·74	1·06	1·45	1·52	1·51	1·37	1·12	0·84	0·59	0·47
63 »	0·65	0·88	1·35	1·55	1·76	1·74	1·64	1·37	0·99	0·79	0·57

Der gedämpfte blauviolette Strahl erzielt bei zunehmender Belichtung bald eine der correcten Expositionsperiode entsprechende Schwärzungszunahme, während der grüne Strahl bei genau derselben Zunahme der Belichtungszeit weit hinter dem ersten zurückbleibt und mangelhafte Gradation liefert. Der Grund liegt eben darin, dass das Blauviolett noch zu den Strahlen der photographischen Maximalwirkung für Bromsilbergelatine zählt, wenn es auch in der Gas- oder Kerzenflamme nur in geringer Proportion vorhanden ist. Dieser kleine Antheil aber bewirkt seiner Intensität entsprechend eine gute photographische Gradation.

Hierin liegt ein bisher nicht beachtetes Charakteristikon der Wirkung verschiedener Strahlen des Spectrums vor, welche im innigen Zusammenhange mit der Empfindlichkeitscurve photographischer Platten liegt.

Zum Glück bleibt die Wirkung der Strahlen, welche mangelhafte Gradation geben, weit hinter jener zurück, welche correcte Gradation gibt, weil eben letztere die dominirende Maximalwirkung repräsentirt; deshalb können wir bei der praktischen Sensitometrie bei Kerzenlicht annehmen, dass nur

die letztgenannten Strahlen den Verlauf der Schwärzungscurve beim Scheiner'schen Sensitometer bestimmen.

Orthochromatische Platten, in derselben Weise geprüft, geben ein bemerkenswerthes Ergebniss.

Eine mit Erythrosin in der Emulsion sensibilisirte Platte (orthochromatische Platte des Handels) zeigte die bekannte, gewaltig gesteigerte gelbgrüne Empfindlichkeit und etwas verminderte Blau-Empfindlichkeit. An zwei solchen Spectrumphotographien stellte ich von 100 zu 100 Angström'schen Einheiten eingehende Opacitätsmessungen an, welche in nachstehender Tabelle XXIV mitgetheilt sind.

In Tafel XII stellte ich die Sensibilisirungscurven von Erythrosinplatten graphisch dar; das Coordinatensystem enthält die Schwärzungszahlen (genau so wie bei den anderen Tafeln) als Ordinaten, die Wellenlängen des einwirkenden Lichtes als Abscissen. Die Curven führte ich für verschiedene Belichtungszeiten aus; sie zeigen die enorme Überlegenheit der Erythrosinplatte im gelbgrünen Lichte, welche beim Gaslichte noch stärker zum Ausdruck kommt als bei Sonnen- oder elektrischem Lichte.

Aus den Tabellen XXIV und XXV kann aber auch ohne Schwierigkeit die charakteristische Schwärzungscurve für jede einzelne Strahlenart von bestimmter Wellenlänge construirt werden. In Tafel XII sind für Erythrosinplatten die charakteristischen Schwärzungscurven für Licht von $\lambda = 6000$ bis 4400 gezeichnet. Man ersieht z. B. an den gestrichelten Curven die Zunahme der photographischen Schwärzung mit zunehmender Belichtung im blauen Strahl ($\lambda = 4600$ bis 4500; wo das Maximum der Blau-Empfindlichkeit liegt, sowie in dem benachbarten $\lambda = 4800$, 4700 bis 4400).

Die Gradation ist eine gute, annähernd normale. Die vollausgezogenen Curven zeigen das Verhalten in der Zone der Sensibilisirung im Gelbgrün. Die Maximalwirkung bei $\lambda = 5600$, sowie die benachbarten Stellen bei $\lambda = 5700$, 5500 und 5400 zeigen einen annähernd parallelen Verlauf mit der Schwärzungscurve im blauen Strahle, 5800 weicht ein wenig ab. Die Stellen schwacher Sensibilisirung im Gelb haben aber eine viel langsamer aufsteigende Schwärzungscurve (siehe Curve für $\lambda = 5900$ und 6000 im Gelb), bewirken eine viel

langsamere Zunahme der Schwärzungen bei verlängerter Belichtung an den Stellen der Maximalwirkung. Die Platten bleiben also an den Stellen mangelhafter Sensibilisirung viel länger in der Periode der Unterexposition.

In ganz analoger Weise verglich ich das Verhalten einer Eosin-Ammoniak-Badeplatte mit einer Erythrosin-Badeplatte. Es ist nämlich durch die Untersuchungen von P. Ruh[1] festgestellt, dass das Erythrosin (Tetrajodfluoresceïnnatrium) zur günstigsten sensibilisirenden Wirkung auf Bromsilbergelatineplatten gebracht werden kann, wenn man die Platten zuerst durch 2 Minuten in verdünntem Ammoniak (2 cm^3 Ammoniakflüssigkeit auf 100 cm^3 Wasser) badet, dann in ein Gemisch von 100 cm^3 Wasser, 2 cm^3 Ammoniak und 6 cm^3 Erythrosinlösung (1 : 500) während 2 Minuten badet. In ähnlicher Weise kann man auch Eosin (Tetrabromfluoresceïnnatrium) zur besten Wirkung bringen, wenn auch die Empfindlichkeit im Gelbgrün bei letzterem nur beiläufig ein Viertel des ersteren beträgt; bei Abwesenheit von Ammoniak sind die Verhältnisse wesentlich ungünstiger.[2]

Derartige Badeplatten belichtete ich im Gitterspectrographen und machte Opacitätsmessungen, deren Resultate in Tabelle XXVI wiedergegeben sind. Es sei bemerkt, dass die Erythrosinplatte (Tabelle XXIV) und die Eosinplatte (Tabelle XXVI) gleichzeitig verarbeitet wurden, somit sind ihre Resultate unmittelbar vergleichbar.

Der Vergleich verschiedener Erythrosin- und Eosinplatten ist für die Praxis interessant, weil zur Herstellung von Dreifarben-Negativen und anderen auch solche Platten hinter grünen Lichtfiltern verwendet werden. An der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt wurde wiederholt die Beobachtung gemacht, dass Eosin-Badeplatten hinter grünen Lichtfiltern die grünen Bildstellen gleichsam schärfer aus der polychromen Umgebung herausgeschnitten und präciser im photographischen Negativ

---

[1] Eder's Jahrbuch für Phot. 1899, S. 480. — Phot. Corresp. 1898, S. 243.

[2] Bei Eosin wirkt Ammoniakzusatz ziemlich auffallend. Erythrosin ist in seiner sensibilisirenden Wirkung für Bromsilbergelatine weniger von Ammoniakzusatz abhängig.

wiedergeben als Erythrosin-Badeplatten. Ein Blick auf die Curven in Tafel XVI gibt die Erklärung zu dieser Erfahrungsthatsache. Die Eosinplatte gibt einen schmäleren grünen Bezirk wieder, während Erythrosin nicht nur eine breitere Spectralregion umfasst, sondern auch in dem in Tafel XVI vorgeführten Falle bei längerer Belichtung Mangel an Contrasten in den hohen Lichtern aufweist.

Die Erythrosin-Ammoniak-Badeplatte hat wohl die grösste Lichtempfindlichkeit im Gelbgrün; sie ist grösser als bei Erythrosin-Emulsion (in der Substanz gefärbt) und ist — wie erwähnt — auch der Eosin-Badeplatte an Empfindlichkeit überlegen. Die hohe Empfindlichkeit ist aber in ersterem Falle mit der unangenehmen Eigenschaft verknüpft, dass die starken Belichtungen rasch die Phänomene der Überexposition und Solarisation geltend machen, d. h. dass die Gradation in hohen Lichtern mangelt und Monotonie auftritt. Nur wenn man die genügend kurze, correcte Exposition trifft, ist die Gradation eine gute.

Es geht aus allen diesen Befunden hervor, dass streng genommen jede photographische Platte eine besondere charakteristische Schwärzungscurve für die einzelnen Strahlen verschiedener Wellenlänge hat.[1]

Bei der Sensitometrie gewöhnlicher Platten ist das ziemlich constante Blau-Maximum mit den analog wirkenden Nachbarbezirken (Blauviolett) für den Verlauf der charakteristischen Curve massgebend; in diesem Sinne gibt die Prüfung mit der Benzinkerze ein befriedigendes Bild über das Verhalten der Bromsilbergelatine gegen blauviolette Strahlen, welche dem Maximum seiner Eigenempfindlichkeit im Spectrum entsprechen.

Anders verhält es sich mit orthochromatischen Platten, welche je nach der Natur des sensibilisirenden Farbstoffes, seiner Concentration, Wirkungsdauer etc. ein enorm schwankendes Verhalten gegen das Spectrum aufweisen.

---

[1] Wahrscheinlich ist auch der Werth für p in der Formel $i.t^p$, sowie der Einfluss des Intermittirens in ähnlicher Weise variabel.

Tabelle XXIV.

Erythrosin-Schleussnerplatte. — Gitterspectrum.

Exposition	Schwärzung bei der Wellenlänge λ =																						
	6000	5900	5800	5700	5600	5500	5400	5300	5200	5100	5000	4900	4800	4700	4600	4500	4400	4300	4200	4100	4000	3900	3800
1 M 16 S	0·34	0·40	0·54	0·77	0·80	0·76	0·54	0·45	0·41	0·42	0·36	0·40	0·40	0·41	0·39	0·39	—	—	—	—	—	—	—
2 » 7 »	0·40	0·53	0·74	0·96	1·06	0·91	0·66	0·52	0·47	0·45	0·45	0·47	0·46	0·50	0·50	0·47	0·44	0·43	—	—	—	—	—
3 » 27 »	0·46	0·57	0·85	1·20	1·35	1·21	0·82	0·68	0·57	0·51	0·48	0·50	0·52	0·55	0·64	0·57	0·54	0·51	0·40	0·39	—	—	—
5 » 36 »	0·48	0·63	1·04	1·50	1·60	1·38	1·00	0·84	0·65	0·57	0·52	0·54	0·69	0·71	0·77	0·74	0·68	0·59	0·49	0·41	—	—	—
9 » 5 »	0·53	0·75	1·35	1·75	1·83	1·65	1·34	1·00	0·85	0·75	0·64	0·70	0·84	0·88	0·94	0·93	0·87	0·78	0·66	0·50	0·40	—	—
14 » 46 »	0·56	0·82	1·55	1·95	2·01	1·88	1·54	1·19	1·00	0·88	0·80	0·80	0·94	1·16	1·16	1·16	1·05	0·88	0·78	0·60	0·49	—	—
24 »	0·66	0·90	1·78	2·16	2·20	2·03	1·69	1·41	1·24	1·06	0·95	0·94	1·06	1·42	1·44	1·42	1·25	1·07	0·87	0·71	0·56	0·40	0·37
39 »	0·82	1·05	2·10	2·25	2·44	2·35	1·90	1·74	1·46	1·30	1·20	1·14	1·34	1·71	1·68	1·60	1·43	1·39	1·19	0·89	0·76	0·41	0·44
63 »	0·96	1·26	2·50	2·60	2·72	2·60	2·10	1·95	1·76	1·55	1·42	1·40	1·54	1·83	1·88	1·75	1·64	1·59	1·47	1·13	0·89	0·66	0·54

Maximum bei $\lambda = 5600$.
Minimum » $\lambda = 4900-5000$.
Blau-Maximum » $\lambda = 4550$.

Tabelle XXV.

Erythrosin-Schleussner-Platte. — Gitterspectrum, kürzere Belichtung.

Exposition	Schwärzung bei der Wellenlänge λ =																		
	6000	5900	5800	5700	5600	5500	5400	5300	5200	5100	5000	4900	4800	4700	4600	4500	4400	4300	4200
18 Sec.	—	—	—	0·35	0·42	0·35	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30 »	—	—	0·36	0·46	0·52	0·47	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
48 »	—	—	0·39	0·60	0·70	0·64	0·45	—	—	—	—	—	—	—	0·41	—	—	—	—
1 Min. 16 »	—	—	0·49	0·76	0·9	0·74	0·60	0·45	0·40	—	—	—	—	0·45	0·45	0·41	0·40	—	—
2 » 7 »	—	0·40	0·62	0·95	1·11	0·95	0·71	0·53	0·42	0·44	0·43	—	0·40	0·50	0·52	0·49	0·46	0·40	—
3 » 27 »	—	0·46	0·85	1·20	1·35	1·29	0·88	0·66	0·54	0·47	0·44	0·45	0·45	0·61	0·70	0·63	0·55	0·45	0·41
5 » 36 »	—	0·56	1·01	1·42	1·56	1·47	1·09	0·83	0·69	0·59	0·51	0·51	0·63	0·79	0·86	0·81	0·73	0·59	0·47
9 » 5 »	0·37	0·66	1·10	1·55	1·75	1·61	1·2	0·87	0·72	0·64	0·60	0·57	0·68	0·85	0·91	0·85	0·78	0·64	0·54
14 » 46 »	0·45	0·85	1·65	1·76	2·20	1·75	1·7	1·45	1·06	0·88	0·76	0·77	0·95	1·15	1·35	1·30	1·01	0·88	0·78

Maximum bei λ = 5600.
Minimum » λ = 5500.
Blau-Maximum » λ = 4500—4700.

Tabelle XXVI.

Eosin-Badeplatte mit Ammoniakvorbad.

Exposition	Schwärzung bei der Wellenlänge λ =																				
	5900	5800	5700	5600	5500	5400	5300	5200	5100	5000	4900	4800	4700	4600	4550	4500	4400	4300	4200	4100	4000	3900
1 Min. 16 Sec.	—	—	—	0·31	0·54	0·62	0·48	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2 » 7 »	—	—	0·22	0·44	0·82	0·86	0·69	0·39	0·29	0·25	—	—	0·23	0·29	0·26	0·29	0·27	—	—	—	—	—
3 » 27 »	—	—	0·27	0·75	1·07	1·09	0·89	0·71	0·39	0·28	0·29	0·29	0·33	0·36	0·39	0·40	0·33	0·29	—	—	—	—
5 » 36 »	—	0·22	0·41	0·97	1·35	1·40	1·25	0·85	0·52	0·42	0·36	0·38	0·49	0·61	0·63	0·61	0·56	0·41	0·33	0·27	—	—
9 » 5 »	—	0·27	0·60	1·27	1·50	1·48	1·40	1·19	0·83	0·64	0·50	0·51	0·70	0·80	0·84	0·83	0·79	0·65	0·46	0·37	0·29	—
14 » 46 »	0·21	0·33	0·84	1·42	1·57	1·55	1·54	1·40	1·06	0·84	0·71	0·75	0·91	1·03	1·07	1·09	1·06	0·88	0·66	0·49	0·34	0·27
24 »	0·25	0·49	1·06	1·55	1·66	1·65	1·63	1·49	1·36	1·15	0·90	0·93	1·14	1·28	1·30	1·35	1·25	1·10	0·88	0·75	0·40	0·33
39 »	0·29	0·69	1·34	1·63	1·76	1·74	1·66	1·62	1·50	1·35	1·14	1·20	1·43	1·54	1·55	1·54	1·49	1·31	1·11	0·87	0·56	0·40
63 »	0·44	0·88	1·46	1·75	1·85	1·82	1·78	1·72	1·62	1·49	1·43	1·45	1·60	1·70	1·73	1·72	1·64	1·52	1·29	0·94	0·78	0·53

Über die Lage des Maximums und die relative Empfindlichkeit der sensibilisirten Platten gegen Orange, Gelb oder Grün einerseits und Blauviolett anderseits gibt die qualitative Prüfung im Spectrographen Aufschluss. Die Kenntniss der Gradation oder charakteristischen Curve erfordert Opacitätsmessungen.

Um einen Einblick über den Zusammenhang der Gradation photographischer Platten und ihrer Schwärzungscurven im Spectrum zu gewinnen, sensibilisirte ich eine Bromsilberplatte mit einem mittelmässigen Farbensensibilisator für Gelbgrün, dem Congoroth,[1] von welchem ich wusste, dass es mangelhafte orthochromatische Wiedergabe farbiger Gemälde bewirkt und etwas zu flauer Gradation in der Wiedergabe des Farbentonwerthes neigt.

Die Platte wurde in einem Bade von 100 cm^3 Wasser, 2 cm^3 Congorothlösung (1:500) und 2 cm^3 Ammoniak 3 Minuten lang gebadet,[2] getrocknet und dann mit der in Tabelle XXIV gemessenen Erythrosinplatte gleichzeitig untersucht.

Die Schwärzungszahlen für verschiedene Wellenlängen im Spectrum bei steigender Exposition sind in nachfolgender Tabelle XXVII enthalten.

Die Empfindlichkeitscurve der Congorothplatte gegen das Spectrum siehe Tafel XIV und überdies die charakteristischen Schwärzungscurven für blaues Licht ($\lambda = 4500$ bis 4600) und für gelbgrünes Licht an der Stelle der Maximalwirkung ($\lambda = 5500$ und die benachbarten Stellen $\lambda = 5600$ und 5400) siehe Tafel XV (Mittel mehrerer Versuche).

Aus diesen Befunden geht hervor, dass Congoroth wohl gut für Gelbgrün sensibilisirt, aber bei weitem nicht so gut wie Erythrosin; dies geht aus der geringen Maximalerhebung der Sensibilisirungscurve im Gelbgrün im Vergleich zur starken Blauwirkung hervor. Die Congoplatte war länger entwickelt worden als die Erythrosinplatte, um das Sensibilisirungsband kräftiger zu erhalten, weshalb auch die (an und für sich grössere) Blau-Empfindlichkeit umso stärker hervortrat.

[1] Congoroth und seine Verwandten beschrieb ich zuerst als mittelgute Sensibilisatoren für Bromsilbergelatine (diese Sitzungsber. vom 10. Juni 1886).

[2] Congoroth ohne Ammoniak wirkt mittelmässig; weniger gut als mit Ammoniak; es wirkt weniger als Eosin mit Ammoniak und viel schlechter als Erythrosin.

Tabelle XXVII.

Congoroth-Platte, 2% Congorothlösung (1 : 500)+Ammoniak.

Exposition	Schwärzung bei der Wellenlänge λ =																					
	6200	6100	6000	5900	5800	5700	5600	5500	5400	5300	5200	5100	5000	4900	4800	4700	4600	4500	4400	4300	4200	4100	4000
3M 27S.	—	—				0·23	0·25	0·25	0·24	0·20	0·12	0·22	—	—	0·24	0·17	0·17	0·27	0·24	0·23	—	—	—
5 » 36 »	—	—		0·27	0·27	0·30	0·34	0·34	0·27	0·22	0·27	0·23	0·23	0·23	0·24	0·27	0·37	0·43	0·33	0·33	0·23	—	—
9 » 5 »	—	—	0·27	0·36	0·37	0·49	0·55	0·55	0·45	0·36	0·34	0·29	0·27	0·29	0·36	0·46	0·60	0·89	0·49	0·36	0·27	—	—
14 » 46 »	—	0·29	0·33	0·45	0·61	0·75	0·76	0·77	0·74	0·64	0·51	0·44	0·35	0·49	0·64	0·85	1·31	0·96	0·84	0·65	0·43	0·34	0·30
24 »	0·27	0·33	0·46	0·66	0·80	0·95	1·00	1·01	1·00	0·84	0·80	0·69	0·65	0·80	1·04	1·35	1·45	1·44	1·30	1·00	0·74	0·59	0·33
39 »	0·36	0·49	0·74	0·90	1·01	1·20	1·20	1·20	1·20	1·12	1·00	0·94	0·89	1·20	1·40	1·74	1·89	1·83	1·69	1·54	1·12	0·76	0·49
63 »	0·45	0·61	0·85	1·02	1·25	1·38	1·42	1·49	1·36	1·29	1·20	1·09	1·06	1·37	1·67	1·84	2·17	2·15	1·87	1·71	1·40	1·00	0·69

Maximum bei λ = 5500 (Grün).
Minimum » λ = 5000.
Zweites Maximum » λ = 4500—4600 (Blau.)

Aus der charakteristischen Schwärzungscurve der Congorothplatte geht hervor, dass mit verlängerter Belichtung die Blauwirkung immer mehr die Grüngelbwirkung überholt. Dies erklärt die schlechte praktische Verwendbarkeit der Platte, welche bei verschiedener Belichtung in scheinbar unregelmässiger Weise den Farbentonwerth bald mehr, bald weniger schlecht wiedergibt.

Hiemit ist auch der experimentelle Beweis für meine vor einiger Zeit ausgesprochene Ansicht[1] erbracht, dass nur jene orthochromatischen Platten (z. B. gelbempfindliche) correcte Negative liefern, welche in der Region ihrer Farbensensibilisirung (z. B. im gelben Lichte) bei zunehmender Lichtintensität eine Schwärzungszunahme beim Entwickeln erfahren, welche annähernd proportional der Schwärzungszunahme des reinen Bromsilbers unter dem Einflusse von weissem (oder besser blauviolettem Lichte) ist.

Für die rasche Beurtheilung des Werthes einer orthochromatischen Platte sind jedoch progressive Belichtungsreihen und Opacitätsmessungen an entsprechend vielen Stellen bestimmter Wellenlänge im Spectrum zu zeitraubend.

Wenn daher die Stelle des Sensibilisirungsbandes einer orthochromatischen Platte im Spectrographen qualitativ genau bekannt ist,[2] so genügt es, die charakteristische Schwärzungscurve

1. für den weniger brechbaren Spectralbezirk von Grün bis Gelb und Orangeroth summarisch zu ermitteln, weil dort nur das Farbensensibilisirungs-Maximum und die benachbarten Stellen sich geltend machen;

2. die Schwärzungscurve für das gesammte weisse Licht (respective Bogenlicht), also für die grüngelbe bis orangerothe Zone inclusive der blauvioletten zu ermitteln, und eventuell

3. die Empfindlichkeit gegen Blauviolett allein.

Die sub 1. erwähnte Versuchsreihe kann durch Vorschalten von gelben Lichtfiltern erfolgen, wozu ich früher eine 1 *cm*

---

[1] Phot. Corresp. 1899, S. 316.

[2] Die Ermittlung der Lage des Sensibilisirungsbandes einer orthochromatischen Platte muss stets allen anderen Proben vorausgehen.

98*

dicke Schichte einer 1procentigen Lösung von Kaliumbichromat (1:100) vorgeschlagen habe[1] und neuerdings auch eine ebenso dicke Lösung von 4procentigem Kaliummonochromat in Anwendung brachte.

Diese gelben Lichtfilter absorbiren alle blauvioletten (inclusive den ultravioletten) Strahlen und lassen Roth, Orange, Gelbgrün fast ungeschwächt durch. Während die grüne Region des Absorptionsspectrums beim 1procentigen Kaliumbichromat schon erhebliche Lichtverluste zeigt (von $\lambda = 5300$ und 5200 gegen Blau), ist dieselbe Zone im Absorptionsspectrum des 4procentigen Kaliummonochromats noch sehr lichtstark;[2] durch letzteres dringt übrigens das Roth von *A* angefangen bis *E* fast ungeschwächt durch[3] und auch die Region bei $\lambda = 5200$ bis 5100 wird wenig geschwächt, dagegen das Blauviolett gut abgeschnitten (vergl. Fig. 5).

Da diese gelben Lichtfilter alle blauvioletten Strahlen des Spectrums genügend scharf absorbiren,[4] so kommt nun die

[1] III. Congress für angewandte Chemie 1898 (Phot. Corresp. 1898, S. 478. 1899, S. 478).

[2] Hierauf hat K. Vierordt in seiner Abhandlung »Die Anwendung des Spectralapparates zur Photometrie der Absorptionsspectren« 1873, S. 90, hingewiesen. Durch Photographiren dieser Absorptionsspectren auf Erythrosinplatten fand ich dasselbe Resultat. Eine 0·1procentige Lösung von Kaliumbichromat lässt wesentlich mehr Blaugrün bis Hellblau durch, als 4procentiges Monochromat. (In dem Werke von G. und H. Krüss: »Kolorimetrie und quantitative Spectralanalyse«, 1891, S. 41 sind die Absorptionscurven des Monochromates nach Vierordt's Messungen im rothen Bezirke ungenau reproducirt.)

[3] Für das menschliche Auge wird die Wirkung des Roth durch das wenig geschwächte complementäre Grün ausgelöscht und man nimmt den Effect der gelben Strahlen wahr, wodurch die Monochromatlösung den Eindruck eines reinen gelben Farbentones macht, trotzdem nahezu das halbe sichtbare Spectrum fast ungeschwächt die Lösung passirt.

[4] Für die vorliegenden Sensitometerproben kommt die ziemlich schwache Scheiner'sche Benzinkerze in 1 *m*, höchstens 1/2 *m* Abstand bei einer Belichtungszeit von 1 Minute in Betracht. Bei diesen Belichtungen übt sowohl die 1procentige Bichromat-, als die 4procentige Monochromatlösung eine genügend absorbirende Wirkung von Blau bis Ultraviolett aus, so dass eine reine Bromsilberplatte hiebei keine Bildspur gibt. Die Bichromatlösung schützt rapide reine Bromsilberplatten bei Scheiner-Sensitometerproben bei 1/3 *m* Kerzenabstand sogar während 15 Minuten langer Belichtungsdauer; die 4procentige

Empfindlichkeit des Sensibilisirungsbandes (welches zuvor spectrographisch in seiner Sensibilisirungscurve festgelegt werden muss) exclusive der Eigenempfindlichkeit des reinen Bromsilbers zum Ausdrucke. Eine Probe ohne Gelbfilter gibt die Gesammtempfindlichkeit der Platte für die Sensibilisirungsstelle

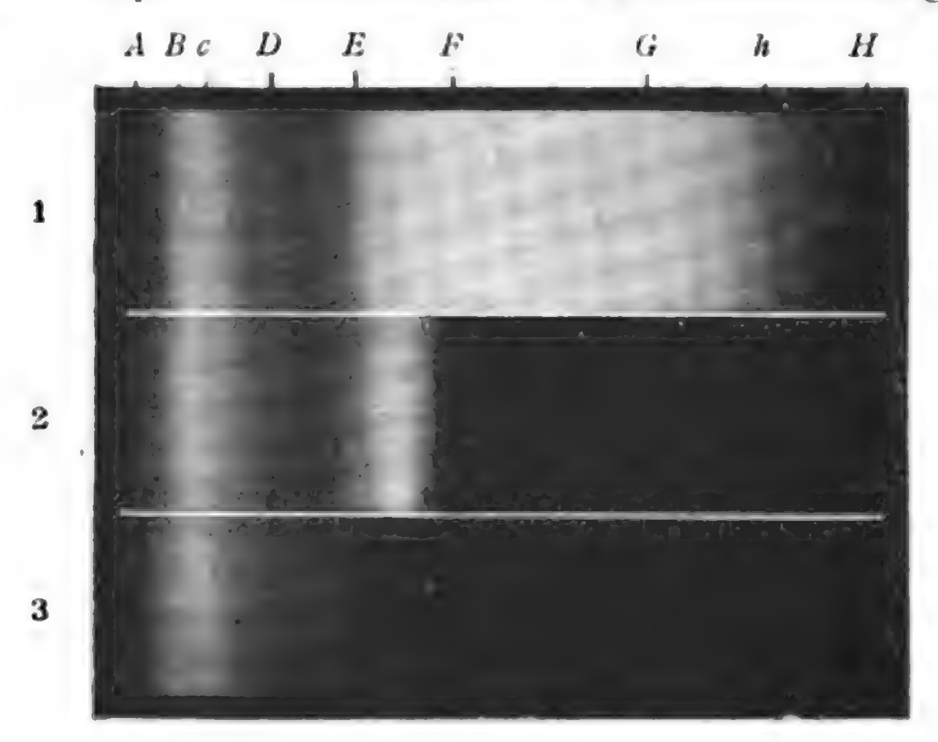


Fig. 5.

1. Spectrum von Gaslicht (durch eine mit Wasser gefüllte Absorptionswanne auf eine mit »Wollschwarz« sensibilisirte Platte fallend). — 2. Dasselbe, nach Durchgang durch eine 1 *cm* dicke Schichte von 4procentigem Kaliummonochromatlösung. — 3. Dasselbe, nach Durchgang durch 1procentige Kaliumbichromatlösung, von derselben Dicke.

und inclusive der Eigenempfindlichkeit des Bromsilbers im Blauviolett.

Dabei ist vorausgesetzt, dass man den Lichtverlust ziffernmässig kennt, welchen das Lampenlicht beim Durchgange durch die gelbe Chromatlösung (gesammter Lichtverlust durch Reflexion und Absorption) erleidet. Diese Grösse ermittelte ich mittelst eines kleinen Gitterspectrographen, welcher das

---

Monochromatlösung aber zeigte bei einem Versuche schwach 7° Scheiner an, welche auf die Wirkung des blaugrünen Lichtes nächst $\lambda = 5100$ zurückzuführen sind. Da alle einschlägigen Sensitometerproben orthochromatischer Platten aber nur bei 1 Minute langer Belichtung ausgeführt werden, so kommt die Empfindlichkeit des reinen Bromsilbers hinter diesen Gelbscheiben nicht zur Geltung.

Spectrum erster Ordnung von Roth bis Ende des Violett auf eine 30 *cm* lange Platte entwarf. Es wurde auf eine Gas-Argandflamme (sogenannter Siemens'scher Präcisionsbrenner) eingestellt und farbenempfindliche Platten sowohl mit, als ohne gelbes Lichtfilter in Grenzen von 1—10 Minuten belichtet, zugleich entwickelt, im Mikrophotometer die Stellen der Maximalwirkung der einzelnen Streifen gemessen, ebenso die Nachbarstellen von 30 zu 30 Angström'schen Einheiten und dann die Expositionszeiten gesucht, welche gleichen Lichteffecten entsprechen.

Die Versuche ergaben für eine Steinheil'sche planparallele Wanne mit 4 *mm* dicken, weissen Spiegelscheiben und einer 1 *cm* dicken Schichte von Kaliumbichromatlösung (1:100) für Benzin- oder Gaslicht in der Region von Orangeroth bis Grün eine von Roth bis zu der Wellenlänge $\lambda = 5300$ oder 5200 mittlere Schwächung des einfallenden Lichtes bei einer Versuchsreihe von 1 auf 0·82, bei einer zweiten Reihe von 1 auf 0·76, also im Mittel durchschnittlich auf 0·79. Für eine 4procentige Kaliummonochromatlösung in 1 *cm* dicker Schichte ergab sich eine ebensolche Schwächung für eine weiter aus Grün sich erstreckende Spectralregion (bis circa $\lambda = 5000$). Darüber hinaus, weiter gegen Blau, wird die Schwächung rasch eine bedeutende.

Diese Zahl ergibt die Correction, um welche man die Sensitometeranzeige hinter dem Filter erhöhen muss, um sie auf frei einfallendes, ungeschwächtes Licht der genannten Spectralregion zu beziehen.

Da beim Scheiner'schen Sensitometer eine Nummer zur nächsten im Lichtintensitätsverhältnisse 0·78 zu 1 steigt, so nähert sich die Correctur innerhalb der Beobachtungsfehler sehr 1° Scheiner. Die Correctur erfolgt also mit genügender Genauigkeit, wenn man die Sensitometeranzeige einer orthochromatischen Platte hinter dem genannten Gelbfilter im Scheiner'schen Sensitometer ermittelt und die abgelesene Zahl um 1° Scheiner erhöht. Das Resultat entspricht dem Schwellenwerth der Farbenempfindlichkeit in der Region der Sensibilisirung; auch die charakteristischen Schwärzungscurven für Grün, Gelb und Orangeroth können auf diese Weise construirt werden.

Um die Beurtheilung der Art und Genauigkeit dieser Messungen der Schwächung des Lampenlichtes durch die 1procentige Bichromatlösung zu ermöglichen, theile ich die Messungen des Lichtverlustes einer kleinen Zone von der Wellenlänge $\lambda = 5660$ bis 5570 mit (Tabelle XXVIII), wenn eine Erythrosinplatte benützt wurde; sie hatte das Maximum der Sensibilisirung gegen Lampenlicht bei $\lambda = 5600$.

Tabelle XXVIII.

Belichtungszeit in Minuten	Aufnahmen im kleinen Gitterspectrographen (Gaslicht)							
	mit 1 *cm* dicker Kaliumbichromatlösung (1 : 100)				ohne Lichtfilter			
	Schwärzung für die Wellenlänge							
	5660	5630	5600	5570	5660	5630	5600	5570
1	0·71	0·72	0·72	0·69	0·73	0·77	0·80	0·79
2	0·88	0·90	0·89	0·87	0·95	1·00	1·01	1·00
3	1·03	1·05	1·06	1·05	1·10	1·15	1·20	1·20
4	1·12	1·15	1·19	1·12	1·26	1·31	1·29	1·30
5	1·21	1·22	1·30	1·20	1·30	1·42	1·43	1·41
6	1·30	1·30	1·35	1·25	1·37	1·50	1·52	1·49
7	1·37	1·40	1·43	1·29	1·45	1·55	1·62	1·56
8	1·50	1·50	1·54	1·37	1·54	1·65	1·79	1·73
9	1·55	1·55	1·60	1·41	1·63	1·69	1·90	1·79
10	1·61	1·67	1·67	1·45	1·67	1·83	1·92	1·85

Ist die Correctionszahl von 1° Scheiner für den durchschnittlichen Lichtverlust durch Vorschalten der Chromatwanne gegeben, so kann man mit genügender Genauigkeit die Differenz der Gesammtempfindlichkeit einer orthochromatischen Platte (wir wollen sie *A* nennen) zwischen der Empfindlichkeit

derselben Platten mit vorgeschaltenem Lichtschirme (a) (ferner vielleicht mit der Empfindlichkeit hinter Blauscheiben etc.) ermitteln. Bei einer gewöhnlichen Platte wird a = Null sein, d. h. die Gesammtempfindlichkeit ist auf Rechnung des blauen Spectralbezirkes zu setzen. Bei einer guten orthochromatischen Platte wird a eine ansehnliche Grösse erreichen; je mehr die Sensitometerzahl für gelbe Lichtfilter (a) sich der Sensitometerzahl für die Gesammtempfindlichkeit (A) nähert, desto mehr dominirt die Farbenempfindlichkeit im Hellgrün bis Orange.[1] Die Differenz $A-a$ ist somit eine für die Beurtheilung einer orthochromatischen Platte wichtige Grösse.

Es war nun die Frage zu entscheiden, ob die 1procentige Kaliumbichromatlösung als Lichtfilter für alle Fälle genügt, oder ob die merkliche Schwächung des grünen Lichtes durch das Bichromat nicht vielleicht Störungen bei der Prüfung orthochromatischer Platten verursacht, welche das Sensibilisirungsmaximum weiter gegen Grün haben.

Die von mir angestellten Experimente zeigten, dass alle roth-, orange-, gelb- und gelbgrünempfindlichen Platten (z. B. Erythrosin) ihr Sensibilisirungsmaximum hinter 1procentiger Bichromatlösung voll zur Geltung bringen. Bei Eosinplatten, deren Sensibilisirungsmaximum weiter gegen Grün liegt und deshalb in jene Spectralregion zu liegen kommt, wo Bichromat das grüne Licht der Benzinkerze schon merklich dämpft, beeinträchtigt dieses Lichtfilter die Genauigkeit der Sensitometeranzeige (bei Monochromatlösung als Lichtfilter ist dies nicht der Fall).

Dies geht aus Tabelle XXIX deutlich hervor, in welcher meine Opacitätsmessungen einer reinen Bromsilberplatte, einer Erythrosin- und Eosinplatte mit und ohne Kaliumbichromatfilter mitgetheilt sind.

---

[1] Die Lage des Sensibilisirungsbandes ist natürlich im Spectrographen genau zu ermitteln und wird als bekannt vorausgesetzt.

Tabelle XXIX.

Secunden-Meter-Kerzen	Scheiner-Grade $1/_{3}$ *m* Lichtabstand, 1 Min. Belichtung	Reine Bromsilberplatte frei belichtet	Bromsilberplatte, gebadet mit			
			Erythrosin		Eosin und Ammoniak	
			frei belichtet	hinter 1procent. Kaliumbichromat	frei belichtet	hinter 1procent. Kaliumbichromat
0·38	15	—	0·33	—	—	—
0·48	14	—	0·36	—	—	—
0·61	13	—	0·42	0·26	—	—
0·78	12	—	0·50	0·30	—	—
0·99	11	0·27	0·64	0·34	0·28	—
1·3	10	0·30	0·81	0·41	0·33	—
1·6	9	0·33	0·97	0·52	0·39	—
2·0	8	0·40	1·29	0·65	0·46	—
2·6	7	0·50	1·54	0·82	0·57	—
3·3	6	0·64	1·82	1·00	0·71	—
4·2	5	0·75	2·09	1·21	0·87	—
5·4	4	0·89	2·42	1·47	1·09	—
6·9	3	1·09	2·7	1·74	1·31	—
8·8	2	1·25	undurchsichtig	1·98	1·55	—
11·2	1	1·42		2·25	1·79	0·26
14·3	*a*	1·52		2·5	1·93	0·29
18·2	*b*	1·65		2·8	2·10	0·30
23·2	*c*	1·75		—	2·25	0·33

Diese Tabelle zeigt, dass eine reine Bromsilberplatte bei Kerzenlicht merklich weniger empfindlich ist, als eine gut für Gelbgrün sensibilisirte Erythrosin-Badeplatte (Ammoniak-Vorbad und ammoniakalisches Erythrosinbad); die letztere

Platte weist eine dreimal grössere Lichtempfindlichkeit gegen Kerzenlicht auf, als die ursprüngliche reine Bromsilberplatte, was auch mit den Beobachtungen der photographischen Praxis vollständig übereinstimmt. Hinter einem Bichromatschirme wird die Erythrosinplatte bei Scheiner-Kerze (1 *m* Abstand, 1 Minute) eine Empfindlichkeit $A = 15°$ zeigen, dann gibt sie hinter Bichromatschirmen direct beobachtet 11° Scheiner, somit nach Vornahme der Correctur durch Addiren von 1° Scheiner die Gelbgrün-Empfindlichkeit $a = 12°$ (bis 13°) Scheiner.

Die Differenz $A—a$ ist somit bei dieser Sorte von orthochromatischen Platten = 3° Scheiner. Dieser Zahlenwerth entspricht einer guten »orthochromatischen« Wirkung der Platten, jedoch ist bei solchen Platten die Gelbgrün-Empfindlichkeit noch immer nicht hoch genug, um farbentonrichtige Aufnahmen bei Tageslicht ohne Gelbscheibe machen zu können.

Die relativ hohe Gelbgrün-Empfindlichkeit, welche durch diese Sensitometeranzeigen kund gethan wird, ist auch durch die Spectrosensitometrie (siehe Tafel XII) bestätigt; sie ist somit als zutreffend zu bezeichnen.

Weit ungünstiger steht es mit der Prüfung von Eosinplatten hinter einem Schirme von 1procentiger Kaliumbichromatlösung. Sie erscheinen hiebei sehr unempfindlich, so dass die Sensitometeranzeige hinter Bichromatschirmen nur $^1/_{14}$ der Empfindlichkeit bei freier Belichtung angibt.

Eosinplatten hinter Bichromatfilter stehen hinter Erythrosinplatten an Empfindlichkeit sogar um das 18fache zurück, d. h. erstere geben $^1/_{18}$ der Empfindlichkeit von letzteren im Sensitometer an. Diese Anzeige ist insoferne falsch, als die Spectrosensitometrie correct angibt, dass die Sensibilisirung im Grün bei Eosin circa $^1/_4$ jener beträgt, welche Erythrosin für Gelbgrün äussert. Der Grund dieser irreführenden Anzeige liegt darin, dass die Bichromatlösung das Grün der Lichtquelle zu sehr gedämpft hat.

Dies bewog mich, das Bichromatfilter für diese Proben aufzugeben und nur die 4procentige Kaliummonochromatlösung in 1 *cm* dicker Schichte zu jenen Sensitometerproben zu verwenden, bei welchen ich das Sensibilisirungsband getrennt von der Gesammtempfindlichkeit und der Blau-Empfindlichkeit

messen wollte. Prüft man Eosinplatten, Erythrosinplatten und andere weiter gegen Gelb, Orange oder Roth sensibilisirte Platten hinter diesem Monochromatfilter, so schneidet man mit genügender Präcision die Zone der Eigenempfindlichkeit des Bromsilbers (im Blauviolett) ab und kann die Empfindlichkeit des Sensibilisirungsbandes ohne störende Nebeneinflüsse messen.

Die mit Benützung der Kaliummonochromatwanne gewonnenen Sensitometerresultate stimmen mit den Ergebnissen praktischer photographischer Expositionsversuche, sowie der Spectrosensitometrie befriedigend überein.

Dies zeigen nachfolgende Versuche.

Tabelle XXX.

Secunden-Meter-Kerzen	Scheiner-Grade 1/3 *m* Lichtabstand, 1 Minute Belichtung	Reine Bromsilberplatte I	Gute Erythrosinplatte des Handels	
			frei belichtet II	hinter 4procent. Kaliummonochromat III
0·38	15	—	0·36	—
0·48	14	—	0·41	0·35
0·61	13	—	0·44	0·37
0·78	12	—	0·52	0·42
0·99	11	0·31	0·55	0·48
1·3	10	0·35	0·61	0·55
1·6	9	0·40	0·69	0·63
2·0	8	0·45	0·75	0·70
2·6	7	0·53	0·85	0·77
3·3	6	0·65	0·97	0·85
4·2	5	0·75	1·05	0·91
5·4	4	0·85	1·16	1·04
6·9	3	0·94	1·27	1·14
8·8	2	1·07	1·33	1·25
11·2	1	1·15	1·36	1·32
14·3	*a*	1·21	1·40	1·37
18·2	*b*	1·30	1·44	1·39
23·2	*c*	1·40	1·45	1·42

Corrigirt man die Rubrik III (Tabelle XXX) durch Addiren von 1° Scheiner, so ergibt sich, dass die sensitometrische Anzeige hinter Monochromat um 1° Scheiner oder sogar etwas weniger hinter der Sensitometeranzeige bei frei einstrahlendem Benzinkerzenlicht zurückbleibt. Das ist ein Kriterium für die hohe Sensibilisirungswirkung des angewendeten Farbstoffes für die weniger brechbaren Strahlen (in diesem Falle gelbgrün).

Tabelle XXXI.

Secunden-Meter-Kerzen	Scheiner-Grade 1/3 m Lichtabstand, 1 Minute Belichtung	Reine Bromsilberplatte I	Eosin-Badeplatte mit Ammoniak	
			frei belichtet II	hinter 4procent. Kaliummonochromat III
0·610	13	0·40	0·38	—
0·779	12	0·44	0·40	—
0·994	11	0·47	0·45	—
1·263	10	0·54	0·48	—
1·604	9	0·65	0·52	—
2·046	8	0·74	0·58	—
2·614	7	0·83	0·68	—
3·3	6	0·93	0·81	0·36
4·2	5	1·03	0·97	0·40
5·4	4	1·10	1·08	0·49
6·9	3	1·21	1·19	0·52
8·8	2	1·35	1·30	0·60
11·2	1	1·47	1·40	0·66
14·3	*a*	1·50	1·46	0·74
18·2	*b*	1·55	1·53	0·80
23·2	*c*	1·63	1·61	0·86

Die Erythrosinplatten geben hinter Monochromatfilter nahezu dieselbe Sensitometeranzeige als hinter Bichromatfilter, somit kann man auch für diese und andere gelbgrün-, gelb-, orange- oder rothempfindliche Platten bei der Verwendung der 4procentigen Kaliummonochromatlösung in 1*cm* dicker Schichte (mit Correctur von +1° Scheiner) bleiben.

Bei praktisch verwendeten Rothsensibilisatoren, wie Nigrosin, Diazoschwarz, Wollschwarz (siehe E. Valenta, Phot. Corresp., 1898 und 1899) ergibt sich eine Differenz von $A - a = 5$ bis 13° Scheiner.

Bei mittlerem Sensibilisirungseffect ist die Differenz $A-a = 2-3°$ Scheiner in beiden Fällen. In besonders günstigen Fällen fand ich sogar die Differenz $A-a$ noch kleiner, nämlich 1—2° Scheiner, ja bei Erythrosinsilberplatten ist die Gelbgrün-Empfindlichkeit mitunter so hoch und die Blau-Empfindlichkeit so gedrückt (namentlich wenn gelbe Farbstoffe der Emulsion selbst beigemischt werden, was bei gewissen Handelssorten von orthochromatischen Platten geschieht), dass die Empfindlichkeit mit und ohne Monochromat-Lichtfilter nahezu dieselbe Sensitometeranzeige (Differenz kaum $^1/_2$° Scheiner) geben.

Aus diesen Tabellen XXIX, XXX und XXXI kann man ferner entnehmen, dass die Gradation der reinen Bromsilberplatte und der von derselben Musteremulsion hergestellten Erythrosinplatte annähernd übereinstimmt, während die Eosinplatte etwas härter arbeitete; erst bei starken Lichtintensitäten wächst die Intensität des Sensibilisirungsbandes bei Eosin (übrigens auch bei Erythrosinplatten) bedeutend (siehe Tabelle XXX).

Eosin-Badeplatten (mit Ammoniakzusatz) geben bei der Prüfung hinter 4procentigem Monochromat (siehe Tabelle XXXI) eine Sensitometerdifferenz $A-a = 6°$ bis 7° Scheiner, was auf eine mittelmässige Grün-Sensibilisirung deutet. Der Vergleich von Eosin- und Erythrosinplatten hinter Monochromatfilter im Scheiner-Sensitometer ergibt das richtige Empfindlichkeitsverhältniss von 1:4 oder 1:5, welches die Spectralsensitometrie und die praktische Photographie nachweist; die Correctheit der Anzeige der Sensitometerprobe hinter dem Monochromatfilter ist somit befriedigend.

Eine entsprechende Ergänzung liefert die Sensitometrie hinter Blau-Filter von Kupferoxydammoniak-Lösung (3 *g* Kupfervitriol, 100 cm^3 Wasser nebst Ammoniak, in 1 *cm* dicker Schichte), welche ziemlich genau jenen Spectralbezirk durchlässt, welcher die Eigenempfindlichkeit der Bromsilbergelatine im Blauviolett dominirend beeinflusst. Der Lichtverbrauch in diesem Blaufilter beträgt für gewöhnliche Bromsilbergelatineplatten annähernd 3° Scheiner, um welche Zahl die Sensitometeranzeige (analog wie beim Chromatfilter) corrigirt werden kann, wenn man die Anzeige auf frei einstrahlendes Benzinlicht reduciren will.

Die von mir empfohlene sensitometrische Probe von orthochromatischen Platten mit und ohne Monochromatfilter, sowie eventuell mit Blaufiltern und dgl. ist zur Orientirung für ihre charakteristischen Eigenschaften somit geeignet. Die auf diese Weise innerhalb des Rahmens der gewöhnlichen Sensitometrie erhaltenen Angaben gestatten allerdings nur eine annähernde, keineswegs genaue Beurtheilung. Die Schwierigkeit besteht darin, dass die Gradation der orthochromatischen Platten mit und ohne gelben Lichtfilter nicht immer parallel geht, dass die Anfangswirkung der Belichtung bei verschiedenen orthochromatischen Platten je nach der Natur des Farbstoffes verschieden ist und dass bei geringer Lichtintensität Farbensensibilisatoren sehr geringe Wirkung zeigen, welche bei intensiver Anfangswirkung des Lichtes recht gut entsprechen. Deshalb kann man den Effect der Lichtwirkung für freies Kerzenlicht und solches hinter gelben Wannen nicht kurzweg eindeutig durch eine bestimmte Anzahl von Sensitometergraden ausdrücken. Für genauere Angaben wird die Construction der charakteristischen Curve der Platte mit und ohne Gelb-Wanne bei verschiedenen Lichtintensitäten unerlässlich sein und es sind die hiezu nöthigen Opacitätsmessungen nothwendig. Je mehr sich die Sensibilisirungszone sensitometrisch dem Verhalten der ursprünglichen Bromsilbergelatine nähert, umso leichter wird die Herstellung correcter Negative mit und ohne Farbenfilter gelingen. Bei Prüfung der Wirkungsweise von Sensibilisatoren wird sich die Angabe der gleichzeitig belichteten und entwickelten Mutteremulsion als nützlich erweisen.

Das hier in seinen verschiedenen Consequenzen beschriebene und begründete Sensitometersystem, welches vom Scheiner'schen Sensitometer ausgeht, liegt nunmehr in einer so bequem und sicher zu handhabenden Form vor, dass die Prüfung der Empfindlichkeit von photographischen Platten aller Art, die Wirkung von Sensibilisatoren, Entwicklersubstanzen, Verstärkern, Abschwächern etc. eine wesentliche Förderung erfährt.

Über das Verhalten der Flüssigkeiten im magnetischen Felde

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger**.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

Über obiges Thema existirt eine ausführliche Abhandlung von P. Duhem.[1] Die allgemeinen Formeln, welche er ableitet, bezieht er auf den speciellen Fall, dass sich eine Lösung einer magnetischen Substanz in einem Lösungsmittel von verschwindender Magnetisirungszahl befindet. Seine Resultate können jedoch nur für sehr verdünnte Lösungen als richtig angesehen werden, indem er in dem Gesetz von G. Wiedemann, dass die Magnetisirungszahl einer magnetischen gelösten Substanz proportional der Concentration gesetzt werden kann, die Concentration als das Verhältniss der Gewichtszahl des Gelösten zu jener des Lösungsmittels annimmt, was aus der Formel

$$d\mu = \frac{1}{1+s}\rho(s)\,dv_2\,^{2}$$

hervorgeht. Hier bezeichnet μ die Masse des Lösungsmittels, $\rho(s)$ die Dichte, v_2 das Volumen der Lösung und s die Concentration. Setzen wir nämlich $s = \frac{c}{c'}$, wobei c und c' die Gewichtszahlen des Gelösten, beziehungsweise des Lösungsmittels sind,

---

[1] Sur les dissolutions d'un sel magnétique, Ann. de l'école normal (3). t. 7 (1890), p. 289.

[2] l. c., p. 306.

so würde sich die Masse der Volumseinheit des Lösungsmittels darstellen durch

$$\mu = \rho(s)\frac{c'}{c'+c} = \frac{1}{1+\frac{c}{c'}}\rho(s) = \frac{1}{1+s}\rho(s),$$

was zu der obigen Gleichung führt. Das Wiedemann'sche Gesetz setzt aber voraus, dass man unter der Concentration die in der Volumseinheit erhaltene Grammzahl der gelösten Substanz versteht, was für die Masse des Lösungsmittels zur Formel führen würde:

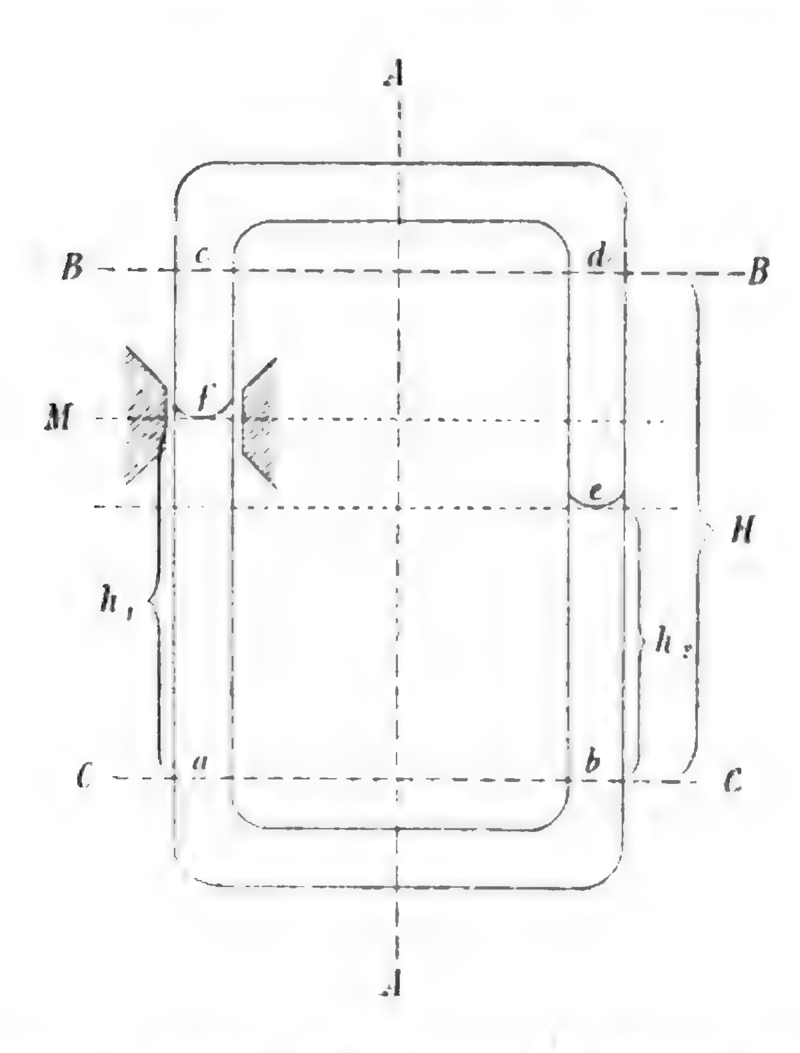
$$\mu = \rho(s) - s.$$

Wir können daher für concentrirtere Lösungen — und nur solche sind dem Experimente einigermassen zugänglich — die Duhem'schen Formeln, soweit sie sich auf quantitative Messungen beziehen, nicht mehr gebrauchen. Es schien mir daher angezeigt, eine Betrachtungsweise anzuwenden, welche auch die Eigenschaften der concentrirten Lösungen erkennen lässt.

Durch folgende, bei analogen Untersuchungen schon häufig benützte Überlegung[1] können wir uns den Einfluss eines magnetischen Feldes auf verschiedene Eigenschaften der Flüssigkeiten und Lösungen anschaulich machen. Ein rechteckiges, in sich geschlossenes Rohr stehe mit seinen längeren Seiten vertical und sei zum Theile mit einer Flüssigkeit gefüllt; der darüber befindliche Raum enthalte bloss deren gesättigten Dampf (siehe Figur). Den einen Flüssigkeitsmeniscus bringen wir in ein magnetisches Feld M, dessen Intensität in den Horizontalebenen B und C schon als verschwindend angesehen werden kann. Es ist dann bezüglich der Ebene A sowohl unterhalb C als oberhalb B alles symmetrisch. Daher muss im Falle des Gleichgewichtes der Flüssigkeitsdruck in der Ebene C links und rechts derselbe sein und ebenso der Dampfdruck in der Ebene B. Haben wir es mit einer paramagnetischen Flüssigkeit zu thun, so wird die Höhe h_1 der Flüssigkeitssäule, welche im Magnetfelde endet, grösser sein als die Höhe h_2 der ausser-

[1] S. auch J. Königsberger, Wied. Ann., 66, S. 709.

halb des Magnetfeldes stehenden Flüssigkeitssäule. Der Druck in a setzt sich aus folgenden Theildrucken zusammen: 1. aus dem hydrostatischen Druck $h_1 gs$, wobei wir mit s die Dichte der Flüssigkeit bezeichnen; 2. aus dem Gliede $-\frac{kM^2}{2}$; dieses entspricht dem magnetischen Zug, den die Flüssigkeit durch



das magnetische Feld von der Intensität M erleidet, wenn k die Magnetisirungszahl der Flüssigkeit ist; 3. aus $\frac{\varkappa M^2}{2}$, d. h. aus dem magnetischen Zug auf den gesättigten Dampf, dessen Magnetisirungszahl wir $\varkappa$ nennen; 4. aus $(H-h_1)g\sigma$, wenn H die Entfernung der Ebenen B und C, und σ die Dichte des Dampfes ist; 5. aus dem Druck p des gesättigten Dampfes in der Ebene B. Der Gesammtdruck in a ist somit

$$P = h_1 gs - \frac{kM^2}{2} + \frac{\varkappa M^2}{2} + (H-h_1)g\sigma + p; \qquad 1)$$

analog erhalten wir für den Druck in b:

$$P' = h_2 gs + (H - h_2) g\sigma + p. \qquad 2)$$

Da für den Fall des Gleichgewichtes der Druck in a und b derselbe, d. h. $P = P'$ sein muss, so folgt aus den Gleichungen 1) und 2):

$$g(h_1 - h_2)(s - \sigma) = (k - \varkappa) \frac{M^2}{2}. \qquad 3)$$

Da constante Temperatur auch constante Dampfspannung voraussetzt, so wäre bei verschiedener Höhe der Menisken f und c das Gleichgewicht gestört, indem wir in der Höhe h_1 rechts eine geringere Dampfspannung hätten als in der Höhe links. Durch den magnetischen Zug, den der Dampf links erfährt, muss somit das Gleichgewicht hergestellt werden. Um dieselbe Grösse, um welche der Dampfdruck rechts von der Höhe h_1 bis zur Höhe h_2 zunimmt, muss demnach links der Dampfdruck durch den magnetischen Zug wachsen. Unterhalb der Höhe h_1 haben wir rechts die Dampfsäule von der Höhe $h_1 - h_2$, welche einen Druck $(h_1 - h_2) g\sigma$ ausübt. Dieser Druck muss demnach gleich sein dem magnetischen Zuge links; es folgt somit für den Gleichgewichtszustand

$$(h_1 - h_2) g\sigma = \frac{\varkappa M^2}{2}. \qquad 4)$$

Daraus ergibt sich unmittelbar aus Gleichung 3)

$$(h_1 - h_2) gs = \frac{kM^2}{2}, \qquad 5)$$

und bei der Division der Gleichung 4) durch 5)

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{\varkappa}{k}. \qquad 6)$$

Diese Gleichung besagt, dass sich die Magnetisirungszahl des gesättigten Dampfes zu jener der zugehörigen Flüssigkeit wie die Dampfdichte zur Flüssigkeitsdichte verhält. Wir sind somit in der Lage, aus der verhältnissmässig leicht bestimm-

baren Magnetisirungszahl einer Flüssigkeit die experimentell schwierig zu ermittelnde magnetische Susceptibilität des Dampfes zu berechnen. Allerdings haben wir bei dieser Überlegung vorausgesetzt, dass sich jene Eigenschaften der Flüssigkeit, welche auf die Dampfspannung von Einfluss sind, im magnetischen Felde nicht ändern. Würde z. B. die Capillaritätsconstante einer Flüssigkeit durch das magnetische Feld beeinflusst, so würde damit Hand in Hand eine Beeinflussung des Dampfdruckes erfolgen. Es lag daher nahe, zu untersuchen, ob eine durch das magnetische Feld hervorgerufene, nachweisbare Änderung der Capillaritätsconstante vorhanden ist.

Zu diesem Zwecke untersuchte ich mit meinem, in diesen Sitzungsberichten, mathem.-naturw. Classe, Bd. C, Abth. II a, 1891, S. 246 ff. beschriebenen Apparate, der gerade für die Messung der Änderung der Capillaritätsconstante besonders empfindlich ist, die Flüssigkeiten Wasser, Alkohol, Äther, Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Aceton, Eisenchlorid-, Manganchlorid- und Nickelchloridlösung in einem magnetischen Felde von circa 18000 absoluten Einheiten, ohne jedoch auch nur den geringsten Einfluss des magnetischen Feldes auf die Capillaritätsconstante feststellen zu können, so dass wir die Gleichung 6) als giltig annehmen können.

Anders gestaltet sich die Sache bei Lösungen, zumal wenn wir voraussetzen, dass die Magnetisirungszahl der gelösten Substanz sehr gross ist gegenüber jener des Lösungsmittels. Ferner sei die gelöste Substanz nicht flüchtig, so dass wir annehmen können, über der Lösung befinde sich nur der Dampf des Lösungsmittels. Betrachten wir wieder die eingangs erwähnte Anordnung, so zeigt sich sofort, dass das Gleichgewicht gestört ist, indem jetzt die Verhältnisse $\frac{\sigma}{s}$ und $\frac{\varkappa}{k}$ nicht mehr gleich sind. Dies besagt, dass wir es nicht mit einem stabilen Zustand zu thun haben.

Setzen wir voraus, die gelöste Substanz sei stark paramagnetisch, so muss der Höhenunterschied $h_1 - h_2$ so gross werden, dass wir gegenüber dem Drucke $(h_1 - h_2)g\sigma$ den magnetischen Zug, welcher auf den Dampf ausgeübt wird, vernachlässigen können. Daraus folgt, dass die Dampfspannung

in e nicht mehr jene in f sein kann, was wieder nur möglich ist, wenn Concentrationsänderungen der Lösung eintreten. Für den Fall des Gleichgewichtes muss dann die Dampfspannung in f um $(h_1-h_2)g\sigma$ kleiner sein als in e, d. h. die Concentration in f muss derart wachsen, dass eine entsprechende Dampfdruckerniedrigung eintritt, woraus sich unmittelbar ergibt, dass die Concentrationsänderung proportional dem Quadrate des magnetischen Feldes sein muss; ist das Gelöste paramagnetisch, so muss es gegen Stellen stärkerer Feldintensität wandern, ist es diamagnetisch, so tritt das Gegentheil ein. Zu diesem Resultate gelangte schon Duhem, welcher es folgendermassen formulirte: Die Stellen grösserer magnetischer Intensität zeigen die grössere Concentration, und die Flächen gleicher Concentration fallen mit den Flächen gleicher Feldintensität zusammen.[1] Haben wir somit ein Rohr mit einer derartigen Lösung gefüllt und bringen das eine Ende in ein magnetisches Feld, so tritt eine Wanderung des Salzes ein, gerade so, als wäre das magnetische Feld nicht vorhanden, die Enden des Rohres aber auf verschiedener Concentration. Bei der Wanderung eines gelösten Elektrolyten in Folge Concentrationsunterschieden zeigt es sich nun, dass die Ionen mit verschiedener Geschwindigkeit wandern müssen und dadurch einen elektrischen Strom erzeugen. Umgekehrt müssen wir schliessen, dass, wenn eine ursprünglich homogene Lösung zum Theil in ein magnetisches Feld gebracht wird, in Folge der Wanderung der gelösten Substanz ebenfalls eine Trennung der Ionen erfolgen, somit zwischen verschiedenen Theilen der Lösung eine elektromotorische Kraft entstehen muss. Denken wir uns demnach folgende Anordnung realisirt. Ein Glasrohr von genügender Länge enthält an beiden Enden eingeschmolzene Platinelektroden und sei mit der Lösung eines magnetischen Salzes gefüllt. Von den Elektroden führe eine Leitung zu einem sehr empfindlichen Galvanometer. Bringen wir das eine Ende des Rohres in ein magnetisches Feld, so muss, falls keine sonstigen Störungen vorliegen, das Galvanometer den dadurch entstehenden Strom anzeigen.

[1] L. c., p. 314.

Wir wollen uns im Folgenden eine Vorstellung von der Grösse der dabei auftretenden elektromotorischen Kraft machen. Doch müssen wir von vorneherein in unserer Betrachtungsweise darin einen Unterschied machen, ob angenommen werden kann, die magnetische Kraft wirke gleichmässig auf den ganzen Elektrolyten oder verschieden auf die verschiedenen Ionen, dass z. B. in einer Eisenchloridlösung die magnetische Kraft auf die Eisen-Ionen überwiegend gross sei gegenüber jener auf die Chlor-Ionen, oder dass sich die magnetische Kraft auf das Chlorid zwischen Eisen- und Chlor-Ionen gleichmässig vertheilt. Die Dissociationstheorie würde für die erstere Ansicht sprechen, die Beobachtungen an Lösungen jedoch, dass deren Magnetisirungszahl von der Dissociation unabhängig ist, spräche für die letztere.

Wandert das Anion mit der Geschwindigkeit u, das Kation mit der Geschwindigkeit v, so erhalten wir nach der Nernstschen Theorie[1] eine Potentialdifferenz zwischen zwei an eineinander grenzenden Lösungen des gleichen, aus zwei einwerthigen Ionen bestehenden Elektrolyten

$$P_1 - P_2 = \frac{u-v}{u+v} RTln \frac{c_2}{c_1}, \qquad 7)$$

wobei R die Gasconstante, T die absolute Temperatur, c_1 und c_2 die Concentrationen des Elektrolyten bedeuten. Wir sehen daraus, dass je nach der früher erwähnten Auffassungsweise für die Potentialdifferenz verschiedene Werthe resultiren müssen. Würden wir z. B. annehmen, dass in einer Eisenchloridlösung das Eisen gegenüber dem Chlor eine überwiegend grosse Anziehungskraft seitens des magnetischen Feldes erfährt, so könnten wir die Geschwindigkeit u des Chlors gegen jene v des Eisens vernachlässigen, und es würde die Potentialdifferenz

$$P_1 - P_2 = -RTln \frac{c_2}{c_1};$$

würde die andere Auffassungsweise gelten, so wäre $\frac{u-v}{u+v}$ an Stelle von -1 zu setzen, d. h. wir hätten eine geringere und

[1] S. Theoretische Chemie, S. 659.

ausserdem, da die Geschwindigkeit des Chlors grösser ist als die des Eisens, eine entgegengesetzt gerichtete elektromotorische Kraft.

Bringen wir, wie schon früher erwähnt, das eine Ende unserer anfänglich homogenen Lösung ins magnetische Feld, so tritt eine Wanderung der Ionen ein, und zwar für ein paramagnetisches Salz gegen das Feld. Dadurch wird dieses Ende concentrirter, was zur Ursache einer Gegenkraft auf den Elektrolyten wird. Ist schliesslich diese Gegenkraft der von dem magnetischen Felde geäusserten Kraft gleich geworden, so hört die Wanderung auf; die Lösung befindet sich im Gleichgewicht. Vernichten wir nun das magnetische Feld, so wird der Elektrolyt vom concentrirteren zum verdünnteren Ende wandern unter dem Einflusse einer Kraft, welche dem Concentrationsunterschiede proportional ist. Da diese Kraft aber anfänglich gleich ist dem Einflusse des magnetischen Feldes, so muss die Wirkung des Magnetismus auf den Elektrolyten in der homogenen Lösung ebenso gross sein, wobei wir allerdings die gerechtfertigte Voraussetzung machen, dass die auftretenden Concentrationsänderungen gegenüber der vorhandenen Concentration als verschwindend klein angesehen werden können. Diese Überlegung ermöglicht es uns, in die Gleichung 7) den dem Unterschiede der Concentrationen $\frac{c_2}{c_1}$ entsprechenden Werth einzuführen.

Der Elektrolyt stehe unter dem osmotischen Druck p. Bringen wir das eine Ende des Elektrolyts in's magnetische Feld, so hat das die Wirkung, als würde dort der osmotische Druck um den magnetischen Zug $\frac{kM^2}{2} = \mu$ verringert. Das Verhältniss $\frac{p}{p-\mu}$ entspricht demnach dem Verhältniss $\frac{c_2}{c_1}$, womit uns die auftretende elektromotorische Kraft je nach der oben erläuterten Anschauungsweise durch

$$P_1 - P_2 = \frac{u-v}{u+v} RT l n \frac{p}{p-\mu} = \frac{u-v}{u+v} RT \frac{\mu}{p} \qquad 8)$$

oder durch

$$P_1 - P_2 = -RT\frac{\mu}{p} \tag{8a}$$

gegeben ist.

Wir können die Grösse der Potentialdifferenz $P_1 - P_2$ noch auf einem anderen Wege kennen lernen, wenn wir von dem nothwendigen Gleichgewichte der Dampfspannungen über den Menisken f und c (siehe Figur) auf die zugehörigen Concentrationen schliessen. Vorerst ist, wie bereits gezeigt, klar, dass unter der Voraussetzung eines paramagnetischen Salzes die Concentration der Lösung unter dem Meniskus f grösser sein muss als unter c. Demzufolge haben wir in f eine geringere Dampfspannung als in c. Wäre demnach ohne Einwirkung des Magnetismus die Dampfspannung in $c = d_1$, in $f = d_2$, und sind nach Herstellung des magnetischen Feldes die Meniskenhöhen wieder h_1 und h_2, so gilt die Gleichung

$$d_1 - d_2 = (h_1 - h_2) g \sigma. \tag{9}$$

Den Werth von $\frac{c_2}{c_1}$ können wir nun leicht auf folgende Weise finden: Es sei D die Dampfspannung des Lösungsmittels, d jene der Lösung, dann gilt für eine verdünnte Lösung von der Concentration c_1 die Gleichung

$$\frac{D - d_1}{D} = \gamma c_1,$$

wobei γ ein constanter Factor der Concentration ist; für eine zweite Lösung von der Concentration c_2 gilt analog

$$\frac{D - d_2}{D} = \gamma c_2;$$

durch Division der einen Gleichung durch die andere erhalten wir

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{D - d_2}{D - d_1} = 1 + \frac{d_1 - d_2}{D - d_1} = 1 + \frac{d_1 - d_2}{\gamma c_1 D},$$

und mit Zuhilfenahme von 9):

$$\frac{c_2}{c_1} = 1 + \frac{(h_1 - h_2) g \sigma}{\gamma c_1 D},$$

woraus folgt:

$$l n \frac{c_2}{c_1} = \frac{(h_1 - h_2) g \sigma}{\gamma c_1 D} = \frac{\mu \sigma}{\gamma c_1 D s}$$

(siehe Gleichung 5).

Wir erhalten somit für die Potentialdifferenz nach den obigen Bemerkungen entweder

$$P_1 - P_2 = \frac{u-v}{u+v} R T \frac{\mu \sigma}{\gamma c_1 D s} \qquad 10)$$

oder

$$P_1 - P_2 = - R T \frac{\mu \sigma}{\gamma c_1 D s}. \qquad 10a)$$

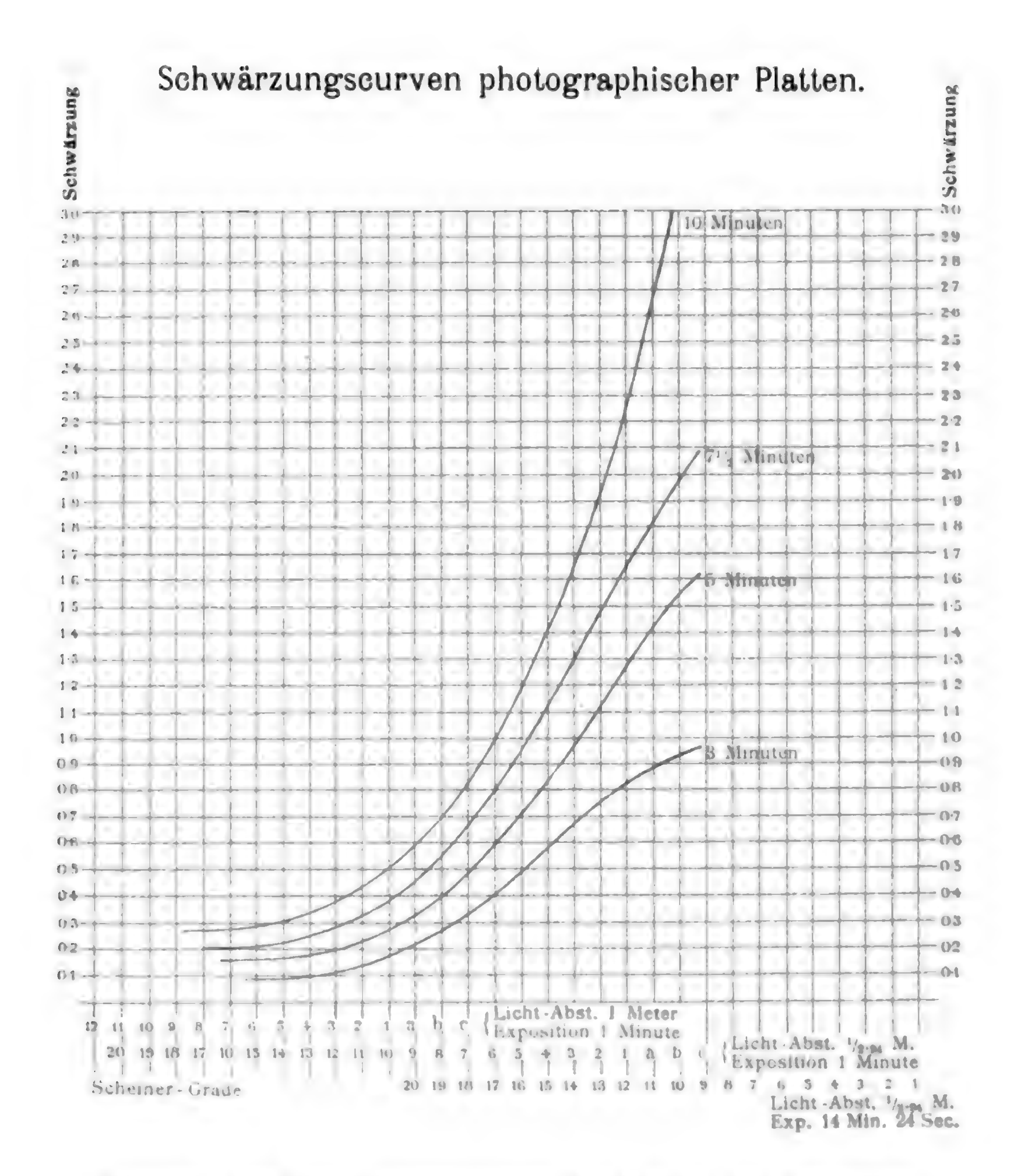
In den Gleichungen 8) und 10), bezüglich 8 *a*) und 10 *a*) sind alle Grössen auf der rechten Seite der Beobachtung zugänglich. Wir sind somit in der Lage, die Grösse von $P_1 - P_2$ zu bestimmen. Wir wollen dies für den Fall thun, dass sich 1·6 Gramm-Moleküle Mangansulfat in einem Liter Wasser befinden. Diese Lösung erfährt in einem magnetischen Felde von circa 18000 absoluten Einheiten einen Höhenunterschied $h_1 - h_2 = 2 \cdot 4\, cm$; ihre Dichte ist $s = 1 \cdot 22$; daraus berechnet sich $\mu = 2 \cdot 93\, g$. Der osmotische Druck liegt zwischen 37000 *g* und 74000 *g*, je nachdem wir keine oder vollständige Dissociation annehmen. Geben wir die Potentialdifferenz in Volt an, so wird $R = 0 \cdot 861 . 10^{-4}$ [1], die absolute Temperatur T können wir 293 setzen. Daraus folgt, dass nach Gleichung 8 *a*) $P_1 - P_2$ zwischen 1 und ½ Milliontel Volt liegt. Gilt jedoch die Gleichung 8), so kehrt sich nicht nur die Richtung der elektromotorischen Kraft um, sondern sie muss auch bei weitem kleiner werden, da die Versuche ergaben, dass die Geschwindigkeiten der Mn- und SO_4-Jonen wenig von einander verschieden sind.

Benützen wir für unsere Rechnung die Formel 10 *a*), so haben wir für Wasserdampf rund $\frac{D}{\sigma} = 10^6 g$; die Concentration der Lösung c_1 ist 1·6; γ wird für Wasser 0·0185, wenn wir die Concentration durch die Zahl der Gramm-Moleküle im Liter

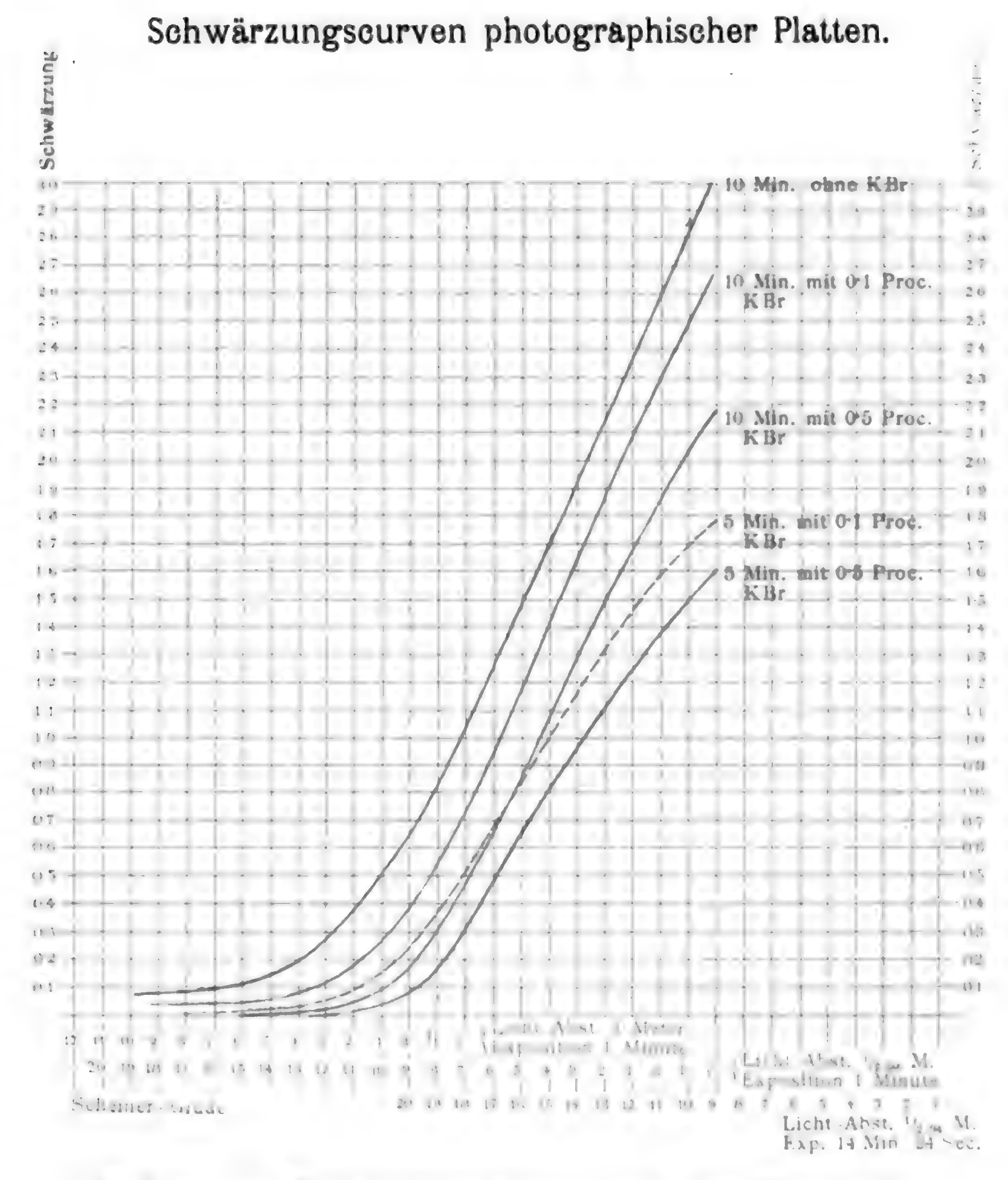
[1] S. Nernst, Theoret. Chemie, S. 661.

bestimmen. Auch diese Zahlen ergeben, wie oben, für $P_1 - P_2$ einen Werth, der zwischen 1 und $^1/_2$ Milliontel Volt liegt; die Rechnung liefert also vollständige Übereinstimmung. Nach der Formel 10) würde natürlich wieder ein bedeutend kleinerer Werth folgen.

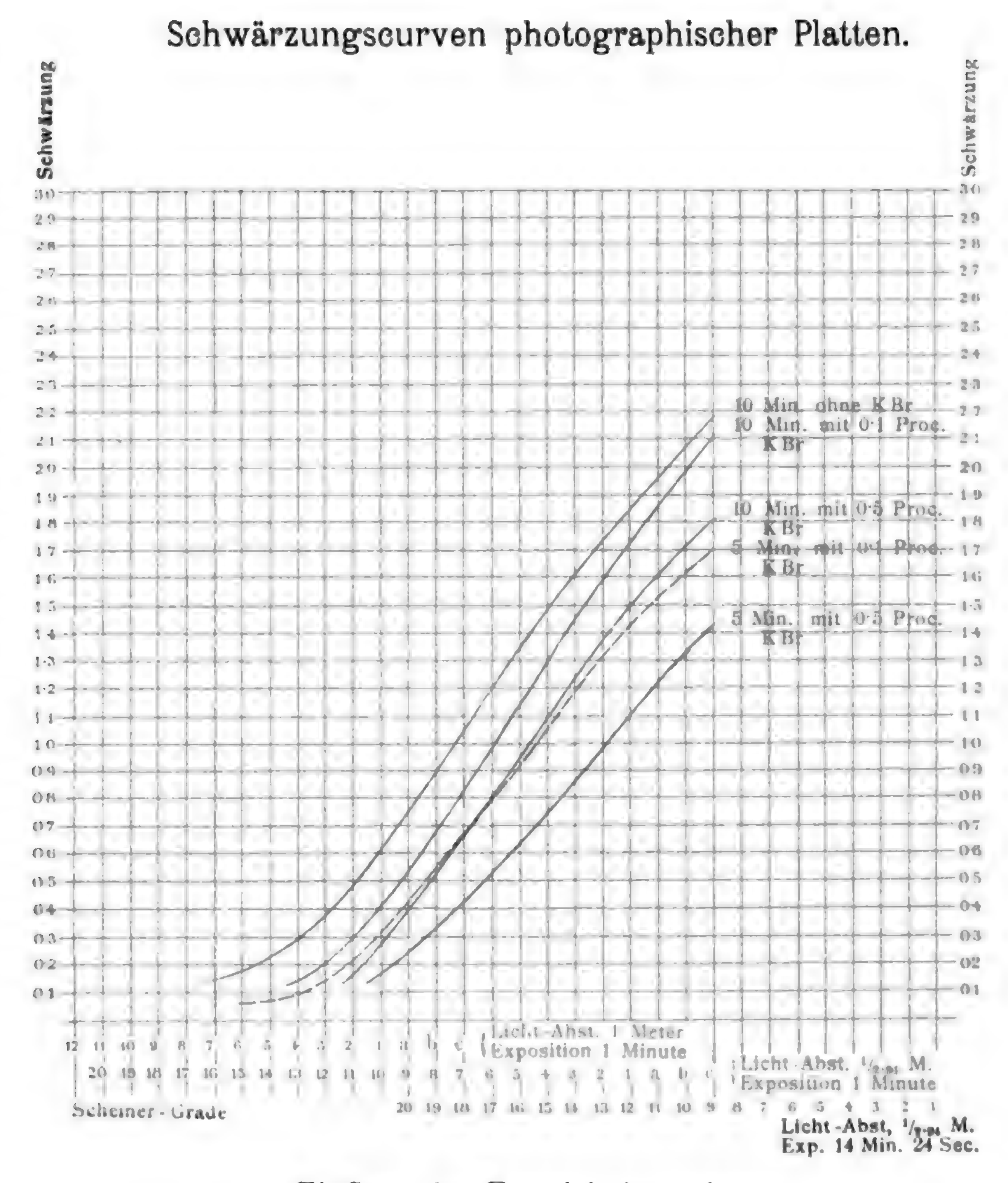
Nach der bereits früher beschriebenen Anordnung müssten wir einen elektrischen Strom erhalten, welcher direct von dieser elektromotorischen Kraft erzeugt wird, da wir an den beiden Platinelektroden Lösung von gleicher Concentration haben, so dass diese auf die elektromotorische Kraft keinen Einfluss übt. Ein Strom, den die elektromotorische Kraft von 10^{-6} Volt erzeugt, lässt sich, wenn der Gesammtwiderstand über 1000 Ω nicht hinausgeht, in einem D'Arsonval'schen Galvanometer noch deutlich nachweisen. Es lag daher nahe, zu untersuchen, ob der oben erwähnte Strom auch thatsächlich vorhanden ist. Ich erhielt auf diese Weise einen noch gerade merkbaren Ausschlag, welcher jedoch sich dadurch verstärken liess, dass ich sieben gleichartig gebaute Röhren mit dem einen Ende ins magnetische Feld brachte und sie derart schaltete, dass sie die grösste Stromstärke ergaben. Auf diese Weise erhielt ich einen mehr als einen halben Theilstrich der Scala betragenden Ausschlag. Dieser Ausschlag zeigte aber nicht jene Stromrichtung an, welche aus den Gleichungen 8a) und 10a) folgen würde, sondern die entgegengesetzte. Es könnte daraus gefolgert werden, dass die Gleichungen 8) und 10) die richtigen sind. Aber dafür war der Ausschlag wieder viel zu gross. Es scheint daher, dass die Platinelektroden im magnetischen Felde eine Änderung erleiden, oder dass sonst eine nicht erkennbare Störung mit unterlief; denn als die Mangansulfatlösung durch verdünnte Schwefelsäure ersetzt wurde, ergab sich beim Einschalten des Magnetes sogar ein noch grösserer Ausschlag als früher. Es ist somit der Versuch nicht beweiskräftig. Doch dürfte man mit empfindlicheren Galvanometern, die dann freilich sehr entfernt vom Magnet aufzustellen wären, . Frage lösen können. Zu einer derartigen Untersuchung stehen mir jedoch die nöthigen Räumlichkeiten nicht zur Verfügung.



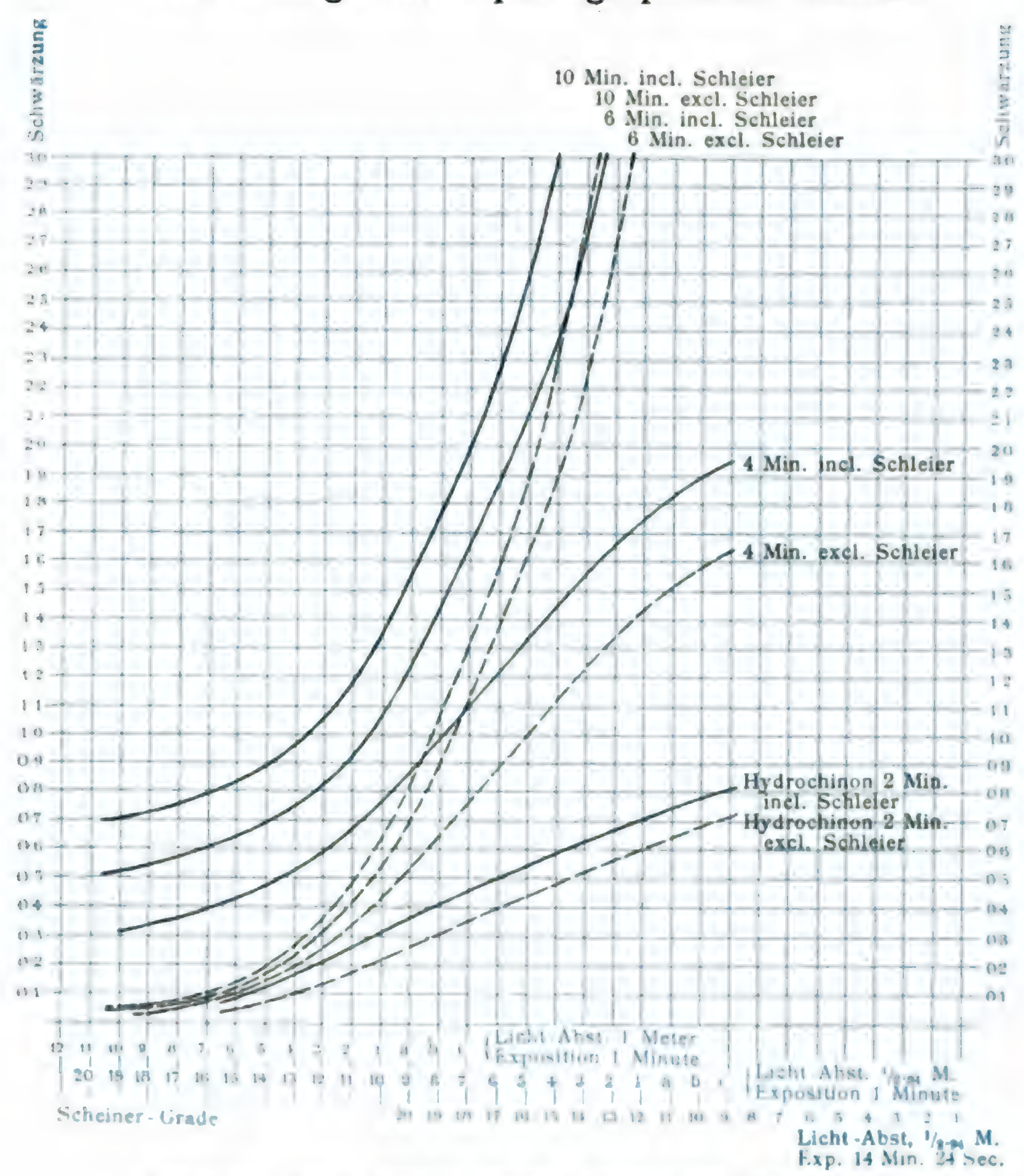
Einfluss der Entwickelungsdauer bei Oxalat auf Gradation und Dichte einer Schattera-Platte.



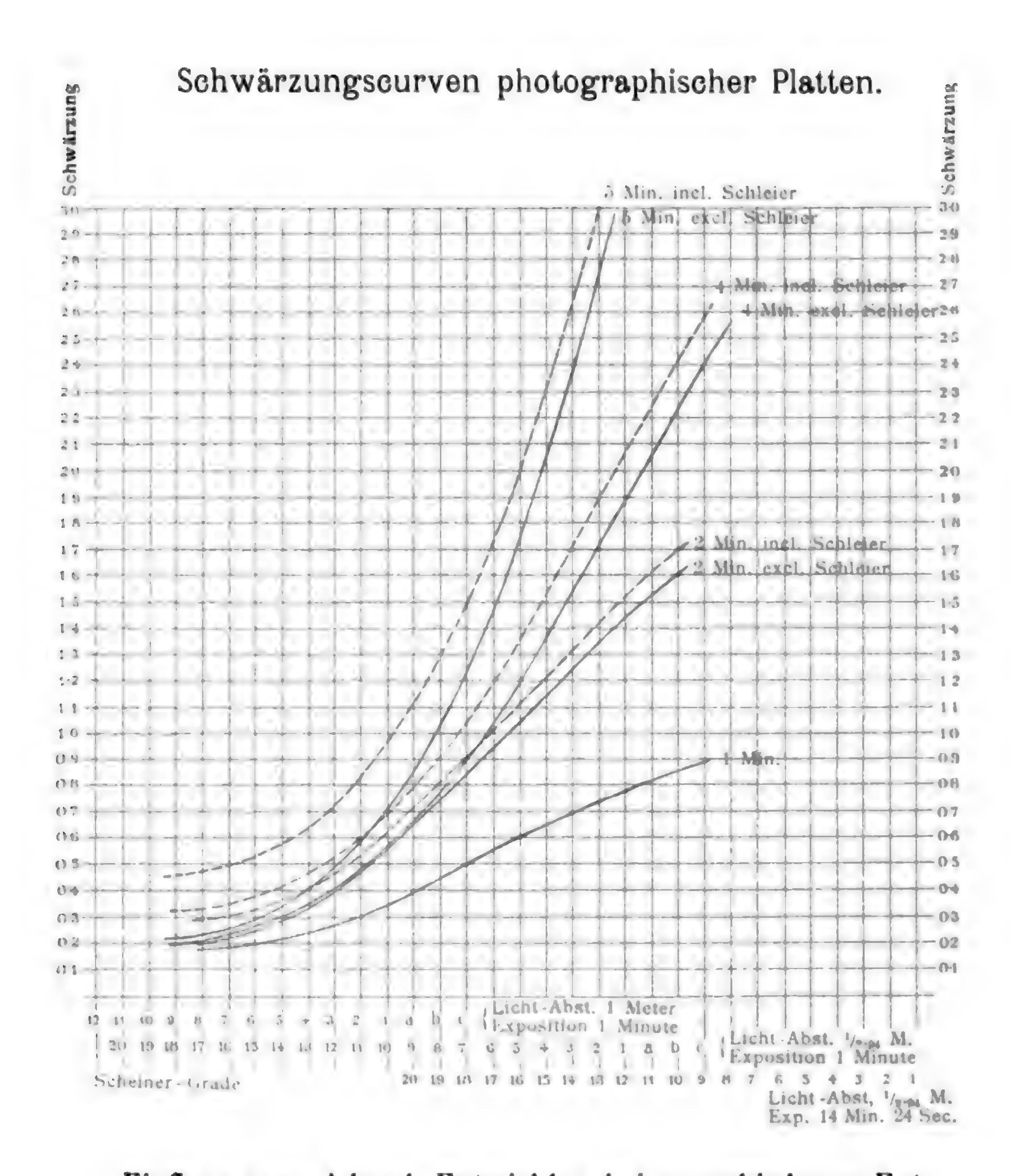
Einfluss der Entwickelungsdauer und des Bromkalium-Zusatzes bei Oxalat-Entwickelung auf Schleussner-Platten.



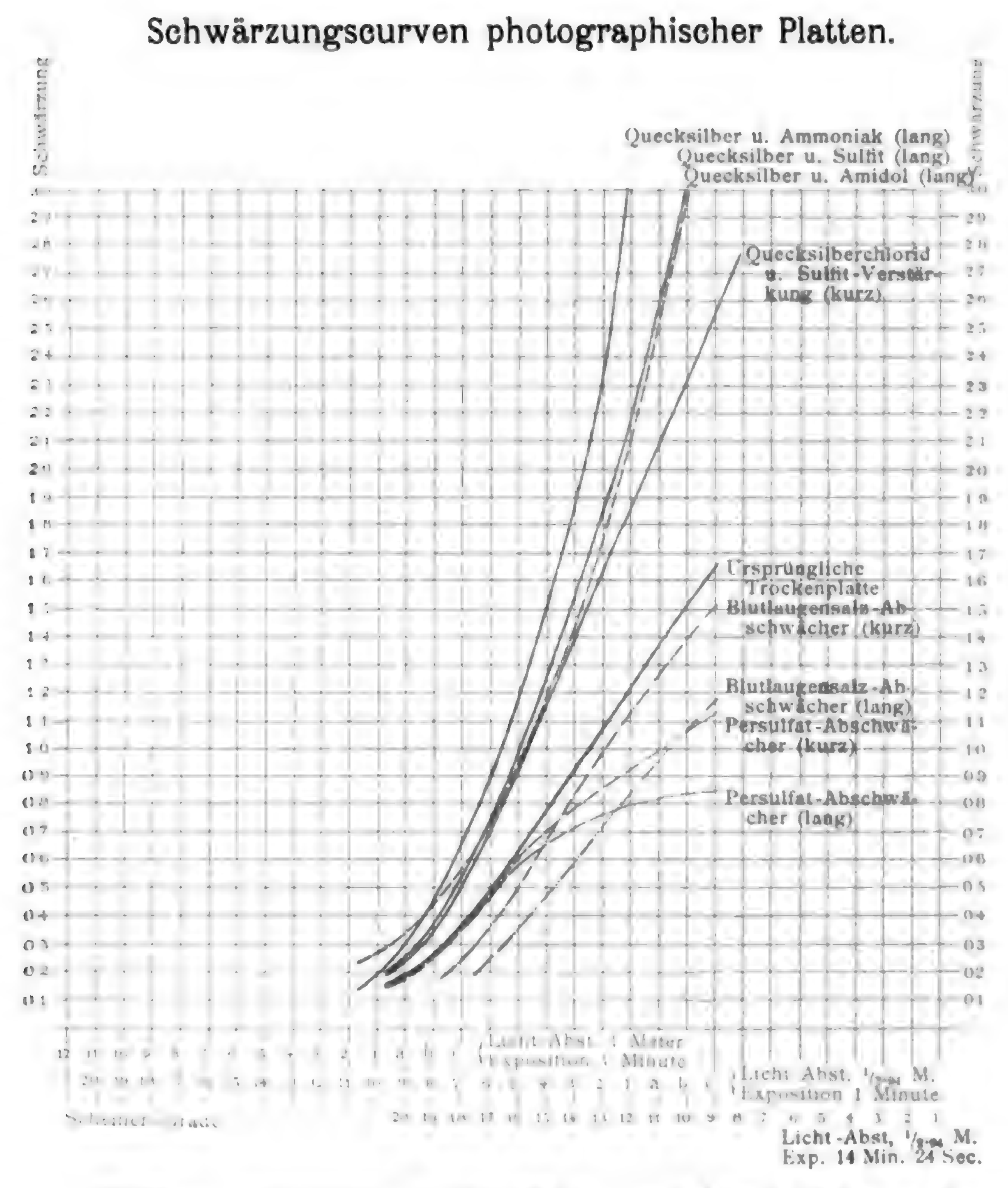
Einfluss der Entwickelungsdauer und des Bromkalium-Zusatzes bei Oxalat-Entwickelung auf Edwards-Platten (zugleich mit den in Tafel II dargestellten Platten entwickelt).



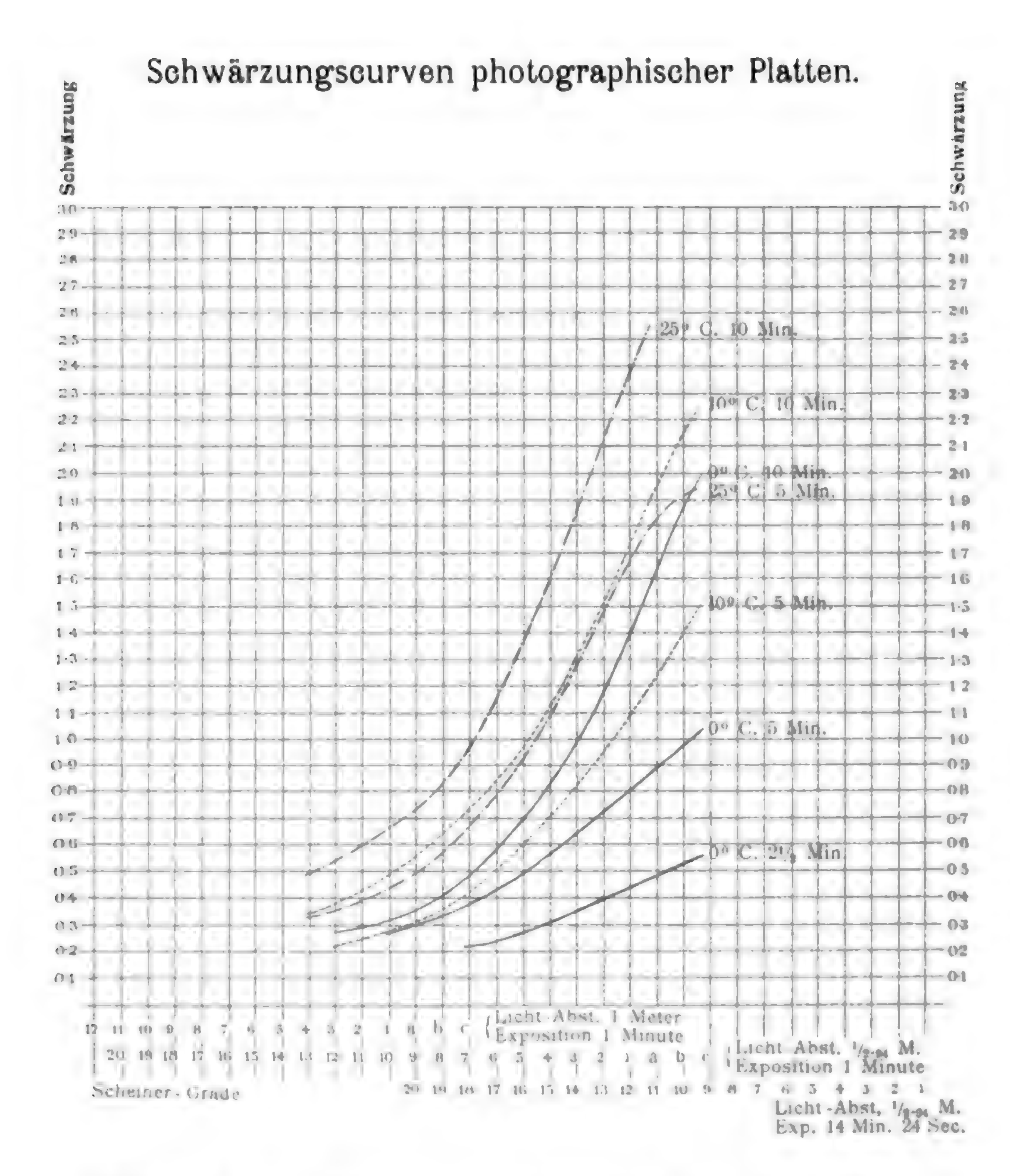
Einfluss von Hydrochinon-Pottasche-Entwickler (Temp. 25° C) bei verschiedener Entwickelungsdauer auf Schleussner-Platten.



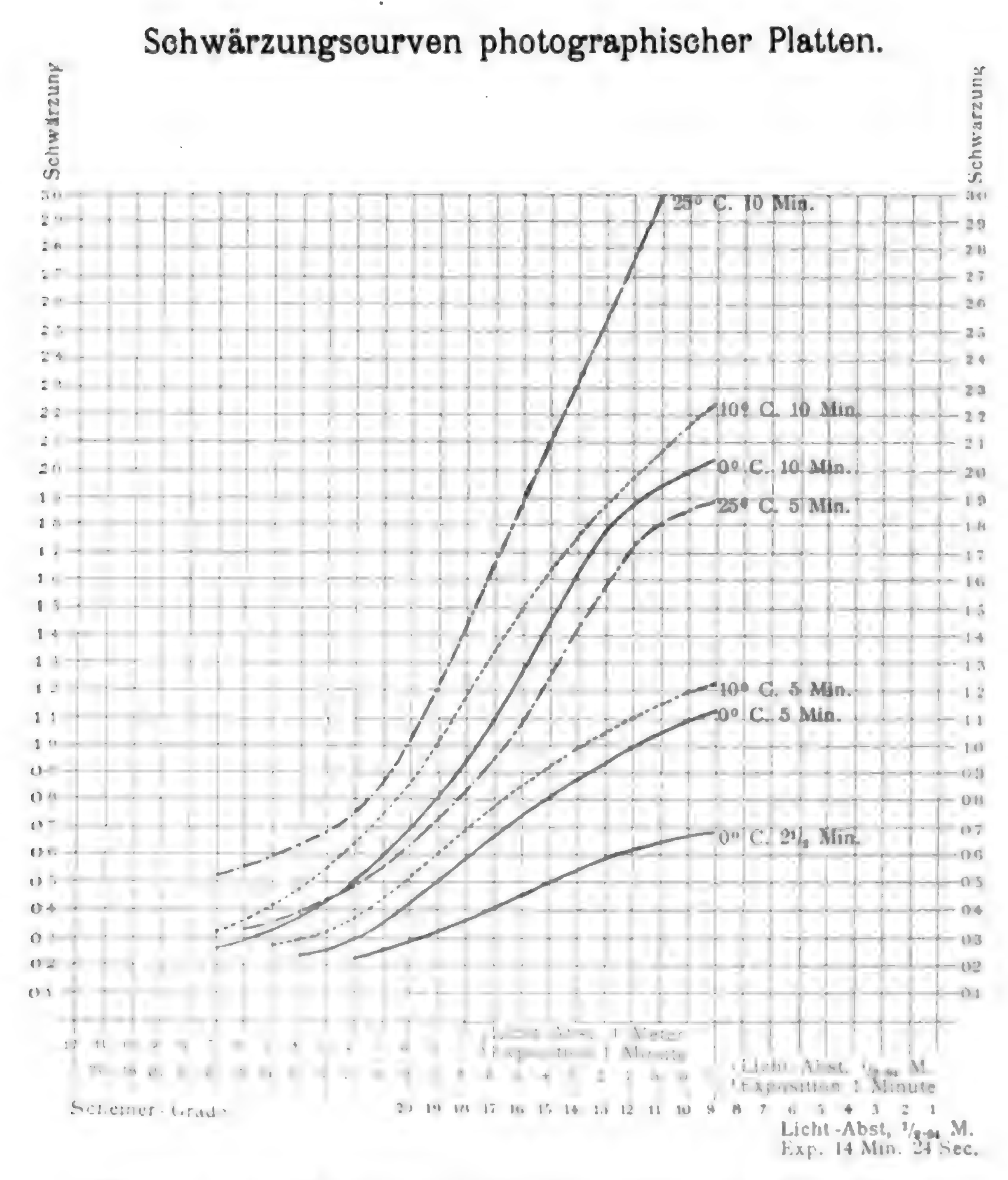
Einfluss von Adurol-Entwickler bei verschiedener Entwickelungsdauer auf Schleussner-Platten (zugleich mit den Platten Tafel IV entwickelt).



Wirkung verschiedener Verstärker und Abschwächer auf die Gradation von photographischen Platten.



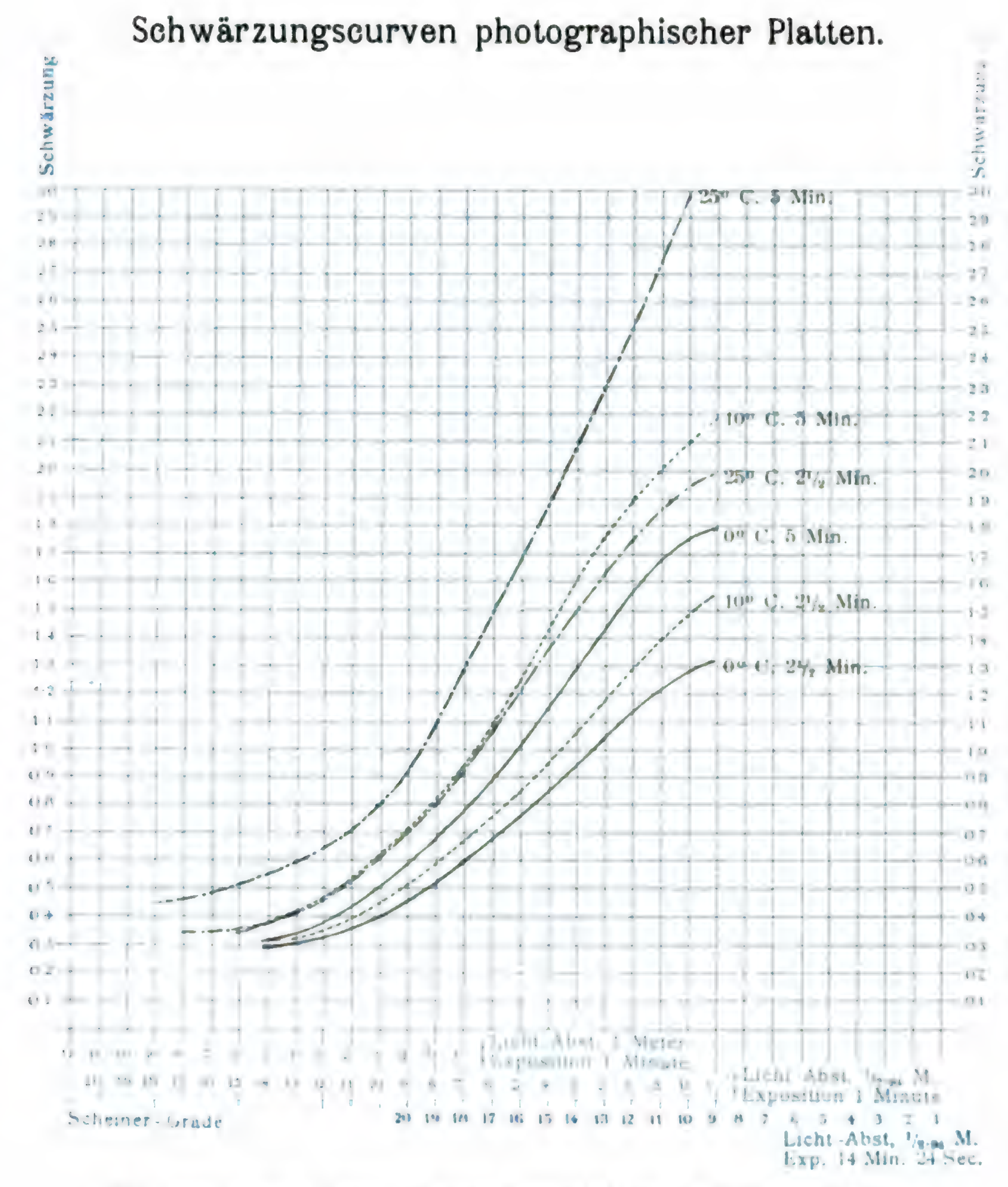
Wirkung von Eisenoxalat-Entwickler auf Bromsilber-Gelatine-Platten bei verschiedenen Temperaturen.



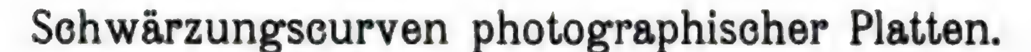
Wirkung von Pyrogallol-Soda-Entwickler auf Bromsilber-Gelatine-Platten bei verschiedenen Temperaturen.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Classe, Bd. CVIII, Abth. IIa, 1899.





Wirkung von Metol-Soda-Entwickler auf Bromsilber-Gelatine bei verschiedenen Temperaturen.



Schwärzung

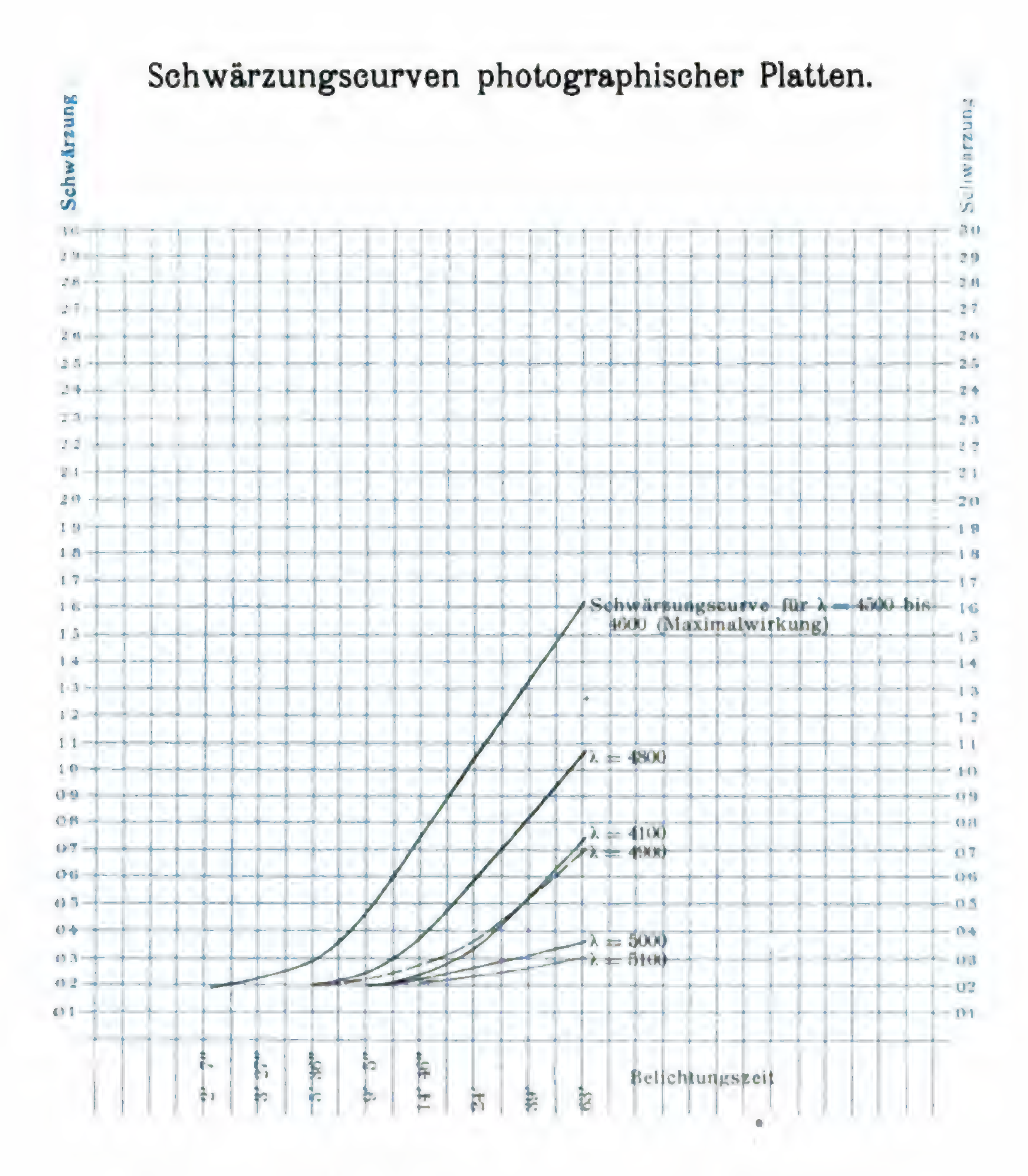
Orthochromatische Collodion-Emulsion: *a)* dick gegossen, kurz entwickelt (mit Glycin); *b)* dünner gegossen, lang entwickelt; *c)* nasses Jodbromcollodion (saurer Eisenvitriol-Entwickler).

a)
b)
c)

11 29 78 205 540 1430 3760 9940

Secunden-Meter-Kerzen

Orthochromatische Collodion-Emulsion und nasse Collodionplatten.



Charakteristische Schwärzungscurve von Bromsilber-Gelatine unter dem Einflusse von Spectralstrahlen verschiedener Wellenlänge.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CVIII. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXVI. SITZUNG VOM 7. DECEMBER 1899.

Herr Prof. Dr. Ant. Fritsch übersendet die bedungenen Pflichtexemplare seines mit Subvention der kaiserlichen Akademie veröffentlichten Werkes »Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens«, IV. Band, II. Heft.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt eine Mittheilung von Herrn Dr. Rich. v. Muth, Director des niederösterreichischen Landeslehrerseminars in St. Pölten, vor, betitelt: »Zur Bode'schen Regel«.

Herr Serge Socolow in Moskau übersendet zwei Mittheilungen, wovon die erste eine Ergänzung seines Werkes: »Corrélation régulières du système planétaire« bildet, während sich die zweite mit der Aufstellung von Beziehungen zwischen den Rotationsgeschwindigkeiten und den Bahngeschwindigkeiten der Saturntrabanten und des Saturns beschäftigt.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ludwig Boltzmann legt eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit vor, betitelt: »Versuche über die Absorption von Radiumstrahlen«, von Dr. Stefan Meyer und Dr. Egon Ritter v. Schweidler.

XXVII. SITZUNG VOM 14. DECEMBER 1899.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz von Dr. V. v. Cordier vor, betitelt: »Über die Einwirkung von Chlor auf metallisches Silber im Licht und im Dunkeln«.

Herr Serge Socolow in Moskau übersendet eine weitere Mittheilung über Beziehungen zwischen der Umlaufs- und der Umdrehungsgeschwindigkeit der Planeten.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Arbeit aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien von Herrn Julius Hock vor: »Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten homologer Reihen von der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung und über die Oberflächenspannungen unterkühlter Flüssigkeiten«.

Derselbe legt ferner eine Abhandlung des Herrn Josef Nabl vor: »Über den Widerstand strömender Elektrolyte«.

Das w. M. Herr Intendant Hofrath F. Steindachner legt eine am k. k. naturhistorischen Hofmuseum ausgeführte Arbeit des Assistenten Herrn Dr. Rudolf Sturany vor, betitelt: »W. A. Obrutschew's Molluskenausbeute aus Hochasien«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Steindachner eine Mittheilung, betitelt: »Diagnosen neuer Lepidopteren aus Südarabien und von der Insel Sokotra«, von Herrn Dr. H. Rebel.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Friedrich Gach: »Zur Kenntniss des Acetylacetons«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine im Laboratorium des technologischen Gewerbemuseums in Wien ausgeführte Arbeit der Herren J. Klaudy und J. Fink: »Über einen neuen aromatischen Kohlenwasserstoff $C_{24}H_{18}$ aus Erdölen«.

Herr Dr. A. Ghon überreicht in Gemeinschaft mit Herrn Dr. H. Albrecht den dritten Theil des wissenschaftlichen Berichtes über die Beulenpest in Bombay im Jahre 1897, betitelt: »Bacteriologische Untersuchungen über den Pestbacillus«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss übersendet eine vorläufige Notiz über die Beobachtung der Leoniden in Delhi.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Deter, Dr. J.: Mathematisches Formelbuch für höhere Unterrichtsanstalten. Neu herausgegeben von Erdmann Arndt. 4. Auflage. Berlin. 8°.

Über die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten homologer Reihen von der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung und über die Oberflächenspannungen unterkühlter Flüssigkeiten

von

Julius Hock.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Als im Jahre 1891 Prof. Jäger seinen Apparat[1] zur Messung der Capillaritäts-Constanten construirte, hatte er ein Mittel gefunden, die Oberflächenspannungen genauer zu bestimmen, als dies nach den älteren Methoden möglich war. Trotzdem wurde der Apparat fast gar nicht benützt, obschon viele Versuche — ich erwähne nur den zur Bestimmung der Capillaritäts-Constanten bei tiefen Temperaturen und namentlich bei unterkühlten Flüssigkeiten — nach den anderen Methoden nicht durchführbar waren.

Die Absicht der vorliegenden Arbeit ist es nun, zu untersuchen, inwieferne Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen und in unterkühltem Zustande das bereits von Brunner im Jahre 1848 angedeutete Gesetz befolgen, dass die Capillaritäts-Constanten lineare Functionen der Temperatur seien, ein Gesetz, das seitdem durch zahlreiche Forscher[2] verificirt wurde, während

---

[1] Diese Sitzungsber., B. 100, Abth. IIa., S. 493.

[2] G. Timberg, Wied. Ann. 30, S. 545. — A. L. Selby, Phys. Soc. London, 1891, und Chem. News 63, S. 162. — G. Jäger, diese Sitzungsber., Bd. 100, IIa., S. 493 ff. — H. Pellat, Comptes rend. 118, S. 1193, 1894. —

Abweichungen davon nur in geringer Zahl erwähnt werden, so von E. Gossart[1] und V. Monti.[2] Letzterer findet indessen solche Unregelmässigkeiten nur bei einigen Zuckerlösungen, während der Erstere behauptet, dass nebst vielen anderen Substanzen auch die Glieder der Alkoholreihe bei jeder Temperatur nahezu die gleiche Oberflächenspannung haben. Gossart's Arbeit ist nach der Methode der Tropfen ausgeführt. Das Resultat derselben widerspricht so sehr den Angaben aller anderen Forscher, mit denen auch meine Messungen hinreichend genau übereinstimmen, dass es unbegreiflich erscheint.

Anderentheils war es mein Plan, einen Beitrag zur Erforschung eines noch viel strittigeren Gebietes zu liefern, eine Feststellung der Beziehungen nämlich, die bei homologen Reihen zwischen den Capillaritäts-Constanten und der chemischen Zusammensetzung bestehen. Die wichtigsten der hierüber bisher vorliegenden Arbeiten sind:

L. Wilhelmy: Über die Abhängigkeit der Capillaritäts-Coëfficienten der Flüssigkeiten von ihrer Zusammensetzung (Pogg. Ann. CXXI, 44—69).

E. Marangoni e P. Stefanelli (Il nuovo Cim. IV. Dec. 1870, p. 1).

E. Guerout: Sur le coëfficent d'écoulement capillaire (Comptes rend. LXXXIII, p. 1025).

A. Guerout: Recherches sur le coëfficient d'écoulement capillaire (Comptes rend. LXXXIII, p. 1291).

Duclaux: Sur la tension superficielle dans la série des alcools et des acides gras (Ann. de chim. et de phys. XIII, 1878, p. 76—101 und Beibl. zu Wied. Ann., II, S. 455).

E. E. Linebarger: On the relation between the surface tensions of liquids and their chemical constitution (Ber. der deutschen chem. Ges. 25, S. 937. Referat über diese Arbeit: Fortschr. der Phys., Bd. XLVIII, S. 265).

A. Sohst, Bull. Liège, 1876. — E. J. Mellberg, Acta soc. scientif. Fennicae, 22, Nr. 6, Helsingfors 1876, und viele andere.

[1] Ann. de chim. et de phys. 19, S. 173.

[2] Il nuovo Cim. 5, S. 186, 1897.

Ähnliche Themen sind auch in den Arbeiten von Ramsay und Shields, sowie von Ramsay und Aston behandelt, doch beschäftigen sich diese Forscher nicht mit den homologen, organischen Reihen. Auch die Arbeiten von Schall, Traube und einigen Anderen haben mit den vorliegenden Untersuchungen nicht viel gemein, da dort wässerige Lösungen behandelt sind, die ein ganz anderes Verhalten zeigen, als die reinen Substanzen. Traube stellt in seiner Abhandlung: »Über die Capillaritäts-Constanten organischer Stoffe in wässerigen Lösungen«[1] ein Gesetz auf über die Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Zusammensetzung speciell bei homologen Reihen, er betont aber, dass dasselbe nur für hinreichend verdünnte Lösungen annähernd gilt. Auf diese und ähnliche Arbeiten glaubte ich daher keine Rücksicht nehmen zu dürfen.

Es würde zu weit führen, wenn ich die Resultate der oben citirten Arbeiten alle anführen wollte, und es wird wohl völlig zur Charakterisirung des bisher vorliegenden Materiales ausreichen, wenn ich die Schlüsse citire, zu denen die Herren A. Guérout und Duclaux gelangt sind. Ersterer sagt nämlich, dass der Werth der Capillaritäts-Constanten mit dem Kohlenstoffgehalte der Verbindung wachse, letzterer erklärt, dass sich ein solcher Zusammenhang nicht ergeben habe.

Diese Widersprüche schienen mir daher zu rühren, dass die Methoden der Steighöhen, Tropfen, Blasen etc., nach denen man bisher gearbeitet hat, nicht einwandfrei sind.

Da nun gerade dieser Umstand Prof. Jäger veranlasst hat, seinen Apparat zu construiren, hielt ich denselben auch für sehr geeignet, einen Beitrag zur Entscheidung jener Frage zu liefern.

Was nun die absoluten Werthe der Capillaritäts-Constanten betrifft, die sich bei meinen Messungen ergeben haben, so ist darauf hinzuweisen, dass bei der Jäger'schen Methode der Apparat mit Hilfe von zwei Standardflüssigkeiten geaicht wird, dass also die sich ergebenden Werthe von den der Berechnung zu Grunde gelegten Zahlen abhängen. Da aber meine Messungen mit den zuverlässigsten der schon früher bestimmten

[1] J. Liebig's Ann. 265, S. 28, 1891.

absoluten Werthe sehr gut übereinstimmen, dürften wohl auch die absoluten Werthe der von mir neu bestimmten Capillaritäts-Constanten hinlänglich genau und vollkommen brauchbar sein. Nachstehende Tabelle soll einige Beispiele für diese Übereinstimmung geben, ohne jedoch auf Vollständigkeit Anspruch zu erheben.

Substanz	Beobachter	Temperatur	Capillaritäts-Constante	Capill.-Const. nach meinen Messungen	Unterschied circa
Methylalkohol	Schiff	64·2°	18·73	18·78	0·25%
Äthylalkohol	Schiff	78	17·31	17·51	1·2
»	Kundt	20	21·99	22·08	0·5
»	Quincke	21·8	21·94	21·92	0·09
Propylalkohol	Schiff	97·1	17·29	17·41	0·8
Amylalkohol	Bède	16	23·80	23·90	0·5
»	Mendelejeff	15	23·99	24·07	0·3
»	Wilhelmy	15	23·81	24·07	1
Ameisensäure	Magie	20	40·19	41·22	2·6
Buttersäure	Mendelejeff	16	27·26	26·03	4·5
Essigsäure	Bède	12·5	28·92	25·89	12

Ich habe noch viele andere Zahlen geprüft und bei allen eine gute Übereinstimmung gefunden. Doch fehlt es auch nicht an grösseren Abweichungen, die sich aber alle leicht erklären lassen.

Zunächst weichen die nach der Methode der Blasen vorgenommenen Messungen so weit von allen anderen ab, dass sie zum Vergleiche kaum herangezogen werden können.

Wichtiger schienen mir die grossen Unterschiede, die sich zwischen meinen Zahlen und den nach der Methode der Steig-

höhen ausgeführten Messungen Mendelejeff's[1] ergaben, besonders da der in obiger Tabelle angeführte Werth für den Amylalkohol bei +15° recht gut mit dem meinigen stimmt, während die anderen Substanzen Abweichungen von 3—5% aufweisen, wie z. B. die gleichfalls oben angeführte Buttersäure. Mein Vertrauen in die Richtigkeit meiner Zahlen wurde daher wesentlich gestärkt durch die Ansicht Quincke's[2] welcher die Mendelejeff'schen Messungen für ungenau erklärt.

Die letzte Zeile meiner Tabelle weist den grössten Unterschied auf, und doch möchte ich diesem gerade die geringste Bedeutung beilegen, denn da der Gefrierpunkt der Essigsäure bei +16·75° C. liegt, war sie bei Bède's Versuch stark unterkühlt, und eine verlässliche Bestimmung der Capillaritäts-Constanten unterkühlter Flüssigkeiten scheint nach der Methode der Steighöhen kaum durchführbar zu sein, weil hiebei die Temperatur weder constant gehalten, noch überhaupt genau bestimmt werden kann.

Methyl- und Äthylalkohol wurden auch schon von Prof. Jäger in seiner Abhandlung »Über die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten« (diese Sitzungsber., Bd. 100, Abth. IIa., vom März 1891) untersucht, und seine Resultate stimmen mit den meinigen nicht gut überein; die Abweichungen betragen circa 5%. Wenn man aber bedenkt, dass Prof. Jäger gar keinen Grund hatte, der Reinheit seiner Substanzen besonderes Augenmerk zuzuwenden, während ich gerade darauf besonders achten musste, wird man wohl auch eine noch grössere Abweichung erklärlich finden.

Im Folgenden will ich zunächst eine übersichtliche Darstellung der Resultate meiner Messungen geben und dann daraus die Schlüsse in Bezug auf die am Anfange dieser Arbeit gestellten zwei Fragen ziehen.

Da ich mich genau an die eingangs erwähnte Arbeit Prof. Jäger's gehalten habe, muss ich bezüglich der Beschreibung des Apparates, der Methode der Messungen etc. auf diese

---

[1] Compt. rend. LI, p. 97, respective L, p. 52.

[2] Fortschr. d. Phys. Bd. XVI, S. 80.

Abhandlung verweisen. Wenn ich von einigen unbedeutenden Unterschieden absehe, die nur die Bequemlichkeit, nicht aber die Genauigkeit der Messungen beeinträchtigten, so war die einzige wesentliche Abweichung meiner Versuchsanordnung von der Jäger'schen die, dass ich mich zur Ablesung der Höhendifferenz h der Mündungen der zwei Capillarröhren eines Kathetometers bediente, statt eines Comparators mit Mikroskopablesung. Da ich also nur auf 0·05 *mm* genau ablesen konnte, bedingte dies allein schon (bei der Grössenordnung von h) die Möglichkeit eines Fehlers bis zu 1%. In Wirklichkeit erreichte derselbe bei der Alkoholreihe diese Grösse nie; bei den Fettsäuren waren die Abweichungen der einzelnen Ablesungen untereinander etwas grösser.

Während ich mich daher bei den Alkoholen mit drei Ablesungen für jede der in den Tabellen angegebenen Zahlen begnügen konnte, sind die Capillaritäts-Constanten der Fettsäuren aus je fünf Messungen ermittelt; doch ist keine der letzteren von meinen unter der Rubrik h angeführten Werthen um mehr als 2% verschieden gewesen. Die Ursache der grösseren Schwierigkeit der Ablesung bei den Fettsäuren liegt wohl darin, dass diese Flüssigkeiten die Capillarröhren sehr stark verunreinigen. Tiefe und hohe Temperaturen waren nur sehr schwer constant zu halten, so dass schon meine äussersten Werthe sehr schwierig zu bestimmen waren, weshalb ich auch meine Messungen bei den Alkoholen nach unten, bei den Fettsäuren nach oben nicht weiter ausgedehnt habe.

Ich verwendete zur Aichung des Apparates nach Prof. Jäger's Beispiel die von Brunner[1] gegebenen Steighöhen des Wassers und Äthers in Röhren von 1 *mm* Radius. Diese sind

für Wasser ..... $15\cdot33215-0\cdot0286396\,u$
» Äther ...... $5\cdot3536\;-0\cdot028102\,u$,

worin u die Temperatur in Celsius-Graden bedeutet und der Werth für Wasser von 0° bis 82°, für Äther von 0° bis 35° gilt.

Bezüglich der Berechnung der Constanten c und β des Apparates, deren Bedeutung und bezüglich der Ableitung der

[1] Pogg. Ann. Bd. 70, S. 515.

Formel zur Berechnung der Capillaritäts-Constante α muss ich abermals auf die schon früher citirte Jäger'sche Abhandlung verweisen. Für den von mir benützten Apparat war

$$c = 4\cdot 7639, \qquad \beta = 0\cdot 3797.$$

Die Jäger'sche Formel lautet

$$\alpha = \frac{c\,.\,h}{v+\beta},$$

worin v das specifische Volumen bedeutet.

Mit Hilfe dieser Werthe stellte ich zunächst einige Messungen an, um zu sehen, wie weit meine Resultate von den Jäger'schen abweichen. Es war bei $+15°$ C.:

	α nach meinen Messungen	α nach Prof. Jäger	Unterschied circa
für Wasser.....	74·75	74·70	0·06%
» Aceton.....	25·485	25·485	0
» Alkohol....	23·74	23·495	1

Besonders die letzte Messung ist geeignet, meine früher ausgesprochene Ansicht zu bekräftigen, dass die von Prof. Jäger verwendeten Flüssigkeiten nicht rein gewesen sein dürften. Meine Zahl bezieht sich hier nämlich auch nicht auf reinen Alkohol, sondern auf stark verdünnten, dessen grosser Wassergehalt die bedeutende Erhöhung der Capillaritäts-Constante wohl erklärt. Bei reinem Äthylalkohol fand ich dieselbe bei $+16\cdot 5°$ nur als $\alpha = 22\cdot 25$. Die gute Übereinstimmung bei Wasser und Aceton erklärt sich dann eben auch daraus, dass diese Flüssigkeiten in der Regel in vollkommen reinem Zustande verwendet werden.

Meine Messungen ergaben folgende Resultate:

Methylalkohol (CH_4O, Mol.-Gew. $m = 32$).

t	Spec. Gew. s	h	α
−35·2°	0·8575	8·63	26·60
−26	0·8474	8·50	25·90
−14·8	0·8356	8·32	25·14

t	*s*	*h*	*α*
+ 2·8°	0·8157	8·00	23·74
+22·5	0·7962	7·57	22·05
+31	0·7854	7·46	21·50
+39·25	0·7800	7·28	20·87
+47·5	0·7733	7·10	20·22
+56	0·7660	6·92	19·56
+15·2	0·8028	7·73	22·65

Äthylalkohol (C_2H_6O, $m = 46$).

t	*s*	*h*	*α*
—38·92°	0·8680	8·63	26·84
—25·5	0·8492	8·39	25·65
— 8	0·8247	8·08	24·18
+ 2	0·8103	7·95	23·47
15·4	0·7996	7·69	22·47
23	0·7927	7·55	21·91
34·3	0·7825	7·30	20·97
44·75	0·7737	7·07	20·14
57·5	0·7636	6·82	19·23
63·8	0·7588	6·55	18·66

Propylalkohol (C_3H_8O, $m = 60$).

t	*s*	*h*	*α*
—38 °	0·8500	8·975	27·47
—31·8	0·8445	8·83	26·90
—19·7	0·8372	8·57	25·93
— 8	0·82955	8·37	25·15
+ 1·5	0·8229	8·18	24·43
7·7	0·81855	8·06	23·99
21·25	0·8087	7·80	22·99
36·42	0·7964	7·51	21·87
45·2	0·7898	7·38	21·32
51·08	0·7859	7·25	20·90
61·3	0·7764	7·05	20·14

Butylalkohol ($C_4H_{10}O$, $m = 74$).

t	s	h	α
−49·2°	0·8599	9·13	28·20
−38·6	0·8518	8·93	27·37
−26·2	0·8431	8·62	26·23
−12·25	0·8305	8·42	25·34
+ 3	0·8173	8·10	24·07
11	0·8109	7·86	23·21
19·25	0·8048	7·72	22·67
21	0·8020	7·70	22·55
32·5	0·7940	7·45	21·64
52	0·7794	7·02	20·11
73·42	0·7614	6·50	18·29

Amylalkohol ($C_5H_{12}O$, $m = 88$).

t	s	h	α
−39·1°	0·8643	9·01	27·92
−25·35	0·8519	8·785	26·94
−12·2	0·8403	8·52	25·86
+ 1·5	0·8280	8·35	25·06
13·6	0·8195	8·08	24·18
22	0·8131	7·95	23·53
40	0·7984	7·60	22·18
50	0·7931	7·43	21·58

Ameisensäure (CH_2O_2, $m = 46$) Gefrierpunkt +8·6° C.

t	s	h	α	
+ 2·5°	1·2156	10·95	43·38	(unterkühlt)
14·1	1·2025	10·67	41·96	
24·7	1·1898	10·33	40·34	
31·5	1·1827	10·27	39·93	
46·2	1·1665	9·88	38·05	
56·5	1·15615	9·69	37·09	
74·3	1·1348	9·37	34·60	

Essigsäure ($C_2H_4O_2$, $m = 60$) Gefrierpunkt +16·75° C.

t	*s*	*h*	*α*
+11·75°	1·0607	7·20	26·00 (unterkühlt)
22·5	1·0464	7·00	24·97
33	1·0359	6·78	24·03
44·58	1·0234	6·53	22·93
52·3	1·0949	6·38	22·25
61·7	1·0049	6·15	21·31
69·58	0·9966	6·00	20·67

Propionsäure ($C_3H_6O_2$, $m = 74$).[1]

t	*s*	*h*	*α*
—19°	1·0364	7·71	27·33
— 7·75°	1·0155	7·57	26·43
+ 2	1·0143	7·35	25·64
13·5	1·0005	7·15	24·70
22	0·9905	7·00	24·00
36·2	0·9777	6·73	22·87
44·83	0·9700	6·60	22·29
54·3	0·9576	6·40	21·41
73·5	0·9394	6·03	19·89

Buttersäure ($C_4H_8O_2$, $m = 88$) Gefrierpunkt —19° C.

t	*s*	*h*	*α*
—25·3°	1·0313	8·87	31·30 (unterkühlt)
—11·2	1·0158	8·22	28·70
+ 1·8	1·0015	7·95	27·45
9·7	0·9928	7·76	26·65
20·5	0·9803	7·53	25·64
32·9	0·9691	7·19	24·26
45·7	0·9566	6·95	23·23
55·42	0·9476	6·70	22·24
78·8	0·9211	6·09	19·81

[1] Wird bei —21° fest und bei —24° wieder flüssig. Messungen bei tieferen Temperaturen gaben in Folge der Verunreinigung der Röhren durch die erstarrende Substanz so stark divergirende Resultate, dass dieselben hier nicht aufgenommen werden konnten.

Valeriansäure ($C_5H_{10}O_2$, $m = 102$) Gefrierpunkt —20° C.

t	s	h	α
—23·7°	0·9785	8·10	27·53 (unterkühlt)
— 6·75	0·9636	7·75	26·04
+ 2·5	0·9553	7·65	25·45
15	0·9453	7·35	24·35
30·5	0·9329	7·06	23·18
38·9	0·9262	6·89	22·50
52·1	0·9170	6·63	21·48
58·8	0·9116	6·48	20·91
68·3	0·8984	6·33	20·20

Capronsäure ($C_6H_{12}O_2$, $m = 116$) Gefrierpunkt —1·5° C.

t	s	h	α
— 5°	0·9510	8·30	27·63 (unterkühlt)
+ 2	0·9555	8·18	27·11
+11·2	0·9381	8·04	26·50
21	0·9303	7·89	25·85
30	0·9215	7·74	25·20
38	0·9151	7·65	24·75
58·7	0·8974	7·32	23·34
67·5	0·8905	7·20	22·83
78·8	0·8863	6·97	21·92

Wie aus vorstehenden Zahlen und noch besser aus der Tafel hervorgeht, auf welcher die Capillaritäts-Constanten als Abscissen, die Temperaturen als Ordinaten aufgetragen sind, lässt sich auch für die erweiterten Grenzen von —50° bis +80° die Beziehung dieser zwei Grössen mit hinlänglicher Genauigkeit durch die Gleichung

$$\alpha = \alpha_0(1-\varepsilon t)$$

ausdrücken, worin α_0 die Capillaritäts-Constante bei 0°, ε eine der betreffenden Substanz eigenthümliche Constante ist. Es ergab sich hierbei für

	α_0	ε
Methylalkohol	23·97	0·00373
Äthylalkohol	23·63	0·00332
Propylalkohol	24·54	0·00294
Butylalkohol	24·32	0·00341
Amylalkohol	25·17	0·00287
Ameisensäure	43·63	0·00279
Essigsäure..........	27·10	0·00343
Propionsäure........	25·80	0·00310
Buttersäure	27·62	0·00359
Valeriansäure	25·59	0·00313
Capronsäue	27·23	0·00249

Es ist somit nachgewiesen, dass auch für diese erweiterten Grenzen das Gesetz keine Änderung erfährt, dass die Capillaritäts-Constanten lineare Functionen der Temperatur sind. Die von Prof. Jäger in seiner schon mehrfach citirten Abhandlung erwähnten regelmässigen Abweichungen von diesem Gesetze[1] konnte ich nicht nachweisen, sei es, weil meine Beobachtungen nicht genau genug waren, oder weil die von mir untersuchten Substanzen solche Abweichungen überhaupt nicht zeigen.

Eine erfreuliche Bestätigung der Richtigkeit meiner Temperaturcurven fand ich darin, dass die von Schiff[2] gegebenen »Capillaritäts-Constanten von Flüssigkeiten bei ihrem Siedepunkte« für die Alkohole sehr gut mit meinen Messungen übereinstimmen. Einige dieser Zahlen sind in der Tabelle S. 1519 angeführt.

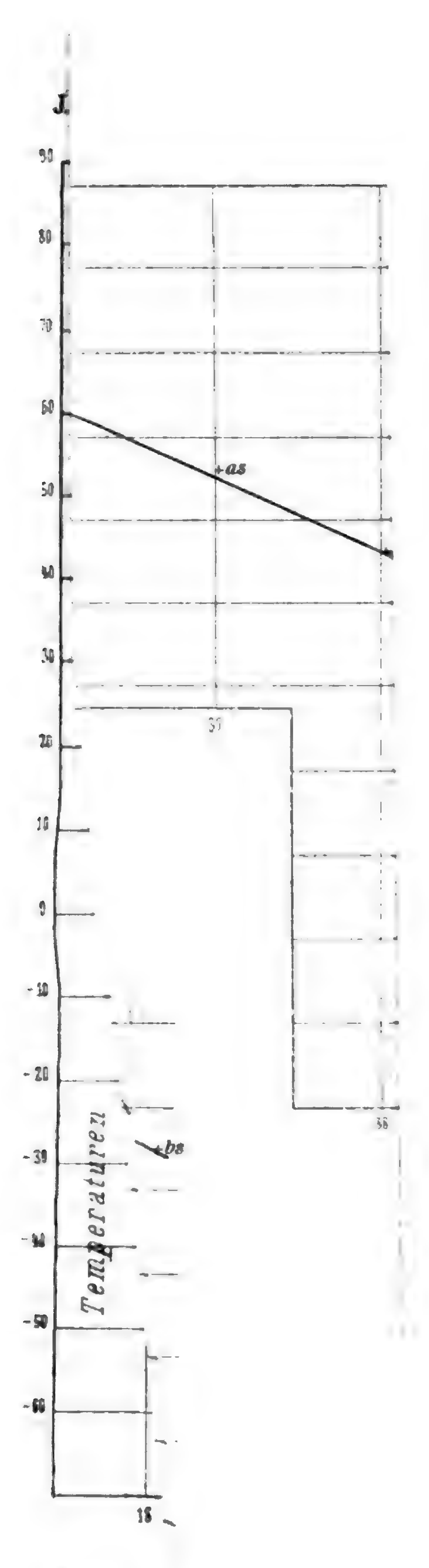
Die Werthe der Capillaritäts-Constanten unterkühlter Flüssigkeiten weichen in keiner Weise von jenem Gesetze ab. Die einzige Arbeit, die hierüber vorliegt, bestätigt mein Resultat. Es ist dies die Abhandlung: »Surface tension of water at temperatures below zero degree centigrade« von W. J. Humphreys und J. F. Mohler (The Phys. Review 2, p. 387—391, 1894/95). Dort ist die Oberflächenspannung des Wassers mittelst Steig-

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 257 und 258.

[2] Beibl. zu Wied. Ann., VIII, S. 457.

höhen bestimmt und die lineare Abhängigkeit derselben von der Temperatur von $-8 \cdot 3°$ bis $+18 \cdot 5°$ C. nachgewiesen. Ich glaube daher annehmen zu dürfen, dass der Umstand, dass eine Flüssigkeit unterkühlt ist, keinerlei Einfluss auf den Werth der Capillaritäts-Constanten ausübt, dass diese vielmehr genau so gross ist, wie sie wäre, wenn die Flüssigkeit bei der betreffenden Temperatur nicht unterkühlt sein würde.

Die Antwort auf die zweite der am Anfange dieser Arbeit gestellten Fragen ist ebenfalls vollkommen klar durch die Tabellen gegeben: Ein einfacher Zusammenhang zwischen der Capillaritäts-Constante und der chemischen Zusammensetzung, respective dem Moleculargewichte, hat sich nicht nachweisen lassen. Sollte sich ein solcher Zusammenhang doch noch ergeben, so gilt derselbe gewiss nur für eine bestimmte homologe Reihe und eine bestimmte Temperatur und lässt sich auf andere Reihen und Temperaturen nicht anwenden, hat also nur eine geringe Bedeutung. Diese Erwägung veranlasste mich, auf weitere Nachforschungen in dieser Richtung zu verzichten.



Autor del

Ila. 1899

Rotirendes Magnetfähnchen

von

G. Jaumann.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 30. November 1899.)

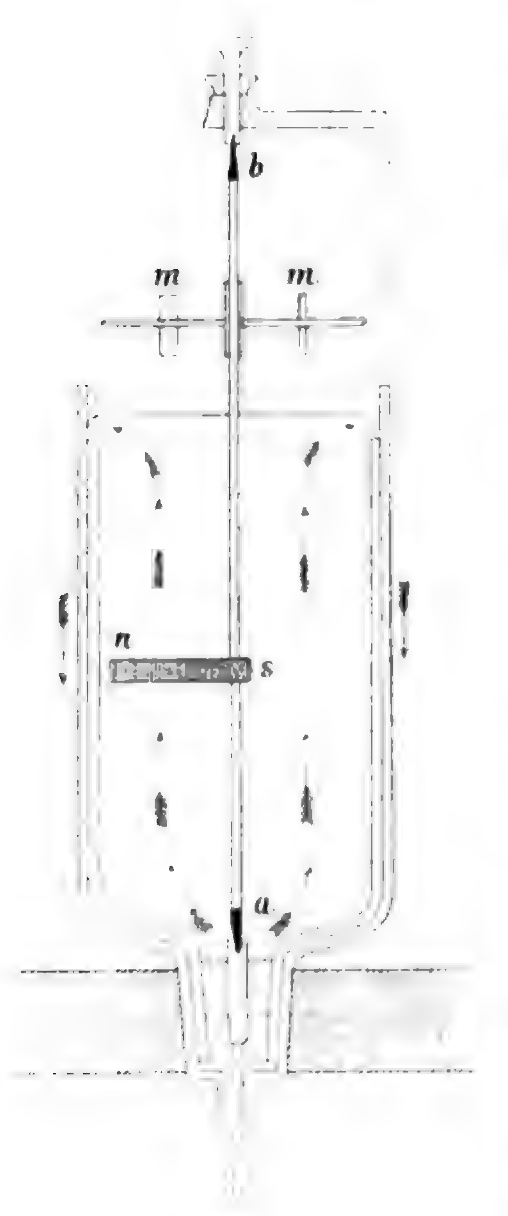
Der folgende sehr einfache Apparat, welcher mit den Unipolarinductionsapparaten verwandt ist, hat zunächst den Zweck, den magnetischen Quirl im Innern eines stromdurchflossenen Leiters in directer Weise anzuzeigen.

Ob in einer stationär strömenden Flüssigkeit ein Quirl vorhanden ist, erkennt man am leichtesten mit einer sehr kleinen Windfahne. Eine solche hat, entsprechend der Strömungscomponente, welche senkrecht zu ihrer Axe gerichtet ist, zwei Gleichgewichtslagen. Dreht man sie in die Nähe der labilen Lage und kehrt sie dann nach mehreren Schwingungen in die stabile Lage zurück, so hat die Strömung an dieser Stelle und in der Richtung der Drehungsaxe der Windfahne keinen Quirl. Dreht sich hingegen die Windfahne, einmal aus der labilen Lage gebracht, continuirlich in einem bestimmten Sinne, wenn auch mit ungleichförmiger Geschwindigkeit, so wird hiedurch der Sinn und die Stärke der Quirlcomponente angezeigt, deren Richtung in die Drehungsaxe des Fähnchens fällt.[1]

Eine Magnetnadel, welche unsymmetrisch auf ihrer Drehungsaxe sitzt, möge ein magnetisches Fähnchen genannt werden. Ein solches Fähnchen wird durch den magnetischen

[1] Ein Mühlrad, welches man ganz in den Fluss versenkt, würde sich dennoch drehen und damit einen Quirl der Strömung anzeigen, dessen Richtung horizontal und auf der Flussrichtung senkrecht ist. Derselbe kommt dadurch zu Stande, dass der Fluss unten langsamer als an seiner Oberfläche strömt.

Kraftfluss, wenn auch aus ganz anderen Ursachen, so doch geometrisch in ähnlicher Weise bewegt wie ein Windfähnchen durch eine Flüssigkeitsströmung und kann den Quirl der magnetischen Kraft, wie er im Innern stromdurchflossener Leiter vorhanden ist, durch eine continuirliche Drehung anzeigen.



Ausserhalb des Stromleiters wird sich hingegen das Magnetfähnchen wie eine gewöhnliche Magnetnadel in die Richtung der magnetischen Kraft einstellen.

Die nebenstehende Figur stellt etwas schematisch den kleinen Apparat dar, mit welchem man die continuirliche Rotation des Magnetfähnchens im Innern eines elektrischen Stromes zeigen kann. Das Magnetfähnchen besteht aus einem Magnetstab *ns* von 35 *mm* Länge und 6 *mm* Durchmesser,[1] welcher knapp an einem Ende durchbohrt und mit dieser Bohrung auf die gläserne Axe *ab* festgesteckt ist, an deren Enden kurze Stahlspitzen *a*, *b* gekittet sind, und welche noch einen Querarm mit den Laufgewichten *m* trägt, welche den Auftrieb eben aufheben, so dass sich das Fähnchen sehr leicht in seinen Lagern *a*, *b* dreht.

[1] Der Querschnitt des Magnetstäbchens war kreisförmig, er sollte jedoch schiffförmig genommen werden, damit das Fähnchen leichter durch das Quecksilber schneidet.

Der elektrische Strom fliesst in verticaler Richtung aufwärts durch einen mit Quecksilber überfüllten Glasbecher (in dessen Axe das Fähnchen angebracht ist), fliesst über den Rand des Glasbechers in einen äusseren kupfernen Becher[1] und durch diesen wieder nach abwärts. Auch die Zuleitungen unten sind conaxial angeordnet.[2] Hiemit ist erreicht, dass im Quecksilber ein nahezu homogenes magnetisches Quirlfeld, im ganzen Luftraum jedoch überhaupt keine magnetische Kraft des Stromes vorhanden ist.

Zu einem speciellen Zwecke war ferner der ganze Apparat um seine Axe drehbar.

Man hebt zunächst durch Richtmagnete die erdmagnetische Kraft im Innern des Quecksilbers annähernd auf, neigt sodann den ganzen Apparat ein wenig und bewirkt durch eine Verschiebung der Laufgewichte *m* in radialer Richtung, dass das Magnetfähnchen auch bei schiefer Drehungsaxe in jeder Orientirung in Ruhe bleibt. Dann stellt man den Apparat wieder aufrecht und vervollständigt die Astasirung des Fähnchens durch eine kleine Verschiebung der Richtmagnete.[3]

Nachstehende Tabelle gibt die beobachtete Umlaufszeit T des Magnetfähnchens als Function der Stromstärke J an.

Stromstärke J	1·3,	2·0,	2·6,	4·4,	6·2,	8·5,	11·0,	15·0	Amp.
Umlaufszeit T	78,	50,	39,	25,	19,	16,	14·5,	13·5	Sec.

Der Umlaufssinn ist jener der magnetischen Kraftlinien des Stromes, wenn das Magnetstäbchen an seinem freien Ende den Nordpol hat. Die Drehungsrichtung kehrt sich um, wenn man den Strom umkehrt oder wenn man das Magnetfähnchen entgegengesetzt magnetisirt.

[1] Der innere Rand desselben muss vernickelt oder mit Platin belegt sein.

[2] Man kann zwar auch den Kupferbecher weglassen und den Strom von der Quecksilberoberfläche einfach durch einen eingetauchten Draht ableiten, doch ist dann die Drehung des Magnetfähnchens keine ganz gleichmässige, und es bleibt bei geringen Stromstärken in gewissen Orientirungen, welche von der Form des äusseren Stromkreises abhängen, leicht stehen.

[3] Für manche feinere Versuche empfiehlt es sich, zwei gleichmagnetisirte Fähnchen auf derselben Axe zu einem astatischen Paare zu vereinigen.

Das Magnetstäbchen hat eine achtmal bessere Leitfähigkeit als das Quecksilber und sammelt also die Stromlinien ziemlich stark. Noch sicherer tritt dies ein bei einem vor dem Eintauchen in das Quecksilber blank verzinnten Magnetstäbchen. Bestreicht man dasselbe hingegen mit Eisenlack, so weichen ihm nun die Stromlinien aus. Nichtsdestoweniger wird ein lackirtes Magnetstäbchen ganz ebenso im Strome gedreht wie ein blankes und ein mit Zinnamalgam überzogenes Magnetstäbchen.

Die Drehung des Magnetstäbchens erfolgt auch, wenn die Drehungsaxe nicht in die Axe des Stromes fällt, bei seitlicher und schiefer Orientirung derselben, jedoch in diesem Falle nicht mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit.

Der Versuch gelingt auch recht gut, wenn man das Quecksilber durch einen Elektrolyten, z. B. fünffach normale Kalilauge ersetzt, doch ist hiebei die eintretende Elektrolyse lästig.

II.

Die beträchtliche Arbeit, welche zur Überwindung des Bewegungswiderstandes, welchen der Magnet im Quecksilber findet, nöthig ist, wird durch die gegenelektromotorische Kraft, welche das rotirende Fähnchen inducirt, dem Strome entzogen.

Die Grösse dieser unipolar inducirten elektromotorischen Kraft lässt sich hier sehr leicht vorausberechnen, falls das magnetische Moment M und der Polabstand r des Magnets bekannt ist. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass die isolirende Drehungsaxe ab (siehe Figur) sehr dünn sei und gerade durch den einen Pol des Magnets gehe. Dann ist das Drehungsmoment D, welches der Strom auf den Magnet ausübt,

$$D = 2JM\frac{r}{R^2},$$

worin J die Stromstärke und R der Radius der cylindrischen Quecksilbermasse ist.

Die Arbeit, welche pro Secunde vom Strome durch die Drehung des Magnets geleistet wird, lässt sich durch folgende zwei Ausdrücke darstellen:

$$EJ = \omega D,$$

worin E die zu berechnende elektromotorische Kraft und ω die Winkelgeschwindigkeit des Magnets ist.

Da die äusseren Theile des Stromkreises (der Kupferbecher) keine Kraft auf den Magnet ausüben können, so muss diese Kraft von dem Quecksilber ausgeübt werden. Dieses erfährt also hiebei das entgegengesetzte Drehungsmoment $(-D)$ und wird unter dem Einflusse desselben mit der Winkelgeschwindigkeit ω' rotiren. Kann man diese Rotation des Quecksilbers nicht vernachlässigen, so hat man also obige Gleichung für die pro Secunde geleistete Arbeit richtiger in folgender Weise zu schreiben:

$$EJ = (\omega-\omega')D.$$

Man erhält sonach

$$E = 2M\frac{r}{R^2}(\omega-\omega').$$

Der Factor von $(\omega-\omega')$ ist eine Constante, welche leicht ausgewerthet werden kann. Es muss also die inducirte elektromotorische Kraft der relativen Winkelgeschwindigkeit proportional sein, mit welcher sich der Magnet und das Quecksilber gegen einander bewegen.

Das magnetische Moment M des Magnets wurde zu 198 (c. gr. sec.) und sein Polabstand $r = 2\cdot 6\, cm$ bestimmt. Ferner ist $R = 3\cdot 5\, cm$. Es berechnet sich also:

$$E = 84(\omega-\omega')(\text{c. gr. sec.}) = 0\cdot 84(\omega-\omega') . 10^{-6} \text{ Volt.}$$

Es wurde ein empfindliches aperiodisches Galvanometer mit kleinem Widerstand und kurzer Schwingungsdauer anstatt der Accumulatoren eingeschaltet. Dasselbe gab 1 Theilstrich Ausschlag für $2\cdot 15 \times 10^{-6}$ Volt.

Anstatt der Laufgewichte m (siehe Figur) wurde eine Rolle von 2 cm Radius an der Drehungsaxe des Magnets befestigt und derselbe durch Anschluss an einen kleinen Wassermotor möglichst plötzlich in gleichmässige Rotation versetzt. Die folgende Tabelle gibt die beobachtete elektromotorische Kraft E als Function der Tourenzahl des Magnets:

Tourenzahl pro Secunde	ω sec^{-1}	$E.10^6$ Volt beobachtet	$\frac{E}{\omega}.10^6$
2·2	13·8	10·6	0·77
5·7	35·7	26·8	0·75
10·3	64·5	46·6	0·72
		Mittel:	0·75

Die Ursache, warum sämmtliche elektromotorische Kräfte etwas kleiner (im Verhältniss 0·75 : 0·84) beobachtet wurden, als oben berechnet wurde, liegt darin, dass sie nur unmittelbar nach Beginn der Rotation des Magnets den seiner Winkelgeschwindigkeit ω entsprechenden Werth haben und sehr bald absinken, weil das Quecksilber eine immer grössere Winkelgeschwindigkeit ω' annimmt und also die Relativrotation $(\omega-\omega')$ langsamer wird.

Schon nach kurzer Zeit sinkt der Galvanometerausschlag, und zwar allmälig bis nahezu auf Null herab, ein Zeichen, dass das Quecksilber nahezu dieselbe Winkelgeschwindigkeit wie der Magnet angenommen hat.

Hält man jetzt den Magnet plötzlich an, so zeigt das Galvanometer sofort wieder den vollen Ausschlag, aber jetzt im entgegengesetzten Sinne, weil jetzt die relative Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ ist, da das Quecksilber mit der Winkelgeschwindigkeit $+\omega$ rotirt und der Magnet stillsteht. Auch dieser Ausschlag sinkt sehr bald ab und wird endlich Null, weil das Quecksilber allmälig seine Rotation verliert.

Die inducirten Ströme haben, wie nicht anders zu erwarten war, stets die entgegengesetzte Richtung, wie sie ein Strom haben müsste, damit er die gleiche Relativrotation des Magnets gegen das Quecksilber erzeugt.

Über den Widerstand strömender Elektrolyte

von

Josef Nabl.

Aus dem chemisch-physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

Der Erste, der sich meines Wissens mit der Frage beschäftigte, ob und in welcher Weise ein strömender Elektrolyt seinen Widerstand ändert, war Edlund.[1] Er wandte bei seinen diesbezüglichen Untersuchungen zwei verschiedene Methoden an. Die erste war ein Differentialverfahren, die zweite beruhte im Wesentlichen auf der von Kohlrausch angegebenen Verwendung von Wechselströmen zur elektrolytischen Widerstandsmessung.

Beide Methoden ergaben ziemlich übereinstimmende Resultate, aus denen Edlund den Schluss zog:

»Der galvanische Widerstand eines strömenden Elektrolyten vermindert sich, wenn Leiter und Strom in gleicher Richtung fliessen, und vergrössert sich, wenn Leiter und Strom in entgegengesetztem Sinne sich bewegen.«

Und zwar zeigte sich die Verminderung und Vermehrung des Widerstandes so ziemlich von der gleichen Grösse. Zur Untersuchung gelangten: destillirtes Wasser, Brunnenwasser und ein Gemisch von Alkohol und Wasser. Die angewandte Strömungsgeschwindigkeit war verhältnissmässig bedeutend, sie betrug circa 10 *m* in der Secunde. Der Querschnitt der Strömungsröhre hatte ungefähr 0·16 cm^2.

[1] Edlund, Experimenteller Beweis, dass der galvanische Leitungswiderstand von der Bewegung des Leiters abhängig ist. Pogg. Ann., 156, S. 251.

Edlund verfolgte mit seiner Arbeit einen ganz bestimmten Zweck. Es war ihm darum zu thun, seine, die »unitarische« Elektricitätstheorie, zu stützen und speciell den von ihm damals verfochtenen Satz von der Proportionalität des galvanischen Leitungswiderstandes und der Stromstärke zu beweisen.

Da nämlich Edlund nach seiner Theorie die Stromstärke durch die Menge des Äthers mass, die in der Zeiteinheit den Querschnitt eines Leiters passirte, somit durch die relative Geschwindigkeit des Äthers im Leiter, so war — nach dem Satze von der Proportionalität des Widerstandes und der Stromstärke — auch der galvanische Leitungswiderstand der relativen Geschwindigkeit des Äthers zu den Leitermolekeln proportional.

Fliesst nun der Leiter in gleicher Richtung mit dem Strome, so wird, wofern man die Geschwindigkeit des Äthers nicht als unendlich gross auffasst, die relative Geschwindigkeit zwischen Äther und Leitermolekeln vermindert, somit auch der Leitungswiderstand; das Umgekehrte tritt ein, wenn Leiter und Strom entgegengerichtet fliessen, und es muss natürlich die Verminderung des Widerstandes von derselben Grösse sein wie die Vermehrung.

Diese Folgerungen aus seiner Theorie glaubte nun Edlund durch die Resultate seiner Messungen bestätigt zu haben.

Sehr bald nach dem Erscheinen der Arbeit Edlund's wurden von verschiedenen Seiten Einwürfe gegen dieselbe erhoben. Diese Einwürfe bezogen sich — abgesehen von Einwänden, die gegen die verschiedenen Details der Versuchsanordnung, z. B. gegen die nicht völlig polarisationsfreien Elektroden der ersten Methode, laut wurden — zunächst auf die Begründung des beobachteten Phänomens.

So machte Grotrian[1] darauf aufmerksam, dass sich die Ergebnisse Edlund's auch dadurch erklären lassen, dass man den beiden Ionen einen verschiedenen Reibungswiderstand am Lösungsmittel zuschreibt. Legt man z. B. dem Kation einen grösseren Reibungswiderstand bei als dem Anion, so wird, wenn Elektrolyt und Strom in gleicher Richtung fliessen, das Kation in höherem Maasse beschleunigt, als das Anion ver-

[1] Fortschritte der Physik, Bd. 31, S. 640.

zögert wird, somit nimmt die Stromstärke zu, der Widerstand also ab. Umgekehrt wird, wenn Elektrolyt und Strom sich entgegengesetzt bewegen, das Kation wiederum in höherem Maasse verzögert als das Anion beschleunigt wird; es sinkt also in diesem Falle die Stromstärke, der Widerstand nimmt also zu.

Diese Bemerkung Grotrian's bietet nun offenbar die Möglichkeit, auch ein dem Edlund'schen Resultate entgegengesetztes vorauszusagen. Hiezu braucht man nur dem Anion einen grösseren Reibungswiderstand beizulegen als dem Kation; denn dann ergibt eine analoge Betrachtung wie im vorhergehenden Falle eine Zunahme des Widerstandes bei gleicher und eine Abnahme bei entgegengesetzter Richtung von Leiter und Elektricitätsstrom.

Schreibt man endlich beiden Ionen gleich grosse Reibungswiderstände zu, so darf das Strömen des Elektrolyten natürlich keinerlei Widerstandsänderung bewirken.

Der Einfluss des Strömens ist demnach der Grotrian'schen Auffassung zufolge ein dreifacher, je nach der Beschaffenheit des Elektrolyten.

Gleichfalls gegen die Erklärung des von Edlund beobachteten Phänomenes aus der unitarischen Hypothese gerichtet sind die Einwände, die von Helm[1] erhoben wurden. Helm gelangt auf Grund einer von der Edlund'schen verschiedenen Anschauung zu einem — wie Dorn[2] gezeigt hat — mit der Edlund'schen Formel genau übereinstimmenden Ausdruck für die Stromstärke in einem Leiter, der einen beweglichen (flüssigen) Theil enthält. Helm macht geltend, dass »die Erregung, welche elektrischer Strom genannt wird«, — wofern nur ihre Geschwindigkeit nicht als unendlich gross angesehen wird — ein kleineres Stück im Leiter zurücklegt, wenn Leiter und Strom in gleicher Richtung sich bewegen und ein längeres, wenn sich der Leiter entgegen der Stromrichtung bewegt: woraus, wegen der Proportionalität von Widerstand und Länge des Leiters,

---

[1] Helm, Bemerkungen zu einer Untersuchung des Herrn Edlund. Pogg. Ann., 157, S. 645.

[2] Dorn, Über die Abhängigkeit des galvanischen Leitungswiderstandes von der Stromstärke und die Edlund'sche Theorie der Diaphragmaströme. Pogg. Ann., 160, S. 56.

eine Verminderung des Widerstandes im ersten Falle und eine Vermehrung im zweiten folgt.

Allein nicht bloss gegen die Begründung, die Edlund den von ihm beobachteten Erscheinungen gab, auch gegen die Realität dieser Erscheinungen selbst — insoferne nämlich, als dieselben nicht von Widerstandsänderungen herrühren, die durch das Strömen im Leiter selbst hervorgebracht werden, sondern anderen Ursachen zuzuschreiben seien — wurden Bedenken erhoben.

Es war Dorn,[1] der, damals mit Untersuchungen über die Zöllner-Quincke'schen Strömungsströme beschäftigt, vermuthete, dass die von Edlund beobachteten Widerstandsänderungen der Wirkung von Strömungsströmen zuzuschreiben seien, die bei den angewandten, verhältnissmässig bedeutenden Strömungsgeschwindigkeiten und nicht allzu grossen Röhrenquerschnitten möglicherweise auftreten konnten. Solche Ströme — deren Richtung bekanntlich mit der Richtung des Flüssigkeitsstromes zusammenfällt — hätten dann allerdings auch ohne jegliche Widerstandsänderung im Leiter selbst zu dem von Edlund beobachteten Resultate führen müssen. Nun hatte aber Edlund betont, dass bei seinen Untersuchungen Strömungsströme nicht vorhanden waren; daher unternahm Dorn sehr ausführliche und sorgfältige Controlversuche, und es gelang ihm thatsächlich, bei Anwendung beider Edlund'schen Methoden und derselben Röhrenweite wie Edlund das regelmässige Auftreten von Strömungsströmen nachzuweisen, die das Resultat der Edlund'schen Versuche in der angedeuteten Weise beeinflussen mussten.

Es kann somit nicht angenommen werden, dass die Arbeit Edlund's die Frage nach den Widerstandsänderungen strömender Elektrolyte in positivem Sinne beantwortet hat; vielmehr war nach den Untersuchungen von Dorn ein negatives Resultat das Wahrscheinlichere.

Thatsächlich hat sich auch in den darauffolgenden Jahren — wenigstens soweit mir bekannt — Niemand mehr mit dieser Frage befasst. Erst in jüngerer Zeit wiederum erschien eine

[1] l. c.

diesbezügliche Arbeit von Herrn Bosi,[1] und dieser Arbeit will ich mich nun zuwenden.

Der Zweck der Arbeit des Herrn Bosi war, zu entscheiden zwischen der ziemlich allgemein angenommenen Hittorf'schen Theorie der Concentrationsänderungen, die gewisse, vom Strom durchsetzte Elektrolyte an den Elektroden erleiden, und einem von S. Arrhenius,[2] in einem Briefe an Lodge, vertretenen Standpunkte.

Nach den Anschauungen Hittorf's werden die Concentrationsunterschiede an den Elektroden bekanntlich durch die Verschiedenheit der Wanderungsgeschwindigkeiten der beiden Ionen erklärt. Strömt nun der Elektrolyt mit oder gegen den elektrischen Strom, so wird in beiden Fällen im Durchschnitte das eine Ion stets um ebensoviel beschleunigt werden, als das andere verzögert; somit bleibt die Summe der Wanderungsgeschwindigkeiten beim strömenden Elektrolyt ebenso gross, als beim ruhenden, d. h. die Leitfähigkeit des Elektrolyten, die ja der Summe aus den Ionengeschwindigkeiten proportional ist, darf sich durch das Strömen nicht ändern.

Eine von der Hittorf'schen Anschauung abweichende Ansicht über die Concentrationsänderung hat sich Arrhenius zurechtgelegt. Er denkt sich einen Elektrolyten ausser aus den gewöhnlichen chemischen Molekeln auch noch aus anderen, von den letzteren verschiedenen »elektrolytischen Molekeln« bestehend. Und zwar besteht der Unterschied der beiden Arten von Molekeln darin, dass immer »mehrere chemische Molekeln« zu »einer elektrolytischen Molekel« verbunden sind. Bezeichnet man also mit a und k das Anion und Kation des Elektrolyten, so schreibt sich die »chemische« Molekel ak, die »elektrolytische« hingegen — um beim einfachsten Falle zu bleiben — a_2k_2. Nun sind offenbar zwei Fälle einer Elektrolyse möglich: entweder es zersetzt sich die elektrolytische Molekel im Sinne der Gleichung:

$$a_2k_2 = a + ak_2, \qquad 1)$$

[1] J. Bosi, Sulla resistenza elettrica delle soluzioni saline in movimento Nuovo Cimento, ser. IV, tom V.

[2] Referat hierüber: Journal de Physique, 2 série, tome VI, p. 433.

dann erscheint an der Anode das Anion a, während an der Katode der Complex ak_2 erscheint, der dorten in das Kation k und die chemische Molekel ak zerfällt. In diesem Falle findet sonach eine Concentrationserhöhung an der Katode statt. Ganz analog erklärt sich auch die Concentrationserhöhung an der Anode, wenn man sich den Zerfall der elektrolytischen Molekeln nach der Gleichung:

$$a_2k_2 = k + a_2k \qquad 2)$$

vor sich gehend denkt.

Den Einfluss der Strömung auf den Widerstand eines Elektrolyten, der sich in der eben geschilderten Weise verhält, ergibt eine Überlegung, die von einem ähnlichen Grundgedanken ausgeht, wie die an früherer Stelle erörterte Bemerkung Grotrian's.

Es soll z. B. die Zersetzung des Elektrolyten nach der Gleichung 1) erfolgen, also der Elektrolyt eine Concentrationszunahme an der Katode erfahren. Dann bewegt sich in der positiven Stromrichtung stets der Complex ak_2. Dieser Complex erfährt nun vermöge seines grösseren Volumens und seiner grösseren Masse einen bedeutenderen Bewegungswiderstand im Lösungsmittel als das einzelne Ion a. Dieser Bewegungswiderstand verhält sich aber dem Strömen gegenüber in ganz entgegengesetzter Weise, als der von Grotrian eingeführte Reibungswiderstand, da das Strömen des Elektrolyten auf den mit grösserem Bewegungswiderstand behafteten Complex stets von geringerer Wirkung sein wird, als auf das einzelne und darum beweglichere Ion. Wenn also Strom und Elektrolyt gleichgerichtet fliessen, wird ak_2 in geringerem Maasse beschleunigt werden, als a verzögert wird; sonach nimmt der Strom ab, der Widerstand zu. Und umgekehrt wird, wenn Strom und Elektrolyt in entgegengesetztem Sinne sich bewegen, ak_2 in geringerem Maasse verzögert, als das Ion a beschleunigt wird; der Strom nimmt zu, der Widerstand also ab. Ganz ähnlich lässt sich für Elektrolyte, die eine Concentrationserhöhung an der Anode erfahren, voraussagen, dass ein dem Strome gleichgerichtetes Fliessen eine Widerstandsabnahme hervorbringen wird, während eine Widerstands-

zunahme eintreten muss, wenn Strom und Elektrolyt entgegengerichtet fliessen. Endlich ist leicht ersichtlich, dass bei Elektrolyten, die keinerlei Concentrationsänderungen erfahren, deren Ionen also offenbar den gleichen Bewegungswiderstand erfahren, auch keine Widerstandsänderung durch das Strömen bewirkt werden kann. Zu bemerken ist noch, dass in den Fällen, wo das Strömen des Elektrolyten eine Widerstandszunahme, beziehungsweise -Abnahme hervorbringt, dieselben von gleicher Grösse sein müssen.

Entsprechend den drei nach der Arrhenius'schen Hypothese möglicherweise eintretenden Fällen wählt Herr Bosi für seine Untersuchungen — die sich nur auf wässerige Salzlösungen erstrecken — Salze, die eine Concentrationszunahme an der Anode erfahren (Zinksulfat und Kupfersulfat), dann ein Salz, das keinerlei Concentrationsänderungen unterliegt (Kaliumsulfat), und endlich Salze, bei denen eine Concentrationszunahme an der Katode statthat (Kaliumnitrat und Kaliumchlorat). Ehe ich jedoch zu den Resultaten des Herrn Bosi übergehe, will ich gleich an dieser Stelle die Versuchsanordnung schildern, deren sich Herr Bosi bediente und die ich wegen ihrer ausserordentlichen Zweckmässigkeit auch bei meinen Untersuchungen anwandte.

Die ganze Vorrichtung bestand, wie Fig. 1 zeigt, aus der Strömungsröhre rr', die etwas über 1 *m* lang war und deren Querschnitt 1 cm^2 betrug. Diese Röhre hatte drei seitliche Ansätze *a*, *b*, *c*, von denen *a* und *c* zur Aufnahme der Heberenden zweier unpolarisirbarer (Paalzow'scher) Elektroden P und P' dienten, während in den Ansatz *b* ein Thermometer eingeführt war. Die Heberenden der Elektroden P und P' hatte Herr Bosi möglichst capillar ausgezogen, um eine Vermengung des Zinksulfats der Elektroden mit dem zu untersuchenden Elektrolyt zu verhindern. Die eigentliche Strömungsvorrichtung bestand in zwei Glasballons, welche mittelst durchbohrter Korke bei r und r' an die Röhre rr' angeschlossen waren, und aus einem System von Glasröhren und T-Stücken, die in der gezeichneten Weise durch Schläuche und Schlauchstückchen verbunden waren; bei *i*, *j*, *k*, *l* und *m* sassen Quetschhähne. Der Hahn bei *m* schloss den Ausflussschlauch einer Mariotte'schen

Flasche. Die Art, wie die geschilderte Vorrichtung functionirt, ist aus der Zeichnung leicht zu ersehen. Soll z. B. der Elektrolyt die Röhre rr' von links nach rechts durchströmen, so öffnet man die Hähne m, j und l, während man bei i und k sperrt. Es strömt dann der Elektrolyt unter dem constanten Drucke der

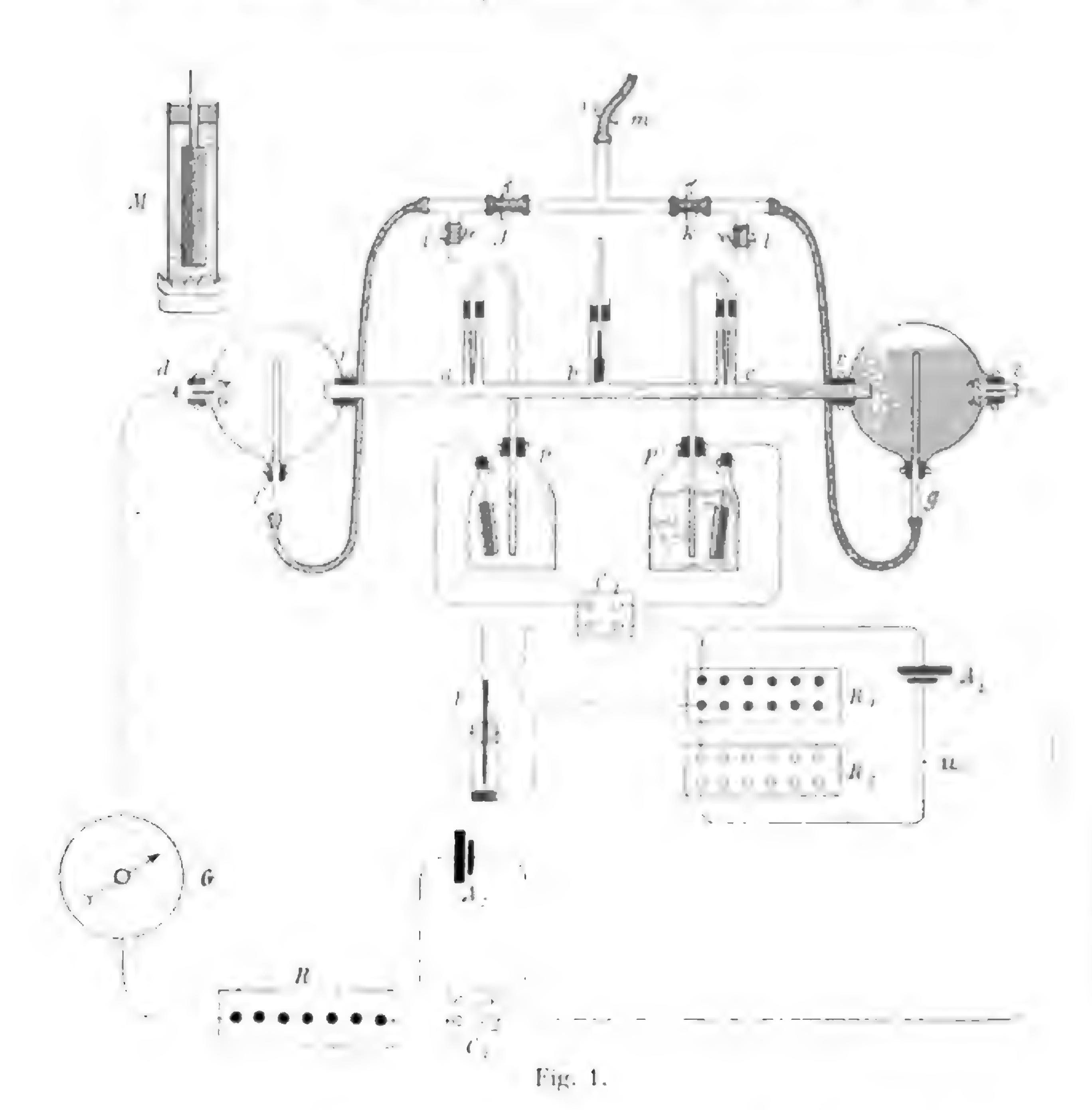


Fig. 1.

Mariotte'schen Flasche über: m, j und f in den linken Ballon und aus diesem, in dem verlangten Sinne, durch die Röhre rr' in den rechten Ballon, welchen er durch die eingeführte Glasröhre und den Schlauch bei g verlässt, um bei l abzufliessen.

Die beiden Ballons enthalten überdies noch die Ansätze bei d und c; dieselben dienen zur Aufnahme der beiden

unpolarisirbaren Elektroden des Hauptstromkreises, die in der bei *M* gezeichneten Weise construirt sind. Sie bestehen einfach aus einer Glasröhre, die mit thierischer Membran zugebunden und mit concentrirter Zinksulfatlösung gefüllt ist. In diese Glasröhre wird mittelst eines durchbohrten Korkes ein wohlamalgamirter Zinkstab eingeführt.

Nunmehr ist der Vorgang bei der Untersuchung leicht einzusehen. Mittelst der Elektroden bei *d* und *e* und der Säule A_2 — bei Herrn Bosi ein Daniell-Raoult'sches Element — wird zunächst bei ruhendem Elektrolyt der Hauptstromkreis geschlossen; in demselben befinden sich ausserdem noch der Commutator C_2, der Widerstandskasten *R* und das D'Arsonval-Galvanometer *G*, welch' letzteres in Verbindung mit dem Rheostaten *R* zur Ausgleichung eventueller Änderungen der Stromstärke im Hauptstromkreise dient. Es wird sich nun zwischen den Punkten *a* und *b*, entsprechend dem Widerstande des Stückes *ab*, eine Potentialdifferenz festsetzen, die mittelst der Paalzow'schen Elektroden *P*, *P'* abgenommen und durch den Commutator C_1 einerseits dem Capillarelektrometer *E*, anderseits der einen Klemme des Widerstandskastens R_1 zugeführt wird. Der Widerstandskasten R_1 ist vollkommen gestöpselt, sonach widerstandslos; seine zweite Klemme ist mit dem zweiten Pol des Elektrometers und mit der einen Klemme des Rheostaten R_2 verbunden, der mit R_1 zusammen in dem — vorläufig durch den Unterbrecher *u* noch geöffneten — Stromkreise der Säule A_1 (gleichfalls ein Daniell-Raoult'sches Element) eingeschaltet ist. Somit wird dem Elektrometer die gesammte zwischen *a* und *b* bestehende Potentialdifferenz zugeführt, auf welche es mit einem Ausschlage reagirt. Mittelst der Säule A_1 und den beiden völlig gleichen Widerstandskästen R_1 und R_2, von welchen R_1 vollkommen gestöpselt ist, während in R_2 alle Stöpsel gezogen sind, kann nun dadurch, dass von R_1 die nöthige Anzahl von Stöpseln in die correspondirenden Löcher von R_2 transportirt wird, in bekannter Weise zwischen den Klemmen des Rheostaten R_1 eine Potentialdifferenz erzeugt werden, welche gleich gross und entgegengesetzt ist der zwischen *a* und *b* bestehenden Potentialdifferenz. Diese beiden Potentialdifferenzen werden sich nun compensiren, was daran

kenntlich sein wird, dass das Elektrometer wieder seine Nullstellung einnehmen wird.

Ist nun i die Stromstärke im Hauptstromkreis, w der Widerstand des Stückes ab, ferner i' die Stärke im Stromkreise der Säule A_1 und w' der in R_1 eingeschaltete Widerstand, so muss für den Fall, dass das Elektrometer keinen Ausschlag geben soll, die Gleichung gelten:

$$wi = w'i',$$

woraus sich ergibt:

$$w = \frac{i'}{i} w'.$$

Der Widerstand des Stückes ab ist also proportional dem in R_1 eingeschalteten Widerstande. Es ist klar, dass sich dann — wofern man nur den Proportionalitätsfactor $\frac{i'}{i}$ constant erhält — die verschiedenen Widerstände, die das Stück ab bietet, wenn die Flüssigkeit ruht oder sich in irgend einem Sinne bewegt, mittelst der entsprechenden Widerstände w' messen lassen. Demzufolge gibt Herr Bosi stets die Zahlen w' an als Maass der Widerstände des Stückes ab.

Ehe ich mich nun zu den Resultaten des Herrn Bosi wende, will ich gleich an dieser Stelle eine kurze Beschreibung meiner eigenen Versuchsanordnung geben, die sich nur in wenigen, unwesentlichen Punkten von der eben geschilderten Anordnung unterschied. Ich wich zunächst darin ab, dass ich (Fig. 2) als Nullinstrument kein Capillarelektrometer, sondern ein äusserst empfindliches D'Arsonval-Galvanometer (G_1) mit Spiegelablesung benützte. Ferner benützte ich zur Abzweigung der compensirenden Potentialdifferenz nicht die beiden Rheostaten R_1 und R_2, sondern einen Brückendraht BB'; die Maasszahl w' des Widerstandes des Stückes ab ist also bei mir durch das auf dem Brückendraht vom Schleifcontacte abgegrenzte Stück BD, also in Centimetern, ausgedrückt. Weiters hatte ich die Daniell-Raoult'schen Elemente, die Herr Bosi in A_1 und A_2 verwendete, durch Accumulatoren ersetzt, die den genannten Elementen an Constanz gewiss nicht nachstanden. Die eben genannten Abweichungen sind sicherlich gänzlich unwesentlich.

hingegen könnte es zunächst als ein wesentlicher Unterschied erscheinen, dass ich die Heberenden der Paalzow'schen Elektroden nicht wie Herr Bosi zu möglichst feinen Capillaren auszog, sondern dieselben, nachdem ich sie bis auf eine ungefähr 1 *mm* weite Mündung zusammengeschmolzen hatte, in der bei *N* (Fig. 2) gezeichneten Weise mittelst eines Schlauchstückchens und eines mit thierischer Membran zugebundenen Glasröhrchens abschloss. Ich erreichte so eine völlig mühelose Füllung der Heber und verhinderte auf diese Weise — vielleicht in noch höherem Maasse, als Herr Bosi mit den Capil-

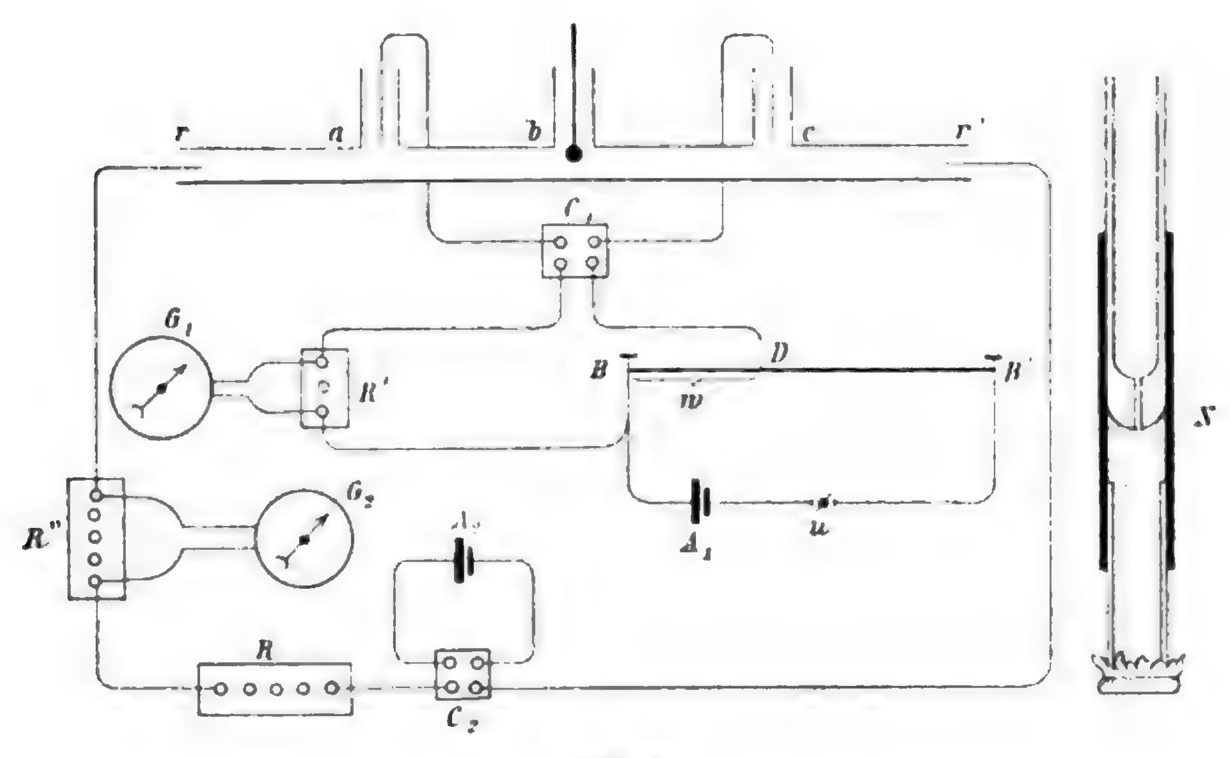


Fig. 2.

laren — eine Vermengung des Zinksulfats der Elektroden mit dem zu untersuchenden Elektrolyt. Anderseits erzielte ich bei dieser Beschaffenheit der Heberenden auch eine bedeutendere Genauigkeit, denn da ich ein Galvanometer als Nullinstrument anwandte, so wäre der grosse Widerstand der Capillaren sehr hinderlich gewesen. Wie spätere Versuche zeigten, war aber auch diese Abweichung nicht wesentlicher Art. Was die Strömungsvorrichtung und alles Sonstige anlangt, so schloss ich mich völlig Herrn Bosi an.

Ich wende mich nunmehr zu den Untersuchungen des Herrn Bosi. Derselbe überzeugte sich zunächst durch Vor-

versuche von dem Nichtvorhandensein gewisser möglicher Fehlerquellen. Hervorzuheben wäre da: die Polarisationslosigkeit sämmtlicher Elektroden, die Constanz der beiden Säulen A_1 und A_2, das vollständige Fehlen von Strömungsströmen und die gute Isolation der einzelnen Anordnungsbestandtheile, die wegen der Empfindlichkeit des Capillarelektrometers unerlässlich ist.

Herr Bosi fand für die fünf, an früherer Stelle schon genannten Salzlösungen im Mittel folgende Widerstände, je nachdem der Elektrolyt ruhte, sich mit oder gegen den Strom bewegte:

Lösung von Zinksulfat in destillirtem Wasser (1 G. P.).

Elektrolyt	Ruhend	Gleichgerichtet mit dem Strome	Entgegengerichtet dem Strome
w'	206·21	201·14	235·31

Lösung von Kupfersulfat in destillirtem Wasser (5 G. P.).

Elektrolyt	Ruhend	Gleichgerichtet mit dem Strome	Entgegengerichtet dem Strome
w'	754·08	748·56	769·42

Lösung von Kaliumnitrat in destillirtem Wasser (10 G. P.).

Elektrolyt	Ruhend	Gleichgerichtet mit dem Strome	Entgegengerichtet dem Strome
w'	179·48	182·93	177·77

Lösung von Kaliumchlorat in destillirtem Wasser (4 G. P.).

Elektrolyt	Ruhend	Gleichgerichtet mit dem Strome	Entgegengerichtet dem Strome
w'	540·77	552·39	534·74

Eine Lösung von Kaliumsulfat in Wasser (8 G. P.) zeigte, wenn in Strömung versetzt, keinerlei merkliche Widerstandsänderungen.

Es ergab sich somit: Zinksulfat und Kupfersulfat, also diejenigen Salze, welche eine Concentrationszunahme an der Anode erleiden, erfahren eine Widerstandsabnahme — und zwar circa 2·5%, beziehungsweise circa 0·7% —, wenn Strom und Elektrolyt gleichgerichtet sich bewegen, und sie erfahren eine Widerstandszunahme — und zwar circa 14·1%, beziehungsweise circa 2% —, wenn Strom und Elektrolyt in entgegengesetztem Sinne fliessen.

Kaliumnitrat und Kaliumchlorat, also Salze, welche eine Concentrationszunahme an der Katode erleiden, erfahren eine Widerstandszunahme — und zwar circa 1·9%, beziehungsweise 2·2% —, wenn Strom und Elektrolyt gleichgerichtet fliessen, und sie erfahren eine Widerstandsabnahme — und zwar circa 0·9%, beziehungsweise 1·1% —, wenn Strom und Elektrolyt entgegengesetzte Bewegungsrichtung haben.

Salze, die wie Kaliumsulfat, keinerlei Concentrationsänderungen erleiden, erfahren auch keinerlei Widerstandsänderungen. Bemerkt sei endlich noch, dass die Strömungsgeschwindigkeit bei sämmtlichen Versuchsreihen 6·66 *m* in der Minute betrug.

Herr Bosi gelangt somit zu dem Schlusse, dass diese Resultate wohl direct gegen die Hittorf'sche Anschauung sprechen, allein auch der Arrhenius'schen Hypothese nicht vollständig genügen; denn es findet zwar eine qualitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment statt, aber keine quantitative, da die Arrhenius'sche Theorie eine Widerstandszunahme und -Abnahme von gleicher Grösse verlangt, was keineswegs zutrifft.

Der ursprüngliche Zweck meiner eigenen Arbeit war, die Untersuchungen des Herrn Bosi, die sich, wie erwähnt, nur auf Salzlösungen erstreckten, auch auf wässerige Lösungen von Säuren und Basen auszudehnen.

Zu dieser Ausdehnung der Untersuchung auf Lösungen der genannten Art veranlasste mich zunächst die Vermuthung,

dass die Säuren und Basen, insoferne sie sich hinsichtlich der Concentrationsänderungen den Salzlösungen ähnlich verhalten, auch hinsichtlich der Widerstandsänderungen beim Strömen ein ähnliches Verhalten zeigen dürften.

Sodann schien mir eine gewisse innere Nichtübereinstimmung in den Resultaten des Herrn Bosi — wenigstens was das Zink und Kupfersulfat betrifft — eine Ausdehnung der Untersuchungen wünschenswerth erscheinen zu lassen. Bei Zink und Kupfersulfat sind nämlich die Verhältnisse der Concentrationsänderungen auch quantitativ ausserordentlich ähnlich. So hat z. B. die Überführungszahl des Kations für die Normallösungen beider Salze nahezu den gleichen Werth, nämlich circa 0·270.[1] Es wäre nun wohl zu erwarten gewesen dass auch die Widerstandsänderungen, die ja nach den Resultaten des Herrn Bosi durch die Concentrationsänderungen bedingt erscheinen, einander quantitativ nahestehen. Allein dies ist, wie ein Blick auf die Widerstandszahlen der Untersuchung des Herrn Bosi lehrt, keineswegs der Fall, da das Zinksulfat eine Widerstandszunahme von circa 14·1% aufweist, das Kupfersulfat aber nur eine solche von 2%; auch die bezüglichen Widerstandsabnahmen von 2·5%, beziehungsweise 0·7% liegen recht weit auseinander.

Um festzustellen, ob diese Nichtübereinstimmung in der Abhängigkeit der Widerstandsänderungen von den Concentrationsänderungen allgemein sei oder ob sich nicht doch, wenn nur mehrere Substanzen der Untersuchung unterworfen werden, ein gesetzmässiger Zusammenhang zwischen Concentrationsänderung und Widerstandsänderung beim Strömen zeigt, beschloss ich zunächst, eine Lösung zu untersuchen, deren Überführungsverhältnisse denen der genannten Salze ähnlich sind. Und zwar wählte ich eine Lösung von Kalilauge in Wasser (3 G. P.), da das Kation derselben bei der gewählten Concentration ebenfalls beiläufig die Überführungszahl 0·270 besitzt.

---

[1] Diese und sämmtliche in der Folge angeführten Überführungszahlen sind dem »Lehrbuche der allgemeinen Chemie« von Ostwald, II. Bd., I. Th., S. 606 entnommen, beziehungsweise aus den dorten angegebenen Werthen, für die in Rede stehenden Concentrationen interpolirt.

Was die beiden von Herrn Bosi untersuchten Salze, die eine Concentrationszunahme an der Katode erfahren (Kaliumnitrat und Kaliumchlorat) betrifft, so lässt sich bei denselben wohl eine Beziehung zwischen Concentrationsänderung und Widerstandsänderung wahrnehmen. Denn Kaliumnitrat, dessen Kation bei der gewählten Concentration eine Überführungszahl von circa 0·510 hat, weist eine Widerstandszunahme, beziehungsweise Abnahme von 1·9% und 0·9% auf, während Kaliumchlorat, dessen Kation eine Überführungszahl hat, die ungefähr von der Grösse 0·550 ist, auch grössere Widerstandsänderungen aufweist; die Zunahme beträgt hier 2·2%, die Abnahme 1·1%. Allein hier waren es wiederum andere Gründe, die für eine Weiterführung der Untersuchungen sprachen. Erstens ist in dem Verhältnisse der Widerstandsabnahme zur Widerstandszunahme eine gewisse Constanz unverkennbar; es beträgt nämlich die Abnahme in beiden Fällen nahezu genau die Hälfte der Zunahme. Da wäre es nun interessant gewesen, zu sehen, ob dies auf einer Gesetzmässigkeit beruht. Zweitens sind die Concentrationsänderungen der beiden letztgenannten Salze, wie die geringen Abweichungen der Überführungszahlen von 0·500 zeigen, verhältnissmässig gering. Es schien mir nun nicht unwahrscheinlich, dass Lösungen, die ebenfalls eine Concentrationszunahme an der Katode — aber in höherem Maasse — zeigen, auch grössere Widerstandsänderungen aufweisen und in Folge dessen die vermuthete Gesetzmässigkeit in dem Verhältnisse von Zunahme und Abnahme dann deutlicher hervortritt.

Solche Lösungen fand ich nun in den wässerigen Säurelösungen. Ich wählte zur Untersuchung eine Schwefelsäurelösung (3 G. P.) — die Überführungszahl des Kations beträgt circa 0·770 — und eine Salzsäurelösung (ebenfalls 3 G. P.), deren Kation eine Überführungszahl von circa 0·820 hat.

Endlich hatte ich auch noch vor, zu untersuchen, inwieweit sich ein Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit auf die Grösse der Widerstandsänderungen feststellen lässt.

Meine Versuchsanordnung, die in allen wesentlichen Punkten mit der Anordnung des Herrn Bosi übereinstimmte, habe ich schon an einer früheren Stelle geschildert und will

hier nur noch bemerken, dass auch die Dimensionen meiner Strömungsröhre völlig übereinstimmten mit den von Herrn Bosi angegebenen, ebenso wie die von mir durchgängig angewandte Geschwindigkeit von 7 *m* in der Minute die Strömungsgeschwindigkeit bei den Versuchen des Herrn Bosi nur um Weniges übertrifft. An Temperaturangaben gebe ich für jede Versuchsreihe einen Mittelwerth, was dadurch gerechtfertigt ist, dass die Temperatur während der einzelnen Versuche nur äusserst wenig schwankte.

Was nun den Vorgang bei den Messungen selbst anlangt, so machte ich zunächst folgenden Vorversuch. Ich bestimmte zuerst approximativ den Widerstand, den jede der zu untersuchenden Lösungen in der Röhre rr' im Hauptstromkreise bot. Sodann bestimmte ich für jede Lösung diejenige Widerstandsänderung — hervorgebracht mittelst des Rheostaten R —, welche am Galvanometer G_2 (Fig. 2) einen eben noch merklichen Ausschlag hervorbrachte. Ich konnte so für jede der zu untersuchenden Lösungen das Minimum der Widerstandsänderung, die ich am Galvanometer des Hauptstromkreises noch hätte merken müssen, percentuell annähernd bestimmen. Es zeigte sich, dass ich bei einer jeden der drei untersuchten Lösungen eine Widerstandsänderung von noch nicht 1% leicht hätte merken müssen. Da nun die vermutheten Widerstandsänderungen voraussichtlich noch grösser ausfallen mussten, so schien mir schon die Galvanometerschaltung im Hauptstrome geeignet, um wenigstens qualitativen Aufschluss über etwaige Widerstandsänderungen zu erhalten.

Ich unternahm daher für jede der drei Lösungen zunächst den folgenden Versuch. Ich schloss den Hauptstrom bei ruhendem Elektrolyt; es nahm dann das Galvanometer G_2 eine bestimmte Stellung ein, die es festhielt. Nun liess ich den Elektrolyt einmal mit dem Strome fliessen, das anderemal gegen den Strom. Es zeigte sich, dass in keinem dieser Fälle bei keiner der drei untersuchten Substanzen das Galvanometer seine anfänglich angenommene Lage in merklicher Weise veränderte, somit die Widerstandsänderungen, wenn solche überhaupt vorkamen, jedenfalls beträchtlich weniger als 1% betrugen.

Wohl traten in einzelnen sehr seltenen Fällen beim Strömen nicht unbeträchtliche Galvanometerablenkungen auf, allein dieselben verblieben auch dann noch, wenn die Flüssigkeit wieder zur Ruhe gebracht wurde. Der Ursprung der diese Ablenkungen verursachenden Widerstandsänderungen durfte sonach nicht im Strömen des Elektrolyten gesucht werden, sondern vielmehr mit grosser Wahrscheinlichkeit in Veränderungen, die das Strömen an den Elektroden hervorbrachte. Im Übrigen erfolgte diese Art von Widerstandsänderungen völlig regellos.

Nachdem diese Vorversuche, unerwarteter Weise, ein negatives Resultat ergeben hatten, wandte ich mich den eigentlichen genaueren Untersuchungen zu.

Im Folgenden sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen in detaillirter Weise wiedergegeben. Ich habe hiebei auf die Angaben des Einflusses eventuell auftretender Strömungsströme auf die Zahlen w' verzichtet; denn auch bei Herrn Bosi, der solche Angaben gibt, sind diese Einflüsse nur in den seltensten Fällen von merklicher Grösse. Im Übrigen überzeugte ich mich des Öfteren, dass das Strömen des Elektrolyten allein keinerlei messbaren Strom lieferte. Die einzelnen Messungsreihen wurden in genau derselben Folge durchgeführt wie in der Arbeit des Herrn Bosi, d. h. es wurde der Strom geschlossen und w' für den ruhenden Elektrolyten bestimmt, sodann für den mit dem Strome gleichgerichtet fliessenden und endlich für den dem Strome entgegengerichtet fliessenden. Sodann wurde, als Controle, der Strom umgekehrt und w' wiederum für die drei Fälle bestimmt.

Ich erhielt so die folgenden Tabellen:

Lösung von Kali in destillirtem Wasser (3 G. P.), $t = 18 \cdot 7°$.

I. Strom von rechts nach links.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	88·1	88·25	88·7
»	90	90	89·75
»	88·8	88·8	88·55
»	89·15	89·3	89·2

II. Strom von links nach rechts.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	84·7	85·35	85·7
»	84·95	85·25	85·3
»	84·8	84·75	84·6
»	84·4	84·6	84·55

An den beiden Messungsgruppen I und II fällt zunächst auf, dass die Zahlen w' der Gruppe I sämmtlich um 3 bis 5 Einheiten grösser sind als die Zahlen der Gruppe II. Das sollte natürlich nicht der Fall sein, denn bei der Gruppe II befand sich Alles unter genau denselben Umständen wie bei Gruppe I, nur die absolute Stromrichtung — auf die es natürlich nicht ankommt — war verschieden. Es ist wohl klar, dass der Grund dieser constanten Differenz der Zahlen w' nur in dem Quecksilbercommutator, dem einzigen Bestandtheil der Anordnung, der beim Stromwechsel seinen Widerstand eventuell ändern kann, zu suchen ist. Im Übrigen hat natürlich die Verschiedenheit der absoluten Werthe des w' in den beiden Gruppen nicht den geringsten Einfluss auf die Thatsache, die aus jeder der beiden Messungsgruppen hervortritt, dass nämlich:

»Der Widerstand der untersuchten Kalilauge durch das Strömen, sei es in diesem oder jenem Sinne, in merklicher — geschweige denn gesetzmässiger — Weise nicht geändert wird.«

Thatsächlich sind auch nur in den ersten Reihen der Gruppe I und II namhaftere Widerstandsänderungen, nämlich circa 0·7%, beziehungsweise 1·2% zu verzeichnen, während bei den nachfolgenden Reihen die Änderungen sich in äusserst engen Grenzen halten. Es hat das offenbar darin seinen Grund, dass die Strömung anfangs kleine Änderungen an den Elektroden hervorbringt, während im weiteren Verlaufe eine gewisse Gleichmässigkeit platzgreift.

Lösung von Salzsäure in destillirtem Wasser (3 G. P.), $t = 19°$.

I. Strom von rechts nach links.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	41·8	41·8	41·3
»	42	42	42
»	42·6	42·6	42·55
»	42·8	42·75	42·75

II. Strom von links nach rechts.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	41·6	41·3	41·5
»	41·5	41·1	41·6
»	41	41	41
»	42·4	42·4	42·45

Aus diesen beiden Tabellen ergibt sich übereinstimmend, dass auch eine

»Salzsäurelösung ihren Widerstand in keinerlei Weise ändert, sei es, dass sie mit oder gegen den elektrischen Strom fliesst.«

Und zwar kommt diese Thatsache hier noch klarer zum Ausdruck als bei der Kalilauge, da nunmehr auch die ersten Reihen keine nennenswerthen Widerstandsänderungen zeigen.

Lösung von Schwefelsäure in destillirtem Wasser (3 G. P.), $t = 16°$.

I. Strom von rechts nach links.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	72·5	72·6	72·7
»	72·4	72·6	72·5
»	71·8	71·85	71·85
»	71·5	71·75	71·7

II. Strom von links nach rechts.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
n'	71·4	71·4	71·3
»	70·1	71·2	71·1
»	70·8	70·8	70·75
»	70·45	70·45	70·35

Wie die beiden letzten Tabellen lehren, erleidet also auch eine Schwefelsäurelösung durch das Strömen keinerlei Widerstandsänderungen.

Es führten somit die genauen Untersuchungen zu einem vollständig negativen Resultate, was übrigens nach den Ergebnissen der früher besprochenen Vorversuche zu erwarten stand.

Im Hinblicke auf dieses negative Resultat beschloss ich sowohl von der Untersuchung weiterer Substanzen, als auch von der Untersuchung des Einflusses der Strömungsgeschwindigkeit zunächst abzusehen.

Hingegen ergab sich nunmehr die Nothwendigkeit, in einer anderen Richtung Untersuchungen anzustellen; denn die negativen Resultate meiner Versuche standen in einem gewissen Widerspruche zu den Ergebnissen des Herrn Bosi, aus welchen ja, wie ich an früherer Stelle auseinandersetzte, auch für die von mir untersuchten Lösungen ein positives Resultat abzuleiten war. Ich fühlte mich daher veranlasst, wenigstens einige von den Salzen, welche Herr Bosi untersucht hatte, gleichfalls zu untersuchen, um festzustellen, ob meine Versuchsanordnung unter gleichen Umständen wie bei Herrn Bosi auch zu den gleichen Ergebnissen führt.

Untersucht habe ich zu diesem Zwecke Lösungen von Zinksulfat, Kupfersulfat und Kaliumchlorat; und zwar besassen diese Lösungen dieselbe Concentration, die Herr Bosi angibt.

Zunächst machte ich für alle diese Lösungen wiederum den schon geschilderten Vorversuch im Hauptstromkreise. Das Ergebniss war ein negatives; es zeigte das Galvanometer G_2 keinerlei Widerstandsänderungen an, die sich irgendwie, als

vom Strömen des Elektrolyten herrührend, hätten deuten lassen.

Sodann schritt ich zu den eigentlichen Messungen, die wiederum genau in der schon angegebenen Reihenfolge ausgeführt wurden und deren Resultate nun folgen. Hiebei begnüge ich mich, immer nur Messungsgruppen für eine einzige absolute Stromrichtung, die ja ohnehin völlig einflusslos ist, anzugeben und aus den sehr zahlreichen, nur äusserst wenig von einander abweichenden Gruppen je eine herauszugreifen:

Lösung von Zinksulfat in destillirtem Wasser (1 G. P.), $t = 15°$.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	152·75	153·5	152·8
»	152·75	153·25	152·75
»	152·75	153·25	152·75

Lösung von Kupfersulfat in destillirtem Wasser (5 G. P.), $t = 17°$.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	75·5	76·75	76·75
»	76·2	76·5	76·5
»	76·2	76·2	76·2

Lösung von Kaliumchlorat in destillirtem Wasser (4 G. P.), $t = 15°$.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	135	135	135·25
»	135·4	135·5	135·5
»	135·6	135·7	135·7

Wie man sieht, lässt sich auch aus diesen Tabellen keinerlei Widerstandsänderung herauslesen. Eine Ausnahme könnte vielleicht die Tabelle für Zinksulfat machen; dieselbe zeigt eine regelmässige Widerstandszunahme von circa 0·5% im Maximum, allein, im Gegensatze zu den Resultaten des Herrn Bosi, gerade in dem Falle, wo Strom und Elektrolyt gleichgerichtet fliessen. Ich bin natürlich weit entfernt, hierin ein Gesetz erblicken zu wollen, und zwar aus dem Grunde, weil diese Tabelle die einzige unter den vielen für Zinksulfat zusammengestellten ist, die eine Widerstandsänderung aufweist. Der Grund dieser Widerstandsänderung darf somit keineswegs im Strömen gesucht werden, sondern liegt in irgend einer zeitlichen Störung; und um den eventuellen Einfluss solcher Störungen zu illustriren, habe ich für Zinksulfat gerade diese Tabelle herausgegriffen.

Ich war damit zu einem Resultate gelangt, das den Ergebnissen des Herrn Bosi direct widerspricht; und zwar war ich zu diesem Resultate mittelst einer Versuchsanordnung gelangt, welche in allen wesentlichen Punkten der Anordnung des Herrn Bosi folgte. Zunächst war es nun allerdings noch möglich — wenngleich auch höchst unwahrscheinlich —, dass die geringen und unwesentlichen Abweichungen meiner Versuchsanordnung diese Nichtübereinstimmung verschuldet hatten. Ich beseitigte daher auch noch diese geringen Abweichungen, d. h. ich ersetzte die von mir angewandten Heberenden durch Capillaren, die ich aus einem Thermometerrohre zu äusserster Feinheit auszog, und das Galvanometer G_1 durch ein Capillarelektrometer von beträchtlicher Empfindlichkeit. Die Untersuchungen mit dieser Anordnung, die nun auch formal in allen Details, soweit Herr Bosi solche gibt, mit seiner Versuchsanordnung übereinstimmte, beschränkte ich auf die Zinksulfatlösung, die ja nach Herrn Bosi weitaus die grössten Widerstandsänderungen aufweist. Es ergab sich:

Lösung von Zinksulfat in destillirtem Wasser (1 G. P.), $t = 22°$.

I. Strom von rechts nach links.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	119·5	118	119
»	120	118·5	118·5
»	119·5	118·5	118·5
»	117·5	118	118

II. Strom von links nach rechts.

Elektrolyt	ruhend	gleichgerichtet	entgegengerichtet
w'	121	119·75	120
»	120	119·75	119·75
»	120·5	119·75	119·75
»	120·5	119·75	119·5

Diese Tabellen zeigen wiederum, dass Änderungen des Widerstandes nur in so ausserordentlich geringem Grade erfolgen, dass man füglich von einem Einflusse des Strömens auf den elektrolytischen Widerstand nicht sprechen kann.

Ich stehe somit mit meinen Resultaten in vollem Widerspruche zu Herrn Bosi. Zur Erklärung dieses Widerspruches bleibt natürlich nur die Annahme übrig, dass bei einer der Arbeiten Umstände — allerdings mir völlig unbekannter Art — mitgespielt haben, die bei der anderen nicht in Frage kamen.

Was die Wahrscheinlichkeit der beiden Resultate anlangt, so hat mein Ergebniss den Umstand für sich, dass es sich voll und ganz der Hittorf'schen Theorie anschliesst, während sich Herrn Bosi's Resultat keiner der vorhandenen Theorien ganz

anzuschliessen vermag. Auffallend allerdings bleibt an Herrn Bori's Resultat die qualitativ unleugbar scharf ausgesprochene Gesetzmässigkeit.[1]

Es erscheint somit im Hinblick auf diese meine Untersuchungen die Frage nach den Widerstandsänderungen bewegter Elektrolyte noch immer controvers.

---

[1] Was die Übereinstimmung der Resultate mit der Theorie anlangt möchte ich noch bemerken, dass mir die Überlegungen des Herrn Bosi, mittelst welcher er die verschiedenartigen Einflüsse der Strömung des Electrolyten auf die Jonengeschwindigkeit nebst den daraus sich ergebenden Widerstandsänderungen ableitet und welche ich im ersten Theile dieser Arbeit — wenn auch ausführlicher als Herr Bosi selbst so doch unzweifelhaft in seinem Sinne — auseinandersetzte, nicht völlig überzeugend vorkommen; dasselbe gilt auch von den, gleichfalls referirten Grotrian'schen Ansichten. Es erscheint somit auch die theorethische Grundlage der Arbeit des Herrn Bosi als nicht unantastbar.

Während diese Arbeit im Drucke war erfuhr ich durch eine Bemerkung des Herrn Dr. A. Amerio im »Nuovo Cimento, Ser. IV, tom. X; p. 276« von einer schon im Jahre 1898 von J. B. Hayward (Physical Review, Vol. 7, p. 246) ausgeführten, mir leider entgangenen Arbeit, die sich mit der Controle der Bosi'schen Versuche befassend zu negativen Resultaten gelangt und sich somit in Übereinstimmung mit meinen Untersuchungen befindet.

Das ballistische Problem auf Grundlage der Versuche und der Integrabilität

(äussere Ballistik)

von

E. Oekinghaus in Königsberg i. Pr.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. October 1899.)

Die Versuche zur Ermittelung des Luftwiderstandes und seines Einflusses auf die Geschossbewegung haben zu einer Reihe von Luftwiderstandsgesetzen geführt, die zwar innerhalb ihres Giltigkeitsbereiches die Erfahrungsthatsachen ungefähr wiederzugeben vermögen, keineswegs aber den ganzen Geschwindigkeitsbereich allgemein giltig umfassen. Am besten begründet ist noch immer die Newton'sche zweite Potenz der Geschwindigkeit. Dieselbe reicht auch für Geschwindigkeiten bis zu etwa 300 *m* und, wie es scheint, für sehr hohe Geschwindigkeiten über 500 *m* ganz gut aus, versagt aber für den Bereich zwischen 300—500 *m*, der bekanntlich praktisch sehr oft in Frage kommt. Hier nun leistete die dritte und vierte Potenz schon bessere Dienste, weshalb dieselben vielfach von den Ballistikern in voller Ausdehnung der Rechnung zu Grunde gelegt wurden. Die Widerstandscurve zeigt sich also durchaus nicht so willfährig, sich an ein ihr untergelegtes Gesetz zu binden. Sie folgt ihm nur streckenweise und nöthigt zur Annahme zum Theil höherer, zum Theil tieferer Potenzen, die zusammengefasst eine Scala von der ersten bis zur sechsten in ganzen und gebrochenen Exponenten darstellt. So nothwendig die Kenntniss dieser Thatsachen war, so schwierig wurde hiedurch der Aufbau der Theorie, und eine einheitliche Darstellung im weitesten Rahmen schien

nahezu ausgeschlossen. Man kann sagen, dass jeder Ballistiker für seine Zwecke eine neue Potenz einführte, die je nach der Autorität des Vertreters eine Zeitlang die praktischen Versuche und Rechnungsmethoden mehr oder weniger beeinflusste, um dann anderen Gesetzen Platz zu machen. Damit wurde die Theorie immer weitläufiger und unsicherer, wozu noch kam, dass die moderne Technik weitere Factoren einstellte, die überhaupt den ganzen theoretischen Rechnungsprocess in Frage zu stellen drohten, womit die Gefahr verknüpft war, wieder dem reinen Empirismus zu verfallen.

Indessen so schlimm liegt die Sache doch nicht. Man kannte eben die allerdings nur empirisch zu findende Widerstandscurve noch nicht, ohne deren Kenntniss eine befriedigende Lösung des ballistischen Problems unmöglich ist. Die in den letzten Jahrzehnten hierüber angestellten Untersuchungen haben manche neue und werthvolle Ergebnisse gezeitigt, die auch der Theorie gestatten, sie einem analytischen Process zu unterwerfen, wiewohl das Problem nur durch Annäherungen gelöst werden kann.

Den ersten praktischen Schritt zur Auffindung der Widerstandscurve dürfte wohl der russische General und Ballistiker Majevski gethan haben, der unter Benützung der Krupp'schen und eigenen Schiessversuche und der Tabellen des englischen Ballistikers Bashforth diese Curve als gebrochenen Linienzug darstellte und die Nothwendigkeit nachwies, die Flugbahn den entsprechenden Geschwindigkeitszonen gemäss in Theile zu zerlegen und einzeln zu berechnen. In daran anschliessender Weise stellte die Krupp'sche Gussstahlfabrik die aus ihren zahlreichen von Prehn geleiteten Schiessversuchen gewonnenen, erweiterten und vervollständigten Resultate tabellarisch zusammen und bilden dieselben die unentbehrliche Grundlage für die praktischen und theoretischen Untersuchungen über ballistische Verhältnisse. Wir haben allen Grund, anzuerkennen, in welch' vorurtheilsfreiester Weise Krupp seine sich bekanntlich durch besondere Genauigkeit auszeichnenden Resultate und Schiessversuche den Forschern zur Verfügung stellt.

In weiterer und erfolgreicher Anwendung und theoretischer Bearbeitung sowohl dieser als auch der von dem niederlän-

dischen Ballistiker Hojel geleiteten Versuche unter Berücksichtigung der genannten Zoneneintheilung hat der italienische Oberst und Ballistiker Siacci den analytischen Ausdruck der Widerstandscurve durch passende Combination von Hyperbeln abzuleiten versucht. Auf Grund dieser seiner neuesten Formel sind von ihm verbesserte Tabellen entworfen worden, deren Werth unbestreitbar ist, da sie es dem Techniker ermöglichen, die von ihm gewünschten Data oder die Elemente der Flugbahn in verhältnissmässig kurzer Zeit zu berechnen. Wiewohl die aus Krupp'schen, russischen, englischen und holländischen Versuchen abgeleitete Curve in Folge mancher in der Sache liegenden Unstimmigkeiten wohl noch nicht die definitive sein mag, dürfte sie als Mittelcurve dem rechnerischen Verfahren umsomehr genügen, als man durch passende Coëfficienten die Resultate der einen Versuchsgruppe leicht auf eine andere übertragen kann.

Wie zu erwarten war, ist die von Siacci entwickelte Widerstandsformel ziemlich complicirt, was auch aus der nachstehenden Darstellung der Beschleunigungsformel hervorgeht:

$$r = \delta \frac{i}{C} F(v) \quad [1]$$

$$F(v) = 0\cdot 2002\, v - 48\cdot 05 + \sqrt{(0\cdot 1648\, v - 47\cdot 95)^2 + 9\cdot 6} + \frac{0\cdot 0442\, v(v-300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}.$$

Man übersieht sogleich, dass sie eine Integration in geschlossener Form nicht gestattet.

Die Integration ist also nur mittelst Quadraturen möglich und genügt auch zu dem vorbedachten Zweck, sofern man sich lediglich auf die Berechnung der Tabellen beschränkt.

Vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet würde es freilich wünschenswerther sein, einen Ausdruck für die Widerstandscurve zu gewinnen, der einer Integration der Differential-

[1] Siehe Revista d'Artiglieria e Genio 1896. Archiv f. d. Art. und Ing.-Officiere, 1896 und 1897.

gleichungen der ballistischen Bewegung zugänglich und genau genug wäre, selbst innerhalb eines möglichst grossen Geschwindigkeitsbereiches den Erfahrungsthatsachen, beziehungsweise den errechneten Tabellenwerthen zu genügen.

Im Nachfolgenden haben wir den Versuch gemacht, die genannte Curve in einfacherer Form, und zwar auf verschiedenen Wegen derart zu formuliren, dass sie die Möglichkeit einer Integration nicht ausschliesst und zu geschlossenen Resultaten führt. Es liegt nicht die Absicht vor, etwas Besseres als die genannten Forscher leisten zu wollen, sondern lediglich der Wunsch, anstatt der immerhin etwas starren Tabellen, die bei einer nothwendig gewordenen Änderung einer der vielen variablen Constanten in starke Mitleidenschaft gezogen werden, die beweglichere und auch einer Änderung rascher zugängliche Formel in den Vordergrund zu stellen, wenn sie eben auch nichts weiter ist oder sein kann, als der etwas einfachere analytische Ausdruck empirischer Versuchsresultate.

Von den vielen im Nachstehenden dargestellten ballistischen Eigenthümlichkeiten dürfte die Art, wie wir aus der allgemeinen Formel eine ganze Reihe Specialgesetze abgeleitet haben, von Interesse sein.

Indem wir also das Problem in der Form vereinfachten, im Inhalt verallgemeinerten, hoffen wir, dass die darauf aufgebaute Theorie sich als ein weiterer, wenn auch kleiner Fortschritt in der ballistischen Wissenschaft documentiren möge.

I. Theil.

Aufstellung einer algebraischen Widerstandsfunction.

§. 1.

Der Luftwiderstand nach Newton'schem Gesetz kann durch den Ausdruck

$$W = f . R^2 \pi \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot v^2$$

dargestellt werden. Derselbe ist also der zweiten Potenz der Geschwindigkeit v, dem Geschossquerschnitt $R^2\pi$ und der jeweiligen Luftdichte Δ proportional. Als Mittelwerth der Luft-

dichte ist das Gewicht eines Cubikcentimeters Luft bei 750 *mm* Barometerstand +15° C. und 50% Feuchtigkeit angenommen. Der Coëfficient *f* ist abhängig von der Kopfform des Geschosses, von dem wir übrigens voraussetzen, dass seine Achslage möglichst in der Tangente der Flugbahn bleibt, weshalb dieser Coëfficient, falls das Geschoss nicht die Normalform besitzt, berechnet oder durch Versuche ermittelt werden muss.

Die Versuche zeigten nun, dass für Geschossgeschwindigkeiten von 0 bis etwa 240 *m* der Widerstand annähernd durch

$$W = 0\cdot0140\, R^2\pi \frac{\Delta}{1\cdot206} \cdot v^2$$

und für Geschossgeschwindigkeiten von über 400 bis 900 *m* durch

$$W = 0\cdot0394\, R^2\pi \frac{\Delta}{1\cdot206} \cdot v^2$$

dargestellt werden konnte.

Für die Zwischenstufe von 240—400 bildete man, weil hier der Widerstand stärker als das Quadrat der Geschwindigkeit wächst, einen neuen, dem veränderten Zustande gemässen Ausdruck von der Form

$$W = \frac{\Delta}{1\cdot206} \cdot R^2\pi K(v) \,.\, v^2,$$

worin also $K(v)$ lediglich eine Function von v ist. Als Ordinate einer Curve aufgefasst, entspricht diese bis zu $v = 240$ annähernd einer Geraden $y = K(v) = 0\cdot0140$, sie steigt dann aber in der Region der Schallgeschwindigkeit in scharfer Wendung nach oben und gab so Veranlassung zu einer Reihe von einander in schneller Folge sich ablösender Widerstandsgesetze von zweiter bis zu fünfter und sechster Potenz, wodurch auch die Function $K(v)$ von einer Constanten bis zur vierten Potenz in zum Theil sehr zusammengesetzten ganzen oder gebrochenen Ausdrücken hinaufstieg. Eine ungefähre Constanz dieser Function zeigte sich von da ab, wo das fliegende Geschoss einen leeren Raum hinter sich lässt, also bei ungefähr $v = 396$, beziehungsweise 419 *m* Geschwindigkeit.

Aus der hakenförmigen Form ⌡‾ der Curve lässt sich übrigens leicht ersehen, dass von einem allgemeinen Widerstandsgesetz in der einfachen Potenz v^n keine Rede sein kann. Man ist eben genöthigt, die Curve empirisch zu suchen und ihr die den Versuchsresultaten gemässe theoretische Curve, wenn eine solche existirt, möglichst enge anzugliedern.

Der Bequemlichkeit der Rechnung wegen schreiben wir die Widerstandsformel in der Fassung

$$W = i\,\frac{\Delta}{1\cdot 206}\cdot\frac{(2R)^2}{g}\cdot\frac{K(v)}{10^7}\cdot v^2, \qquad 2R \text{ in Centimetern} \tag{1}$$

also die Luftwiderstandsbeschleunigung diesem analog

$$V = i\,\frac{\Delta}{1\cdot 206}\cdot\frac{(2R)^2}{G}\cdot\frac{K(v)}{10^7}\cdot v^2, \tag{2}$$

und versuchen, zuerst in erster und dann in zweiter Annäherung diejenige Curve zu bestimmen, die sich den Werthen des Siacci'schen Factors $K(v)$, beziehungsweise den Krupp'schen Versuchen möglichst genau anschliesst.

Die allgemeine Curve, die wir hier zu Grunde legen, lautet

$$K(v) = \frac{av^m}{b+v^n}, \text{ oder } y = \frac{ax^m}{b+x^n}. \tag{3}$$

Sie enthält vier Constanten, die wir aus den Versuchen abzuleiten haben. Um zunächst einige allgemeine Eigenschaften der Curve aufzusuchen, beziehungsweise die Existenz eines Maximums und zweier Wendepunkte nachzuweisen, wie die empirische Curve sie hat, differentiren wir die Gleichung und erhalten die Scheitelcoordinaten:

$$X = \sqrt[n]{\frac{bm}{n-m}}, \quad Y = \frac{aX^m}{b+X^n}. \tag{4}$$

Führt man

$$b \quad \frac{n-m}{m}\cdot X^n$$

in Y ein, so folgt

$$\frac{y}{Y} = \frac{n\left(\frac{X}{x}\right)^{n-m}}{m+(n-m)\left(\frac{X}{x}\right)^{n}}. \tag{5}$$

Die Wendepunkte unserer Curve ergeben sich durch eine weitere Differentiation der Gleichung

$$(m-n)(m-n-1)x^{2n} + b[(m-1)(2m-n) - n(m+n)]x^{n} + \\ + m(m-1)b^{2} = 0,$$

woraus nach dem Obigen

$$\left(\frac{x}{X}\right)^{2n} - \frac{n(m+n)-(m-1)(2m-n)}{m(n-m+1)}\left(\frac{x}{X}\right)^{n} + \\ + \frac{(m-1)(n-m)}{m(n-m+1)} = 0 \tag{6}$$

folgt. Die Curve besitzt also zwei Wendepunkte $x_1 x_2$, die in folgender Beziehung zu einander stehen:

$$m^2 - m(n+1) + \frac{n}{1-\left(\frac{x_1 x_2}{X}\right)^{n}} = 0,$$

$$m^2 - m(n+1) + \frac{n(n-1)}{\frac{x_1^n + x_2^n}{X^n} - 2} = 0.$$

Aus beiden Beziehungen ergibt sich noch

$$\left(\frac{x_1}{X}\right)^{n} + \left(\frac{x_2}{X}\right)^{n} + (n-1)\left(\frac{x_1 x_2}{X^2}\right)^{n} = n+1,$$

wonach die eine Grösse leicht aus der gegebenen anderen berechnet werden kann, wenn die Bedingung

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2} > \left(\frac{x_1 x_2}{X^2}\right)^{n}$$

erfüllt ist.

Es bedarf also nur noch der Kenntniss der eingeführten Constanten $abmn$. Nach einer Reihe von Berechnungen, die wir hier übergehen müssen, erhielten wir u. a. für m und n die Werthe

$$m = 4 \cdot 5 \qquad n = 5.$$

Die Formel 5) geht daher über in

$$\frac{y}{Y} = \frac{5\left(\frac{X}{x}\right)^{1/2}}{4 \cdot 5 + \frac{1}{2}\left(\frac{X}{x}\right)^5}.$$

Da nun XY, beziehungsweise $vK(v)$ den Werthen

$$v = 520 \qquad K(v) = 350$$

nahezu entsprechen, so erhalten wir als Gleichung für $K(v)$ den einfacheren Ausdruck

$$K(v) = \frac{3500\left(\frac{520}{v}\right)^{0 \cdot 5}}{9 + \left(\frac{520}{v}\right)^5} = \frac{3500\left(\frac{v}{520}\right)^{4 \cdot 5}}{1 + 9\left(\frac{v}{520}\right)^5}. \qquad 7)$$

In Tafel I haben wir die von Siacci construirte S-Curve und die unserige (punktirte) zur Darstellung gebracht. Durch den Anfangspunkt hindurchgehend, schneidet sie die S-Curve bei $v = 270$, steigt dann etwas steiler als diese bis zum zweiten Durchschnitte bei $v = 330$ (ca.), geht dann unterhalb derselben in weniger steilem Bogen bis zum Scheitelpunkte, dessen Ordinate wir zu rund 350 angenommen haben und verläuft dann in fast gleicher Richtung, beziehungsweise in wenig beträchtlicher Hebung bis zum vorläufigen Grenzwerth $v = 1000$.

Abgesehen von dem Anfangsverlauf der Curve, der praktisch auch weniger in Frage kommt, da z. B. die Schnellfeuerkanonen Krupp's sämmtlich höhere als 200 m Endgeschwindigkeiten haben und Steilfeuer hier nicht in Frage kommt, schliesst sich unsere Curve verhältnissmässig gut der Siacci'schen und damit mehr oder weniger gut den entsprechenden Versuchen an

Dabei ist daran zu erinnern, dass die graphische Darstellung dieser Versuche durchaus nicht in einer Curve verläuft, was einen idealen Zustand zur Voraussetzung haben würde, der praktisch gerade hier am wenigsten zum Ausdruck kommen könnte. Die Versuche umfassen, wie dies die nach Siacci reproducirte Darstellung der Schussstrasse zeigt, einen ziemlich breiten Gürtel oder Zone mit zum Theil weit auseinandergehenden Strassenzügen, je nach den Eigenthümlichkeiten der zu den Versuchen benützten Geschütze, Geschosse etc., deren Unähnlichkeit jene Abweichungen von der idealen Curve bewirken und es ermöglichen, dass auch noch unsere Curve innerhalb der Schusszone Platz hat. Sie ist nichts Anderes als eine Mittellinie, deren Gleichung den Vorzug der Einfachheit und, wie man schon bemerkt haben wird, der Integrationsfähigkeit besitzt.

Die Wende- oder Inflexionspunkte unserer Curve folgen aus der Gleichung

$$\left(\frac{x}{X}\right)^5 = \frac{\text{[illegible]} \mp \sqrt{4300}}{27}, \quad X = 520, \tag{8)}$$

deren Wurzeln $x_1 = 287 \cdot 4$, $x_2 = 718 \cdot 1$ sind.

§. 2.

Die Formel für die Luftwiderstandsbeschleunigung lautet nunmehr

$$U = i \cdot \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \cdot \frac{3 \cdot 5}{10^4} \cdot \frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{4 \cdot 5} v^2}{1 + 9\left(\frac{v}{520}\right)^5}. \tag{9)}$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$C = i \cdot \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \frac{(2R)^2}{G}. \qquad (2R \text{ in Centimetern})$$

Darin bedeutet i einen im Allgemeinen von 1 wenig verschiedenen Factor, der verschiedene Versuchssysteme, z. B. die russischen und die englischen etc., auf einander zu beziehen gestattet.

Wir schreiben im Folgenden U in der Fassung

$$U = \frac{1040}{11} \cdot i \cdot \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{6 \cdot 5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^5} \tag{10}$$

($2R$ = Seelenweite in Centimetern, G = Geschossgewicht in Kilogrammen, Δ = Luftdichte) oder einfacher

$$U = C \cdot \frac{K(v)}{10^7} \cdot v^2.$$

Die Differentialgleichungen der Geschossbewegung sind

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -U\frac{dx}{ds} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g-U\frac{dy}{ds}. \tag{11}$$

Wir führen ein die Functionen

$$F(u) = \frac{\left(\frac{u}{520}\right)^{6 \cdot 5}}{1+9\left(\frac{u}{520}\right)^5}, \qquad F(v) = \frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{6 \cdot 5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^5}, \tag{12}$$

wo u mit v durch die Relation

$$v \cos\tau = u \cos\alpha \tag{13}$$

verbunden sein möge. Um integriren zu können, setzen wir mit Siacci für flache Bahnen

$$F(v) = F(u) \cdot \frac{\cos\alpha^2}{\cos\tau}, \tag{14}$$

welcher Ausdruck die Gleichungen auf etwas enge Grenzen, beziehungsweise mässige Erhöhungen bis zu etwa 15° beschränkt.

Es ist nun

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv\cos\tau}{dt}, \qquad \frac{v^2}{\rho} = -g\cos\tau,$$

wo ρ der Krümmungshalbmesser, τ der Tangentenwinkel, also $ds = \rho d\tau$ ist. Und da

$$C = i \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \frac{(2R)^2}{G}, \qquad R \text{ in Centimetern}$$

so erhalten wir hiemit als erste Differentialgleichung der Flugbahn:

$$\frac{d\left(\frac{v}{520}\cos\tau\right)}{dt} = -\frac{2}{11} \cdot C \frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{6 \cdot 5}\cos\tau}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^5}. \tag{15)}$$

Es ist aber $v d\tau = -g \cos\tau dt$ und $v \cos\tau = u \cos\alpha$, daher

$$\frac{d\tau}{\cos\tau^2} = -\frac{g\,dt}{u\cos\alpha}, \qquad v^2 d\tau = -g dx.$$

Nach Elimination von dt aus den beiden vorstehenden Gleichungen unter Berücksichtigung der $F(u)$-Function resultirt zunächst

$$\frac{d\tau}{\cos\tau^2} = \frac{11g}{2C} \cdot \frac{d\frac{u}{520}}{\cos\alpha^2 u F(u)}, \tag{15)*}$$

und da

$$-gx = \int v^2 d\tau = \cos\alpha^2 \int u^2 \frac{d\tau}{\cos\tau^2},$$

so folgt nach Einsetzen des vorhergehenden Ausdruckes in die letzte Gleichung das Integral für die Schussweite

$$x = -\frac{10^7}{C}\int\frac{du}{uK(u)} = -\frac{11g}{2C}\int^{u}\frac{\left(1+9\left(\frac{u}{520}\right)^5\right) d\frac{u}{520}}{\left(\frac{u}{520}\right)^{6 \cdot 5}}.$$

Aus der Hauptformel folgt ferner das Zeitintegral

$$t = -\frac{10^7}{C\cos\alpha}\int\frac{du}{u^2K(u)} =$$

$$= -\frac{2C\cos\alpha}{11}\int\frac{1+9\left(\frac{u}{520}\right)^5}{\left(\frac{u}{520}\right)^{6 \cdot 5}} d\frac{u}{520}$$

und endlich aus 15)* das Integral für tg τ

$$\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha = \frac{10^7 g}{C\cos\alpha^2}\int\frac{du}{u^3 K(u)} =$$

$$= \frac{11 g}{2C\cos\alpha^2}\int\frac{d\frac{u}{520}\left(1+9\left(\frac{u}{520}\right)^5\right)}{u\cdot\left(\frac{u}{520}\right)^{6\cdot5}}.$$

Sämmtliche Integrationen sind ausführbar. Die gewählte Form der $K(v)$-Curve ermöglichte dies.

Um zur Curvengleichung zu gelangen, haben wir in $dy = dx \operatorname{tg}\tau$ den Ausdruck $dx = -v^2/g d\tau$ und alsdann $d\tau$ aus 15)* einzusetzen und, da tg τ bekannt ist, zu integriren. Man hat

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{10^{14} g}{C^2\cos\alpha^2}\int\frac{du}{uK(u)}\int\frac{du}{u^3K(u)}.$$

Führen wir sämmtliche Integrationen aus, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die Schussweite, die Flugzeit, den Tangentenwinkel und die Ordinate der Flugbahn in Function des Ausdruckes $u = \frac{v\cos\tau}{\cos\alpha}$, $C = i\frac{\Delta}{1\cdot206}\cdot\frac{(2R)^2}{G}$, $2R$ in Centimetern

$$x = \frac{5720}{9C}\left[\left(\frac{520}{u}\right)^{4\cdot5} - 81\left(\frac{u}{520}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot5} + 81\left(\frac{v_0}{520}\right)^{1/2}\right],$$

$$t = \frac{1}{C\cos\alpha}\left[\left(\frac{520}{u}\right)^{5\cdot5} + 99\left(\frac{520}{u}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{5\cdot5} - 99\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1/2}\right],$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{11 g}{6760\,C\cos\alpha^2}\left[\left(\frac{520}{u}\right)^{6\cdot5} + 39\left(\frac{520}{u}\right)^{1\cdot5} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot5} - 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot5}\right]. \qquad 16)$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{121 g}{2C^2\cos\alpha^2}\left[\frac{1}{143}\left(\frac{520}{u}\right)^{11} + \frac{8}{13}\left(\frac{520}{u}\right)^6 + \right.$$

$$+ 27\left(\frac{520}{u}\right) - \frac{1}{143}\left(\frac{520}{v_0}\right)^{11} - \frac{8}{13}\left(\frac{520}{v_0}\right)^6 - 27\left(\frac{520}{v_0}\right)$$

$$\left. - \frac{Cx}{37180}\left\{\left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot5} + 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot5}\right\}\right].$$

Dies sind die Hauptgleichungen der ballistischen Bewegung, und zwar sämmtlich in geschlossener Form.

Mit Ausnahme der letzten, die ein Resultat zweier Integrationen und daher etwas complicirt ist, erscheinen die übrigen in noch ziemlich einfacher Form, so dass die Berechnung einem gewandten Rechner keine besonderen Schwierigkeiten macht. Ihre Giltigkeit, die wir noch nachzuweisen haben, dürfte sich von etwa 240—1000 *m* und darüber erstrecken, wonach also nur eine kleine Zone zwischen 150—200 *m*, die übrigens praktisch kaum in Frage kommt und überhaupt ballistisch noch nicht völlig sicher gestellt sein dürfte, von der Rechnung auszuschliessen ist. Doch möge bemerkt werden, dass einzelne Versuchsresultate an dieser kritischen Stelle unserer Curve fast ebenso nahe stehen, als der Siacci'schen. Immerhin aber betrachten wir die Strecke zwischen 200—240 *m* als unsicher, da unsere Curve eine zu kleine Widerstandsgrösse liefert, die indessen durch einen geeigneten Coëfficienten auf die richtige Höhe gebracht werden kann.

Aus den obigen Gleichungen lassen sich noch weitere, z. B. für $v_y = dy/dt$ ableiten. Aus der ersten Formel in 11) erhalten wir zunächst

$$-U\frac{dy}{ds} = \frac{d^2x}{dt^2}\operatorname{tg}\tau = \frac{d(v\cos\tau)}{dt}\cdot\operatorname{tg}\tau =$$

$$= \frac{d(u\cos\alpha)}{dt}\cdot\operatorname{tg}\tau = \cos\alpha\operatorname{tg}\tau\cdot\frac{du}{dt}.$$

Die zweite Formel in 11) geht damit über in

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \cos\alpha\operatorname{tg}\tau\frac{du}{dt},$$

woraus

$$v_y = -gt + \cos\alpha\int\operatorname{tg}\tau\, du$$

folgt. Wird t, τ aus 16) eingesetzt und darauf integrirt, so erhält man schliesslich

$$v_y = -gt + u \sin\alpha + \frac{11g}{13C\cos\alpha}\left[\frac{2}{11}\left(\frac{520}{u}\right)^{5\cdot5} + 78\left(\frac{520}{u}\right)^{1/2} + \right.$$
$$+ \frac{9}{11}\left(\frac{520}{v_0}\right)^{5\cdot5} - 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1/2} \qquad 17)$$
$$\left. - \frac{u}{520}\left\{\left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot5} + 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot5}\right\}\right]$$

als Verticalcomponente der Geschwindigkeit, die indessen bei Flachbahnen wenig in Frage kommt. Im Scheitel wird $v_y = 0$, $\operatorname{tg}\tau = 0$, das hiedurch erhaltene u liefert die Flugzeit t_s bis zum Scheitelpunkte.

Um eine Anwendung dieser Formeln zu geben, wählen wir das Beispiel, das Herr Prof. Cranz in seinem »Compendium der Ballistik«, S. 392 gewählt hat in der Absicht, die von Vallier und Siacci entwickelten Methoden und Tabellen auf ihre Anwendbarkeit zunächst hinsichtlich der Infanteriegewehre zu prüfen. Da die von ihm gewählten Ausgangsdata aus Schiessversuchen der Mauser'schen Gewehrfabrik in Oberndorf in Württemberg ermittelte Resultate sind, so bilden sie eine werthvolle und für eine Theorie nothwendige praktische Grundlage.

Deutsches Infanteriegewehr.

Gegeben: $2R = 0\cdot79\,cm$, Geschossgewicht $G = 0\cdot0147\,kg$, Luftdichte in Oberndorf beim Versuch $\Delta = 0\cdot946$, $v_0 = 626\cdot5\,m$, $i = \frac{1}{1\cdot047}$, Abgangswinkel $\alpha = 2°\,5'\,30''$.

Aufgabe. Wie gross ist die Flugbahnordinate y für die Entfernung $x = 1200\,m$?

Um diese Frage zu beantworten, bestimmen wir zunächst

$$C = i\frac{\Delta}{1\cdot206}\cdot\frac{(2R)^2}{G} = 31\cdot808,$$

setzen diesen Werth ein in die Gleichung für x:

$$\frac{9C.x}{5720} = \left(\frac{520}{u}\right)^{4\cdot5} - 81\left(\frac{u}{520}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot5} + 81\left(\frac{v_0}{520}\right)^{1/2}.$$

um alsdann nach u aufzulösen. Es folgt

$$60\cdot057 = \left(\frac{520}{u}\right)^{4\cdot5} - 81\left(\frac{u}{520}\right)^{1/2} - 0\cdot43238 + 88\cdot909$$

$$\frac{520}{u} = \sqrt[5]{81 - 28\cdot420\sqrt{\frac{520}{u}}},$$

woraus mittelst Annäherung $u = 248\cdot76\ m$ folgt.

Damit haben wir diejenigen Werthe, die wir zur Auflösung der Aufgabe nöthig haben und erhalten demzufolge aus der letzten der Gleichungen 16) nach allerdings etwas zeitraubenden Rechnungen

$$y = -1\cdot918\ m.$$

Die gesuchte Flugbahnordinate in 1200 m Entfernung ist also $-1\cdot918\ m$. Die Beobachtung ergab $y = 0$ mit dem mittleren Fehler $\pm 1\cdot17\ m$, wonach also der theoretische Fehler 1·6mal grösser ist als der mittlere.

Dieselbe von Cranz nach Vallier behandelte Aufgabe ergab als Lösung $y = -5\cdot5\ m$, also einen 5mal grösseren Fehler.

Die älteren Tabellen Siacci's ergaben $y = -9\cdot4\ m$ oder einen 8mal grösseren Fehler.

Dass unsere Methode ein besseres Resultat liefert, ist vielleicht nicht ganz zufällig und lässt sich auch einigermassen erklären. Während des Verlaufes der Bewegung schliesst sich von $v = 626\cdot5\ m$ bis $v = 266\ m$ unsere Curve der S-Curve ganz gut an; wenigstens dürften sich die Unterschiede beider rechnerisch ziemlich ausgleichen, während die Curven bei $v = 266$ rasch auseinandergehen. Wenn nun nicht ein besonderer Zufall beim Schuss störend einwirkte, kann man annehmen, dass die $K(v)$-Curve des praktischen Versuches sich zwischen $v = 266$ und 248 unserer berechneten $K(v)$ besser anschmiegt, als der Siacci'schen. Der negative Werth unserer Zahl lässt sogar noch erkennen, dass unsere Curve und damit der Widerstand noch etwas zu hoch angenommen ist.

Da seitdem Siacci neue Tabellen entworfen hat, so hielten wir es nicht für überflüssig, dieselben auf die vor-

liegende Aufgabe nochmals anzuwenden. Unter Benützung seiner Gleichungen

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{Cx}{2\delta i\beta \cos \alpha^2}\left[\frac{A(u)-A(V)}{D(u)-D(V)} - J(V)\right],$$

$$D(u) = D(V) + \frac{\delta i\beta}{C}x$$

nebst den Cranz'schen Data erhalten wir für $i = \frac{1}{1\cdot 047}$, $\beta = 1$ etc. $u = 221\cdot 6$ und damit

$$y = 1200 \operatorname{tg} \alpha - \frac{0\cdot 25421 . 1200}{2 \cos \alpha^2}\left[\frac{2989\cdot 32 - 511\cdot 573}{8995\cdot 5 - 4275} - 0\cdot 17181\right]$$

oder

$$y = 43\cdot 827 - 53\cdot 925 = -10\cdot 09\, m,$$

also eine noch grössere Differenz.

In Bezug auf den Scheitelpunkt der Flugbahn hat man in der dritten Hauptformel $\operatorname{tg} \tau = 0$ zu setzen und aus

$$\sin 2\alpha = \frac{11g}{3380C}\left[\left(\frac{520}{u}\right)^{6\cdot 5} + 39\left(\frac{520}{u}\right)^{1\cdot 5} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot 5} - 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot 5}\right] \quad 18)$$

u zu bestimmen und in die erste und vierte Hauptgleichung einzusetzen. Da ferner in der horizontalen Wurfweite $y = 0$ ist, so folgt die Erhöhung für die Wurfweite x aus

$$\sin 2\alpha = \frac{121g}{C^2 \cos \alpha^2 x}\left[\frac{1}{143}\left(\frac{520}{u}\right)^{11} + \frac{8}{13}\left(\frac{520}{u}\right)^{6} + \right.$$
$$+ 27\left(\frac{520}{u}\right) - \frac{1}{143}\left(\frac{520}{v_0}\right)^{11} - \frac{8}{13}\left(\frac{520}{v_0}\right)^{6} - 27\left(\frac{520}{v_0}\right)$$
$$\left. - \frac{Cx}{37180}\left\{\left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot 5} + 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot 5}\right\}\right], \quad 19)$$

worin x noch aus der ersten Gleichung einzuführen ist.

§. 3.

Es ist nunmehr nothwendig, im Anschluss an die Tabellen, welche die Ballistiker für den Luftwiderstand entworfen haben, eine entsprechende für unsere Curve zu berechnen, um festzustellen, inwieweit hier Übereinstimmung herrscht oder nicht.

Der Luftwiderstand $W = U \cdot \frac{G}{g}$ pro Quadratcentimeter ist

$$W_1 = \frac{UG}{gR^2\pi} = i\frac{\Delta}{1\cdot206} \cdot 12\cdot271 \frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{6\cdot5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^5}. \qquad 20)$$

Nach dieser Formel haben wir zum Zwecke des Vergleiches der Resultate mit der Krupp'schen Tabelle die nachfolgende kurze Übersicht berechnet und dabei $\Delta = 1\cdot206$ und $i = 0\cdot875$ angenommen.

v	Krupp'sche Data	W_1 berechnet	Diff.
900	2·74	2·70	+0·04
800	2·26	2·25	+0·01
700	1·80	1·82	−0·02
600	1·39	1·40	−0·01
500	0·98	0·97	+0·01
400	0·60	0·57	+0·03
350	0·35	0·36	−0·01
300	0·17	0·19	−0·02
200	0·06	0·02	+0·04
100	$0\cdot00_7$	0·00	$+0\cdot00_7$

Die abwechselnd positiven und negativen Differenzen zeigen, dass unsere $K(v)$-Curve die Krupp'schen Werthe im Ganzen ziemlich gut wiedergibt. Nur bei den kleineren Geschwindigkeiten finden sich natürlich grössere Unterschiede, die eben nicht zu vermeiden waren.

In Anbetracht des grossen Vortheiles einer vollständigen Integrirbarkeit der ballistischen Differentialgleichungen sind

diese auch bei anderen Verhältnissen unvermeidlichen Differenzen als weniger ins Gewicht fallend anzusehen.

Auch bezüglich der von Siacci aufgestellten Curve zeigen sich nur mässige Differenzen, wie man finden wird, wenn man die nach der Formel

$$U = \frac{2}{11} \cdot 5200 \cdot \frac{\left(\frac{u}{520}\right)^{6\cdot 5}}{1+9\left(\frac{u}{520}\right)^{5}} \tag{21}$$

berechneten Werthe von U für $2R = 10\,cm$ und $G = 10\,kg$ mit den von ihm abgeleiteten vergleicht (Archiv, 1896, S. 347) und die untere Region von $v_0 = 0$ bis 250 ausschliesst.

v	1000	950	900	850	800	750	700	650
S	269·04	250·80	232·55	214·31	196·07	177·84	159·62	141·41
O	279	258·00	237·33	217·48	197·91	178·96	160·22	141·8

v	600	550	500	450	400	350	300	250
S	123·24	105·10	87·08	69·24	51·53	33·44	15·45	7·97
O	123·6	105·3	87·35	68·88	50·22	32·18	16·53	6·58

Abgesehen von den äussersten Grenzen ist auch hier die Übereinstimmung eine befriedigende. Bei $v = 200$ zeigt sich schon in den entsprechenden Werthen 4·92 und 1·76 das starke Auseinandergehen der $K(v)$-Curven und damit die Unanwendbarkeit unserer Formeln auf diese Zone.

Schon das Äussere der Curve lässt erkennen, dass sie mehrere Wendepunkte besitzt. Bilden wir die zweite Ableitung von $K(v)$ nach v, so erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{v}{520}\right)^{10} - \frac{134}{27}\left(\frac{v}{520}\right)^{5} + \frac{7}{27} = 0,$$

deren Wurzeln

$$v_1 = 287\cdot 4 \qquad v_2 = 718\cdot 1$$

den Ort der Wende- oder Inflexionspunkte bestimmen.

§. 4.

Wir stellen zur Prüfung der Formeln die Frage, wie gross die Arbeit des Luftwiderstandes ist.

Die Beschleunigung des Widerstandes

$$U = \frac{2}{11} \cdot C . 520 \cdot \frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{6\cdot 5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^{5}}$$

bestimmt die Arbeit desselben längs des Geschossweges

$$A = \int U \cdot \frac{G}{g}\, dx.$$

Differentiren wir die Gleichung für x, so folgt

$$dx = \frac{11}{2C}\left\{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^{5}\right\}\frac{dv}{\left(\frac{v}{520}\right)^{5\cdot 5}}.$$

Wird dies in die vorhergehende Gleichung eingesetzt und alsdann integrirt, so folgt

$$A = \frac{G}{g}\int v\,dv = \frac{G}{2g}(v^2 - v_0^2),$$

wie es sein muss.

Es soll aus gegebenen Messungen die Mündungsgeschwindigkeit berechnet werden.

Gegeben die 28 *cm* Granate von 235 *kg* mit $v_{75} = 464\cdot 1$ *m*, d. h. mit 464·1 *m* Geschossgeschwindigkeit 75 *m* vor der Mündung.

Die Formel für die Schussweite x vermittelt wieder die Lösung. Man hat $x = 75$, $u = 464\cdot 1$,

$$C = i \cdot \frac{\Delta}{1\cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} = \frac{28^2}{235},$$

Setzt man diese Werthe ein in die Gleichung für x, so erhält man einen Ausdruck höheren Grades für v_0:

$$\sqrt{\frac{v_0}{520}} - \frac{1}{81}\left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot5} = 0\cdot929.$$

Setzt man im zweiten Gliede für v_0 annähernd $u = 464\cdot1$, so folgt nach einer erneuten Rechnung

$$v_0 = 468\ m.$$

Bei sehr grossen Anfangsgeschwindigkeiten ist die Rechnung einfacher. Die Formel für x

$$\frac{Cx}{51480} = \frac{1}{\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\frac{520}{u}\right)^{1/2}} + \frac{1}{81}\left(\left(\frac{520}{u}\right)^{4\cdot5} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot5}\right)$$

liefert die beiden Ausdrücke für v_0 und v_x in der Nähe der Mündung

$$v_0 = u + i\,\frac{\Delta}{1\cdot206}\cdot\frac{(2R)^2 x}{25740\,G}\cdot\frac{\sqrt{520\,u}}{1+\frac{1}{9}\left(\frac{520}{u}\right)^5\left(1-\frac{11}{4}\,\frac{v_0-u}{u}\right)}$$

$$u = v_0 - i\,\frac{\Delta}{1\cdot206}\cdot\frac{(2R)^2 x}{25740\,G}\cdot\frac{\sqrt{520\,v_0}}{1+\frac{1}{9}\left(\frac{520}{v_0}\right)^5\left(1+\frac{11}{4}\,\frac{v_0-u}{v_0}\right)} \qquad 22)$$

Beispiel. $G = 27\cdot49\ kg$, $2R = 14\cdot91\ cm$, $x = 100\ m$, $v_{100} = 442\cdot6$, $\Delta = 1\cdot290$, $i = 1\cdot230$, $\alpha = 2°8'$.

Es folgt als Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 458\ m$.

Für hohe Anfangsgeschwindigkeiten kann man auch die folgende einfachere Formel benützen:

$$v_0 \cos\alpha = v_x + i\cdot\frac{\Delta}{1\cdot206}\cdot\frac{(2R)^2}{G}\cdot 0\cdot000886\,.\,x\,.\sqrt{v_x}.$$

Beispiel. $5\cdot5\ mm$-Gewehr (Suhl).

Gegeben: $G = 0\cdot00672\ kg$, $2R = 0\cdot55\ cm$, $x = 25\ m$, $v_{25} = 821\ m$, $i = 1$, $\Delta = 1\cdot206$. Die Formel liefert

$$v_0 \cos\alpha = 821 + 28\cdot37 = 849\cdot37\ m.$$

In Betreff der Hauptgleichungen verdient bemerkt zu werden, dass aus ihnen eine ganze Reihe neuer gebildet werden kann, wenn man die Variable u eliminirt. Man kommt schliesslich auf quadratische Gleichungen. Von Interesse ist der Fall, dass die Schussweite x und die Flugzeit t, falls sie gegeben sind, in einfachster Weise den Ausdruck u berechnen lassen, und zwar u. a. in der Form

$$u = \frac{520}{\sqrt[5]{-9+\sqrt{8100+\left(\frac{9Cx}{5720}+\left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot5}-81\left(\frac{v_0}{520}\right)^{0\cdot5}\right)\left(C\cos\alpha t+\left(\frac{320}{v_0}\right)^{5\cdot5}+99\left(\frac{520}{v_0}\right)^{0\cdot5}\right)}}}. \qquad 23)$$

Damit erhält man dann auch $\operatorname{tg}\tau$ und y oder die Gleichung der Curve.

§. 5.

In Bezug auf die Anfangs-, beziehungsweise Mündungsgeschwindigkeit möchten wir hier einige Bemerkungen einschalten, die, wiewohl sie mehr zur inneren Ballistik gehören, doch hier gemacht werden müssen. Was man unter dem Ausdruck »Anfangsgeschwindigkeit« versteht, ist an sich klar, es ist diejenige Geschwindigkeit, die das Geschoss an der Mündung haben müsste, wenn es in einer bestimmten Entfernung von dieser die daselbst gemessene hat oder haben soll. Sie ist also nur eine errechnete, nicht immer eine wirkliche Grösse und daher mit der eigentlichen Mündungsgeschwindigkeit, die das Geschoss beim Heraustreten aus der Mündung thatsächlich hat, nicht zu identificiren. Diese Verschiedenheiten rühren daher, dass die nachdringenden Pulvergase dem Geschoss auf etwa 1—2 *m* Entfernung von der Mündung noch einen weiteren Zuwachs an Geschwindigkeit ertheilen, der nicht unbeträchtlich ist, wie dies Cushing Crehore und Owen Squier mittelst ihres Photochronographen nachgewiesen haben. Sie constatirten, dass die Geschossgeschwindigkeit auf kurze Entfernung ausserhalb der Mündung (1·8—2·1 *m*) noch wächst, durch

Nachwirkung der Pulvergase, dass das Maximum der Geschwindigkeit circa 2 *m* vor der Mündung liegt und dass in circa 30 *m* Entfernung die Geschossgeschwindigkeit gleich der Mündungsgeschwindigkeit ist (siehe Cranz, Compendium der Ballistik, S. 445). Hienach gäbe es in der Flugbahn zwei Punkte gleicher Geschossgeschwindigkeiten. Wir halten es für nützlich, einen Augenblick bei diesen Thatsachen zu verweilen, um nachzusehen, ob sich diese Angaben theoretisch verwerthen lassen.

Erinnert man sich nun, dass der Gasdruck an der Mündung unter Umständen sehr beträchtlich, bis zu 500 *kg* für den Quadratcentimeter sein kann, so ist es natürlich zu denken, dass ein Theil des Restes der Pulverkraft sehr wohl diese Nachwirkung ausüben kann. Während nun dieser Rest die letzte Anspannung der Pulvergase bewirkt, verursacht der Luftwiderstand eine entsprechende Abspannung, deren Resultante die oben angegebenen Thatsachen zur Folge haben.

Den wirksamen Gasdruck an der Mündung nennen wir A, der Druck auf den Geschossboden ist also $r^2\pi A$. Da dieser Druck sehr rasch mit der Entfernung abnimmt, wählen wir zur Darstellung desselben die Exponentialfunction

$$A_{(x)} = Ae^{-nx} \tag{24}$$

und erhalten damit die Beziehung

$$vdv = \frac{AR^2\pi}{G/g} e^{-nx} dx$$

und integrirt

$$v_x^2 = v_0^2 + \frac{2AR^2\pi g}{nG}(1-e^{-nx})$$

oder in erster hinreichend genauer Annäherung

$$v_x = v_0 + \frac{AR^2\pi g}{nGv_0}(1-e^{-nx}). \tag{25}$$

Das letzte Glied drückt also die durch die Nachwirkung der Pulvergase erzeugte Vermehrung der Mündungsgeschwindigkeit v_0 im Abstand x aus.

Fügen wir noch die durch den Luftwiderstand bewirkte Abnahme der Geschwindigkeit hinzu, so erhalten wir

$$v_x = v_0 + \frac{AR^2\pi g}{nGv_0}(1-e^{-nx}) - i\frac{\Delta}{1\cdot 206}\cdot\frac{(2R)^2}{G}\frac{\sqrt{520v_0}}{25740}\frac{x}{1+\sigma}, \quad 26)$$

wo σ die kleine Correction

$$\sigma = \frac{1}{9}\left(\frac{520}{v_0}\right)^5\left(1+\frac{11}{4}\cdot\frac{v_0-v_x}{v_0}\right)$$

bedeutet.

Demzufolge ist die allgemeine, innerhalb der genannten Wirkungszone giltige Geschwindigkeitsformel die folgende:

$$v_x = v_0 + M\left(\frac{1-e^{-nx}}{n}\right) - Nx,$$

wo

$$M = \frac{AR^2\pi g}{Gv_0}, \quad N = i\frac{\Delta}{1\cdot 206}\frac{(2R)^2}{G}\frac{\sqrt{520v_0}}{25740}\frac{1}{1+\sigma}.$$

Hienach wird also v_x zunächst wachsen, sein Maximum erreichen und dann bis zur Mündungsgeschwindigkeit v_0 wieder abnehmen.

Durch Differentiation erhält man die das Maximum der Geschwindigkeit bei x_1 bestimmende Relation

$$Me^{-nx_1} = N,$$

während die Bedingung $v_x = v_2 = v_0$ auf

$$M(1-e^{-nx_2}) = nNx_2$$

führt.

Aus beiden resultirt die einfache Formel

$$e^{nx_1}(1-e^{-nx_2}) = nx_2,$$

welche die Abhängigkeit der extremen Werthe $x_1 x_2$ von n und die Unabhängigkeit derselben von den Geschossdimensionen etc. anzeigt.

Da aber x_2 verhältnissmässig gross ist, so wird e^{-nx_2} namentlich bei grösseren n-Werthen so klein, dass es vernachlässigt werden kann. So ist z. B. für $n = 2$ und $x = 3$ der Gasdruck in dieser Entfernung $= Ae^{-6}$ oder weniger als $^1/_{400}$ des Mündungsdruckes. Wir setzen also

$$e^{nx_1} = nx_2$$

$$M = nNx_2, \text{ beziehungsweise } Me^{-nx_1} = N.$$

Wählen wir zur Anwendung willkürlich $n = 2$, $A = 120\,kg$, $v_0 = 625\,m$ und als Ort des Maximums $x_1 = 2\cdot 1\,m$, so ist $x_2 = \frac{e^{nx_1}}{n} = \frac{e^{2\cdot 2\cdot 1}}{2} = 33\cdot 34\,m$. In dieser Entfernung herrscht also wieder die Mündungsgeschwindigkeit. Weiter ist

$$v_x = v_0 + \frac{AR^2\pi}{nGv_0}\left(1 - e^{-nx} - \frac{x}{x_2}\right). \tag{27}$$

Wäre also $2R = 10\,cm$, $G = 10\,kg$, so würde dies Geschoss in $2\cdot 1\,m$ Abstand von der Mündung die grösste Geschwindigkeit $v_1 = 625 + 6\cdot 86\,m$ besitzen, die auch aus der Formel

$$v_{x_1} = v_0 + \frac{(2R)^2}{1129\,G}\,\frac{\sqrt{v_0}}{1+\sigma}\cdot\frac{x_2 - \frac{1}{n} - x_1}{i\,\frac{\Delta}{1\cdot 206}} \tag{28}$$

berechnet werden kann.

In welcher Weise A von n, $x_2\,v_0$ abhängt, ersieht man aus der Formel

$$A = \frac{e^{nx_1}\,v_0^{3/2}}{8697\,(1+\sigma)\,i\,\frac{\Delta}{1\cdot 206}}, \qquad A_1 = \frac{A}{nx_2}, \quad A_x = Ae^{-nx}.$$

Die Zeit ergibt sich aus dem Integral

$$v_0 t = \int_0^x \left[1 - \frac{AR^2\pi g}{nGv_0^2}\left(1 - e^{-nx} - \frac{x}{x_2}\right)\right] dx.$$

$$t = \frac{x}{v_0} - \frac{AR^2\pi g}{nGv_0^3}\left(x - \frac{x^2}{2x_2} - \frac{1}{n}\left(1 - e^{-nx}\right)\right). \tag{29}$$

Bei den Versuchen der genannten amerikanischen Physiker scheint nach den Angaben der Revue d'Artillerie ein $8\cdot 1$ *cm*-Geschütz benützt worden zu sein. Wir entnehmen derselben die folgenden Data: $G = 6\cdot 8\,kg$, $2R = 8\cdot 1\,cm$, $v_0 = 441\,m$ (ca.). Nehmen wir nun noch $A = 400\,kg$, $x_2 = 30\,m$ an, so erhalten wir mit Rücksicht auf $\sigma = 0\cdot 25$ den Werth von $n = 12$ und also $x_1 = 0\cdot 49\,m$. Hienach ist der Ort der Maximalgeschwindigkeit $0\cdot 49\,m$ von der Mündung entfernt, und es ist die

Geschwindigkeit daselbst gegen 5·6 *m* grösser als an der Mündung. In 30 *m* Abstand von derselben herrscht wieder die Mündungsgeschwindigkeit von 441 *m*.

Diese eigenthümlichen Zustände der Geschossbewegung vor der Mündung werden wahrscheinlich bei allen Feuerwaffen in grösserem oder geringerem Grade in die Erscheinung treten und verlangen jedenfalls eine Berücksichtigung bei der Berechnung der sogenannten Anfangsgeschwindigkeit als Rechnungsgrösse. Wir haben deshalb schon früher den Vorschlag gemacht und auch theoretisch durchgeführt, den Anfangspunkt der Flugbahn dorthin zu verlegen, wo die Fluggeschwindigkeit auch wirklich gemessen ist, also in etwa 25, 50, 75 *m* und bei den rauchlosen Pulversorten in 100 *m* Entfernung von der Mündung. Es fallen dann die oft fehlerhaft angesetzten Anfangsgeschwindigkeiten und die Punkte gleicher Geschwindigkeit von selbst weg. Die Correction des Abgangswinkels ist sehr einfach und die Rechnung wird zuverlässiger.

§. 6.

Wir erwähnten früher der zahlreichen Widerstandsgesetze, die die Ballistiker aufgestellt haben und die innerhalb bestimmter Grenzen auch hinreichend gute Resultate lieferten. Die früher herrschende Unsicherheit in den Ausgangsdata, die auch jetzt wohl noch nicht so ganz gehoben scheint, liess der Willkür in der Wahl der Potenz v^n ziemlich freien Spielraum, und der Exponent n zeichnete sich deshalb auch durch eine besondere Variabilität aus.

Vielleicht ist es von Interesse zu untersuchen, inwieweit unsere Widerstandsformel

$$W = i\cdot\frac{\Delta}{1\cdot 206}\cdot\frac{(2R)^2}{g}\cdot 3,5\,\frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{4\cdot 5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^5}\cdot v^2 \quad (2R \text{ in Metern}) \qquad 30)$$

einzelne Specialgesetze der genannten Art wiederzugeben vermag.

Nehmen wir z. B. zunächst sehr hohe Geschossgeschwindigkeiten etwa zwischen 800—1000 *m* an, so bemerkt man, dass

gegenüber der hohen Potenz im Nenner die 1 wenig Einfluss hat, in Folge dessen die Widerstandsformel sich auf den einfachen Ausdruck

$$W = i \cdot \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{g} \cdot \frac{3 \cdot 5}{9} \sqrt{520} \cdot v^{1 \cdot 5}$$

reducirt.

Es ist aber bekannt, dass dies Gesetz dem genannten Geschwindigkeitsbereich sehr gut entspricht. Die von dem russischen Oberst und Ballistiker Zabudski und Anderen für Geschwindigkeiten zwischen etwa 600—1000 *m* aufgestellte Potenz ist $Cv^{1 \cdot 70}$, beziehungsweise $Cv^{1 \cdot 55}$.

Gehen wir nun weiter zurück auf Geschwindigkeiten von etwas mehr oder weniger als 500 *m*, so ändert sich für diese Zone der massgebende Bruch in unserer Formel nur wenig, und der Widerstand ist damit einfach dem Ausdruck Cv^2 oder der zweiten Potenz proportional, was ebenfalls mit der Erfahrung übereinstimmt.

Gehen wir nun noch weiter in den Geschwindigkeiten hinunter, so gewinnt der vorhin vernachlässigte Summand 1 im Nenner gegenüber der Nachbarpotenz steigenden Einfluss, und man kann erwarten, dass innerhalb der kritischen Zone des steilen Abfalles der $K(v)$-Curve ein ziemlich rasches Steigen der Potenz von Cv^2 an bis auf Cv^3 oder Cv^4 und darüber eintreten wird. Auf noch kleinere Geschwindigkeiten als etwa 240 dürfen wir unsere Formel nicht anwenden. Bekanntlich hat Bashforth seinen Versuchen die dritte Potenz zu Grunde gelegt, indem er setzte

$$W = C \cdot \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot R^2 \pi . v^3,$$

womit er (siehe Cranz, Compendium der Ballistik, S. 120) die folgenden Werthe für C erhielt:

v	?—330	330—375	375—419	419—460
C	0·000060	0·000084	0·000094	0·000090

	460—500	500—550	550—600
	0·000082	0·000075	0·000068

Die C-Werthe steigen zuerst mit den Geschwindigkeiten und nehmen dann von etwa $v = 400\,m$ wieder ab. Um zu erfahren, ob unsere Formel diese Veränderung der Constanten wiederzugeben vermag, formen wir sie der Bashforth'schen Schreibweise gemäss um in

$$W = i\frac{\Delta}{1\cdot 206}\cdot R^2\pi . v^3\cdot\frac{3\cdot 5}{\frac{\pi}{4}g.520}\cdot\frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{3\cdot 5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^5},$$

so dass der Factor C durch

$$C = \frac{3\cdot 5}{\frac{520}{4}\pi g}\;\frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{3\cdot 5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^5}$$

bestimmt ist.

So ist z. B. für $v = 260$, $C = 0\cdot 000060$.

Das Maximum von C ergibt sich aus der Bedingung

$$v = 520\sqrt[5]{\frac{7}{27}} = 397$$

und liefert $C = 0\cdot 000102$.

Da der Bashforth'sche Werth wahrscheinlich $0\cdot 000094$ ist, multipliciren wir unseren und die nachfolgenden, den niederen und höheren Geschwindigkeiten zukommenden C-Werthe mit $0\cdot 92$ und erhalten folgendes Resultat:

v	330	397	440	500	550	600
$0\cdot 92 . C$ ...	0·000085	94	91	83	75	68
Bashf.	84	94	90	82	75	68

Der Vergleich beider Reihen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Zahlen und beweist damit die Anwendbarkeit des untergelegten Widerstandsgesetzes, da wir aus demselben bei Bashforth'schen Coëfficienten von $v_0 = 330$ bis 600 abzuleiten vermochten.

Die Potenz v^3 war willkürlich gewählt. Setzen wir allgemein v^n als Widerstandspotenz fest und differentiiren den nunmehr auftretenden Ausdruck

$$\frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{6\cdot5-n}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^{5}}$$

nach v, um das Maximum des Coëfficienten C der entsprechenden Mittelgruppen zu erhalten, so findet dies statt für

$$v = 520\sqrt[5]{\frac{6\cdot5-n}{9(n-1\cdot5)}}, \quad n = \frac{6\cdot5+13\cdot5\left(\frac{v}{520}\right)^{5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^{5}}.$$

Um auch diese Formeln mit den Erfahrungsthatsachen zu vergleichen, benützen wir die von **Zabudski** herrührenden, in Reihe 1 und 2 mitgetheilten Data, denen wir unsere berechneten anschliessen:

n	1·55	1·7	2	3	4	5	6	6·5
Zab. v	800—1000	550—800	419—550	375—419	...	295—375	—	—
ber. v	840	633	520	397	335	283	217	0

Diese Tabelle sagt, dass z. B. das Luftwiderstandsgesetz $W = Cv^2$ ($n = 2$) innerhalb der Zone $v = 419—550$ als giltig angenommen werden kann, was unsere berechnete Zahl 520 im Ganzen gut bestätigt. In gleicher Übereinstimmung zeigen sich die übrigen Data und beweisen damit die Anwendbarkeit der Methode für einen ziemlich ausgedehnten Schussbereich. Ein Geschoss von etwa 1000 m Anfangsgeschwindigkeit passirt also zunächst die Widerstandregion $v^{1\cdot55}$, dann $v^{1\cdot7}$ und v^2 in der Weise, dass diese Potenzen und die folgenden $v^3 v^4 v^5$ mehr oder weniger rasch aufeinanderfolgen, namentlich am Abhang der $K(v)$-Curve. Unsere Curve zeigt bis zu $v = 283$ ca. den stetigen Übergang der Exponenten in fortgesetztem Wachsthum in voller Übereinstimmung mit der Beobachtung. Dann aber treten die Curven auseinander; die unserige verlangt bei kleinsten Geschwindigkeiten das Gesetz $v^{6\cdot5}$, während die wirkliche sich mit v^2, beziehungsweise v begnügt.



§. 7.

Zur Vergleichung unserer Methode mit der neuesten Siacci'schen Tabelle wählen wir als Unterlage die jüngst von Krupp in besonders schöner Ausstattung herausgegebene

Entwickelung des Krupp'schen Feldartilleriematerials von 1892 bis 1897 (Anlage 38).

Schwere 7·5 *cm*-Schnellladc-Feldkanone *L*/28/30.

Geschossgewicht $G = 6\cdot 5$ *kg*, Mündungsgeschwindigkeit 500.

Die entsprechende Schusstafel gibt für den Abgangswinkel $\alpha = 12°\,13'$ die Schussweite $x = 5000\,m$, $v_e = 239\,m$ und $\beta = 18°\,57'$. Unter Zugrundelegung dieser Ausgangsdata werden wir die Flugzeit für diese Entfernung berechnen, indem wir setzen $\Delta = 1\cdot 206$ und i aus der Formel für x bestimmen.

Zunächst ist

$$C = i\,\frac{\Delta}{1\cdot 206}\cdot\frac{(2R)^2}{G} = i\cdot\frac{(7\cdot 5)^2}{6\cdot 5} = i\,.\,8\cdot 654,$$

$$u = v_e\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 239\cdot\frac{\cos 18°\,57'}{\cos 12°\,13'} = 231\cdot 28.$$

Die Formel für die Schussweite liefert

$$x = \frac{5720}{9\,.\,i\,.\,8\cdot 654}\,[38\cdot 314 - 54\cdot 020 - 1\cdot 193 + 79\cdot 427],$$

woraus

$$x = \frac{4592}{i}$$

folgt.

Da nun $x = 5000$, so muss $i = 0\cdot 918$ sein.

Die Zeitformel liefert ferner

$$t = \frac{1}{i\,.\,8\cdot 654\cos\alpha}\,[86\cdot 143 + 148\cdot 44 - 1\cdot 240 - 100\cdot 96]$$

also $t = 17\cdot 0$ Secunden Flugzeit.

Indem wir nunmehr auf dieselbe Aufgabe die Methode Siacci's anwenden und mit dem Argument $u = 231\cdot28$ in seine Tabellen eingehen, erhalten wir zunächst

$$x = \frac{4310}{i}, \text{ also } i = 0\cdot862$$

und damit $t = 16\cdot9$.

Die Differenz zwischen den berechneten Flugzeiten ist $^1/_{10}$ Secunde und also sehr gering. Die Tafel hat $16\cdot51$ Secunden, wobei wir daran erinnern müssen, dass bei solch' grossen Schussweiten von 5000 *m* und darüber Zeitdifferenzen bis zu $^1/_4$ und $^1/_2$ Secunden nichts Seltenes sind, wie die entsprechenden Anlagen beweisen.

In gleicher Weise lassen sich $\operatorname{tg} \tau$ und die Ordinate y in der Wurfweite x berechnen, wobei der Coëfficient i, der bei unserer Curve $0\cdot918$, bei Siacci $0\cdot862$ ist, wieder wie oben berücksichtigt werden muss. Der Unterschied dieser i-Werthe liegt in den zu Grunde gelegten $K(v)$-Curven begründet, von denen die unserige den Krupp'schen Versuchen etwas näher steht, wie man sich aus der blossen Ansicht der Tafel überzeugt. Sowohl zu Anfang, als auch zu Ende der Bahn liegt sie etwas tiefer als Siacci's Curve, weshalb auch unser Coëfficient i der Einheit näher steht.

Aus beiden Resultaten geht die Thatsache hervor, dass für jede Geschütz- und Geschossart ein ihr eigenthümlicher Coëfficient i existirt, der den Übergang der einen, z. B. der unserigen zu der Siacci'schen Curve, beziehungsweise der einen Gruppe von Versuchen zu den entsprechenden anderen vermittelt. Diese Coëfficienten, die übrigens durchaus nicht constant sind, müssen als nothwendiges Übel hingenommen werden. Bei höheren Elevationen meldet sich zum Überfluss ein neuer Coëfficient, der seinen Ursprung dem geringeren Luftwiderstande der höheren Sphären verdankt. Für den Verticalschuss sind die Formeln überhaupt nicht anwendbar. Von der endgiltigen Lösung der ballistischen Aufgabe sind wir also noch sehr weit entfernt.

Zur weiteren Anwendung der genannten Methoden auf dasselbe Geschütz wählen wir folgende Data der Schusstafel:

$$x = 3000, \quad \alpha = 5°34', \quad \beta = 7°58', \quad v_e = 287.$$

Zunächst folgt $u = 285 \cdot 53$, $n = 8 \cdot 654$ wie oben.

Die Gleichung für x liefert $i = 0 \cdot 809$ und die t-Formel $t = 8 \cdot 4$ Secunden.

Die Siacci'sche Tabelle verlangt $i = 0 \cdot 815$ und liefert $t = 8 \cdot 4^s$.

Die i-Werthe haben beide abgenommen, der unsere freilich etwas stärker, die Flugzeiten sind dieselben. Die Tafel verzeichnet $t = 8 \cdot 42$.

Wir überschreiten nunmehr die bisher innegehaltenen Grenzen unserer Curve nach unten hin, indem wir die letzten Daten der Schusstafel, also kleine Endgeschwindigkeiten zu Grunde legen, um die Grösse des hiedurch gemachten Fehlers kennen zu lernen:

$$x = 6800, \quad \alpha = 20°3', \quad \beta = 31°25', \quad t = 25 \cdot 26, \quad v_e = 225,$$
$$n = 8 \cdot 654, \quad u = 204 \cdot 4.$$

Die Formel für x liefert jetzt $i = 1 \cdot 0395$ und damit $t = 26 \cdot 70^s$.

Die Tabelle Siacci's liefert $i = 0 \cdot 803$ und $t = 25 \cdot 71$.

Die i-Werthe sind auch hier nicht völlig constant; der unserige musste grösser werden, weil die Widerstandscurve im letzten Verlauf der Bahn zu kleine Ordinaten hat, die eben jene Differenz von 1 Secunde Flugzeit verursachte. Dieser Unterschied zwischen unserem und Siacci's Resultat kann als das Mass der Annäherung, beziehungsweise Abweichung beider untergelegten $K(v)$-Curven aufgefasst werden, sofern es erlaubt war, bei der letzten starken Divergenz die durch den ermittelten Werth von i bewirkte Reduction oder Übergang von x auf t noch durchzuführen. Bekanntlich sind die Geschossspitzen der Krupp'schen Fabrik sehr schlank und in Folge dessen der Luftwiderstand bei ihnen geringer, woher es auch kommt, dass die Krupp'sche $K(v)$-Curve, wenn man sie construirt, zum Theil etwas kleinere Ordinaten als die Siacci'sche zeigt, wie das schon der i-Werth, der durchweg kleiner als 1 ist, andeutet. Dass indessen die beiderseitigen Ordinaten und Curven in der

Weise verlaufen, dass sie eine Constanz von i gewährleistet. ist nach dem Obigen wohl ausgeschlossen.

§. 8.

Man kann die allgemeinen Gleichungen 16) etwas vereinfachen, wenn die Theile derselben mehr zusammengefasst werden. Führen wir ein

$$\lambda = \left(\frac{520}{u}\right)^5, \qquad Q = 81 \cdot \left(\frac{v_0}{520}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot 5}, \tag{31}$$

so geht die Gleichung für die Schussweite x über in

$$\lambda + \left(Q - 9\,\frac{Cx}{5720}\right)\lambda^{1/10} = 81. \tag{32}$$

Hat man die Absicht, aus der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit und der Schussweite die Endgeschwindigkeit und das übrige zu berechnen, so ist aus der vorstehenden Gleichung zunächst λ und dann $u = \frac{v \cos \tau}{\cos \alpha}$ zu bestimmen.

Führen wir noch ein

$$B = Q - 9\,\frac{Cx}{5720} = 81\left(\frac{v_0}{520}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot 5} - 9\,\frac{Cx}{5720}$$

so folgt

$$B = \frac{81 - \lambda}{\lambda^{1/10}}. \tag{33}$$

Die Bestimmung von λ aus dieser Gleichung ist etwas beschwerlich. Da sie aber keinen veränderlichen Parameter hat, kann sie als Curve oder in Form einer Tabelle für die Rechnung bequem gemacht werden. Die folgende kleine Tabelle gibt hiezu die Handhabe.

λ	B	λ	B	λ	B	λ	B
1	80·000	16	49·261	31	35·468	46	23·867
2	73·710	17	48·210	32	34·648	47	23·135
3	69·885	18	47·186	33	33·837	48	22·407
4	67·032	19	46·187	34	33·033	49	21·684
5	64·702	20	45·209	35	32·237	50	20·964
6	62·697	21	44·252	36	31·448	51	20·247
7	60·915	22	43·312	37	30·664	52	19·534
8	59·294	23	42·389	38	29·887	53	18·825
9	57·797	24	41·481	39	29·117	54	18·119
10	56·397	25	40·587	40	28·352	55	17·416
11	55·075	26	39·707	41	27·592	56	16·716
12	53·818	27	38·838	42	26·837	57	16·019
13	52·616	28	37·980	43	26·088	58	15·324
14	51·459	29	37·133	44	25·343	59	14·633
15	50·343	30	36·296	45	24·603	60	13·944

Ist λ ermittelt, so ergeben sich $t\tau y$ aus

$$C\cos\alpha t = (99+\lambda)\lambda^{1/_{10}} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{5\cdot 5} - 99\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1/_2},$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{11g}{6760C\cos\alpha^2}\left[(\lambda+39)\lambda^{3/_{10}} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot 5} - 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot 5}\right] \qquad 34)$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha$$

$$-\frac{11g}{26C^2\cos\alpha^2}\Bigg[((\lambda+44)^2+1925)\lambda^{1/_5} -$$

$$-\left\{\left(\left(\frac{520}{v_0}\right)^5+44\right)^2+1925\right\}\frac{520}{v_0} - \frac{Cx}{260}\left(\left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot 5}+39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot 5}\right)\Bigg].$$

Anwendung. Beispiel nach Majevski.

21 *cm*-Kanone von Krupp. $v_0 = 520$.

$G = 140\,kg$, $2R = 20\cdot 93$, $\Delta = 1\cdot 233$, $i = 0\cdot 896$, $\alpha = 5°38'$,
also $C = 2\cdot 8664$.

Gesucht die Flugbahnelemente für die Schussweite $x = 4097\,m$.

Zunächst folgt aus der obigen Relation

$$B = 80-9 \cdot \frac{4097}{5720} \cdot n = 61{\cdot}523,$$

und die Tabelle liefert vermittelst Interpolation den Werth

$$\lambda = 6{\cdot}65, \text{ genauer } 6{\cdot}647.$$

Also resultirt aus den obigen Hauptformeln

$$nt \cos\alpha = (99+\lambda)\lambda^{1/10} - 100,$$

$$t = 9{\cdot}7 \quad (\text{beob. } 9{\cdot}7),$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{11 \; 9{\cdot}81}{6760 \,.\, 2{\cdot}8664 \cos\alpha^2} \, [45{\cdot}647 \,.\, 6{\cdot}647^{1/10} - 40].$$

$$\text{Fallwinkel } \tau = 7^\circ\, 22'\, 50'' \quad (\text{Majevski } 7^\circ\, 16').$$

Die Endgeschwindigkeit folgt nunmehr aus

$$v = \frac{520 \cos\alpha}{\lambda^{1/5} \cos\tau} = 357{\cdot}3 \quad (\text{Maj. } 358{\cdot}3).$$

Die Ordinate in 4097 *m* Schussweite ist

$$y = 4097 \operatorname{tg}\alpha - \frac{11 \,.\, 9{\cdot}81}{26 \,.\, 2{\cdot}8664^2 \cos\alpha^2} \Big[\{50{\cdot}647^2 + 1925\}\, 6{\cdot}647^{1/5} - 3950 - 40 \cdot \frac{2{\cdot}8664}{260} \cdot 4097 \Big].$$

$$y = -4{\cdot}73\, m.$$

Die errechnete Flugbahn geht also 4·73 *m* unter dem Schnittpunkte der wirklichen Bahn mit dem Horizont weg.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die allgemeine Formel für die Beschleunigung nach Einführung des Werthes $n = 260$ übergeht in

$$V = i \cdot \frac{\Delta}{1{\cdot}206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \cdot 3{\cdot}5 \frac{\sqrt{2}}{41} \cdot v^2 \qquad (R \text{ in Metern})$$

und dass nach Einsetzen der Siacci'schen Bezeichnung $C' = \frac{G}{1000(2R)^2}$ und seiner Reductionszahl $i = 0\cdot896$ der vorstehende Ausdruck mit dem von Majevski aufgestellten

$$U = \frac{\Delta}{1\cdot206} \cdot \frac{0\cdot000108}{C} \cdot v^2$$

übereinstimmt.

§. 9.

Die Berechnung einer ballistischen Aufgabe nach verschiedenen Methoden liefert in den meisten Fällen verschiedene Resultate, deren Unstimmigkeit zum Theil auch durch die unsicheren Ausgangsdata mitbedingt werden. Die Ballistik hat in dieser Hinsicht viele Ähnlichkeit mit der dynamischen Meteorologie, bei welcher ebenfalls eine unbekannte Reihe von Störungsfactoren die Exactheit der Rechnung beeinflusst. Die individuellen Erscheinungen fügen sich weder in dem einen, noch in dem anderen Falle den von den Theoretikern geschaffenen generalisirenden Methoden oder Theorien. Es bleibt immer etwas Incommensurables übrig. Gelingt es, dies in möglichst enge Grenzen einzuschliessen, so muss man sich zunächst bescheiden und die weiteren Grenzberichtigungen der Zukunft überlassen.

Wir haben bei den jetzigen und früheren Untersuchungen immer und mit einer gewissen Absicht die gewonnenen Resultate mit den entsprechenden anderer Forscher verglichen, um im Anschluss an diese zu bleiben und namentlich im Hinblick auf die stets auftretenden Differenzen zwischen Thatsache und Theorie den Grad der Sicherheit oder Unsicherheit festzustellen, die den Werth oder Unwerth der eingeführten Methode bedingen und entscheiden.

Im Folgenden wählen wir dasselbe Beispiel, das Cranz in seinem Compendium der Ballistik, S. 371—373 auf Grundlage der Hojel-Vallier'schen Tabellen berechnet hat.

Deutsches Feldgeschütz *C*/73.

Gesucht die ballistischen Elemente des Flugbahnpunktes mit der Abscisse $x = 3145$.

Gegeben: Seelenweite $2R = 8 \cdot 8\ cm$, Geschossgewicht $G = 7 \cdot 03$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 440\ m$, Abgangswinkel $\alpha = 30°$, Luftdichte $\Delta = 1 \cdot 206\ kg$, $x = 3145\ m$.

Aus der Gleichung für die Schussweite haben wir wieder zuerst u zu berechnen.

Es ist zunächst

$$B = 81\left(\frac{v_0}{520}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{4 \cdot 5} - \frac{9ux}{5720}, \quad C = i\,\frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G}$$

und $\lambda = \left(\frac{520}{u}\right)^5$. Damit erhalten wir aus

$$\lambda + B.\lambda^{3/10} = 81$$

die Beziehung

$$\lambda + 17 \cdot 878\lambda^{3/10} = 81$$

und nach der Tabelle $\lambda = 54 \cdot 33$ und also

$$u = \frac{520}{\lambda^{1/5}} = 233 \cdot 9.$$

Die übrigen Elemente im Punkte xy ergeben sich nun aus 34) und sind: $t = 12 \cdot 42$ Secunden Flugzeit, $\tau = 4° 38' 30''$ und als Flugbahnordinate $y = 1182 \cdot 4\ m$.

Als Geschwindigkeit in diesem Punkte ist der Formel $v \cos\tau = u \cos\alpha$ gemäss $v = 203\ m$.

Im Anschluss an Cranz berechnen wir weiter die Elemente des Flugbahnscheitels XY.

Es ist $\operatorname{tg}\tau = 0$ in 34) einzusetzen und aus der resultirenden Gleichung

$$\sin 2\alpha = \frac{11g}{3380C}\left[(\lambda + 39)\lambda^{3/10} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{6 \cdot 5} - 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1 \cdot 5}\right] \qquad 35)$$

λ zu bestimmen. Wir setzen

$$N = \left(\frac{520}{v_0}\right)^{6 \cdot 5} + 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1 \cdot 5} + \frac{3380C}{11g}\sin 2\alpha.$$

Zunächst ist $N = \lambda^{13/10} + 39\lambda^{3/10} = 351 \cdot 878$, woraus

$$\lambda^{1/5} = N^{2/13}\left(1 - \frac{39}{N}\lambda^{3/10}\right)^{2/13}$$

folgt und in Reihen aufgelöst als Näherungsausdruck ergibt

$$\lambda^{1/5}\left(\frac{1}{N^{12/13}}+\frac{1}{N^{22/13}}-\frac{36\lambda^{1/5}}{N^{24/13}}\right)+\frac{6\lambda^{1/10}}{N^{11/13}}=1.$$

Ein erster Werth ergibt sich ohne Rücksicht auf das Schlussglied aus der Formel

$$\frac{u}{520}=\left(\frac{3+\sqrt{108+N^{20/13}-\frac{36}{N^{2/13}}\cdot\frac{520}{u}}}{N^{11/13}}\right)^2 \tag{36}$$

und ein zweiter Werth unter Benützung desselben: $u = 227\cdot28$.

Wie man sieht, sind die Auflösungen solcher höheren Gleichungen sehr lästig, sie lassen sich aber, wenn man keine Curven oder Tabellen für diese im Übrigen parameterfreien Gleichungen einführen will, nicht wohl umgehen.

Da nunmehr u bekannt ist, so auch $v = 196\cdot83\, m$. Die Abscisse des Scheitelpunktes ergibt sich durch Einsetzen von u in die x-Formel

$$X = 3478\, m,$$

und ebenso erhalten wir aus der Gleichung für y

$$Y = 1195\, m.$$

Wir stellen unsere und die von Cranz a. a. O. ermittelten Resultate vergleichend zusammen.

	t_x	τ_x	y_x	v_x	X	Y	v_s
O. . . .	12·42	4° 38′ 30″	1182·4	203	3478	1195	196·83
C. . . .	12·6	3° 30′ 30″	1171·5	191	3721	1277	198

Ein kurzer Überblick zeigt, dass die t_x, y_x und die v_s-Werthe recht gut zusammenstimmen, und dass die verbleibenden Differenzen lediglich den zu Grunde gelegten Methoden zur Last gelegt werden können. Dagegen zeigen die übrigen Werthe mehr oder weniger starke Unterschiede. Da $x = 3145$, also kleiner als X ist, so kann v_x nicht kleiner als die Scheitelgeschwindigkeit sein. Hier zeigt sich bei Cranz eine Unstimmigkeit. Aber auch die anderen Data dürften bei

ihm nicht genau sein. Eine kleine Probe ist vielleicht nicht überflüssig. Durch die beiden genannten Flugbahnpunkte $x = 3145$ und X (Scheitel) legen wir einen Kreisbogen, der sich wegen der flachen Bahnstrecke daselbst dem wirklichen Bogen genügend genau anpasst, und ziehen durch x eine Tangente zur Bahn und eine Sehne zum Scheitelpunkte, welch' letztere einen Winkel $^1/_2 \tau$ mit der Horizontalen einschliesst, der für unsere Curve

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \tau = \frac{1195 - 1182 \cdot 4}{3478 - 3145}$$

$$\tau = 4^\circ 20'$$

liefert und vom wirklichen Curvenwerth nur um $0^\circ 18^1/_2{}'$ abweicht. Die Cranz'schen Zahlen dagegen liefern

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \tau = \frac{1277 - 1171 \cdot 5}{3721 - 3145}$$

oder

$$\tau = 20^\circ 45',$$

also einen viel zu grossen Werth, was wahrscheinlich an der unsicheren Bestimmung des Scheitelpunktes liegen mag.

Vielleicht nimmt Herr Prof. Cranz hierdurch Veranlassung, die betreffenden Rechnungen und etwa auch die auf S. 348 durchgeführten noch einmal durchzusehen.

Man kann für den Scheitelpunkt der Flugbahn ($\operatorname{tg} \tau = 0$) noch eine einfache Formel dadurch ableiten, dass man den aus der dritten Hauptformel erhaltenen Werth für $\operatorname{tg} \alpha$ nebst dem Werthe für x in die letzte Gleichung für y substituirt und die Gleichung ordnet; es folgt schliesslich

$$Y = \frac{121 g}{117 C^2 \cos \alpha^2} \left[\frac{13}{22} \left(\frac{520}{u} \right)^{11} - 78 \left(\frac{520}{u} \right)^6 - \frac{9477}{2} \left(\frac{520}{u} \right) + \right.$$
$$+ \frac{9}{22} \left(\frac{520}{v_0} \right)^{11} + 36 \left(\frac{520}{v_0} \right)^6 + \frac{3159}{2} \cdot \frac{520}{v_0} +$$
$$\left. + \left\{ \left(\frac{520}{u} \right)^{6 \cdot 5} + 39 \left(\frac{520}{u} \right)^{1 \cdot 5} \right\} \text{[illegible]} \left(\frac{520}{v_0} \right)^{4 \cdot 5} + 81 \left(\frac{520}{v_0} \right)^{-1/2} \right\} \right] \quad 37)$$

Diese Formel ist unabhängig von x und ergibt die Scheitelhöhe, wenn u bekannt ist. Ist die Scheitelgeschwindigkeit v_s, so ist $u \cos \alpha = v_s$.

Zwischen den Tangenten des Fallwinkels und des Abgangswinkels herrscht bei sehr vielen Flugbahnen ein ungefähres Verhältniss: $\operatorname{tg} \beta = {}^3/_2 \operatorname{tg} \alpha$, das man zuweilen benützen kann, wenn Näherungsformeln gesucht werden. Die dritte Hauptgleichung geht dann über in

$$\left(\frac{520}{u}\right)^{6\cdot 5} + 39\left(\frac{520}{u}\right)^{1\cdot 5} =$$

$$= \left(\frac{520}{v_0}\right)^{6\cdot 5} + 39\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1\cdot 5} + \frac{8450\,C}{11\,g} \sin 2\alpha = M.$$

Wenn also bei einem Schuss gemessen sind v_0, α, u, so kann der i-Werth aus $C = \frac{(2R)^2}{G} i$ berechnet in die übrigen Hauptgleichungen eingesetzt werden, wonach alsdann x, t, y leicht ermittelt werden können. Wird dagegen u gesucht, so kann man wie vorher nach der Formel

$$\frac{u}{520} = \left(\frac{3 + \sqrt{108 + M^{2/13} - \frac{36}{M^{2/13}} \cdot \frac{520}{u}}}{M^{1/13}}\right)^2$$

verfahren, indem man unter Weglassung des letzten Gliedes einen ersten und dann einen zweiten Näherungswerth für u ermittelt. Diese Lösung ist indessen etwas zeitraubend, weshalb wir im zweiten Theil eine einfachere Formel hiefür entwickeln werden, die schneller zum Ziele führt.

§. 10.

Die Hauptgleichungen der ballistischen Bewegung lassen zum Theil eine Transformation in Form von Reihen, und zwar in Function der Zeit zu. Wählen wir z. B. hievon die folgenden:

$$x = \frac{5720}{9\,C}\left[\left(\frac{520}{u}\right)^{4\cdot 5} - 81\left(\frac{u}{520}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{4\cdot 5} + 81\left(\frac{v_0}{520}\right)^{1/2}\right],$$

$$C \cos \alpha t = \left(\frac{520}{u}\right)^{5\cdot 5} + 99\left(\frac{520}{u}\right)^{1/2} - \left(\frac{520}{v_0}\right)^{5\cdot 5} - 99\left(\frac{520}{v_0}\right)^{1/2}$$

und führen ein $\varepsilon = \frac{520}{v_0}$,

$$x = v_0 \cos\alpha(t + Bt^2 + Ct^3 \ldots),$$

$$v_x = v\cos\tau = v_0\cos\alpha(1 + 2Bt + \ldots),$$

oder

$$u = v_0(1 + 2Bt + 3Ct^2 \ldots),$$

so ergibt diese in die t-Formel eingesetzte Relation nach einigen Rechnungen die Reihe

$$x = v_0\cos\alpha t\left[1 - \frac{\frac{1}{11}C\cos\alpha t}{(9+\varepsilon^5)\varepsilon^{1/2}} + \frac{9 + \frac{13}{3}\varepsilon^5}{9+\varepsilon^5}\left(\frac{\frac{1}{11}C\cos\alpha t}{(9+\varepsilon^5)\varepsilon^{1/2}}\right)^2\right.$$

$$- \frac{81 + 18\varepsilon^5 + 26\varepsilon^{10}}{(9+\varepsilon^5)^2}\left(\frac{\frac{1}{11}C\cos\alpha t}{(9+\varepsilon^5)\varepsilon^{1/2}}\right)^3$$

$$\left. + \frac{729 + 729\varepsilon^5 - 540\varepsilon^{10} + 182\varepsilon^{15}}{(9+\varepsilon^5)^3}\left(\frac{\frac{1}{11}C\cos\alpha t}{(9+\varepsilon^5)\varepsilon^{1/2}}\right)^4 - \ldots\right] \quad 38)$$

und differentiirt

$$v_x = v_0\cos\alpha\left[1 - \frac{2\,\frac{C\cos\alpha t}{11}}{(9+\varepsilon^5)\varepsilon^{1/2}} + \frac{3\left(9 + \frac{13}{3}\varepsilon^5\right)}{(9+\varepsilon^5)^3\varepsilon}\left(\frac{C\cos\alpha t}{11}\right)^2\right.$$

$$- 4\,\frac{81 + 18\varepsilon^5 + 26\varepsilon^{10}}{(9+\varepsilon^5)^5\varepsilon^{3/2}}\left(\frac{C\cos\alpha t}{11}\right)^3$$

$$\left. + 5\,\frac{729 + 729\varepsilon^5 - 540\varepsilon^{10} + 182\varepsilon^{15}}{(9+\varepsilon^5)^5\varepsilon^2}\left(\frac{C\cos\alpha t}{11}\right)^4 - \ldots\right]. \quad 39)$$

Die Reihe für x kann man dadurch vereinfachen, dass man die Coëfficienten der einzelnen Glieder in

$$1 + \frac{{}^{10}/_3\,\varepsilon^5}{9+\varepsilon^5} \qquad 1 + \frac{25\varepsilon^{10}}{(9+\varepsilon^5)^2} \text{ etc.}$$

zerlegt, wodurch die vom ersten Glied abhängigen Werthe in einen einfachen Ausdruck zusammengefügt werden können:

Setzen wir der Erleichterung der Rechnung halber

$$\beta = \frac{{}^1/_{11} C \cos \alpha t}{(9+\varepsilon^5)\varepsilon^{1/2}},$$

so geht 38) über in

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha t}{1+\frac{\frac{1}{11} C \cos \alpha t}{(9+\varepsilon^5)\varepsilon^{1/2}}} +$$

$$+ v_0 \cos \alpha t \cdot \frac{\varepsilon^5 \beta^2}{(9+\varepsilon^5)} \left[\frac{10}{3} - \frac{25\varepsilon^5\beta}{9+\varepsilon^5} + \frac{\beta^2(486-567\varepsilon^5+181\varepsilon_{10})}{(9+\varepsilon^5)^2}\right]. \quad 40)$$

Anwendung.

21 *cm*-Kanone von Krupp. $2R = 20\cdot 93$, $G = 140$, $T = 9\cdot 7$ Secunden, $\Delta = 1\cdot 233$, $i = 0\cdot 896$, $v = 520$ (genauer 521).

Gesucht die Wurfweite x nach 9·7 Secunden Flugzeit.

Die Reihe liefert

$$x = 4096,$$

oder, wenn ein oben nicht weiter angegebenes Reihenglied zur Berechnung gelangt,

$$x = 4091\,m.$$

Gemessen wurde $x = 4097$.

Ebenso stimmt die berechnete Geschwindigkeit mit der gemessenen von 356 *m* gut überein.

II. Theil.

Aufstellung einer transcendenten Widerstandsfunction.

§. 11.

Die im I. Theil aufgestellten Curvengleichungen genügten im Allgemeinen den thatsächlichen Forderungen der Erfahrung mit Ausnahme des ersten Theiles des Geschwindigkeitsbereiches von Null bis etwa 200—240 *m*. Um diese Lücke auszufüllen, würde es nicht angehen, irgend eine Correctur an den Grundformeln vorzunehmen, da alsdann die geschlossene

Integration in Frage gestellt werden würde. Die Luftwiderstandscurve überhaupt in einer solchen Form darzustellen, dass sie sämmtlichen Beobachtungen genügt und ausserdem einer geschlossenen Integration zugänglich ist, ist eine, wenn auch vielleicht keine unmögliche, so doch eine schwierige Aufgabe. Wenn wir im Folgenden hiezu einen Versuch machen, so wollen wir damit nur einen Weg von vielen andeuten, die mit mehr oder minder grossen Abweichungen von der wirklichen Curve zu einem vorläufigen Ziele führen. Es ist eben nicht leicht, durch die vielen experimentell gefundenen Beobachtungsdaten diejenige Curve zu legen, welche die wahrscheinlichsten Werthe sämmtlicher Versuche mit einander verknüpft und zugleich die nothwendige Stetigkeit einer mathematischen Linie von der Eigenschaft besitzt, dass ihre Gleichung darstellbar und derart einfach ist, dass sie selbst nach mehreren Integrationen noch einen geschlossenen Ausdruck gewährleistet. In manchen Fällen der angewandten Mathematik geht dies bekanntlich an, aber nicht in allen. Die rauhe Natur der Thatsachen kümmert sich im Ganzen sehr wenig um die ersonnenen eleganten und idealen Wege der Theorie, auf denen zu wandeln wir sie so gerne zwingen möchten, eingeschnürt in eine Zwangsjacke von »Gesetzen«, deren sie gelegentlich gründlich spottet.

Die $K(v)$-Curve des Widerstandsgesetzes

$$W = f.K(v)v^2$$

stellen wir nunmehr in der Form einer Exponentialfunction auf.

$$K(v) = \frac{A}{1-av^m e^{-nv}} \qquad 41)$$

und untersuchen, inwieweit sie sich der beobachteten anbequemt. Letztere besitzt bekanntlich etwa zwischen 500—600 ein Maximum und hat ausserdem zwei Wendepunkte. Wir schreiben die obige Gleichung in der Fassung

$$y = \frac{A}{1-ax^m e^{-nx}}$$

und sehen zuerst nach, ob sie die genannten Eigenschaften der experimentellen Curve hat. Die Bedingung des Maximums $x_1 y_1$ ergibt sich aus den Beziehungen

$$x_1 = \frac{m}{n}, \quad y = \frac{A}{1 - \left(1 - \frac{A}{y_1}\right)\left(\frac{x}{x_1}\right)^m e^{m\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)}}.$$

Wählen wir der Einfachheit und der raschen Übersicht wegen vorläufig $x_1 = 600$ und $y_1 = 360$ als Ordinaten des Scheitelpunktes und $A = 120$, so muss sein

$$\frac{2}{3} = a x_1^m e^{-n x_1}.$$

Damit erhalten wir in

$$y = \frac{120}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x_1}\right)^m e^{m\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)}} \tag{42}$$

eine Curve mit der Eigenschaft, dass ihre Anfangsordinate $= 120$ und die Scheitelcoordinaten 600, 360 sind. Wir haben also, wenn wir noch $m = 3$ annehmen,

$$y = \frac{120}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{600}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{x}{600}\right)}}. \tag{43}$$

Die Wendepunkte ($d^2 y = 0$) ergeben sich aus

$$1 + \frac{2}{3} z^3 e^{3(1-z)} = \frac{2}{1 + 3(1-z)^2}, \quad z = \frac{x}{600}.$$

Führt man ein

$$1 - z = u$$

und logarithmirt die Formel

$$\frac{1 + 3u^2}{1 - 3u^2}(1 - u)^3 e^{3u} = \frac{3}{2},$$

so folgt

$$u = \pm \sqrt{\frac{2}{9} \, ln \, \frac{3}{2} + \frac{2}{9} \, u^3 \left(1 + \frac{3}{4} u + \frac{3}{5} u^2\right)}, \qquad 44)$$

woraus

$$u_1 = +0 \cdot 314 \qquad u_2 = -0 \cdot 291,$$

also

$$z = 0 \cdot 686 \qquad z_2 = 1 \cdot 291,$$

mithin

$$x_1 = 412 \qquad x_2 = 775$$

folgt.

Unsere Curve besitzt also zwei Wendepunkte.

Die $K(v)$-Gleichung ist nunmehr

$$K(v) = \frac{120}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{v}{600}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{v}{600}\right)}}$$

und die Beschleunigung des Luftwiderstandes

$$U = i \, \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \cdot \frac{0 \cdot 12}{10000} \cdot \frac{v^2}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{v}{600}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{v}{600}\right)}}. \qquad 45)$$

Wir führen ein

$$C = i \, \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G},$$

$$N = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{u}{600}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{u}{600}\right)}, \quad v \cos \tau = u \cos \alpha$$

und erhalten als Integralgleichungen der Bewegung

$$x = -\frac{10^6}{12\,C} \int \frac{N du}{u},$$

$$t = -\frac{10^6}{12\,C \cos \alpha} \int \frac{N du}{u^2}$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha + \frac{g \cdot 10^6}{12\,C \cos \alpha^2} \int \frac{N du}{u^3}.$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$x = \frac{10^6}{12\,C}\left[ln\frac{v_0}{u} - \frac{2}{81}\left(2+6\left(\frac{u}{600}\right)+9\left(\frac{u}{600}\right)^2\right)e^{3\left(1-\frac{u}{600}\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{81}\left(2+6\left(\frac{v_0}{600}\right)+9\left(\frac{v_0}{600}\right)^2\right)e^{3\left(1-\frac{v_0}{600}\right)}\right]$$

$$t = \frac{10^4}{72\,C\cos\alpha}\left[\frac{1}{u/600} - \frac{1}{v_0/600} - \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}+\frac{u}{600}\right)e^{3\left(1-\frac{u}{600}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}+\frac{v_0}{600}\right)e^{3\left(1-\frac{v_0}{600}\right)}\right], \qquad 46)$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{10^4 g}{2C\cos\alpha^2 . 43200}\left[\frac{1}{\left(\frac{u}{600}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{v_0}{600}\right)^2} - \frac{4}{9}e^{3\left(1-\frac{u}{600}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{9}e^{3\left(1-\frac{v_0}{600}\right)}\right].$$

Man erkennt aus den vorstehenden geschlossenen Ausdrücken für die Schussweite x, die Flugzeit t und den Tangentenwinkel τ der Bahn eine noch hinlängliche Einfachheit der Formeln, wiewohl die Exponentialwerthe rechnerisch die Arbeit etwas erschweren. Die Gleichung für die Flugbahnordinate

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{10^{12} g}{144\,C^2\cos\alpha^2}\int\frac{du\,N}{u}\int\frac{N du}{u^3}$$

wird in Folge der wiederholten Integration ziemlich weitläufig. In Ausführung derselben gelangt man u. A. schliesslich zu dem folgenden, nicht mehr in geschlossener Form darstellbaren Ausdruck

$$\int_{z_0}^{z}\frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z}\cdot dz \qquad z = \frac{u}{100},$$

wofür Schloemilch die folgende Reihe gefunden hat:

$$\int_z^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{z}\,dz = \frac{2e^{-\frac{1}{2}z}}{z}\left(1 - \frac{a_1}{\frac{1}{2}z+1} + \frac{a_2}{\left(\frac{1}{2}z+1\right)\left(\frac{1}{2}z+2\right)} - \frac{a_3}{\left(\frac{1}{2}z+1\right)\left(\frac{1}{2}z+2\right)\left(\frac{1}{2}z+3\right)} + \ldots\right)$$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = 14 \quad a_6 = 38 \quad a_7 = 216.$$

Der Werth der Klammer ist z. B. für $u = 600$, also $z = 6$ gleich 0·7857. Eine Tabelle für

$$S_u = 1 - \frac{1}{\frac{u}{200}+1} + \frac{1}{\left(\frac{u}{200}+1\right)\left(\frac{u}{200}+2\right)} - \frac{2}{\left(\frac{u}{200}+1\right)\left(\frac{u}{200}+2\right)\left(\frac{u}{200}+3\right)} + \ldots$$

würde rascher zum Ziele führen. Die vorstehende Reihe ist übrigens die einzige bei unserem Problem.

Die Gleichung der Curve lautet

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{10^8}{2C^2 \cos \alpha^2 . 5184}\left[\frac{1}{2\left(\frac{u}{600}\right)^2} - \frac{1}{2\left(\frac{v_0}{600}\right)^2} - D \ln \frac{v_0}{u} - \frac{2}{9} e^{3\left(1-\frac{u}{600}\right)} + \frac{2}{9} e^{3\left(1-\frac{v_0}{600}\right)} + \right.$$

$$+ \frac{2}{729}\left(1 + 6\frac{u}{600} + 18\left(\frac{u}{600}\right)^2\right) e^{6\left(1-\frac{u}{600}\right)} - \frac{2}{729}\left(1 + 6\frac{v_0}{600} + 18\left(\frac{v_0}{600}\right)^2\right) e^{6\left(1-\frac{v_0}{600}\right)} +$$

$$+ \frac{2D}{81}\left(2 + 6\frac{u}{600} + 9\left(\frac{u}{600}\right)^2\right) e^{3\left(1-\frac{u}{600}\right)} - \frac{2D}{81}\left(2 + 6\frac{v_0}{600} + 9\left(\frac{v_0}{600}\right)^2\right) e^{3\left(1-\frac{v_0}{600}\right)} -$$

$$\left. - \frac{4}{27}\,\frac{e^{3\left(1-\frac{u}{600}\right)}}{u/600}\, S_u + \frac{4}{27}\,\frac{e^{3\left(1-\frac{v_0}{600}\right)}}{v_0/600} \cdot S_{v_0}\right]. \quad 47)$$

Hierin ist

$$D = \left(\frac{600}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{4}{9} e^{3\left(1 - \frac{v_0}{600}\right)}.$$

Bis auf die genannte Reihe hat also die Integration zu geschlossenen Ausdrücken geführt. Wir werden nachher die vorstehende Formel noch wesentlich vereinfachen.

§. 12.

Die $K(v)$-Curve haben wir in Tafel I graphisch zur Darstellung gebracht. Sie berührt im Anfangspunkte die Siacci'sche S-Curve, steigt dann bei $v = 200$ rasch in höherem Bogen nach oben und schneidet jene Curve bei etwa 310. Darauf geht sie unterhalb derselben in steigender Tendenz bis zum zweiten Durchschnitte bei $v = 550$ ca., geht noch darüber hinaus bis zum Scheitel bei $v_0 = 600$ und wendet sich, die S-Curve bei $v = 720$ schneidend, in steilerem Abfall als diese asymptotisch der x-Axe zu. Unsere Curve hat also mit der Siacci'schen vier Schnitt-, beziehungsweise Berührungspunkte gemeinsam, hält im Übrigen auch die Zone der Versuche allerdings in der Weise inne, dass sie bald links, bald rechts sehr scharf an den äussersten Grenzen der Schussstrasse vorbeizieht, wobei sie, wie es scheint, die Krupp'sche Zone der höheren Geschossgeschwindigkeiten einigermassen bevorzugt, während sie die russische und englische meidet. Der Vortheil dieser unserer neuen Curve gegenüber der im I. Theile entwickelten besteht darin, dass sie auch die Zone der kleinen Geschwindigkeiten berücksichtigt, was die erste Curve nicht vermöchte, ihr Nachtheil, dass sie die Zone des steilen Abfalles zwischen 250 und 500, desgleichen diejenige von 800 an nur als äusserste Grenzcurve passirt, beziehungsweise überschreitet. Im Vergleiche zur S-Curve entspricht sie zum Theil höheren, zum Theil geringeren Widerständen. Inwieweit diese Abweichungen Einfluss gewinnen auf die bezüglichen rechnerischen Resultate, ist demnächst zu entscheiden.

Es dürfte genügen, wenn die nach den oben angegebenen Gleichungen ermittelten Resultate mit den nach Siacci's Tabellen berechneten verglichen werden. Wir verfahren wieder

wie früher, indem wir den i-Werth bestimmen und denselben in die übrigen Formeln für t, τ, y einführen.

Anwendung der Gleichungen.

Gegeben: Geschossgewicht $G = 10\,kg$, Seelenweite $2R = 10\,cm$, $\Delta = 1\cdot206$. Wir wählen $v_0 = 600\,m$, $u = 300\,m$, was für unsere Curve ein ungünstiger Geschwindigkeitsbereich ist im Vergleich zur S-Curve.

Es ist

$$C = i\,\frac{\Delta}{1\cdot206}\,.\,\frac{(2R)^2}{G} = 10\,.\,i.$$

Die Gleichungen für x, t und τ liefern

$$x = \frac{10^6}{12\,C}\left[ln\,2 - \frac{29}{162}\,e^{1/2} + \frac{34}{81}\right],$$

$$t = \frac{10^4}{72\,C\cos\alpha}\left[2 - \frac{5}{27}\,e^{3/2} - 1 + \frac{8}{27}\right],$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{10^4 g}{2\,C\cos\alpha^2\,.\,43200}\left[4 - 1 - \frac{4}{9}\,e^{3/2} + \frac{4}{9}\right].$$

Indem wir diese Ausdrücke auswerthen, erhalten wir

$$x = \frac{2588}{i},\quad t = \frac{6\cdot47}{i},\quad \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{10^4\,.\,g\,.\,1\cdot4526}{2\cos\alpha^2\,.\,10\,.\,i\,.\,43200}.$$

Siacci's neueste Tabelle liefert für dieselben Ausgangsdata und $i = 1$

$$x = 2325,\quad t = 5\cdot80,\quad \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{0\cdot2963}{2\cos\alpha^2}.$$

Für gleiche Schussweiten ist also unser $i = 1\cdot113$ und demzufolge

$$x = 2326,\quad t = 5\cdot795,\quad \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{0\cdot2948}{2\cos\alpha^2}.$$

Man kann also behaupten, dass die von uns berechneten t- und τ-Werthe mit denjenigen Siacci's hinreichend genau übereinstimmen. Dass unser i grösser als die Einheit ist, rührt von dem geringeren Luftwiderstand her, den unsere Curve in

dieser Region voraussetzt und dadurch eine grössere Schussweite verursacht, die durch den Formwerth $i = 1 \cdot 113$ auf den Tabellenwerth zurückgeführt worden ist. Es dürfte sich, wie schon früher bemerkt, überhaupt empfehlen, diesen auch bei anderen Curven wandelbaren Coëfficienten für jeden einzelnen Schuss, beziehungsweise bestimmte Gruppe von Schüssen vorher festzustellen. Was die Curvengleichung betrifft, so finden wir

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{265 \cdot 1}{2 \cos \alpha^2}.$$

Siacci's Tabelle liefert

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{266 \cdot 0}{2 \cos \alpha^2},$$

also ein nahezu gleiches Resultat.

Eine ungünstige Stelle unserer Curve liegt in dem Bereich zwischen $v = 200$ und 300, wie dies auch die Figur andeutet. Innerhalb desselben ist unser theoretischer Luftwiderstand grösser als der der Tabelle. Unsere Curve konnte eben diesen scharfen Übergang von der nahezu horizontalen in die nahezu verticale Richtung nicht zum Ausdruck bringen; sie verläuft nicht so schroff und bildet einen sanfteren Anstieg, liegt aber immer noch in der Zone der Beobachtungen.

Gegeben: $v_0 = 300$, $u = 200$, $C = 10i$ (wie oben). Gesucht x und t. Man hat

$$x = \frac{10^6}{10.12.i} \left[ln \frac{3}{2} - 10 \frac{e^2}{81} + \frac{29}{162} e^{3/2} \right] = \frac{2462}{i}$$

$$\cos \alpha . t = \frac{10^4}{72.27i} [27 - 4e^2 + 5e^{3/2}] = \frac{10 \cdot 212}{i}.$$

Da die Tabelle $x = 3102$ und $t = 12 \cdot 843$ liefert, so muss sein

$$i = \frac{2462}{3102}, \text{ als auch } = \frac{10 \cdot 212}{12 \cdot 843},$$

die Werthe von i sind $0 \cdot 794$, beziehungsweise $0 \cdot 795$.

Sie sind wenig von einander verschieden und nur deshalb kleiner als die Einheit, weil die durch die Curve dargestellten

grösseren Ordinaten des Luftwiderstandes, d. h. der $K(v)$-Curve eine kleinere Schussweite bedingen, die durch die Division von i auf den Tabellenwerth reducirt worden sind.

Man kann annehmen, dass, wenn die i-Werthe unserer Curve sich innerhalb enger Grenzen halten, dieselben die Übereinstimmung auch aller übrigen Elemente zur Folge haben werden. Wir stellen die bezüglichen Resultate hier kurz zusammen:

v:	1200—600,	900—600,	900—300,	600—300,	600—200,	300—2[illegible]
i:	1·273	1·027	1·082	1·113	0·930	0·795

Diese i-Werthe beziehen sich auf die zum Vergleiche herangezogene Siacci'sche Curve und werden andere, wenn z. B. die Krupp'schen Schiessresultate, die unserer Curve zum Theil günstiger sind, zu Grunde gelegt werden. Sie sind von der Einheit zum Theil wenig, zum Theil nicht allzu beträchtlich verschieden.

Die schlankeren Geschossspitzen Krupp's bewirken einen kleineren Luftwiderstand, also kleinere Ordinaten der $K(v)$-Curve, so dass für seine Versuche der von Siacci abgeleitete mittlere Formwerth $i = 0·896$ bei Benützung seiner Tabellen den Rechnungen untergelegt werden muss.

Die Formwerthe sind von der Geschossconstruction abhängig. Bei flachen Geschossböden ist er grösser als bei konischen, welche den saugenden Einfluss des luftverdünnten kegelförmigen Raumes hinter dem Geschossboden aufheben und demnach einen sanfteren Aufstieg etwa im Sinne unserer Curve bedingen. Über Versuche dieser Art, die die $K(v)$ jedenfalls modificiren würden, verlautet indessen nichts.

§. 13.

Für die Berechnung der ballistischen Elemente sind die folgenden logarithmischen Ausdrücke sehr bequem:

$$Cx = [5 \cdot 283035](\log v_0 - \log u) + [4 \cdot 014191] \frac{4 + \left(\frac{v_0}{100} + 2\right)^2}{\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 217147\right]} - [4 \cdot 014191] \frac{4 + \left(\frac{u}{100} + 2\right)^2}{\left[\frac{u}{100} \cdot 0 \cdot 217147\right]},$$

$C \cos \alpha t =$

$$= [4 \cdot 920819]\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v_0} + [0 \cdot 093367 - 5] \frac{200 + v_0}{\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 217147\right]} - [0 \cdot 093367 - 5] \frac{200 + u}{\left[\frac{u}{100} \cdot 0 \cdot 217147\right]}\right), \quad 48)$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{[5 \cdot 611458]}{C \cos \alpha^2}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_0^2} + \frac{[0 \cdot 394397 - 5]}{\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 217147\right]} - \frac{[0 \cdot 394397 - 5]}{\left[\frac{u}{100} \cdot 0 \cdot 217147\right]}\right).$$

So ist z. B. der Ausdruck

$$\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 217147\right],$$

wenn v_0 etwa $= 600$ sein sollte, $= [6 \cdot 0{,}217147] = [1 \cdot 302882]$, also ebenfalls logarithmisch.

Spanisches Gewehr.

$v_0 = 710$, $u = 267$, $G = 0 \cdot 0112\, kg$, $2R = 0 \cdot 7\, cm$, $\Delta = 1 \cdot 125$, $i = 1$, $\alpha = 1° 24' 44''$.
Es ergibt sich $x = 982$ (anstatt 1000), $t = 2 \cdot 32^s$.

Die Gleichung der Flugbahn, die eine etwas umständlichere Berechnung verursacht, lässt sich übrigens noch zur folgenden vereinfachen:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{[4\cdot 619789]}{C}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\tau) +$$
$$+ \frac{[5\cdot 611458]x}{Cv_0^2 \cos\alpha^2}\left(1 - \frac{[0\cdot 394397-5]v_0^2}{(1\cdot 00501)^{v_0}}\right)$$
$$+ \frac{[0\cdot 719010]}{C^2\cos\alpha^2}\left\{\frac{10000+(100+v_0)^2}{1\cdot 00501^{2v_0}} - \frac{10000+(100+u)^2}{1\cdot 00501^{2u}}\right.$$
$$\left. + \frac{[7\cdot 508693]S(u)}{u\,.\,1\cdot 00501^{u}} - \frac{[7\cdot 508693]S(v_0)}{v_0\,.\,1\cdot 00501^{v_0}}\right\}. \quad 49)$$

Der Ausdruck $(1\cdot 00501)^{v_0}$ ist also logarithmisch $= \left[\frac{v_0}{100}\cdot 0\cdot 217147\right]$, wie vorhin. Abgesehen von einigen kleineren Umänderungen lässt sich die vorstehende Gleichung wohl nicht mehr weiter reduciren. Bei grossen u- und v-Werthen convergiren die Reihen Su etc.

$$S(u) = 1 - \frac{1}{\frac{u}{200}+1} + \frac{1}{\left(\frac{u}{200}+1\right)\left(\frac{u}{200}+2\right)} - $$
$$- \frac{2}{\left(\frac{u}{200}+1\right)\left(\frac{u}{200}+2\right)\left(\frac{u}{200}+3\right)} \text{ etc.}$$

ziemlich rasch.

Beispiel.

28 *cm*-Kanone $L/35$. Geschossgewicht 352 *kg*, $v_0 = 580\,m$.

Gegeben: $\alpha = 10°$, $x = 7960$, $v_e = 353\,m$; gesucht τ für die Wurfweite $x = W$.

Aus $v \cos\tau = u \cos\alpha$ folgt $u = 348$. Die Formel für x liefert für $\Delta = 1\cdot 206$, $x = 7959\,m$, also $i = 1$, die Formel für $\tau = \beta$ liefert $\tau = 14°30'$ als Fallwinkel in der Wurfweite x.

Um die obigen Gleichungen an den neueren Schiessresultaten zu prüfen, halten wir es für nützlich, die schon früher benützten Beispiele wieder der Rechnung zu Grunde zu legen.

$7 \cdot 5\,cm$-Schnelllade-Feldkanone L 28/30 von Krupp. $G = 6 \cdot 5\,kg$, $2R = 7 \cdot 5\,cm$, $v_0 = 500$.
Aus der Schusstafel entnehmen wir

W	α	β	T	v_e
5000 m	12°13′	18°57′	$16 \cdot 51^s$	239 m

Demnach ist $u = 231 \cdot 28$ ($i = 1$, $\Delta = 1 \cdot 206$), $C = 8 \cdot 654$. Die Formeln liefern

$$i . 8 \cdot 654 x = 64248 + 44950 - 73465,$$

$$i . 8 \cdot 654 \cos \alpha t =$$
$$= [4 \cdot 920819](0 \cdot 0043238 - 0 \cdot 002 + 0 \cdot 0007124 - 0 \cdot 0016823).$$

Demzufolge ist wegen $x = 5000$, $i = 0 \cdot 8258$ und damit nach der

Formel $t = 16 \cdot 15^s$
nach der Krupp'schen Schusstafel $16 \cdot 51$
Diff. $0 \cdot 36^s$

Dieselbe Differenz (nach oben) liefert die Tabelle Siacci's.

Für den letzten Schusstafelwerth $x = 6800$, $v_0 = 500$, $\alpha = 20° 3'$, $\beta = 31° 25'$, $t = 25 \cdot 26$, $v_e = 225$, $u = 204 \cdot 4$ erhalten wir $i = 0 \cdot 7445$ und damit $t = 24 \cdot 79$, also Diff. $0 \cdot 47^s$, während Siacci's Tabelle $t = 25 \cdot 71$, also Diff. $0 \cdot 45^s$ ergibt. Unsere t-Werthe sind also kleiner als die verglichenen.

Weiteres Beispiel.

$7 \cdot 6\,cm$ - Schnelllade - Feldkanone $L/29$. $v_0 = 550$, $2R = 7 \cdot 6$. Geschossgewicht $G = 6 \cdot 35\,kg$.

Wir wählen wieder die grösste Schussweite

$$x = 6600, \quad \alpha = 16° 50', \quad \beta = 27° 45', \quad T = 22 \cdot 87, \quad v_e = 229$$

und wollen theoretisch die Flugzeit für diese Entfernung berechnen. Man wird haben

$$u = 211 \cdot 73, \quad C = 9 \cdot 096 i,$$

$$Cx = 79549 + 39796 - 75101,$$

$$x = \frac{4864\,m}{i}, \quad \text{also} \quad i = 0 \cdot 737,$$

$$C \cos \alpha t = 242 \cdot 06 + 49 \cdot 538 - 147 \cdot 58,$$

$$t = \frac{16 \cdot 54}{i} = 22 \cdot 44^s, \text{ Diff. } -0 \cdot 43^s.$$

Da die Schusstafel $t = 22 \cdot 87^s$ hat, so beträgt die Differenz weniger als $^1/_2$ Secunde. Nach Siacci's Tabellen ist

$$x = \frac{5180}{i} \qquad t = \frac{18 \cdot 318}{i}.$$

Da hier $i = 0 \cdot 7848$, so ist $t = 23 \cdot 34^s$, Diff. $+0 \cdot 47^s$.

Also auch hier treten wie oben die gleichen sehr kleinen Verschiedenheiten zu Tage.

§. 14.

Wie früher wollen wir die Beschleunigung des Widerstandes

$$U = C \frac{12}{10^6} \cdot \frac{v^{2-n}}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{v}{600}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{v}{600}\right)}} \cdot v^n \qquad 50)$$

durch die Curve hindurch in dem Sinne verfolgen, dass wir das Gesetz $W = v^n$, das für einen bestimmten Theil der Curve gilt und zuerst zunehmende, dann abnehmende Coëfficienten f des betreffenden Ausdruckes $U = fv^n$ bedingt, für die Maximalwerthe von f hinsichtlich des Exponenten n feststellen.

Das Maximum für f tritt ein für

$$n = 2 \frac{1 - \frac{1}{3}(3z - 1) z^3 e^{3(1-z)}}{1 - \frac{2}{3} z^3 e^{3(1-z)}}, \qquad z = \frac{v}{600}. \qquad 51)$$

Die nachfolgende Zusammenstellung bezüglich der Potenzen v^n und ihrer Geschwindigkeitsbereiche zeigt die Abhängigkeit beider Grössen von einander.

v:	0	200	300	400	450	500	600	700	800	1200	∞
n:	2	2·4	3	3·1	3	2·87	2	1·10	0·6	0·8	2

Wie man sieht, herrscht in dem unteren Geschwindigkeitsbereich das quadratische Gesetz vor. Dann folgt für mittlere Geschwindigkeiten bis etwa 500 *m* das cubische Gesetz, das in der Region der $v = 500$ bis 600 und darüber vom quadratischen abgelöst wird; darauf sinkt die Potenz von v^2 rasch auf $v^{0\cdot6}$, entsprechend dem starken Niedergange der Curve, nähert sich dann aber bei unendlich wachsender Geschwindigkeit wieder langsam und asymptotisch der zweiten Potenz, womit sie begonnen hat und die also nur streckenweise zur Herrschaft kommt. Also sind es die höheren Potenzen, die innerhalb der kritischen Zone des steilen Abfalles, d. i. in der Region der Schallgeschwindigkeit in raschem Steigen und Fallen zur Geltung gelangen. Dass keine höhere Potenz als die dritte (3·1) auftritt, hat seinen Grund in der mehr abgerundeten Form unserer Curve, deren Aufstieg weniger schroff und steil erfolgt. Ihr späterer schärferer Abfall bedingt also naturgemäss kleinere Potenzen, als sie in Wirklichkeit auftreten.

Der holländische Ballistiker Hojel leitete aus seinen Versuchen für Geschwindigkeiten von $v = 140$ bis 300 *m* das Gesetz $v^{2\cdot5}$ ab. Aus der obigen Reihe erkennt man die hinreichende Übereinstimmung beider Resultate, die auch durch die graphische Darstellung bestätigt wird. Unsere Curve schliesst sich diesem Geschwindigkeitsbereich den genannten Versuchen besser als den anderen an, die hier ziemlich beträchtlich auseinander gehen. Sie bevorzugt sozusagen zuerst die holländischen Versuche, folgt dann für eine kurze Strecke den russisch-englischen, die sie dann in der Region der Schallgeschwindigkeit ziemlich weit links liegen lässt, um sich den Krupp'schen Versuchen zu nähern, eine Strecke zu begleiten, durch sie hindurchzugehen und langsam wieder zu verlassen. Innerhalb des grossen Geschwindigkeitsbereiches von $v = 0$ bis nahe $v = 1000$ folgt also unsere Curve der breiten Schussstrasse, gelegentlich einmal nach links, dann nach rechts etc. dem Zuge ihres Gesetzes folgend, um alsdann im unendlichen Verlaufe dem quadratischen Gesetze zuzustreben.

Nehmen wir an, ein Geschoss besitze eine Anfangsgeschwindigkeit von 700 *m*. Nach unserer Curve passirt es zuerst bis 550 *m* einen stärkeren Luftwiderstand, alsdann.

gewissermassen der Luftdichtigkeit der durchmessenen Höhen entsprechend, einen solchen zuerst abnehmenden, dann zunehmenden Grades, der gegen das Ende der Flugbahn hin, in etwa entsprechend der wohl nicht mehr tangentialen Richtung des Geschosses, eine weitere Zunahme erfährt. Das Bild dieses gedachten Vorganges dürfte einigermassen der Wirklichkeit entsprechen. Eine weitere Bedeutung möchten wir ihm aber nicht beilegen.

§. 15.

Die von uns angewandte Curve $K(v)$ in der Form

$$y = K(v) = \frac{120}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{600}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{x}{600}\right)}}, \quad x = v$$

ist natürlich nicht als endgiltig für das vorliegende Problem anzusehen, sondern nur als eine Möglichkeit von vielen.

Abgesehen vom Exponenten 3, den wir festhalten wollen, können die übrigen Constanten innerhalb gewisser Grenzen andere Werthe annehmen, womit eine Art Verschiebung der Curve und daraus resultirende mehr oder weniger grosse Annäherung an die Erfahrungsdata verknüpft ist.

Setzt man allgemein

$$y = \frac{A}{1 - b\left(\frac{v}{v_1}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v}{v_1}\right)}},$$

wo v_1 dem Maximalwerth $Y = \frac{A}{1-b}$ zugehört, so würde z. B. die Curve

$$y = \frac{100}{1 - \frac{5}{7}\left(\frac{v}{550}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v}{550}\right)}} \tag{52}$$

mit dem Werthe $y_0 = 100$ beginnen, ihr Maximum 350 bei $x = v = 550$ erhalten und demzufolge etwas tiefer wie die vorhergehende zu liegen kommen, wie auch die entsprechende Figur andeutet.

Ihr Anwendungsbezirk dürfte aber nun auch nur von $v = 0$ bis etwa $v = 700$ reichen, da der absteigende Ast ebenfalls tiefer liegt und die Widerstandswerthe dort zu klein werden. Für die Darstellung der Widerstände zwischen 0 bis 300 liegt sie aber dafür auch günstiger. Da die Anfangsgeschwindigkeiten in den meisten Fällen nicht gerade oft über 700 *m* hinausgehen, so halten wir es für nützlich, auch noch diese modificirte Formel anzuwenden, wobei es sich empfehlen dürfte, die allgemeinere Form derselben in die Rechnungen einzuführen. Wir haben zunächst

$$C = i \cdot \frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G},$$

$$U = \frac{C}{10^7} \cdot \frac{Av^2}{1 - b\left(\frac{v}{v_1}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v}{v_1}\right)}}.$$

Damit erhalten wir die Integrale

$$x = -\frac{10^7}{AC}\int_{z_0}^{z}\frac{N}{z}\,dz,$$

$$t = -\frac{10^5}{AC\cos\alpha}\int_{z_0}^{z}\frac{N}{z^2}\,dz,$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha + \frac{10^3 g}{AC\cos\alpha^2}\int_{z_0}^{z}\frac{N}{z^3}\,dz,$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha +$$

$$+\frac{10^{10} g}{2A^2C^2}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{2} - \frac{bz^2 e^{3\left(1-\frac{u}{v_1}\right)}}{\left(\frac{v_1}{100}\right)^3}\right)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2be^{3\left(1-\frac{u}{v_1}\right)}}{3\left(\frac{v_1}{100}\right)^2} - E\right)dz,$$

$$z_0 = \frac{v_0}{100}, \quad z = \frac{u}{100}, \quad E = \frac{1}{\left(\frac{v_0}{100}\right)^2} - \frac{2be^{3\left(1-\frac{v_0}{v_1}\right)}}{3\left(\frac{v_1}{100}\right)^2}.$$

Sie sind von ganz allgemeiner Form und gleichwohl leicht zu behandeln.

Die Ausführung der Integration ergibt die Elemente der Flugbahn:

$$x = \frac{10^7}{AC}\left[ln\frac{v_0}{u} + \frac{b}{27}e^{3\left(1-\frac{v_0}{v_1}\right)}\left(1+\left(1+\frac{3v_0}{v_1}\right)^2\right) - \frac{b}{27}e^{3\left(1-\frac{u}{v_1}\right)}\left(1+\left(1+\frac{3u}{v_1}\right)^2\right)\right],$$

$$t = \frac{10^5}{AC\cos\alpha}\left[\frac{100}{u} - \frac{100}{v_0} + \frac{b\left(1+\frac{3v_0}{v_1}\right)e^{3\left(1-\frac{v_0}{v_1}\right)}}{9\left(\frac{v_1}{100}\right)} - \frac{b\left(1+\frac{3u}{v_1}\right)e^{3\left(1-\frac{u}{v_1}\right)}}{9\left(\frac{v_1}{100}\right)}\right],$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{10^3 g}{2AC\cos\alpha^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{u}{100}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{v_0}{100}\right)^2} + \frac{2be^{3\left(1-\frac{v_0}{v_1}\right)}}{3\left(\frac{v_1}{100}\right)^2} - \frac{2be^{3\left(1-\frac{u}{v_1}\right)}}{3\left(\frac{v_1}{100}\right)^2}\right] \qquad 53)$$

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{10^7}{2AC}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\tau) + \frac{10^8 Egx}{2AC\cos\alpha^2}$$

$$- \frac{10^{10} g}{2(AC)^2\cos\alpha^2}\left[\frac{2b^2e^6}{3\left(\frac{v_1}{100}\right)^5}\int_z^{z_0} z^2 e^{-\frac{600z}{v_1}}dz - \frac{2be^3}{3\left(\frac{v_1}{100}\right)^2}\int_z^{z_0}\frac{e^{-\frac{300z}{v_1}}}{z}dz\right].$$

Bis auf das letzte Integral bilden alle Ausdrücke eine geschlossene Form. Für $A = 120$ und $l = {}^2/_3$ gehen die Gleichungen in die früheren über. Will man das letzte Integral etwa durch Quadratur bestimmen,

so kann man sich der folgenden Formel für y bedienen. Da die Function des Integrals eine stark abfallende Curve ist, so haben wir für die Quadratur 5 Werthe angenommen, die für alle Fälle ausreichen.

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{10^7}{2AC} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \tau) + \frac{10^3 Egx}{2AC \cos \alpha^2}$$

$$- \frac{10^{14} g b^2}{648 (ACv_1 \cos \alpha)^2} \left\{ \frac{1 + \left(1 + \frac{6u}{v_1}\right)^2}{e^{6\left(\frac{u}{v_1} - 1\right)}} - \frac{1 + \left(1 + \frac{6v_0}{v_1}\right)^2}{e^{6\left(\frac{v_0}{v_1} - 1\right)}} - \frac{12 (v_0 - u) S}{5\, b e^{3\left(\frac{v_0}{v_1} - 1\right)}} \right\} \qquad 54)$$

$$S = \frac{7}{v_0} + \frac{128 e^{3\left(\frac{v_0 - u}{4 v_1}\right)}}{3 v_0 + u} + \frac{24 e^{6\left(\frac{v_0 - u}{4 v_1}\right)}}{v_0 + u} + \frac{128 e^{9\left(\frac{v_0 - u}{4 v_1}\right)}}{v_0 + 3u} + \frac{7 e^{12\left(\frac{v_0 - u}{4 v_1}\right)}}{u}.$$

Während die Berechnung der Elemente x, t, τ nicht gerade allzuviel Zeit beansprucht, namentlich dann, wenn man die Gleichungen logarithmisch und vielleicht trigonometrisch einrichtet, ist die Ermittelung von y trotz des sehr vereinfachten Aufbaues der einzelnen Gruppen doch sehr zeitraubend, und gerade das genannte letzte Integral ist es, das diese Mehrarbeit herbeiführt.

Die obigen Gleichungen gelten allgemein für alle diejenigen Widerstände, bei denen die $K(v)$-Curve durch den allgemeinen Ausdruck

$$K(v) = \frac{A}{1 - b \left(\frac{v}{v_1}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{v}{v_1}\right)}}$$

dargestellt wird und worin v_1 die Geschwindigkeit bedeutet, für welche $K(v)$ seinen grössten Werth erhält. Der Luftwiderstand selbst ist nach Formel 52)

$$\text{Widerstand} = \frac{G}{g} \cdot \frac{C}{10^7} \cdot \frac{Av^2}{1-b\left(\frac{v}{v_1}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v}{v_1}\right)}},$$

also auf den Quadratcentimeter

$$W = \frac{A\left(\frac{v}{100}\right)^2}{\frac{1}{4}\pi g . 10^3\left(1-b\left(\frac{v}{v_1}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v}{v_1}\right)}\right)} = \frac{\left(\frac{v}{100}\right)^2 K(v)}{\frac{1}{4}\pi g . 10^3}. \qquad 55)$$

So ist z. B. der auf $1\,cm^2$ wirkende Luftwiderstand bei $550\,m$ Geschwindigkeit, wenn $A = 100$, $b = \frac{5}{7}$

$$W = \frac{100\ (5 \cdot 5)^2}{7 \cdot 7 . 1000\left(1-\frac{5}{7}\right)} = 1 \cdot 375\,kg,$$

während der Luftwiderstand auf ein Geschoss von $2R = 10\,cm$ Caliber

$$\frac{10^2 . 100 . 5 \cdot 5^2}{9 \cdot 81 . 1000\left(1-\frac{5}{7}\right)} = 107 \cdot 9$$

beträgt.

Die obigen Gleichungen gewähren die Möglichkeit, für verschiedene Ausgangsformeln von $K(v)$ sogleich die entsprechenden Hauptgleichungen niederschreiben zu können. Wählen wir von den vielen Formen dieser Art die folgende

$$K(v) = \frac{100}{1-\frac{5}{7}\left(\frac{v}{550}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v}{550}\right)}},$$

so ist $A = 100$, $b = \frac{5}{7}$, $v_1 = 550$, also das Maximum von $K(v) = 350$. Der erste Wendepunkt tritt bei $v = 396$ auf.

welche Zahl der Zuflussgeschwindigkeit der Luft in den leeren Raum entspricht. Die drei Hauptgleichungen sind jetzt

$$x = \frac{10^5}{C}\left[ln\frac{v_0}{u} + \frac{5}{189}\left(1+\left(1+\frac{3v_0}{550}\right)^2\right)e^{3\left(1-\frac{v_0}{550}\right)} - \frac{5}{189}\left(1+\left(1+\frac{3u}{550}\right)^2\right)e^{3\left(1-\frac{u}{550}\right)}\right]$$

$$t = \frac{10^3}{C\cos\alpha}\left[\frac{100}{u} - \frac{100}{v_0} + \frac{10}{693}\left(1+\frac{3v_0}{550}\right)e^{3\left(1-\frac{v_0}{550}\right)} - \frac{10}{693}\left(1+\frac{3u}{550}\right)e^{3\left(1-\frac{u}{550}\right)}\right] \qquad 56)$$

$$\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\alpha - \frac{10g}{2C\cos\alpha^2}\left[\left(\frac{100}{u}\right)^2 - \left(\frac{100}{v_0}\right)^2 + \frac{40}{2541}e^{3\left(1-\frac{v_0}{550}\right)} - \frac{40}{2541}e^{3\left(1-\frac{u}{550}\right)}\right].$$

Anwendung auf die Krupp'sche 7·6-Schnelllade-Feldkanone $L/29$ (siehe Anl. 39): $G = 6\cdot35$, $2R - 7\cdot6$, also $C = 9\cdot096 \cdot \frac{\Delta}{1\cdot206} \cdot i$, $v_0 = 550$.

Aus der Schusstafel entnehmen wir die folgenden Data:

x	α	β	t	v_e
3300	5° 49′	9° 6′	9·20	279
3400	6° 3′	9° 34′	9·57	276

Wenn $x = 3350$, so ist sehr nahe $u = \frac{1}{2} v_0 = 275$.

Die Formeln liefern für $\Delta = 1 \cdot 206$

$$x = \frac{10^5}{9 \cdot 096\, i}\left[ln\, 2 + \frac{1}{756}(340 - 145\, e^{2/3})\right] = \frac{3114}{i},$$

$$t = \frac{10^3}{9 \cdot 096\, i \cos \alpha}\left[\frac{166 - 25\, e^{2/3}}{693}\right] \text{ etc.}$$

Da $x = 3350$, so ist $i = 0 \cdot 9295$ und damit $t = 9 \cdot 26''$, was mit der Tafel hinreichend genau übereinstimmt.

Für logarithmische Rechnung sind die folgenden Gleichungen zu benützen:

$$Cx = [5 \cdot 362216] \log \frac{v_0}{u} +$$

$$+ \frac{[0 \cdot 244664 - 1]}{\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 236888\right]}(550^2 + (550 + 3\, v_0)^2)$$

$$- \frac{[0 \cdot 244664 - 1]}{\left[\frac{u}{100} \cdot 0 \cdot 236888\right]}(550^2 + (550 + 3\, u)^2). \qquad 57)$$

Das vorhergehende Beispiel für $v_0 = 550$, $u = 275$ gibt z. B.

$$Cx = 69314 + 44973 - 85958 = 28329,$$

woraus

$$x = 28329 : 9 \cdot 06 = 3114\, m$$

folgt.

Man sucht also zuerst den Log von $550^2 + (550 + 3 v_0)^2$, addirt zu diesem $[0 \cdot 244664 - 1]$ und zieht von der Summe $\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 236888\right]$ ab u. s. w. Beim ersten Glied zur Rechten ist ebenso der Log von $\log \frac{v_0}{u}$ zu suchen und $[5 \cdot 362216]$ hinzuzufügen.

Ferner ist

$$C \cos \alpha . t = 1000\left(\frac{100}{u} - \frac{100}{v_0}\right) +$$

$$+ \frac{[0 \cdot 721786 - 1]}{\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 236888\right]}(550 + 3v_0)$$

$$- \frac{[0 \cdot 721786 - 1]}{\left[\frac{u}{100} \cdot 0 \cdot 236888\right]}(550 + 3u) \qquad 58)$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{10g}{2 \cos \alpha^2 C}\left[\left(\frac{100}{u}\right)^2 - \left(\frac{100}{v_0}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{[0 \cdot 499937 - 1]}{\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0 \cdot 236888\right]} - \frac{[0 \cdot 499937 - 1]}{\left[\frac{u}{100} \cdot 0 \cdot 236888\right]}\right].$$

In dieser Weise vorbereitet, halten wir die Rechnungen für nicht allzu weitläufig und damit für brauchbar. Es dürfte sich empfehlen, noch einige Anwendungen der Theorie auf Schiessversuche verschiedenster Art hinzuzufügen.

8·7 *cm*-Kanone, Geschossgewicht $G = 4\,kg$, $\Delta = 1 \cdot 275$.

Gemessen: $v_{50} = 838 \cdot 7$, $v_{1474} = 367 \cdot 9$, also $x = 1474 - 50 = 1424$.

Wir führen ein $v_0 = 838 \cdot 7$, $u = 367 \cdot 9$ und erhalten für $i = 1$

$$20x = 82404 + 17573 - 71720,$$

$$x = 1413 \text{ (Diff. } 11\,m),$$

Deutsches Infanteriegewehr (siehe I. Theil). $2R = 0 \cdot 79\,cm$, $G = 0 \cdot 0147$ etc., $C = 31 \cdot 808$, $v_0 = 626 \cdot 5$, $u = 248 \cdot 76$, $i = 1$.

$$x = 1209 \text{ (Diff. 9)}.$$

6·5 *cm*-Geschütz von Krupp.

$2R = 6 \cdot 5$, $G = 4 \cdot 9\,kg$, $\Delta = 1 \cdot 33$, $v_0 = 871$, $u = 583 \cdot 5$, $\Delta = 1 \cdot 33$, $C = 9 \cdot 509$. Es folgt

$$x = 1573\ m,$$
gem. 1435

Diff. 138 *m*.

Unser grösseres x rührt von dem kleineren Widerstande her, den das Geschoss nach unserer Curve im I. Theil der Bewegung erleidet. Der i-Werth ist demnach 1·096, also noch verhältnissmässig von 1 wenig verschieden.

Dasselbe Geschütz: $v_0 = 808$, $u = 534 \cdot 5$.

$$Cx = 41323 + 19583 - 47013$$

$$x = 1460\ m,$$
gem. 1435

Diff. 25 *m*.

28 *cm*-Kanone von Krupp: $v_0 = 580$.
$2R = 28\,cm$, $G = 352\,kg$, $\Delta = 1 \cdot 206$, $u = 348$, $C = 2 \cdot 227$.

$$x = 7823\ m,$$
gem. 7959

Diff. 136 *m*,

also

$$i = 0 \cdot 9828.$$

Aus diesen Beispielen erkennt man, dass im Ganzen die untergelegte Curve sich schon ziemlich befriedigend den Versuchen anpasst, da die i-Werthe der Einheit nahe stehen. Immer aber ist es nothwendig, dieselben durch einen Schuss vorher zu ermitteln und erst dann die Elemente der Bewegung zu berechnen.

§. 16.

Unsere Gleichungen geben die Elemente x, t, $\operatorname{tg} \tau$, y in Functionen von u, welche Variable wieder eine Function von v_e oder der Endgeschwindigkeit und dem Fallwinkel ist. Sieht man sich die Gleichung für x genauer an, so erkennt man sofort, dass eine Umkehrung $u = f(x)$ in geschlossener Form unmöglich ist. Und doch ist es wünschenswerth, u als Function

von x zu haben, wenn auch vielleicht zunächst nur in Näherungsform. Die anderen Elemente, wie t etc., sind dann leichter zu berechnen.

Werfen wir einen Blick auf die letzte Zahlenreihe, die die Giltigkeitsgrenzen der speciellen Widerstandsgesetze zur Darstellung bringt, so zeigt sie, dass das cubische Gesetz $W = fv^3$ eine ziemlich bedeutende Domäne besitzt, die sich von etwa $v = 250$ bis 500—600 *m* erstreckt und die auch praktisch vorzugsweise in Frage kommt. Es dürfte sich also empfehlen, nachzusehen, ob wir unter Zugrundelegung dieses Gesetzes ein einfaches Integral zu erhalten im Stande sind, das uns die Kenntniss des gewünschten Näherungsausdruckes auf irgend eine Weise vermittelt. Ein solches Integral ist aber bekannt und von dem englischen Ballistiker Bashforth und — schon früher — von dem deutschen Mathematiker Jacobi in allgemeinster Form aufgestellt worden.

Die Ableitung ist ziemlich einfach. Bashforth setzt

$$W = A \cdot \frac{\Delta}{1{\cdot}206} \frac{R^2\pi}{10^4} \cdot v^3 \qquad R \text{ in Centimetern} \qquad 59)$$

und bestimmt durch Versuche die Werthe des Coëfficienten A, die wir schon früher anführten. Nun ist aber

$$\frac{G}{g}\frac{dv_x}{dt} = -W\cos\tau = -\frac{G}{k^3}v^3\cos\tau, \quad k^3 = \frac{1{\cdot}206}{A\Delta}\frac{G\,10^4}{R^2\pi},$$

$$\frac{vd\tau}{dt} = -g\cos\tau \quad \text{oder} \quad v_x\frac{d\tau}{dt} = -g\cos\tau^2.$$

Wird dt eliminirt, so folgt

$$\frac{dv_x}{v_x^4} = \frac{1}{k^3}\frac{d\tau}{\cos\tau^4}$$

und integrirt

$$-\frac{k^3}{v_x^3} + \frac{k^3}{v_{x_0}^3} = 3\,\mathrm{tg}\,\tau + \mathrm{tg}\,\tau^3 - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha^3,$$

woraus

$$v_x = v \cos\tau =$$

$$= \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt[3]{1 + \frac{v_0^3 \cos\alpha^3}{k^3}(3\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha^3 - 3\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\tau^3)}} \tag{60}$$

folgt.

Damit wäre auch $u = \frac{v\cos\tau}{\cos\alpha}$ bekannt, wenn dies mit τ der Fall wäre.

Unsere Widerstandsformel

$$W = i_1 \frac{\Delta}{1\cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{10g} \cdot \frac{\left(\frac{v_0}{100}\right)^2}{1 - \frac{5}{7}\left(\frac{v_0}{550}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v_0}{550}\right)}} \tag{61}$$

verglichen mit der von Bashforth ergibt den Coëfficienten

$$A = \frac{i_1}{10\cdot\frac{1}{4}\pi g v} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{7}\left(\frac{v_0}{550}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v_0}{550}\right)}\right)}. \tag{62}$$

Derselbe ist z. B. für $v_0 = 550$

$$A = \frac{i_1}{10.7\cdot 7} \cdot \frac{3\cdot 5}{500} = 0\cdot 0000826\, i$$

und ändert sich gemäss der Natur der Curve nur wenig.

Die Gleichung für v_x geht nun nach Einsetzen des Werthes von k^3 und A über in

$$u = \frac{v_0}{\sqrt[3]{1 + i_1 \frac{\Delta}{1\cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \cdot \frac{v_0^2 \cos\alpha^3(3\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha^3 - 3\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\tau^3)}{10^5 g\left(1 - \frac{5}{7}\left(\frac{v_0}{550}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v_0}{550}\right)}\right)}}} \tag{63}$$

Für den Scheitel $\tau = 0$ ist u also eine einfache Function von gegebenen Werthen, so dass die ihm entsprechenden Elemente, wie t_s, v_s, y_s, x_s leicht zu berechnen sind. Also ist in zum Theil logarithmischer Form

$$u_s = \frac{v_0}{\sqrt[3]{1 + i_1 \frac{\Delta}{1\cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{10.Gg} \cdot \left(\frac{v_0}{100}\right)^2 \frac{\cos\alpha^3 (3\,\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha^3)}{1 - \frac{[0\cdot 935665 - 2]\left(\frac{v_0}{100}\right)^3}{\left[\frac{v_0}{100} \cdot 0\cdot 236888\right]}}}} \qquad 64)$$

Anwendung auf das türkische Gewehr.

$2R = 0\cdot 765$, $G = 0\cdot 0137$, $v_0 = 657\cdot 2$, $\alpha = 4°\,35'20''$, $\frac{\Delta}{1\cdot 206} = 0\cdot 966$, $i_1 = \frac{1}{1\cdot 047}$.

Gesucht v_s.

Die Formel gibt $v_s = u \cos\alpha = 267\,m$.

Cranz, a. a. O., S. 383, woraus wir die obigen Data entnommen, findet auf anderem Wege $257\,m$, wonach also nur eine Differenz von $10\,m$ vorhanden ist, die sich übrigens für $i = 1$ auf die Hälfte verringert. Der Unterschied ist nicht allzu gross, wenn man bedenkt, dass die obige Formel nur eine Näherungsformel darstellt, die für eine erste Berechnung ausreicht. Führen wir ein $\text{tg}\,\beta = \frac{3}{2}\,tg\alpha$, was, wie ein Blick auf die nachfolgende Tabelle lehrt, nahe zutrifft, so folgt

$$v_c \cos\tau = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt[3]{1 + i_1 \frac{\Delta}{1\cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \cdot \frac{v_0^2 \cos\alpha^3}{10^5 g} \cdot \frac{\frac{5}{2}\left(3\,\text{tg}\,\alpha + \frac{7}{4}\,\text{tg}\,\alpha^3\right)}{1 - \frac{5}{7}\left(\frac{v_0}{550}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{v_0}{550}\right)}}}}. \qquad 65)$$

Anwendung auf die $7\cdot 6\,cm$-Kanone von Krupp.

$v_0 = 550\,m$, $2R = 7\cdot 6\,cm$, $G = 6\cdot 35\,kg$, $\Delta = 1\cdot 206$.

Die obige Formel oder auch die vereinfachte folgende

$$v_c \cos\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt[3]{1 + i_1 \frac{\Delta}{1\cdot 206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \cdot \frac{(v_0/100)^2}{3\cdot 2 . g} \cdot \frac{\sin\alpha (2\cdot 4 - \sin\alpha^2)}{1 - \frac{5}{7}\left(\frac{v_0}{550}\right)^3 e^{3\left(1 - \frac{v_0}{550}\right)}}}} \qquad 66)$$

geht damit über in

$$v_e = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta \sqrt[3]{1 + i_1 [1 \cdot 486829] \sin \alpha (2 \cdot 4 - \sin \alpha^2)}}. \quad (67)$$

Wir haben hienach die folgenden, den Schussweiten 1000, 2000...6000 entsprechenden Endgeschwindigkeiten berechnet, indem wir für den Bereich bis 3000 den i_1-Werth gleich 1, von 4000 bis 6000 denselben $= \frac{7}{8}$ annahmen.

x	α	β	v_e	berechnet	Diff.
1000	1° 8′	1° 22′	414	408	−6
1500	1 53	2 30	366	365	−1
2000	2 47	3 58	330	332	+2
3000	5 —	7 45	288	285	−3
4000	7 52	12 35	259	260	+1
5000	11 7	17 7	239	240	+1
6000	14 40	24 4	231	227	−4

Die Differenzen zwischen Tafel und Formel sind verhältnissmässig gering und nur die erste (+6 m) kommt einigermassen stark zum Ausdruck. Die genauere Formel würde auch einen besseren Werth erzielt haben, da β hier kleiner als $\frac{3}{2}\alpha$ ist.

Die im Allgemeinen hinreichende Übereinstimmung zwischen den tabellarischen und errechneten Werthen lässt sich leicht erklären. Sieht man sich den aufsteigenden Theil unserer Curve $K(v)$ an, so erkennt man, dass er nur eine schwache Krümmung hat, da er ja den Wendepunkt einschliesst. Der für diese Strecke massgebende Coëfficient A ist aber, wie man aus den betreffenden Formeln für A, $K(v)$ erkennt, proportional dem Ausdruck

$$\frac{K(v)}{v}$$

oder der Tangente des Polarwinkels unserer Curve $\left(\operatorname{tg} \Theta = \frac{1}{x}\right)$.
Die Richtung dieses aufsteigenden Curventheiles geht aber

nahezu durch den Anfangspunkt der Coordinaten, was die (angenäherte) Constanz von Θ, beziehungsweise $\frac{K(v)}{v}$ bedingt, wie dies auch aus einer früheren Zahlenreihe hervorgeht.

Es ist klar, dass bei einer grösseren Versuchsreihe der jeweilige i-Werth vorher durch einen Schuss ermittelt werden muss. Für die höheren Luftschichten ist er kleiner, für die tieferen grösser als für die Mittelschichten. Dies zeigt auch das obige Rechnungsresultat.

Vielleicht ist eine weitere Anwendung der obigen Formel nicht überflüssig.

Preussische Feldkanone C/96.

$v_0 = 465\, m,\ 2r = 7 \cdot 5\, cm,\ G = 6 \cdot 85,\ \Delta = 1 \cdot 20.$

Es soll für diese Kanone die Geschwindigkeitsformel für die Wurfweite gesucht werden.

Wir bestimmen zunächst i, indem wir die Schusstafelwerthe $x = 3000\, m$, $\alpha = 6^5$, $\beta = 8° 37'$, $v_e = 280$ der Rechnung unterlegen. Man findet $i_1 = 0 \cdot 7757$. Die Geschwindigkeitsformel ist hiernach

$$v_e = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta \sqrt[3]{1 + [1 \cdot 143490] \sin \alpha (2 \cdot 4 - \sin \alpha^2)}}$$

x	α	β	t	v_e (Tab.)	v_e (ber.)	Diff.
2000	3° 37½′	4° 41′	5·4	312	319	+7
2500	3 52½	6 30	7·0	295	298	+3
3000	6 18¾	8 37	8·7	280	280	0
3500	7 48⅜	10 56	19·7	267	266	—1
4000	9 26¼	13 30	12·7	257	254	—3
4500	11 22½	16 30	14·7	248	243	—5
6000	17 52½	26 30	21·6	229	223	—6

Wir haben hier für alle Distanzen den gleichen i-Werth angenommen, um den Einfluss dieser Grösse klarer zu übersehen. Es wäre nicht schwer, durch Anbringung eines weiteren Coëfficienten, der den Einfluss der Luftdichte und a. m. paralysirt, die Formel weiter zu verbessern. Auf diese Rechnungen wollen wir indessen hier nicht weiter eingehen.

Die obigen Formeln vermitteln die Kenntniss von $u = \frac{v_e \cos\beta}{\cos\alpha}$ und gewähren die Möglichkeit, die Elemente der Flugbahn x, t, y etc. direct zu berechnen.

Nehmen wir z. B. an, dass mit einem 7 *cm*-Geschütz auf 3000 *m* Entfernung (im Mittel) 260 *m* Endgeschwindigkeit erzielt worden sei, so genügen diese Messungen, um in Verbindung mit den Ausgangsdaten: $G = 5\ kg$, $v_0 = 440\ m$, $\alpha = 6° 30' + 0 \cdot 36' = 7° 6'$, $\Delta = 1 \cdot 206$ das ganze Gleichungssystem für das vorliegende Geschütz zu berechnen.

Die Formel 66) liefert zunächst den i_1-Werth $= 0 \cdot 74107$ und damit

$$v_e \cos\beta = \frac{[2 \cdot 643453] \cos\alpha}{\sqrt[3]{1 + [1 \cdot 127908] \sin\alpha (2 \cdot 4 - \sin\alpha^2)}}.$$

x	ε	β	t	v_e	berechn.	Diff.
2000	3° 31′	5° 31′	5·81	292	296	(4)
3000	6 30	9 58	9·47	260	260	(0)
4000	10 4	15 33	13·56	238	236	(—2)
5000	14 15	22 8	18·12	224	220	(—4)
6000	19 12	29 48	23·31	217	212	(—5)

$$\alpha = \varepsilon + 0° 36'.$$

Hiebei haben wir wieder für alle Distanzen den obigen Werth von i unverändert gelassen. Man sieht, dass er für kleinere Wurfweiten als 3000 etwas grösser, für grössere Wurfweiten etwas kleiner anzunehmen ist. Zwei bis drei Gruppen mit den jeweiligen i-Werthen dürften dem praktischen Zwecke vollkommen genügen.

Berechnen wir nun etwa für die Distanz 3000 *m* die Elemente der Bahn x, t, τ, so erhalten wir, da $u = 258$

$$Cx = 53360 + 60544 - 88389,$$

$$C \cos\alpha t = 160 \cdot 24 + 89 \cdot 397 - 170 \cdot 80,$$

$$\operatorname{tg}\tau = 0 \cdot 1245 - \frac{10 \cdot g}{2 \cos\alpha^2 C} [0 \cdot 15017 - 0 \cdot 05165 + \\ + 0 \cdot 02868 - 0 \cdot 07740].$$

$$C = \frac{7^2}{5} \cdot i.$$

Da $x = 3000$, muss $i = 0 \cdot 868$ sein, daher ist

$t = 9 \cdot 34$ (Tafel $9 \cdot 47$) $\qquad -\tau = +\beta = 9° 28'$ (Tafel $9° 58'$),

und ebenso werden die übrigen Elemente erhalten.

Ein anderes Verfahren der Berechnung von x, t, y etc. würde darin bestehen, dass man in der dritten Hauptgleichung für die Wurfweite in der Horizontalen $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha$ setzt und i aus der entsprechenden Gleichung

$$i = \frac{4gG}{\frac{\Delta}{1 \cdot 206} \cdot (2R)^2 \sin 2\alpha} \left[\left(\frac{100}{u} \right)^2 - \left(\frac{100}{v_0} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{40}{2541} e^{3\left(1 - \frac{v_0}{550}\right)} - \frac{40}{2541} e^{3\left(1 - \frac{u}{550}\right)} \right] \qquad 68)$$

berechnet und damit die xyt etc. Elemente vermittelt.

Auf alle Fälle ist aber die Formel für u der Ausgangspunkt und liefert umso bessere Resultate, je genauer die Endgeschwindigkeiten berechnet worden sind. Die gesuchten Elemente der Flugbahn sind dann einfach Functionen der Ausgangsdata, speciell des Abgangswinkels.

§. 17.

Wir haben bisher den Luftwiderstand in Beziehung zur $K(v)$-Curve betrachtet, einerseits, um einer gebräuchlichen Vorstellung zu folgen, anderseits, um den Verlauf unserer Curve auch nach dieser Richtung kennen zu lernen.

Will man dagegen den Luftwiderstand ohne diese Zwischencurve direct behandeln, so kann man sich der Gleichung

$$W = \frac{A \left(\frac{v}{100} \right)^2}{\frac{1}{4} \pi g . 1000 \left(1 - b \left(\frac{v}{v_1} \right)^3 e^{3\left(1 - \frac{v}{v_1}\right)} \right)} = \frac{\left(\frac{v}{100} \right)^2 K(v)}{\frac{1}{4} \pi g . 1000}$$

bedienen, welche den Luftwiderstand pro Quadratcentimeter bestimmt. Setzen wir kurz

$$\frac{A}{\frac{1}{4}\pi g \,.\, 1000} = a$$

und vereinfachen auch die übrigen Ausdrücke im Nenner, so ist

$$W = \frac{a\left(\frac{v}{100}\right)^2}{1-B\left(\frac{v}{100}\right)^3 e^{-\frac{nv}{100}}}.$$

Diese Formel wollen wir jetzt etwas genauer betrachten. Da sie drei Parameter enthält, so genügen drei Werthe des Luftwiderstandes $W_1 W_2 W_3$, entsprechend den Geschwindigkeiten $v_1 v_2 v_3$, um aus diesen gegebenen Grössen die Constanten a, B, n zu berechnen.

Wählen wir z. B. $v_1 = 300$, $v_2 = 600$, $v_3 = 900$ und die entsprechenden Luftwiderstände $W_1 = 0\cdot15$, $W_2 = 1\cdot10$, $W_3 = 2\cdot10$, so bildet sich folgendes Gleichungssystem:

$$0\cdot15 = \frac{9a}{1-27\,Be^{-3n}}, \qquad 1\cdot10 = \frac{36a}{1-216\,Be^{-6n}}.$$

$$2\cdot10 = \frac{81a}{1-729\,Be^{-9n}}.$$

Die Elimination von n liefert eine Gleichung zweiter Grades für a, deren eine Wurzel

$$a = 0\cdot011807$$

ist.

Dann folgt

$$B = 0\cdot041055,$$

$$n = 0\cdot4451.$$

Die Formel für den Luftwiderstand, die die genannten drei Werthe wiederzugeben vermag, ist demnach

$$W = \frac{0\cdot011807\left(\frac{v}{100}\right)^2}{1-0\cdot041055\left(\frac{v}{100}\right)^3 e^{-0\cdot4451\,.\,\frac{v}{100}}}. \qquad 69)$$

In der nachstehenden kurzen Zusammenstellung gibt die zweite Reihe die hiernach berechneten Widerstände wieder. Die dritte Reihe ist aus der zweiten durch Multiplication mit 1·25 hervorgegangen. Die vierte Reihe enthält die Krupp'schen Werthe (nach Tabelle VI).

v	100	200	300	350	400	500	600	700	800	900
W	0·012	0·055	0·150	0·230	0·340	0·662	1·100	1·540	1·876	2·100
$5/4\,W$	0·015	0·069	0·187	0·287	0·425	0·832	1·375	1·925	2·345	2·625
Kr.	0·007	0·060	0·170	0·352	0·601	0·983	1·388	1·803	2·260	2·745

Die Tafel I gibt die beiden letzten Zahlenreihen graphisch wieder. Die Krupp'sche Curve ist ausgezogen, die unserige punktirt. Sie windet sich, wie man sieht, um die Krupp'sche steil aufsteigende und fast asymptotisch zu nennende Curve herum, ohne sich allzuweit von ihr zu entfernen. Von $v = 0$ bis etwa 300 geht sie über, von 300 bis etwa 600 unter und von 600 bis 850 über der Krupp'schen Curve weg, worauf eine stärkere Abweichung beider Platz greift. Beide Curven haben also vier Punkte gemeinsam. Im Vergleiche zur Krupp'schen Curve ist z. B. der Widerstand eines Geschosses von 800 bis 900 *m* Anfangsgeschwindigkeit im ersten Drittel der Bahn etwas grösser, im zweiten etwas kleiner, im letzten wird er etwas grösser als in der verglichenen. Diese im Vorzeichen verschiedenen Werthe compensiren sich zum Theil und haben praktisch die Folge, dass entsprechende i-Werthe auftreten, die bezüglich der Krupp'schen Curve, für welche i gleich 1 angenommen ist, bald grösser, bald kleiner als die Einheit sind Dieser Wechsel lässt sich nicht vermeiden, weil sonst die Integrationsfähigkeit unserer Gleichungen in Frage steht. Da nun auch bei den anderen bekannten Methoden die i-Werthe, wenn auch nicht gerade um die Einheit oscillirend, aber doch auch in bestimmtem Sinne veränderlich sind, so ist die Berechnung derselben für jeden unbekannten Fall der Praxis unerlässlich. Dadurch bleibt man auch der lästigen Bestimmung derjenigen Einflüsse, die aus der höheren Elevation und daraus resultirenden Höhenlage der Flugbahn, ebenso der Correction der Grundgleichungen $F(v)$ und $F(u)$ und anderer Verhältnisse überhoben. Damit soll nicht gesagt sein, dass diese Correctionen

überflüssig wären. Sind sie doch aus dem Wunsche entstanden, die Grenzen der Unsicherheit möglichst enge zu ziehen.

Man kann leicht eine allgemeine Formel für die den Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 entsprechenden Luftwiderstände aus der Formel

$$W = \frac{a\left(\frac{v}{100}\right)^2}{1-B\left(\frac{v}{100}\right)^3 e^{-n\frac{v}{100}}} \qquad z = \frac{v}{100}$$

ableiten. Eliminirt man z. B. aus den drei Gleichungen für $W_1 W_2 W_3$ B und n, so folgt nach einigen Transformationen

$$\left(\frac{1}{z_1^3} - \frac{a}{W_1 z_1}\right)^{z_3-z_2} \cdot \left(\frac{1}{z_3^3} - \frac{a}{W_3 z_3}\right)^{z_2-z_1} = \left(\frac{1}{z_2^3} - \frac{a}{W_2 z_2}\right)^{z_3-z_1}, \tag{70}$$

also eine Gleichung für a, die zweiten Grades ist, wenn $z_2 = \frac{1}{2}(z_1+z_3)$. Aus a folgt dann B und n. Für $v_1 = v_1$, $v_2 = 2v_1$, $v_3 = 3v_1$ ist das folgende System giltig:

$$\sin\varphi = \frac{3\sqrt{37 W_1 W_3 (4W_2^2 - 3W_1 W_3)}}{72 W_1 W_2 + 8 W_2 W_3 - 27 W_1 W_3},$$

$$a = \frac{W_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{12 z_1^2} \sqrt{\frac{37 W_1 W_3}{4W_2^2 - 3W_1 W_3}}, \tag{71}$$

$$B = \frac{8\left(1-\frac{a}{W_1}z_1^2\right)^2}{z_1^3\left(1-\frac{4az_1^2}{W_2}\right)}, \quad e^{nz_1} = \frac{Bz_1^3}{1-\frac{a}{W_1}z_1^2}.$$

Diese Ausdrücke für aBn, eingesetzt in die obige Widerstandsformel, liefern für alle v innerhalb der Grenzen $v = 0$ bis $v = v_3$ die der Curve entsprechenden Luftwiderstände.

Anwendung:

v	300	600	900
W	0·1545	1·2324	2·3255

Man hat

$$W = \frac{0\cdot011902\left(\frac{v}{100}\right)^2}{1-0\cdot042722\left(\frac{v}{100}\right)^3 e^{-0\cdot44154\,\frac{v_0}{100}}}$$

und damit für

v	100	200	300	400	500	600	700	800	900
W	0·012	0·058	0·1545	0·357	0·721	1·2324	1·747	2·136	2·3255

Auch hier legt sich unsere Curve in Windungen um die Normalcurve, die von $v = 300$ an nahezu eine gerade Linie bildet, wie dies Chapel zuerst nachgewiesen.

Bei engerem Spielraum zwischen v_1 und v_3, z. B. bis 700, legt sich auch die Curve näher an die umschlossene an, entfernt sich dann aber rascher von letzterer. Legen wir z. B. die oben benützte Gleichung

$$K(v) = \frac{100}{1-\frac{5}{7}\left(\frac{v}{550}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{v}{550}\right)}},$$

beziehungsweise

$$W = \frac{\left(\frac{v}{100}\right)^2}{\frac{1}{4}\pi g\,.\,1000} K(v)$$

der Rechnung unter, so ist in logarithmischer Fassung

$$K(v) = y = \frac{100}{1-\frac{[0\cdot935665-2]\cdot\left[\frac{v}{100}\right]^3}{\left[0\cdot236888\cdot\frac{v}{100}\right]}}. \tag{72)}$$

v	100	200	300	350	400	500	600	700	800
$K(v)$	105	130	184	221	265	339	340	286	228
W	0·013	0·067	0·213	0·352	0·550	1·099	1·589	1·816	1·897
Kr.	0·007	0·060	0·170	0·352	0·601	0·983	1·388	1·803	2·260

Auch diese Curve schliesst sich der letzten Krupp'schen bis etwa 700—800 mehr oder weniger gut an, und es weichen erst die folgenden Werthe von 800 und darüber von den grösseren tabellarischen erheblicher ab, wie dies auch die $K(v)$-Curve zu erkennen gibt. Will man bis 1000 oder 1200 *m* Anfangsgeschwindigkeit gehen, so ist in der allgemeinen Formel für die v-Werthe einzusetzen 333·3, 666·6, 1000, beziehungsweise 400, 800, 1200, wobei aber grössere Ausbiegungen vorkommen.

§. 18.

Um in den entwickelten Curvensystemen noch einige Dissonanzen zu einem harmonischen Abschlusse zu bringen, bemerken wir schliesslich, dass die Resultate der bisherigen Entwickelungen sich noch auf eine interessante Weise combiniren lassen.

Der $K(v)$-Ausdruck in der Beschleunigungsformel

$$U = \frac{C}{10^7} K(v) \, . \, v^2$$

erscheint in den Integralgleichungen

$$x = \frac{10^7}{C} \int^v \frac{du}{uK(u)}, \qquad t = -\frac{10^7}{C \cos \alpha} \int^v \frac{du}{u^2 K(u)},$$

$$\operatorname{tg} \tau - \operatorname{tg} \alpha = \frac{10^7 g}{C \cos \alpha^2} \int^v \frac{du}{u^3 K(u)}$$

überall im Nenner und daher die Nenner der Ausdrücke

$$K(u_1) = \frac{3500 \left(\frac{u}{520} \right)^{4\cdot 5}}{1 + 9 \left(\frac{u}{520} \right)^5}, \qquad K(u_2) = \frac{120}{1 - \frac{2}{3} \left(\frac{u}{600} \right)^3 e^{3\left(1 - \frac{u}{600}\right)}}$$

in den Integralgleichungen überall im Zähler, womit die Integration ausführbar wird.

Haben wir nun die Absicht, die Curven $K(u_1)$ und $K(u_2)$ durch einen analytischen Process zu einer Mittelcurve zu ver-

einen, so bietet sich nach dem Vorstehenden die harmonische Theilung hiezu von selbst an. Wir führen ein

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2},$$

nehmen also von K_1 und K_2 das harmonische Mittel K vermittelst

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2}\left[\frac{1+9\left(\frac{u}{520}\right)^5}{3500\left(\frac{u}{520}\right)^{4\cdot 5}} + \frac{1-\frac{2}{3}\left(\frac{u}{600}\right)^3 e^{3\left(1-\frac{u}{600}\right)}}{120}\right] \qquad 73)$$

und führen es in die obigen Gleichungen ein.

Durch diese Combination erhält man in einfachster Weise ein mittleres und damit genaueres Gesammtresultat. Man übersieht aber sofort, dass man von den den Curven K_1 und K_2 genügenden und getrennt berechneten Werthen von x, t, $\operatorname{tg}\tau - \operatorname{tg}\alpha$ einfach das arithmetische Mittel zu nehmen hat, um die entsprechenden Ausdrücke der harmonischen Curve zu erhalten. Diese windet sich ungefähr durch die Mitte der genannten Curven und folgt sehr genau von etwa $v = 200$ bis $v = 1000$ der Schusszone. Dieses einfache Resultat ist immerhin theoretisch bemerkenswerth. Hinsichtlich der Curvengleichung der Flugbahn liegen wegen der wiederholten Integration die Dinge nicht so einfach, wiewohl die Rechnung auch hier noch ausführbar ist, worauf wir aber hier nicht weiter eingehen wollen.

Hiemit haben wir das Wesentliche erledigt.

Bei Beurtheilung der vorgetragenen Theorien möge man nicht vergessen, dass mit der Forderung der Integrabilität nothwendigerweise ein Zwang oder Druck hinsichtlich der Freiheit in der Wahl der unterzulegenden Curven verbunden und nicht zu vermeiden war und jene Abweichungen verursachte, von denen wir oben gesprochen haben.

Will man diese Differenzen wegschaffen, so geht die Einfachheit der Grundidee verloren und man büsst mehr ein, als man gewinnt. Ausserdem liebt die Technik nicht unübersichtliche und weitausgesponnene Formelsysteme, die freilich dem

Theoretiker kein Hinderniss, dem Praktiker aber sehr unerwünscht sind. Da nun in fast allen Bewegungszuständen der Natur eine absolute Genauigkeit theoretisch nicht zu erreichen, wenn auch zu erstreben ist, so sind alle Wege zu diesem Ziele lediglich Seiten- oder Näherungs-, bestenfalls asymptotische Wege, deren Anwendungsberechtigung lediglich in dem Grade der Annäherung an den wahren Weg der Natur begründet liegt, bei welcher Wahl dann auch der bequemste Weg je nach Anlage und Neigung keine geringe Rolle spielt.

Wie unsere Darstellung der Verhältnisse beweist, haben wir die eingeführten Curven nach Möglichkeit den Erfahrungsthatsachen anzuschliessen versucht. Dass diese Erfahrungsresultate die Neigung haben sollten, in allen Regionen dem Lauf einer theoretischen Curve zu folgen, ist nach dem Obigen sehr unwahrscheinlich, wenn schon, wie dies auch von uns geschehen, ein sanfter Zwang zu freundschaftlicher Annäherung auszuüben versucht wird. Die Theorie verlangt als Basis, wie schon gesagt, eine ideelle Widerstandscurve, die Natur der Thatsachen liefert eine sozusagen materielle Widerstandszone in Folge jener bekannten und unbekannten Störungsfunctionen, die einzeln wegen ihrer Kleinheit kaum merkbar, vereinigt dagegen eine sehr merkliche Ablenkung und damit jene nicht gerade schmale Zonenbildung bewirken. In Folge dieser Thatsachen ist die Aufstellung von Hypothesen als angenäherten Wahrheiten durchaus berechtigt, zum mindesten so lange nothwendig und nützlich, so lange als das definitive Gesetz noch nicht gefunden ist.

III. Theil.

Aufstellung einer parabolischen Widerstandsfunction.

§. 19.

Aus den beiden ersten Theilen unserer ballistischen Untersuchungen dürfte mit Sicherheit hervorgegangen sein, dass das ballistische Problem in analytischer Richtung den Versuchen zur allgemeinen Lösung grosse Schwierigkeiten entgegensetzt, die ja überhaupt in allen Fällen umso rascher zuzunehmen pflegen, je näher man dem Ziele kommt. Jedenfalls aber wird die endgiltige Formel eine sehr complicirte Gestalt haben, die

zeitraubende Berechnungen beansprucht. Daher werden die bisher benützten Näherungsformeln, so weit sie in ihrer Anwendung ihre Giltigkeitsgrenzen nicht überschreiten, noch immer ihren Werth behaupten, und es ist nicht ganz ausgeschlossen, dass sie einer Erweiterung noch zugänglich sind. Es dürfte also nützlich sein, den spröden Stoff einmal wieder von diesem Gesichtspunkt aus zu betrachten, sofern daraus die Möglichkeit resultirt, mit etwas weniger Formelwerk in kürzerer Zeit zu einem annehmbaren Resultat zu gelangen.

Wir bedienen uns hiezu einer Definition, die wir schon früher aus unserer Hyperbeltheorie abgeleitet haben und eine allgemeinere Grundlage bietet. Es betrifft die folgende sehr einfache Gleichung der Horizontalprojection der Geschwindigkeit in Function der Zeit, nämlich

$$v_x = \frac{v_0 \cos \alpha}{(1+ct)^n}. \tag{74}$$

Wir halten dieselbe einer Erweiterung fähig, wollen indessen, bevor wir diese entwickeln, aus ihr die entsprechenden Grundformeln für x, y, $\operatorname{tg} \tau$ etc. ableiten.

Vermittelst der dynamischen Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -U\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - U\frac{dy}{ds}$$

erhalten wir die Werthe für

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{c(1-n)}[(1+ct)^{1-n}-1],$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{c(1+n)v_0 \cos \alpha}[(1+ct)^{1+n}-1], \tag{75}$$

$$y = \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{c(1-n)} + \frac{g}{c^2(1-n^2)}\right)((1+ct)^{1-n}-1) -$$

$$- \frac{g}{2c^2(1+n)}[(1+ct)^2-1],$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2c^2(1+n)}\left[\left(1+\frac{c(1-n)}{v_0 \cos \alpha}x\right)^{\frac{2}{1-n}} - \frac{2cx}{v_0 \cos \alpha} - 1\right].$$

Der Luftwiderstand ergibt sich aus

$$U = -\frac{ncv}{1+ct}, \qquad U_0 = ncv_0. \tag{76}$$

Die Constante $c = \frac{U_0}{nv_0}$ ist also mittelst der Anfangswerthe $U_0 v_0$ gegeben, sobald n durch das zu Grunde gelegte Widerstandsgesetz

$$\frac{U \cos \tau}{U_0 \cos \alpha} = \left(\frac{v \cos \tau}{v_0 \cos \alpha}\right)^{1+\frac{1}{n}} \tag{77}$$

bekannt ist. Dabei kann n alle Werthe annehmen. Für $n = 1$ erhält man das quadratische, für $n = {}^1/_2$ und $= {}^1/_3$ das cubische, beziehungsweise das biquadratische Widerstandsgesetz. Man sieht, dass mit abnehmendem n die Exponenten zunehmen.

Die Elemente der Bahn sind alle in Function der Zeit ausdrückbar und sehr leicht zu berechnen.

Wir geben hier einige Anwendungen der Theorie.

1. 7·5 *cm*-Schnelllade-Feldkanone $L/28/30$ von Krupp.

Geschossgewicht $G = 6\cdot5\,kg$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 500$.

Zur Bestimmung der Luftwiderstandsbeschleunigung U_0 an der Mündung bedienen wir uns der früheren Formel

$$U = i \cdot \frac{\Delta}{1\cdot206} \cdot \frac{(2R)^2}{G} \cdot 3\cdot5 \frac{\left(\frac{v}{520}\right)^{4\cdot5}}{1+9\left(\frac{v}{520}\right)^{5}} \cdot v^2$$

und erhalten aus ihr durch Einsetzen von $2R = 0\cdot075$, $G = 6\cdot5$, $v_0 = 500$ als gesuchten Werth $U_0 = 75\cdot5\,m$.

Eine weitere Schussangabe genügt zur Bestimmung von $n = 0\cdot38$. Die Formeln für v_x und x sind nunmehr:

$$v_x = \frac{500 \cos \alpha}{(1+0\cdot04\,t)^{0\cdot38}}, \qquad x = \frac{500 \cos \alpha}{0\cdot248}\left[(1+0\cdot04\,t)^{0\cdot62} - 1\right].$$

Die nachfolgende Zusammenstellung der Schusstafelangaben und der berechneten Daten zeigt, wie weit letztere die ersteren wiederzugeben vermögen.

t	1·06s	2·01	4·21	6·05	9·14	13·05	16·06	19·30	21·25	24·24
α	0°31′	1° 5′	2°28′	3°45′	6°—	8° 9′	11°43′	14°36′	16°21′	19° 2′
β	0°40′	1°23′	3°22′	5°18′	8°51′	13°58′	18°18′	23°—	25°47′	30° —
v_e	440	399	340	311	281	255	240	230	226	224
ber.	437	399	343	313	281	255	237	231	225	222
x	500	900	1700	2300	3200	4200	4900	5600	6000	6600
ber.	494	890	1700	2300	3200	4203	4867	5511	5881	6400

Die berechneten v und x stimmen im Ganzen gut mit den Schusstafelwerthen überein und nur die letzten Ziffern zeigen eine mässige Differenz.

Man bemerke noch, dass unsere Zahlen mittelst der Widerstandspotenz $v^{1+\frac{1}{n}} = v^{3\cdot 63}$ berechnet worden sind.

Wir schliessen hieran noch die Frage nach der Maximalschussweite. Setzt man in der Gleichung für y seinen hiefür entsprechenden Werth Null ein und differentiirt x nach α, so ergibt sich die gesuchte Erhöhung und Schussweite aus

$$\left(\frac{2v_0(1+n)c\sin\alpha}{g(1-n)} + \frac{2}{1-n}\right)\left(\left[\frac{c(1+n)v_0}{g\sin\alpha}+1\right]^{\frac{1-n}{1+n}} - 1\right) = $$

$$= \left[\frac{c(1+n)v_0}{g\sin\alpha}+1\right]^{\frac{2}{1+n}} - 1,$$

$$\frac{c(1-n)W}{v_0\cos\alpha} = \left[\frac{c(1+n)v_0}{g\sin\alpha}+1\right]^{\frac{1-n}{1+n}} - 1. \qquad 78)$$

Für das genannte Krupp'sche Geschütz würde man erhalten:

$$\alpha = 35°50', \quad W = 7650\,m.$$

Die wirkliche Schussweite wird wahrscheinlich etwas grösser sein, da das Geschoss in den höheren Theilen der Flugbahn geringeren Luftwiderstand erfährt als unten.

2. Die entwickelten Gleichungen wenden wir ferner an auf das französische Gewehr $M/86/93$.

Seelenweite $2R = 8\,mm = 0\cdot008\,m$, Geschossgewicht $G = 0\cdot015\,kg$, $v_0 = 630\,m$.

Die Widerstandsformel liefert $U = 574\,m$. Die Geschwindigkeitsformel für das Geschoss ist, nachdem $n = 0\cdot507$ und $c = 1\cdot8$ gefunden,

$$v_x = \frac{630 \cos\alpha}{(1+1\cdot8\,t)^{0\cdot507}}.$$

Aus General Wille's Waffenlehre, 2. Aufl., Berlin, 1900. S. 168, entnehmen wir die nebenstehenden Data und fügen die errechneten hinzu:

t	0·17	1·37	2·013	3·58	4·503	5·00	6·063	7·22
v	550	335	290	228	206	196	180	166
ber.	550	335	290	228	206	196	179	165

Die Zahlen der beiden letzten Reihen weichen fast gar nicht von einander ab, und die Tafelwerthe entsprechen sehr gut dem Widerstandsgesetz $v^{2\cdot97}$, so dass man annehmen kann, dass die französischen Bearbeiter das cubische Gesetz der Berechnung zu Grunde gelegt haben.

Wir entwickeln noch für dieses Gewehr die Gleichungen für den Schuss in der Verticalen.

Die allgemeinen Gleichungen für den Scheitelpunkt der Flugbahn sind:

$$v_s = \frac{v_0 \cos\alpha}{\left[1+\dfrac{c(1+n)v_0 \sin\alpha}{g}\right]^{\frac{n}{1+n}}},$$

$$1+ct_s = \left[1+\frac{c(1+n)v_0 \sin\alpha}{g}\right]^{\frac{1}{1+n}}, \tag{79}$$

$$x_s = \frac{v_0 \cos\alpha}{c(1-n)}\left(\left[1+\frac{c(1+n)v_0 \sin\alpha}{g}\right]^{\frac{1-n}{1+n}} - 1\right),$$

$$y_s = \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{c(1-n)} + \frac{g}{c^2(1-n^2)}\right)\left(\left[1+\frac{c(1+n)v_0 \sin\alpha}{g}\right]^{\frac{1-n}{1+n}} - 1\right)$$

$$-\frac{g}{2c^2(1+n)}\left(\left[1+\frac{c(1+n)v_0 \sin\alpha}{g}\right]^{\frac{2}{1+n}} - 1\right).$$

Führen wir hierin ein $\alpha = 90^\circ$, $v = 630$, $g = 9 \cdot 81$, $n = {}^1/_2$, $c = 1 \cdot 8$, so erhält man schliesslich

$$t_s = 16 \cdot 8^s \quad Y = 2247 \quad t_e = 23 \cdot 2^s \quad v_e = 191\,m.$$

Also erreicht beim Schuss nach oben das 8 *mm*-Geschoss des französischen Gewehres *M* 86/93 nach 16·8 Secunden Flugzeit eine Höhe von 2247 *m*; beim Herabfallen gebraucht es zum Zurücklegen dieser Strecke die grössere Zeit von 23·2 Secunden und kommt mit einer Endgeschwindigkeit von 191 *m* unten an.

3. Österreichisch-ungarisches Mannlicher-Gewehr *M*/90/95.

Seelenweite $2R = 8\,mm$, Geschossgewicht 15·8 *g*, $v_0 = 620\,m$.

Wir ermitteln: $c = 3$, $n = 0 \cdot 364$.

Die Geschwindigkeitsformel für dieses Gewehr lautet:

$$v_x = \frac{620 \cos \alpha}{(1+3\,t)^{0 \cdot 364}}.$$

Die nachfolgende kleine Tabelle gibt in letzter Reihe die hienach berechneten Geschwindigkeiten.

x	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2250
t	0·61	1·39	2·37	3·51	4·81	6·28	8·01	9·00
v	425	337	288	255	229	209	191	183
ber.	424	337	289	255	229	209	192	184

Auch hier ist die Übereinstimmung zwischen den errechneten und den Tafelwerthen eine sehr gute.

Die Potenz des Widerstandsgesetzes ist $v^{3 \cdot 747}$, also der vierten Potenz sehr nahe, die bekanntlich von den österreichischen Ballistikern vielfach benützt wird.

Wie es scheint, gestattet man sich in der Wahl des Widerstandsgesetzes einige Freiheit, und man braucht auch in der That, wie General v. Müller sagt, bei der Wahl einer Potenz nicht ängstlich zu sein, wie wir nachweisen wollen.

Entwickeln wir nämlich unsere v_x-Formeln nach Potenzen von t und beachten, dass $c = U_0/nv_0$ ist, so erhalten wir

$$v_x = \frac{v_0 \cos\alpha}{1 + \frac{U_0}{v_0} t + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{U_0^2}{v_0^2} t^2 + \dots}.$$

Man sieht, dass in den beiden massgebenden Gliedern im Nenner kein n vorkommt und dass sein Einfluss erst im dritten Gliede beginnt, der auch dann erst merklich wird, wenn U und t stark anwachsen. Ausserdem bemerkt man, dass mit abnehmendem n und also mit zunehmender Potenz die Geschwindigkeiten zunehmen. Im Ganzen ist bei kleinen U_0-Werthen, wie sie bei Bogenschüssen (Steilfeuer) vorkommen, der Einfluss des n-Werthes nur unbedeutend.

§. 20.

Wir haben oben gesehen, dass innerhalb eines nicht unbeträchtlichen Bereiches die aus den Definitionen

$$v_x = \frac{v_0 \cos\alpha}{(1+ct)^n} \qquad \frac{U\cos\tau}{U_0\cos\alpha} = \left(\frac{v\cos\tau}{v_0\cos\alpha}\right)^{1+\frac{1}{n}}$$

abgeleiteten Formeln den Schusstafelwerthen genügen. Da letztere aber meist errechnet und nur in besonderen Fällen durch Versuche ermittelt sind, so bietet jene Übereinstimmung noch keine volle Gewähr für die Richtigkeit der Theorie. Was die obigen Formeln betrifft, so ist im Grunde weder n, noch c constant, da bekanntlich in der Zone der Schallgeschwindigkeit ein starker Wechsel der Exponenten eintritt. Eine bessere Angliederung der obigen Widerstandscurve an die wirkliche wird nun dadurch erreicht, dass c als mit der Zeit variabel in die Rechnung eingeführt wird. Wir modificiren die obige erste Formel in die folgende

$$v_x = \frac{v_0 \cos\alpha}{\left(1 + \frac{ct}{1+bt}\right)^n}, \tag{80}$$

die auch noch sehr einfach ist, wenigstens keine grossen Schwierigkeiten macht und noch sämmtliche Integrationen zulässt. So erhält man aus ihr, wenn $\gamma = b+c$, $T = 1+\gamma t$

$$x =$$

$$\frac{v_0 \cos\alpha}{\gamma}(T-1)\left[1-\frac{nc}{\gamma}\left(1-\frac{l n T}{T-1}\right)+\right.$$

$$+n_2\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2\left(1+\frac{1}{T}-2\frac{l n T}{T-1}\right)- \qquad 81)$$

$$\left.-n_3\left(\frac{c}{\gamma}\right)^3\left(1+\frac{{}^5/_2}{T}-\frac{{}^1/_2}{T^2}-3\frac{l n T}{T-1}\right)+\ldots\right].$$

Anwendung. $2R = 10\,cm$, $G = 10\,kg$, $v_0 = 700$, $U_0 = 160$, $n = {}^3/_2$, $c = \frac{U_0}{n v_0} = 0\cdot15238$. Es sei $b = 0\cdot058$, dann ist

$$v_t = \frac{700\cos\alpha}{\left(1+\frac{0\cdot15238\,t}{1+0\cdot058\,t}\right)^{3/2}},\; U_x = 160\left[1\cdot3806\left(\frac{v_x}{700}\right)^{5/6}-\right.$$

$$\left.-0\cdot3806\left(\frac{v_x}{700}\right)^{1/6}\right]^2.$$

Gesucht Geschwindigkeit und Entfernung nach 14·5 ($T = 4$) und 42·78 ($T = 10$) Secunden Flugzeit.

Die Formeln liefern für $\alpha = 0$

$v_x = 219$	$x = 4844$	$v_x = 143$	$x = 9612$
Tab. 226	Tab. 4800	Tab. 127	Tab. 9595

Um eine weitere Anwendung dieser Formeln zu geben, benützen wir als Unterlage die Schusstafel des italienischen Gewehres M/91 aus »Istruzione sulle armi e sul tiro per la infanteria«, Rom, 1898, die wahrscheinlich nach den Siacci'schen Tabellen berechnet worden ist.

Seelenweite 6·5 *mm*, Geschossgewicht 10·5 *g*, $v_0 =$ $= 690\,m$.

Wir ermitteln wieder zuerst $c = \frac{5}{4}$, $n = 0\cdot 77$ und setzen versuchshalber $b = 0\cdot 111$ und erhalten damit die folgende Geschwindigkeitsformel:

$$v_x = \frac{960 \cos\alpha}{\left(1 + \frac{1\cdot 25\,t}{1 + 0\cdot 111\,t}\right)^{0\cdot 77}}.$$

Nach dieser ist die letzte Reihe der nachstehenden Zusammenstellung berechnet:

x	100	300	600	900	1200	1500	1800	2000
t	0·16	0·52	1·29	2·29	3·45	4·78	6·28	7·40
v_t	615	476	334	276	242	215	192	177
Form.	601	477	350	276	232	203	183	172

Wie aus den beiden letzten Reihen hervorgeht, sind im ersten Drittel der Bahn die errechneten Geschwindigkeiten grösser, in der Mitte fast gleich und im letzten Drittel etwas kleiner als die der Tafel. Doch sind die letzteren Differenzen etwas weniger gross, weil wir v_x und nicht v_t berechnet haben.

Die Schussweite für 3·45 Secunden Flugzeit ergibt sich aus der obigen Formel für x und ist $= 1207\ m$, was mit dem Tafelwerth 1200 nahe übereinstimmt. v_0 haben wir zu 690 anstatt 700 angenommen.

Der Curvengleichung geben wir die Form

$$y = x\left[\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{c}\left(1+\frac{b}{c}\right)^{n-1}\frac{(1+n)}{v_0\cos\alpha}\left(\frac{1}{1+n} - \frac{n}{2+n}\cdot\frac{b}{c} + \frac{n(n+1)}{2(3+n)}\left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{6(4+n)}\left(\frac{b}{c}\right)^3 + \ldots\right)\right]$$

$$-\frac{g}{(1+n)(b+c)^2}\left[\frac{T^2-1}{2} + \frac{n}{2+n}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{T^3-1}{3} - \frac{1.2.n}{(2+n)(3+n)}\left(\frac{b}{c}\right)^2\frac{T^4-1}{4} + \frac{1.2.3.n}{(2+n)(3+n)(4+n)}\left(\frac{b}{c}\right)^3\frac{T^5-1}{5} - \ldots\right]$$

Für $n = 1$ werden die Gleichungen sehr einfach. So ist u. A.

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{b+c}\left(bt + \frac{c}{b+c}\, ln[1+(b+c)t]\right). \qquad 82)$$

Die Luftwiderstandsbeschleunigung lässt sich durch die beiden folgenden Formeln darstellen:

$$\frac{d^2 x}{dt} = U = U_0 \cos \alpha \left(\frac{v_x}{v_0 \cos \alpha}\right)^{1+\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{b}{c} - \frac{b}{c}\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{v_x}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^2,$$

$$U = U_0 \cos \alpha \left[\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{v_x}{v_0 \cos \alpha}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} - \frac{b}{c}\left(\frac{v_x}{v_0 \cos \alpha}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}\right]^2. \qquad 83)$$

Als Curve aufgefasst, stellt sie für $n \gtreqless 1$ eine höhere parabolische Linie dar, die sich der experimentellen je nach der Wahl der Parameter mehr oder weniger gut anschliesst. Da die wirkliche Curve des Widerstandes zwischen $v_x = 200$—300 eine sehr steile Richtung einschlägt und dann, wie dies Chapel zuerst nachwies, in fast asymptotisch gerader Linie verläuft, so ist die obige Formel und ihre Curve nur als annähernd genau anzusehen, wie übrigens auch die genannten und alle bisher eingeführten empirischen und analytischen nur Annäherungen darstellen. Die Schusszone ist zur Zeit noch breit genug, um eine Reihe von Widerstandsgesetzen aufzunehmen.

Von Interesse ist noch die Annahme $n = 1$, die dem quadratischen Gesetz entspricht. Führen wir ein $2R = 10\,cm$, $G = 10\,kg$, $v_0 = 700\,m$ und damit $U_0 = 160\,m$, so ist $c = \frac{U_0}{n v_0} = \frac{8}{35}$ und wenn noch $\frac{b}{c} = \frac{1}{8}$, so ist das parabolische Widerstandsgesetz

$$U = \frac{10}{196}\left(\frac{9v_x}{100} - 7\right)^2.$$

Im Vergleich der hieraus berechneten U-Werthe mit den z. B. von Hojel experimentell ermittelten erhalten wir nach Siacci's Angaben für das Geschwindigkeitsintervall 138—660 die folgende Übersicht:

v	700	650	600	550	500	450	400	350	300	250	200	150
U (Hojel)		124	113	91	77	63	47·5	29·8	13·7	8·8	4·0	2·7
Formel	160	135	112	92	74	57	43	31	20	12	6	2

Stellenweise herrscht genügende Übereinstimmung zwischen den beiden letzten Reihen. Wir schliessen noch an die unseren Formelwerthen entsprechenden Geschwindigkeiten nach Siacci's Tabelle:

700 635 570 515 465 415 377 345 315 287 220 130

So liefert unsere Formel für $v_x = 350$ die Verzögerung $U = -31\,m$, welche Ziffer die Tabelle bei $v = 345$ verzeichnet.

Im Anschlusse hieran berechnen wir noch mittelst der Formel

$$v_1 = 700 \cos\alpha \frac{35+t}{35+9t}, \quad x = \frac{700}{81}\cos\alpha\left(9t + 280\, ln\left(1 + \frac{9}{35}t\right)\right)$$

die nachfolgende Übersicht:

$(\alpha = 0)$

t	7	14	21	28	35	42	49
v (Tab.)	293	230	192	165	145	129	116
Formel	300	213	175	154	140	130	123
x (Tab.)	2935	4742	6210	7460	8540	9495	10350
Formel	3036	4780	6125	7269	8290	9239	10126

Trotz der beträchtlichen Ausdehnung des Schussbereiches sind die Differenzen verhältnissmässig gering, so dass die sehr einfache Formel noch das Mögliche leistet. Einer genaueren Bestimmung von n, b wird es gelingen, die theoretische Widerstandscurve der experimentellen noch etwas enger anzu-

schliessen, was innerhalb eines bestimmten Bereiches nicht unmöglich ist. Man bemerke noch, dass für grosse t der v_x-Werth einer festen Grenze zustrebt.

Da t leicht durch v_x darzustellen ist, so sind auch die übrigen Elemente der Flugbahn in Function von v_x darstellbar.

Setzt man $\frac{b}{c} = \varepsilon$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \sigma$, so geht die Widerstandsformel über in

$$U_x = U_0 \left[(1+\varepsilon) \left(\frac{v_x}{v_0} \right)^{\sigma} - \varepsilon \left(\frac{v_x}{v_0} \right)^{1-\sigma} \right]^2.$$

Wählt man, um σ und ε zu bestimmen, solche v, dass $v_0 : v_1 : v_2 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, und genügen die entsprechenden U der Bedingung $U_0 > 4 (\sqrt{2U_1} - \sqrt{U_2})^2$, so ergeben sich σ und ε aus

$$2^{2\sigma} - \left(\sqrt{\frac{U_0}{U_1}} + 2 \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} \right) 2^{\sigma} + 2 = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{1 - 2^{\sigma} \sqrt{\frac{U_1}{U_0}}}{2^{2\sigma - 1} - 1}.$$

Die obige Formel gibt damit die drei U-Werthe: U_0 U_1 U_2 wieder. So erhält man aus $v_0 = 800$, $v_1 = 400$, $v_2 = 200$, $U_0 = 206$, $U_1 = 44$, $U_2 = 5$ die abgerundete Werthe $\sigma = 0 \cdot 6$, $\varepsilon = 2$, also $n = 5$, und es ist

$$U = 206 \left[3 \left(\frac{v}{800} \right)^{0 \cdot 6} - 2 \left(\frac{v}{800} \right)^{0 \cdot 4} \right]^2.$$

Die Gleichungen erhalten dadurch, dass die Elemente der Flugbahn in Function der Zeit darstellbar sind, einen nicht unerheblichen Vorzug gegenüber denjenigen, deren Urvariable die Endgeschwindigkeit ist. Für den Bogen- und Verticalschuss bieten sie ebenfalls bequeme Handhaben zur Berechnung. Den speciellen Fall $n = 3$, der auf die Hyperbel als ballistische Curve führt, haben wir schon früher im »Archiv für die Artillerie- und Ingenieurofficiere des deutschen Reichsheeres«.

Berlin, 1893—1897 eingehend behandelt, auf deren theoretische Entwickelung, die wir im Obigen erweitert haben, wir noch hier den geneigten Leser freundlichst aufmerksam machen.

Vergleichen wir schliesslich die in den drei Theilen unserer Arbeit entwickelten Theorien mit einander, so ergibt sich für das erste algebraische System, dass es ausnahmslos zu geschlossenen Formen führt, den Tabellenwerthen am besten entspricht und einen Giltigkeitsbereich von nahe 200—1000 *m* umfasst.

Das zweite transcendente Gleichungssystem füllt die Lücke des ersten zwischen 0 und 200 aus, führt ebenfalls, von einem Fall abgesehen, zu geschlossenen Gleichungen, folgt indessen weniger genau den Tabellenwerthen und weicht namentlich in den höheren Geschwindigkeitsbereichen nicht unerheblich von den letzteren ab. Gleichwohl besitzt es vor dem ersteren System den Vorzug einer grösseren Vollständigkeit. Beiden gemeinsam ist die Urvariable u.

Das dritte parabolische System ist das einfachste und am schnellsten zum Ziele führende, ist aber weniger allgemein und leistet nur innerhalb bestimmter Zonen praktisch genügende Dienste, schliesst indessen die Möglichkeit einer weiteren Annäherung nicht völlig aus und hat den Vorzug, die Zeit als Urvariable zu besitzen.

Wie wir an einigen Beispielen nachgewiesen, liefern auch die Tabellen nicht immer einwandfreie Resultate und sind dieselben auch fernerhin fortgesetzter Correcturen bedürftig. Es genügt aber zur Zeit, den Weg zu wissen, der zum Ziele führt, und dieser Weg, von der Erfahrung dictirt, ist längst beschritten. Theoretisch freilich liegen die Verhältnisse etwa ebenso ungünstig wie bei der Störungstheorie, vielleicht noch ungünstiger, und es mag noch lange Zeit vergehen, bevor die Analyse sämmtliche ballistische Erscheinungen in ausreichender Weise zum mathematischen Ausdruck bringt.

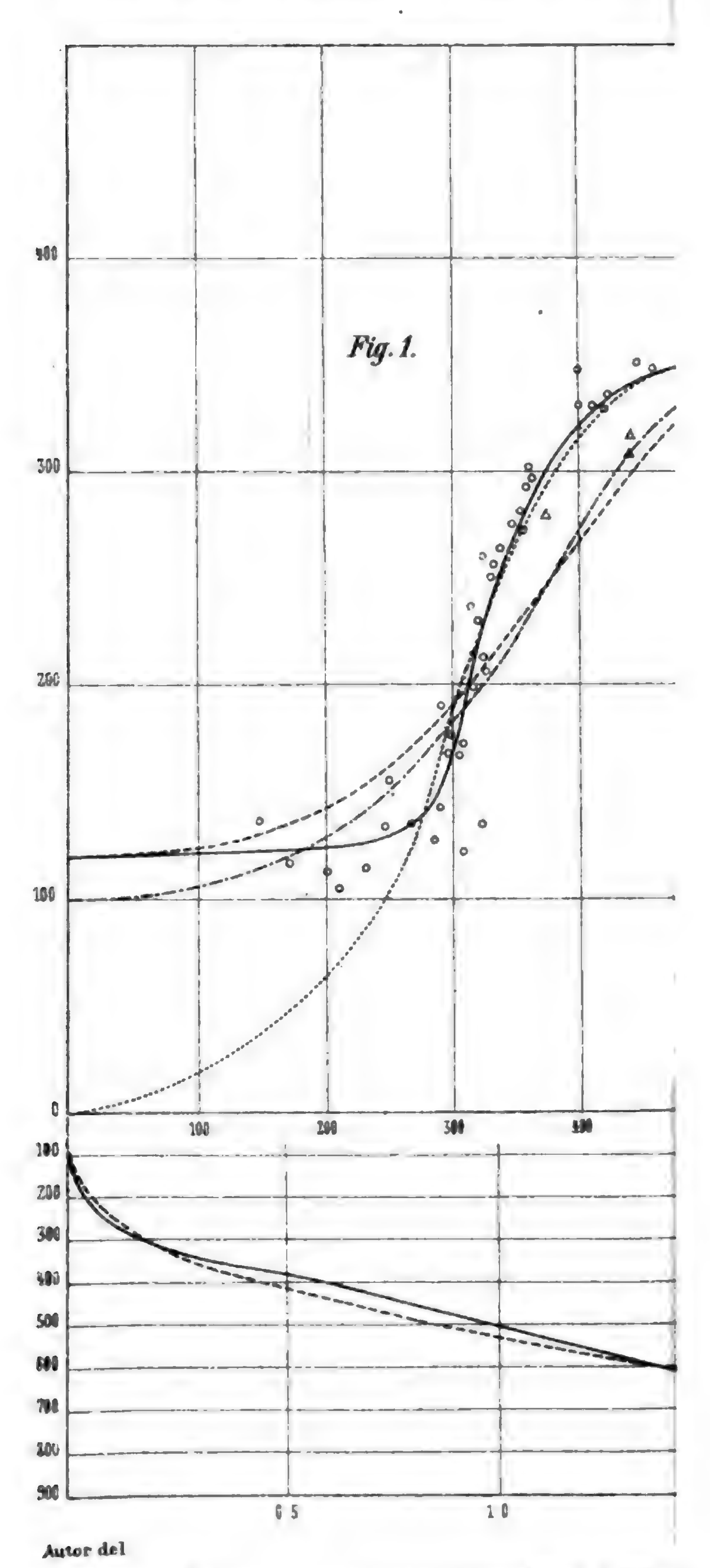


Fig. 1.

Autor del

Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht

von

P. Lenard,

Professor der Physik an der Universität Kiel.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1899.)

Die von Hertz entdeckte, von Herrn Hallwachs zuerst in vereinfachter Form gezeigte Wirkung des ultravioletten Lichtes, negative Elektricität von Körpern fortzutreiben, ist heute in vielen ihrer Einzelheiten erforscht. In ihren Mechanismus hat man insoweit einzudringen vermocht, als die Bahnen der entweichenden Elektricität im lufterfüllten und auch im luftverdünnten Raume festgestellt wurden.[1] Welches aber die Träger der Elektricität längs jener Bahnen seien, ist zweifelhaft geblieben.

1. Versuche über das »Zerstäuben der Körper durch ultraviolettes Licht«[2] haben die Möglichkeit gezeigt, dass wägbare materielle Theile des bestrahlten Körpers jene Träger seien. Dass indessen solche unmittelbare Auffassung der damaligen Versuchsergebnisse doch schwerlich zutreffend sei, haben mir besondere Versuche gezeigt, von welchen einer hier berührt sei.

Eine von Wasserstoffgas umgebene blanke Oberfläche von Natriumamalgam wurde so lange bestrahlt, dass $2 \cdot 9 . 10^{-6}$ Coulombs negativer Elektricität von derselben entwichen, und das elektrische Feld über dem Amalgam war so gestaltet, dass diese gesammte Elektricitätsmenge an einen reinen Platindraht

[1] Righi, Mem. della Reale Acad. di Bologna, (4), 9, p. 369, 1888 und Atti della Reale Acad. dei Lincei, 6 (2), p. 81, 1890.

[2] Lenard und Wolf, Wied. Ann., 37, S. 443, 1889.

getragen werden musste. Wären hier Natriumatome die Träger gewesen, so würde, dem als einzigen vorhandenen Anhalte hier massgebenden elektrochemischen Äquivalente des Natriums ensprechend, deren Gesammtmenge $0 \cdot 7 . 10^{-6}$ *mg* betragen haben; wären es grössere Theile von Natrium gewesen, noch mehr. Nun sind nach Bunsen weniger als $0 \cdot 3 . 10^{-6}$ *mg* Natriumsalz in der Flamme noch mit der grössten Deutlichkeit erkennbar. Wurde aber der Platindraht, welcher die Träger empfangen hatte, in der Flamme geprüft, so ergab er keine Spur von Natriumreaction.

2. Zu derjenigen anderen Auffassung, welche in der Überschrift dieser Arbeit angedeutet ist, führte mich der streng unipolare Charakter der lichtelektrischen Wirkung, wie er Zweifeln gegenüber besonders durch die Herren Elster und Geitel gesichert worden ist,[1] zusammen mit der Erkenntniss, dass Kathodenstrahlen wesentlich Träger negativer Ladungen seien.[2] Es bestärkte mich in dieser Auffassung, nach erfolglosen Versuchen, eine Bemerkung des Herrn Righi.

Derselbe findet,[3] dass die auf stark negativ geladene Körper ausgeübte entladende Wirkung des Lichtes in mehr und mehr verdünnter Luft zunächst zunehme bis zu einem Maximum, welches bei demjenigen Drucke eintritt, »unter welchem die Luft am leichtesten elektrische Ladung annimmt«, dass sie aber bei darüber hinausgehender Verdünnung wieder abnehme. Er findet ferner, dass die auf einem anfänglich unelektrischen Körper ausgeübte Wirkung des Lichtes, ihn durch Austreiben negativer Elektricität zu positiver Ladung zu bringen, mit zunehmender Verdünnung der Luft stets nur zunehme, und er fügt hinzu die Bemerkung: dass hiernach jene beiden Äusserungen der lichtelektrischen Wirkung offenbar nicht Folge einer einzigen Ursache seien.

Hier knüpfen die gegenwärtigen Versuche an. Wenn mehrere Vorgänge sich übereinander lagern, so wird man zunächst suchen müssen, einen derselben zu isoliren. Ich

---

[1] Elster und Geitel, Wied. Ann., 57, S. 24, 1896.

[2] Vergl. Wied. Ann., 64, S. 279, 1898.

[3] Righi, Atti della Reale Acad. dei Lincei, l. c.

strebte daher, die Erscheinung zunächst bei Ausschluss der Luft zu studiren, wobei freilich vor Allem zu entscheiden war, ob nicht beim Übergange zum äussersten Vacuum noch eine Umkehr mit schliesslichem Ausbleiben der Wirkung eintrete, wie dies bei den sonstigen Entladungserscheinungen wirklich der Fall ist.

3. Der benützte Apparat, ein zu evacuirendes Glasrohr mit eingeschmolzenen Elektroden, ist in Fig. 1 in halber Grösse

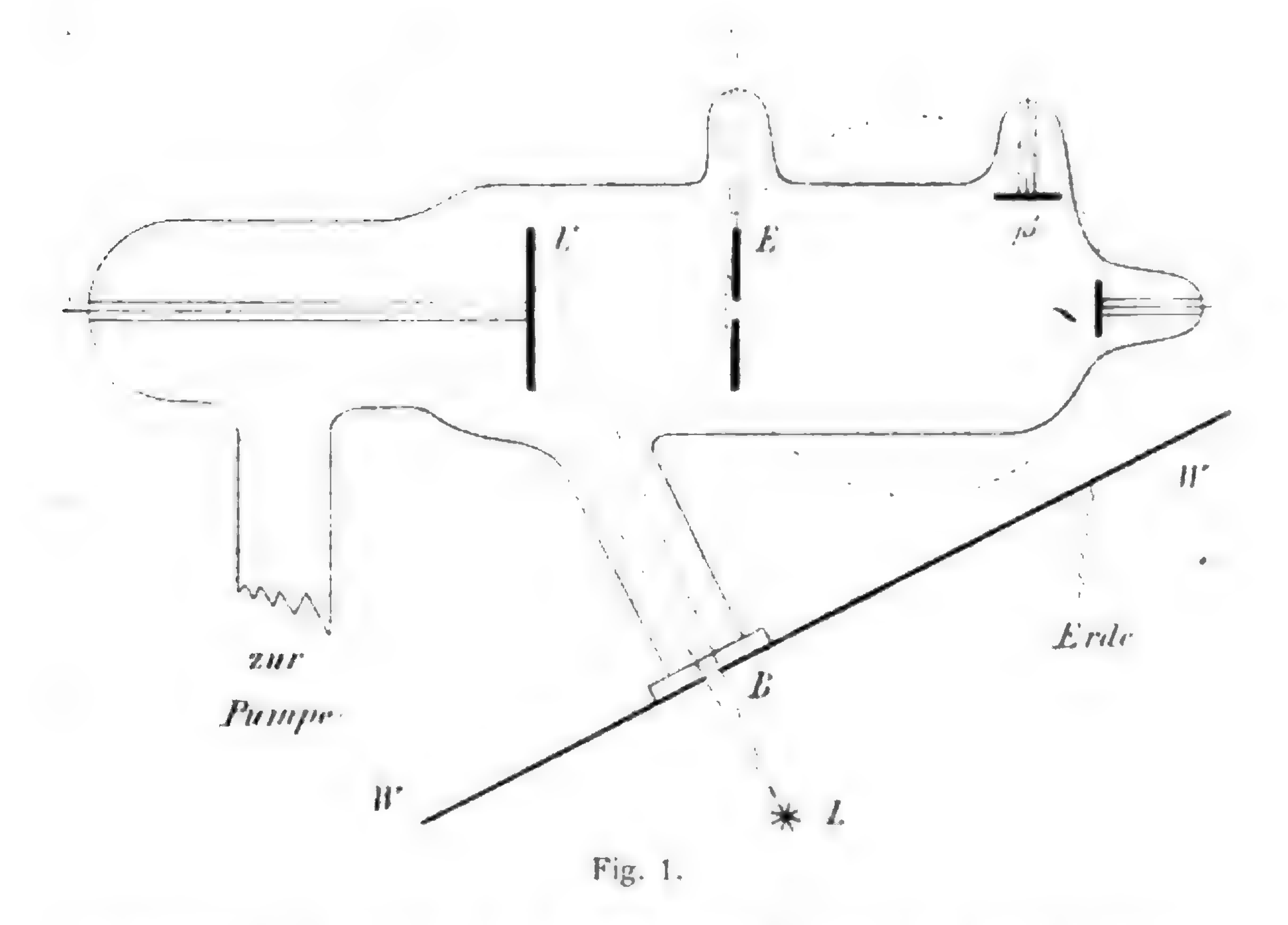


Fig. 1.

dargestellt. U ist die zu bestrahlende Elektrode, eine Scheibe aus blankem Aluminiumblech von 1·5 *cm* Radius. Von gleicher Grösse und demselben Material ist die zweite, der ersten parallel gestellte Elektrode E, welche stets als mit der Erde verbunden vorausgesetzt wird. Die 5 *mm* weite Öffnung in der Mitte von E, sowie die beiden überzähligen Elektroden α und β sind bei den ersten Versuchen (3, 4) noch nicht vorhanden. Die Lichtquelle L wird für gewöhnlich von der 15 *mm* langen Funkenstrecke eines grösseren, mit einer Leydener Flasche versehenen Inductoriums gebildet; die Funken springen zwischen Zinkdrähten über, was viel ultraviolettes Licht gibt. Eine

Blende *B* aus Stanniol, von 4 *mm* Weite, verhindert das Licht, andere Theile des Rohrinneren zu treffen als nur die Fläche der Elektrode *U*. Die Blende setzt sich seitlich fort in Blechwänden, in der Figur bei *WW'* angedeutet, welche das Rohr und die zu benützenden Messinstrumente vor den elektrischen Kräften der Lichtquelle schützen. Der Luftabschluss bei *B* wird durch eine 3 *mm* dicke Quarzplatte gebildet. Die Lichtquelle bleibt immer weiter als 4 *cm* von *B* entfernt.

Durch fortgesetztes Erhitzen und die Entladungen eines grossen Inductoriums bringen wir das Rohr dauernd in den Zustand, diese Entladungen nicht mehr durchzulassen, so dass sie aussen um das Rohr herum erfolgen. Die Quecksilberluftpumpe[1] befördert dann auch in stundenlangen Zwischenräumen keine sichtbaren Gasmengen mehr aus dem Rohr.

Verbinden wir nun *U* mit einem Elektroskope, so fallen dessen Blätter bei negativer Ladung doch augenblicklich zusammen, wenn *U* belichtet wird, und auch dann vermindert sich die Divergenz noch rasch, wenn eine Leydener Flasche mittlerer Grösse hinzugeschaltet ist. Positive Ladungen bleiben bestehen oder nehmen äusserst langsam ab.[2] Mit dem Quadrantelektrometer ist nachzuweisen, dass die ursprünglich ungeladene Elektrode unter dem Einflusse des Lichtes eine positive Ladung annimmt, die bis zu einer Grenze von etwa 2·1 Volt anwächst. Alle diese Erscheinungen bleiben vollständig aus, wenn ein dünnes Glimmerblatt zwischen die Lichtquelle und den Apparat geschoben ist. Kurz, es bleiben alle in Luft bekannten, charakteristischen Wirkungen des ultravioletten Lichtes auch im äussersten Vacuum bestehen, und zwar in auffallender Stärke. In quantitativer Hinsicht werden wir alsbald (4.) einen scharfen Unterschied constatiren zwischen der Wirkung hier und der in verdünnter Luft. Es sei auch bemerkt, dass Kühlen

---

[1] Es wurde die Raps'sche Pumpe benützt.

[2] Dies erwies sich von den Beleuchtungverhältnissen im Inneren des Rohres sehr abhängig; wurden ausser der Fläche von *U* noch andere Rohrtheile mitbelichtet, so konnte die Abnahme der positiven Ladung vergrössert werden. Da nun zerstreutes reflectirtes Licht auch unter normalen Verhältnissen beispielsweise die Elektrode *E* trifft, wird der oben erwähnte geringe Verlust von positiver Elektricität als scheinbar im Sinne der Herren Elster und Geitel (l. c.) zu erklären sein.

des zwischen Rohr und Pumpe befindlichen Phosphorsäuregefässes durch feste Kohlensäure und Äther die zu messenden Mengen der entweichenden Elektricität nicht weiter beeinflusste.

In Hinsicht der lichtelektrischen Wirkung scheint mir der Versuch zu lehren, dass dieselbe in erster Linie nichts zu thun hat mit der Luft. Ein weitergehendes Interesse des Versuches liegt dann aber darin, dass er Elektricität im aufs äusserte evacuirten Raume aufweist, welchen man nach früherer Kenntniss als derselben unzugänglich hätte bezeichnen müssen. Gleiches ist schon vorher, und zum ersten Male, an Kathodenstrahlen beobachtet worden, welche durch Gasentladung erzeugt waren,[1] und es ist bemerkenswerth, dass es in beiden Fällen nur die negative Elektricität ist, welche im äussersten Vacuum auftritt. Um auf diese Verhältnisse kurz Bezug nehmen zu können, werde ich die hier zu beobachtenden Elektricitätsmengen, welche, wie sich wieder zeigen wird, mit Trägheit begabt sind, und welche in Bewegung befindlich nach Früherem die Kathodenstrahlen ausmachen, im Folgenden mit dem besonderen Namen Quanten bezeichnen.

4. Eine Messung der Mengen der durch das Licht ins Vacuum getriebenen Elektricität wurde dadurch bewerkstelligt, dass man sie vor dem Eintritt in die Elektrode U durch einen sehr grossen, an diese Elektrode geschalteten Widerstand fliessen liess und die Potentialdifferenz an den Enden dieses Widerstandes mass, letzteres nach Bedürfniss mit dem Exner-schen Elektroskop oder dem Quadrantenelektrometer. Dieses messende Instrument und der aus Leinenfaden oder Graphit hergestellte Widerstand befanden sich dabei in einer leitenden, von der Erde isolirten Hülle, welcher die negative Elektricität in gemessener Spannung zugeführt wurde.[2] Die Differenz dieser letzteren Spannung und der zwischen den Enden des Widerstandes beobachteten ist das Elektrodenpotential in der folgenden Tabelle; daneben stehen die nach dem Ohm'schen Gesetz gerechneten Mengen.

---

[1] Vergl. Wied. Ann., 64, S. 279, 1898.

[2] Über die Ausführung der Spannungsmessung siehe S. 1658 u. 1659. Die Widerstände wurden durch die Entladungszeiten ausgemessener Capacitäten bestimmt.

Tabelle I.

Potential der bestrahlten Elektrode	Entwichene Elektricitätsmenge
—45000 Volt[1]	$24 \cdot 5 . 10^{-10} \frac{\text{Coul.}}{\text{sec.}}$
—25000	26·6
— 8900	22·5
— 4100	24·8
— 3110	24·5
— 1300	24·5
— 500	23·4
— 120	21·9
— 14	19·9
— 9	15·9
— 1	7
0	4
+ 1	4
+ 2·1	0

Betrachten wir zuerst den obersten Theil der Tabelle, so sehen wir, dass die in der Zeiteinheit entweichenden Elektricitätsmengen innerhalb sehr weiter Grenzen unabhängig sind von der vorhandenen Spannung. Im zweiten Theile der Tabelle dagegen, nämlich unterhalb einer Spannung von etwa 100 Volt, nehmen die entladenen Mengen mit weiter sinkender Spannung deutlich ab. Es ist dies ein unmittelbar nicht verständliches Verhalten; denn wenn die äussere Spannung wirklich Einfluss hätte auf den Vorgang der Ausstrahlung aus der Elektrode, so müsste dies am deutlichsten bei den höchsten Spannungen sich zeigen; dies ist aber durchaus nicht der Fall. Die Erklärung, welche ich mir gebildet habe, ist diese, dass bei nicht genügender äusserer Spannung zwar nicht die Ausstrahlung eine verminderte ist, dass aber dann ein Theil der schon aus-

[1] Selbst bei dieser Spannung war ohne Licht ein Entweichen von Elektricität in meinen Versuchen nicht bemerkbar.

gestrahlten Quanten durch deren eigene Kräfte wieder zur Elektrode zurückgeht. Dass dies in unseren Versuchen schon von 100 Volt abwärts eintritt, hängt mit der Besonderheit der angewandten Lichtquelle zusammen, während ausserordentlich kurzer Zeit ausserordentlich grosse Intensität zu besitzen. Hierauf soll indessen hier nicht weiter eingegangen werden; wir begnügen uns, die in unseren Versuchen schliesslich und bleibend entwichenen Mengen zu weiterer Verwendung verzeichnet zu haben. Bemerkt sei noch das im dritten Theile der Tabelle nachgewiesene, unmittelbar verständliche Herabsinken der entwichenen Mengen zu Null, wenn die äusseren Spannungen positiv, also der Fortbewegung der ausgestrahlten Quanten entgegenwirkend sind (vergl. 8.). Die Spannung +2·1 Volt, zu welcher die Menge Null gehört, ist dieselbe, welche bei anfänglich unelektrischer Elektrode durch Bestrahlung von selber sich einstellt (3.).

Zum Vergleiche des Verhaltens im Vacuum mit dem in Luft von verschiedener Verdünnung mögen die folgenden Resultate einer zu diesem Zwecke unternommenen, zusammenhängenden Versuchsreihe an unserem Apparate hier Platz finden.

Tabelle II.

Potential der bestrahlten Elektrode	Luftdruck in Millimetern Quecksilber						
	0	0·002	0·03	0·7	20	209	760
Volt, negativ	Entwichene Elektricitätsmengen. Coulomb 10^{-10}/Sec.						
300	20·2	21·6	47	3·4	0·62	0·12	<0·05
4000	20·3	26·2	—	—	40	1·41	0·42
10000	20·2	28·2	—	—	—	—	0·93

Striche in der Tabelle zeigen an, dass die betreffende Spannung von der Luft im Rohre nicht mehr ertragen wurde.

Man sieht, dass die Constanz der Ausstrahlung nur beim Drucke Null zu finden ist. Selbst bei 0·002 *mm* Luftdruck, und noch mehr bei den höheren Drucken, wächst die entwichene Elektricitätsmenge mit zunehmender Spannung sehr deutlich.

welches letztere in der That auch das Resultat der bisher über den Gegenstand vorliegenden Versuche war. Wir kommen auf das Verhalten der Luft am Schlusse (9.) zurück.

5. Bei der Frage nach dem Wege, welchen die von U ausgehenden Quanten nehmen, können wir wieder an Herrn Righi's umfassende Arbeiten anknupfen, welche zeigen, dass in gewöhnlicher Luft diese Wege durch die Kraftlinien des elektrischen Feldes gegeben sind, bei fortschreitender Verdunnung der Luft aber mehr und mehr geraden Linien sich nahern.[1] Wir fragen nun, ob es dabei, im Vacuum, auch zur Bildung abgesonderter Strahlen kommen kann. Die Öffnung in der Elektrode E (vergl. Fig. 1) und die Nebenelektroden α und β kommen jetzt zur Anwendung. Ist U genügend geladen, etwa auf -30000 Volt, ungefähr 1 *cm* Funkenlänge entsprechend, so beobachtet man an einem mit α verbundenen Exner'schen Elektroskop eine mit der Belichtung einsetzende und langsam anwachsende Divergenz von negativem Zeichen. Es dringt also die Elektricität über E hinaus bis zu α hin. Dass sie dabei nicht den ganzen Querschnitt des Rohres erfüllt, zeigt sich dadurch, dass an der seitlichen Elektrode β eine Divergenz nicht zu erhalten ist; offenbar bilden die Quanten einen Strahl, welcher, durch die Öffnung von E kommend, nach α hingeht.

Wir finden dies bestätigt, wenn wir den vermuthlichen Strahl auf seine zu erwartende magnetische Ablenkbarkeit prüfen. Es ist dazu ober-, sowie unterhalb des Rohres, dicht an demselben, je eine Drahtspule angebracht; die gemeinsame Axe der Spulen steht senkrecht, ihre Windungen erscheinen in der Fig. 1 als punktirter Kreis. Fliesst nun durch die Spulen ein elektrischer Strom von passender Stärke, so gerichtet, dass er einen mit unserem Strahl zusammenfallenden Kathodenstrahl gegen β hin lenken würde, so erhalten wir die negativen Divergenzen des Elektroskopes nunmehr an β, während sie an α ausbleiben, um dort sofort wieder zu erscheinen, wenn der Strom geöffnet wird.

Das Verhalten ist also genau dasjenige, welches zu erwarten wäre, wenn von U Kathodenstrahlen ausgingen. Jedoch

[1] R[illegible], Wied. [illegible]

ist es nicht möglich, durch gewöhnliche Anwendung von elektrischer Kraft allein in unserem aufs äusserste evacuirten Rohre Kathodenstrahlen zu erzeugen;[1] es ist vielmehr erst das ultraviolette Licht das Mittel, diese Erzeugung nun auch im vollständigen Vacuum zu ermöglichen, und zwar, nach der in Tabelle I enthaltenen Auskunft, nicht nur bei grosser, sondern auch bei beliebig geringer äusserer Spannung. Als unmittelbarer Ursprung der Quanten unseres Strahles wäre die belichtete Elektrode zu bezeichnen, während im gewöhnlichen Entladungsrohre das dort unentbehrliche Gas es zu sein scheint.

6. Zum quantitativen Studium der magnetischen Ablenkbarkeit unserer Strahlen benützen wir an Stelle des Elektroskopes das Quadrantelektrometer, welches ebenfalls nach Bedarf an α oder β geschaltet werden kann. Von der in schützenden Metallhüllen laufenden Leitung zum Instrument führt eine Nebenleitung durch einen grossen Graphitwiderstand zur Erde. Es wird dadurch das Auftreten störender Potentialdifferenzen in dem Raume zwischen E, α und β vermieden, zugleich die Messung der von α, beziehungsweise β aufgenommenen Elektricitätsmengen ohne Zeitbeobachtung unmittelbar durch den bald sich einstellenden constanten Elektrometerausschlag ermöglicht. Die Aussenwand des Rohres ist für das Folgende von E ab über α und β hin mit einer Stanniolhülle überzogen, aus welcher nur die Zuleitungsdrähte der beiden letzteren Elektroden isolirt ausmünden; die Hülle, sowie die jedesmal unbenützte Elektrode sind mit der Erde verbunden. An die zu belichtende Elektrode U sind zwei grosse Leydener Flaschen geschaltet, um ihre Spannung constant zu halten. Nachdem nun diese Spannung auf das gewünschte Maass gebracht ist, wird der Versuch in der Weise durchgeführt, dass zu einer Reihe von verschiedenen Stromstärken in den Drahtspulen die zugehörigen Elektrometerausschläge gemessen werden, und zwar sowohl an α wie an β.[2]

---

[1] Wenigstens nicht durch Kräfte, welche das Glas des benützten Rohres dauernd zu ertragen vermöchte; vergl. Anm. zu Tab. I.

[2] Zu bemerken ist, dass bei diesen Versuchen eine zwischen L und B gestellte Quarzlinse das ultraviolette Licht auf die Mitte der Elektrode U concen-

Die Figur 2 gibt das Resultat eines solchen Versuches in graphischer Darstellung und damit zugleich ein Bild von der Begrenzung des Strahles. Die zur Stromstärke Null nahezu symmetrische Curve der durch Kreise bezeichneten Punkte bezieht sich auf die Elektrode α, die andere Curve auf β. Die Lage der in der Figur punktirten Symmetrieaxe dieser letzteren Curve und damit denjenigen Strom zu ermitteln, welcher die Axe des Strahles zur Mitte der Elektrode β lenkt, war das Ziel jedes solchen Versuches. Die zweite und dritte der in der Tabelle III angegebenen Stromstärken J sind Mittelwerthe

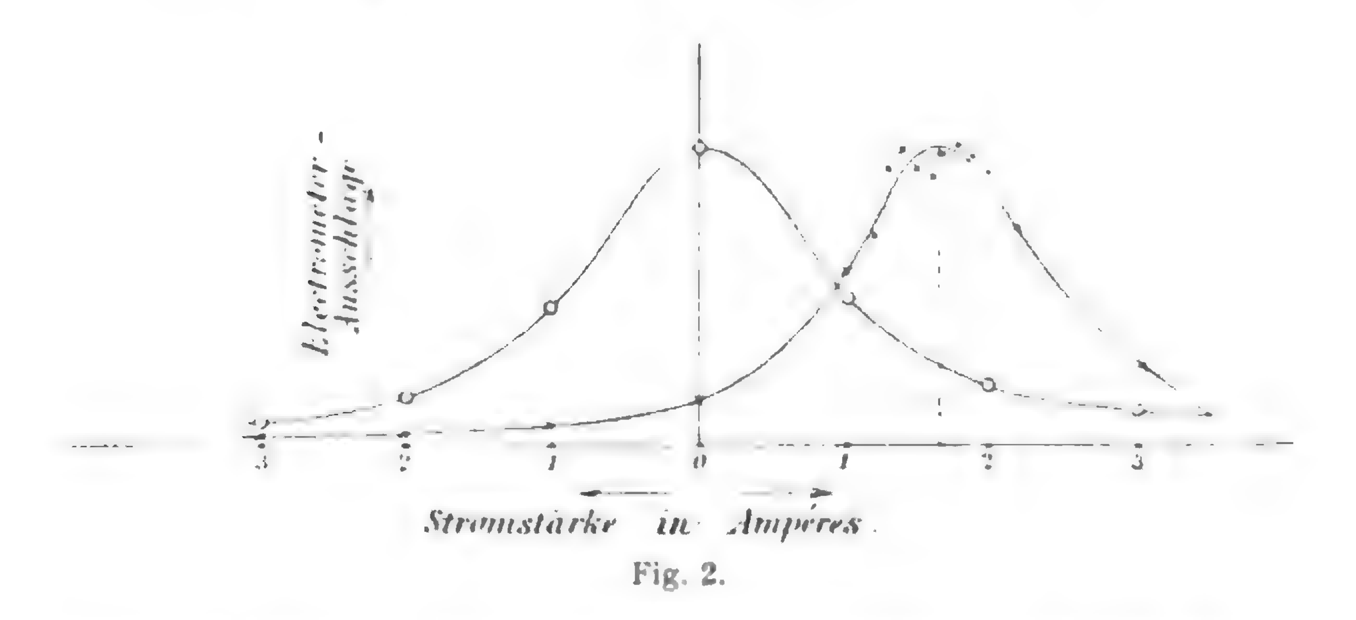


Fig. 2.

solcher graphisch ausgeführter Bestimmungen. Die erste, zum kleinsten Potential von U gehörige Stromstärke konnte nur durch rasches Variiren des Stromes bei gleichzeitiger Elektrometerbeobachtung aufgesucht werden, denn es musste wegen der bei dieser geringen Spannung eintretenden Schwäche des Strahles das Funkenlicht durch das intensivere Zinkbogenlicht[1] ersetzt werden, welches letztere aber von sehr schwankender Intensität ist. Die in der ersten Spalte der Tabelle verzeichneten Spannungen der Elektrode U waren während der Versuche durch die Divergenzen geeigneter Elektroskope festgehalten. Die Aichung der Elektroskope ergab die höchste, beziehungsweise die mittlere angewandte Spannung einer Schlagweite

traf, dort eine verwaschen begrenzte Ellipse von etwa 10 *mm* mittlererem Durchmesser beleuchtend (Vergl. 8).

[1] Righi, Mem. della Reale Acad. die Bologna, (4) 9, p. 379, 1888.

von 3·40, beziehungsweise 0·880 *mm* entsprechend. gemessen zwischen blanken Kugeln von 1·0, beziehungsweise 0·7 *cm* Radius, woraus die zugehörigen Werthe P der Tabelle folgen. Das für die geringste Spannung benützte Elektroskop wurde durch elektrostatische Versuche unter Vermittelung grosser Capacitäten an Funkenlängen nach oben und an die durch Ströme messbaren Spannungen nach unten angeschlossen; der so hergestellten Aichungscurve ist die erste Zahl P entnommen.

Tabelle III.

Potential P der bestrahlten Elektrode	Ablenkender Strom J	$\frac{P}{J^2}$	$\frac{\varepsilon}{\mu}=\frac{P}{J^2}\frac{2}{H_1^2R^2}$	$v=\frac{2P}{H_1RJ}$
C. G. S. (magn.)	Ampère		$cm^{\frac{1}{2}}\,g^{-\frac{1}{2}}$	$cm\ sec.^{-1}$
607.10^8	0·65	144.10^9	$11·7.10^6$	$0·12.10^{10}$
4380 »	1·78	138	11·2	0·32
12600 »	2·94	146	11·8	0·54

Mit den so gewonnenen Daten prüfen wir nun quantitativ die Annahme, dass die durch das Licht mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in Bewegung gesetzten Quanten unseres Strahles sich verhalten wie die Quanten eines Kathodenstrahles. dass sie also erstens im homogenen elektrischen Felde mit der Potentialdifferenz P beschleunigt werden zu der Geschwindigkeit v nach der Gleichung

$$v^2-v_0^2 = 2\frac{\varepsilon}{\mu}P.$$ [1]

[1] Eine besondere Prüfung dieser Beziehung an Kathodenstrahlen habe ich früher durchgeführt (Wied. Ann., 65, S. 504 1898). Nachträglich zu dieser Arbeit sei mir gestattet, auf damals schon veröffentlichte, aber mir unbekannt gewesene Beobachtungen Herrn Des Coudres' aufmerksam zu machen (Verh. Phys. Ges., Berlin 17, S. 17, 1898), in welchen eine Beeinflussung der Strahlen durch ihnen parallele elektrische Kraft nachgewiesen und auch im Sinne obiger Gleichung schon gedeutet wird. Ebenfalls nahe gleichzeitig hat Herrn Wiechert's experimentelle Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Kathodenstrahlen den Gegenstand in ein neues Stadium gerückt (Gött. Nachr., Math.-Phys. Classe, 1898, S. 260).

und dass sie zweitens im quergestellten Magnetfelde H den Krümmungsradius

$$R = \frac{v}{H} \cdot \frac{\mu}{\varepsilon}$$

annehmen. Da wir H nach dem Strom J beurtheilen, setzen wir $H = H_1 . J$, wo dann H_1 das beim Strom 1 Ampère bestehende Feld bedeutet.

Wir fügen noch die besondere Annahme einer sehr kleinen Anfangsgeschwindigkeit hinzu, setzen also $v_0 = 0$. Es folgt dann

$$\frac{P}{J^2} = \frac{1}{2} H_1^2 R^2 \frac{\varepsilon}{\mu} = \text{Constans},$$

eine Beziehung, welche durch die dritte Columne der Tabelle III bestätigt wird. Es findet also die Gesammtheit unserer Annahmen keinen Widerspruch. Über die wirkliche Grösse der Anfangsgeschwindigkeit werden wir später Auskunft erhalten (8.).

7. Zur Berechnung des Dichtenverhältnisses ε/μ und der Geschwindigkeit v ist neben P/J^2 noch die Kenntniss von H_1 und R erforderlich, zweier zusammengehöriger Werthe von Feld und Radius, die übrigens auf jeden beliebigen Punkt der Bahn des Strahles zwischen E und β sich beziehen können. Da nun dieser ganze Theil der Bahn wegen der dort nahezu gleichförmigen Stärke des Feldes nahezu kreisförmig sein wird, wählen wir das mittlere Feld und den dazugehörigen mittleren Krümmungsradius zwischen E und β.

Das Magnetfeld in der Ebene des Strahles wurde durch die Schwingungen einer sehr kleinen, stark magnetisirten, mit Blei beschwerten Nadel untersucht. Folgendes sind die beobachteten Schwingungsdauern:

Entfernung von der Axe der Rollen	0	1	2	3	4	5 *cm*
Schwingungsdauer bei 1 Ampère Strom	1·08	1·11	1·23	1·51	2·21	4·15 sec.

Bei 6 und 7 *cm* axialer Entfernung wich die Ruhelage der Nadel schon sehr ab von der senkrecht zum Meridian gestellten

Richtung der Rollenaxe, das Magnetfeld war also an diesen Stellen schon von der Ordnung des Erdfeldes und also für unseren Zweck ausser Betracht. Die Elektrode E stand 3·0 *cm*, die Elektrode U 6·6 *cm* von der Rollenaxe ab. Das centrale Magnetfeld wurde aus den Ausmessungen des sehr regelmässig gestalteten Rollensystems zu 16·0 C. G. S. für den Strom 1 Ampère berechnet. Hiernach ergibt sich mit Hilfe der Schwingungsdauern das mittlere Magnetfeld zwischen E und β, $H_1 = 13{\cdot}0$ C. G. S.

Der mittlere Krümmungsradius auf derselben Strecke ist der Radius eines Kreises, welcher durch die Centren von E und β geht und dessen Richtung bei E gegeben ist. Fiele diese Richtung genau in die gemeinsame Axe von U und E, so würde der Radius nach den am Rohre vorgenommenen Ausmessungen 8·7 *cm* betragen. Indessen der Strahl ist schon vor seinem Durchtritte durch E dem, wenn auch schwachen Rande des Magnetfeldes der Rollen ausgesetzt, er wird daher schon unter einem kleinen Winkel zu jener Axe gegen β hin geneigt durch E kommen, was den wirklichen Krümmungsradius vergrössert. Der Winkel ergibt sich aus unseren Gleichungen zu $\frac{\sqrt{\sigma}}{H_1 R} \cdot \int_0^{\sigma} \frac{H\,ds}{\sqrt{s}}$, wo σ die Entfernung von U bis E, was mit dem obigen angenäherten Radius nach graphischer Ermittelung des Integrales berechnet, 5° 12′ ausmacht. Der corrigirte Radius ist dann $R = 12{\cdot}1$ *cm*.

Die nunmehr berechenbaren Werthe von ε/μ sind in die vierte Spalte der Tabelle III eingetragen. Dieselben weichen ab von dem früher an Kathodenstrahlen von mir erhaltenen Werthe $6{\cdot}4 . 10^6$.[1] Zwingender Grund, diese Abweichung als wirklich zu betrachten, ist freilich nicht vorhanden; die damaligen, wie auch die gegenwärtigen Versuche waren nicht zum Zwecke der Messung von vornherein eingerichtet, noch konnten sie dies zu ihrer Zeit auch sein.[2] Umsomehr schien es mir von

[1] Wied. Ann., 64, S. 287, 1898 und 65, S. 508, 1898.

[2] Solange noch unverstandene Nebenerscheinungen im Spiel sind, ist exacte Messung überhaupt nicht möglich. Als eine Nebenerscheinung dieser Art bei den gegenwärtigen Versuchen möchte ich die in Fig. 2 ebenfalls sichtbare,

Interesse, einen unmittelbaren Vergleich auszuführen zwischen den durch Licht und den durch Gasentladung erzeugten Strahlen. Es wurden dazu in das benützte Rohr geeignete Luftmengen eingelassen und die Elektrode U mit der Influenzmaschine verbunden. Der entstehende, hier recht scharf begrenzte Phosphorescenzfleck deckte nahezu die Elektrode α; die Ströme, welche ihn zur Deckung mit β brachten, waren $J = 1 \cdot 7$, beziehungsweise $2 \cdot 5$ Ampère bei den Spannungen $P = 3300$, beziehungsweise $9300 \cdot 10^8$ C.G.S., was $P/J^2 = 114$, beziehungsweise $149 \cdot 10^9$ ergibt, in guter Übereinstimmung also mit dem an unseren Strahlen Gefundenen (vergl. Tabelle III, Columne 3). Entscheidend ist dies freilich ebenfalls nicht, denn gegen Versuche der letzteren Art ist einzuwenden, dass sie nicht rein sind, weil inmitten von störendem Gas angestellt, und ausserdem dass es noch zweifelhaft ist, ob hier mit Recht die ganze Potentialdifferenz der Elektroden in Rechnung gesetzt wird, wo dieselbe nicht nur die Beschleunigung, sondern auch die Erzeugung der Strahlen zu bewirken hatte. Die Frage nach der Constanz des Dichtenverhältnisses ε/μ scheint mir zur Zeit noch offen zu sein.[1]

Die Strahlgeschwindigkeiten v in der letzten Spalte der Tabelle III zeigen, dass wir es hier zum Theil mit langsameren Strahlen zu thun hatten, als je vorher zur Untersuchung kamen. Die Geschwindigkeit der Strahlen, welche unter dem Einflusse der Potentialdifferenz 607 Volt entstanden — entsprechend mittelgrosser Divergenz eines gewöhnlichen Elektroskopes —, ist etwa $^1/_{30}$ der Lichtgeschwindigkeit. Dass diese Strahlen keine Phosphorescenzwirkung auf der Glaswand des Rohres hervorbrachten, ist nicht zu verwundern. Erklärlich ist es ebenfalls, dass auch viel schnellere Strahlen, unter Anwendung sehr hoher Spannung erzeugt, in meinen Versuchen unsichtbar blieben; denn früher von mir beobachtete Kathodenstrahlen, welche Elektricitätsmengen von gleicher Grössenordnung

---

manchmal aber viel ausgesprochener auftretende Zweitheilung des Maximums der Ablenkungscurven nennen. Was mögliche Fehler bekannten Ursprungs anlangt, möchte ich den gegenwärtigen Versuchen vor den früheren den Vorzug geben.

[1] Man vergl. auch A. Schuster, Wied. Ann. 65, S. 877, 1898.

trugen, waren auf Glas nur im völlig verdunkelten Zimmer sichtbar; in den gegenwärtigen Versuchen war jedoch unvermeidlich viel zerstreutes, erregendes Licht vorhanden. Aussichtsvoll dürfte hier die Anwendung geeigneter Phosphorescenzschirme sein.

8. Noch einige weitere Schlüsse sind aus den gemachten Beobachtungen zu ziehen. Zunächst sehen wir in der Schwäche des oben bei 607 Volt erhaltenen Strahles (vergl. 6.) ein Zeichen, dass die Ausstrahlung von der belichteten Oberfläche nicht in normaler Richtung allein, wie in einem Entladungsrohre, sondern diffus nach allen Richtungen hin erfolge; denn aus Tabelle I ersehen wir, dass bei dieser Spannung noch immer dieselbe Elektricitätsmenge zur Ausstrahlung kommt wie bei den höheren Spannungen, welche aber viel intensivere Strahlen hinter dem Diaphragma E gaben. Der Intensitätsunterschied ist erklärt, wenn die Ausstrahlung nach allen Richtungen hin erfolgt; es werden dann unter dem Einflusse des elektrischen Feldes zwischen U und E die Strahlen um so näher einer gemeinsamen normalen Richtung zugebogen, also umso mehr Strahlen auch durch die Öffnung in E gelenkt, je höher die Spannung ist. Auch die Nothwendigkeit, bei Anwendung geringer Spannungen Belichtung des Randes von U zu vermeiden, wenn reine Strahlen hinter E sich zeigen sollten (vergl. Anmerkung S. 1657), wird durch diffuse Ausstrahlung erklärt, denn solche würde, wenn nicht durch starke Kräfte unschädlich gemacht, die Strahlung über den äusseren Rand von E greifen lassen.

Mit der diffusen Ausstrahlung hängt auch das Bestehen einer endlichen Anfangsgeschwindigkeit zusammen. Um über die Grösse derselben in unseren Versuchen eine Vorstellung zu erlangen, verband ich U und E leitend miteinander und mit der Erde, so dass elektrische Kräfte zwischen ihnen, wenigstens zu Anfang der Ausstrahlung, nicht bestanden. Zugleich waren zwei Stromrollen jetzt so an dem Rohre aufgestellt, dass die Strecke zwischen U und E in deren centralem Felde lag. Die Rollen waren mit ihrer gemeinsamen Axe in die Inclinationsrichtung gestellt, so dass das erdmagnetische Feld bei passend gewähltem Strome compensirt werden konnte, um zunächst zu sehen, ob etwa dieses Feld einen Einfluss auf die Aus-

strahlung hatte.[1] Letzteres war nun allerdings nicht der Fall: die Quantität der entweichenden Elektricität (4.) war mit und ohne Erdfeld nicht deutlich verschieden. Wurde jedoch das Magnetfeld zwischen U und E mehr und mehr verstärkt, so trat, etwa beim Felde 6 C. G. S. eine deutliche Verminderung der entweichenden Menge ein (beim noch stärkeren Felde 16 C. G. S. war fast die ganze Ausstrahlung unterdrückt).[2] Wir deuten dies Verhalten folgendermassen. Die ohne äussere elektrische Kraft mit gleichbleibender Geschwindigkeit nach allen Richtungen vom belichteten Centrum (vergl. Anmerkung S. 1657) der Elektrode sich wegbewegenden Quanten verfolgen im bestehenden homogenen Magnetfelde Kreise, beziehlich Schraubenlinien. Der Radius dieser Bahnen wird kleiner bei wachsendem Magnetfelde. Bei genügend angewachsenem Felde wird es zum ersten Male eintreten, dass eine der Bahnen auf keinen Körper der Umgebung mehr trifft, sondern zur Fläche der Ausgangselektrode zurückbiegt, und dies ist der Anfang des magnetischen Einflusses auf die entweichende Quantität.[3] Der Durchmesser der ersten zurückkehrenden Bahn ist nach den Verhältnissen unseres Apparates von der Ordnung der Entfernung $UE = 3 \cdot 6$ *cm*, und er gehört zum Felde 6 C. G. S., was die gesuchte Geschwindigkeit v_0 zu rund 10^8 *cm*/sec. ergibt.

Zum gleichen Ziele gelangt man, wenn man den Stillstand des Entweichens im elektrischen Felde betrachtet, welcher eintritt, wenn das Potential von U positiv etwa gleich $2 \cdot 1$ Volt ist (Tabelle I). Fasst man den Vorgang so auf, dass jenes Potential P eben genügt, alle nach allen Richtungen von der belichteten Stelle weg mit der Geschwindigkeit v_0 ausgeworfenen Quanten wieder zur Elektrode zurückzubringen, ehe sie einen Körper der Umgebung getroffen haben, so kann man diese Geschwindigkeit angenähert nach der Gleichung berechnen

[1] Der die belichtenden Funken erzeugende Inductionsapparat war bei den massgebenden Versuchen in 6 *m* Entfernung vom Rohre aufgestellt.

[2] Es ist dies die von den Herren Elster und Geitel (Wied. Ann., 41, S. 166, 1890) und Righi (Atti, l. c.) gleichzeitig entdeckte Erscheinung.

[3] Eine, soweit ich aus einer vorliegenden vorläufigen Notiz sehen kann, gleiche Auffassung des hemmenden magnetischen Einflusses ist jüngst von Herrn J. J. Thomson veröffentlicht worden (Phys. Zeitschrift, October 1899).

$v_0 = \sqrt{2P\varepsilon/\mu}$, denn die genügend leitende Glaswand des Rohres wird, wie E, Erdpotential haben. Es ergibt dies ebenfalls v_0 nahe 10^8 *cm*/sec.

Eine Anfangsgeschwindigkeit von solcher Grösse konnte in unseren Ablenkungsversuchen (6.) sehr wohl unbemerkt bleiben, denn sie beträgt nur $^1/_{10}$ der geringsten dort vorkommenden Endgeschwindigkeit; ein Fehler von $^1/_{100}$ in den Versuchsdaten würde also genügen, sie völlig zu verdecken.

9. Wir haben bisher ausschliesslich die Erscheinungen im Vacuum betrachtet. Die hier gewonnenen Resultate bringen jedoch von selber nothwendige Folgen mit sich für den Fall des Vorhandenseins eines Gases. Es mögen dieselben hier angedeutet werden; sie scheinen mir mit schon Bekanntem gut zusammenzutreffen. Die von der belichteten Fläche ausgehenden Kathodenstrahlen werden von dem Gase absorbirt werden und dabei ihre Ladungen an dasselbe abgeben; von da ab führt das so geladene Gas die Elektricität weiter in denjenigen Bahnen und mit denjenigen verhältnissmässig sehr geringen Geschwindigkeiten, welche Herr Righi gefunden und auch im Sinne des geladenen Gases aufgefasst hat. Ist der Druck des Gases nicht sehr klein, so wird der Elektricitätstransport in Form von Kathodenstrahlen auf eine sehr dünne Schicht in Nachbarschaft der belichteten Oberfläche beschränkt sein, denn der geringen Anfangsgeschwindigkeit (8.) der ausgesandten Strahlen entspricht grosse Absorbirbarkeit[1] derselben. Bei geringem Druck wird jene Grenzschicht eine dem geringeren Absorbtionsvermögen des Gases[1] entsprechende grössere Dicke annehmen, sie wird dadurch der Beobachtung mehr zugänglich werden.[2] Die von Herrn Righi bei geringen Gasdrucken gefundene diffuse Ausbreitung der Ladungen von der belichteten Stelle aus,[3] welche dieser Forscher allerdings aus der Bewegung der Gasmoleküle erklärt, möchte danach

---

[1] Vergl. Wied. Ann., 56, S. 255, 1895.

[2] In der That kündigt Herr J. J. Thomson in der citirten Notiz Beobachtungen an, welche die lichtelektrische Entladung innerhalb jener Grenzschicht eines verdünnten Gases betreffen und diese als Kathodenstrahlung aufzufassen erlauben.

[3] Righi, Atti, l. c.

identisch sein mit der hier gefundenen diffusen Kathodenausstrahlung (8.).

Complicirend muss bei dem Vorhandensein eines Gases noch hinzutreten das Leitvermögen, welches dem Gase durch die Kathodenstrahlen bei deren Absorption ertheilt wird;[1] es wird dadurch der bestrahlte Körper mit einer negativ geladenen und zugleich leitenden Atmosphäre umgeben. Dadurch wird erstens verständlich, dass beim Vorhandensein von Gas die in der Zeiteinheit entladene Elektricitätsmenge mit zunehmender Spannung wächst, und zweitens auch, dass im Gas überhaupt noch grössere Elektricitätsmengen entladen werden können als im Vacuum (4, Tabelle II). Auch die bei hohem Gasdrucke wieder eintretende Verminderung der Entladung widerstrebt der Erklärung nicht; Schwierigkeiten scheint indess der Fall des ursprünglich positiv geladenen Körpers in Luft zu bieten, doch mangelt zur Beurtheilung dieses Falles zur Zeit genügende Kenntniss der Eigenschaften der durch Kathodenstrahlen in geladenen und leitenden Zustand versetzten Gase.

---

[1] Vergl. Wied. Ann., 51, S. 240, 1894.

Über ein Problem der Potentialtheorie

von

Dr. Fritz Hasenöhrl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. November 1899.)

Das Problem, das Potential im ganzen Raume zu bestimmen, wenn sich dasselbe auf der Oberfläche von zwei, sich ausschliessenden Kugeln auf eine gegebene Function der Oberflächencoordinaten dieser Kugeln reducirt, ist von William Thomson (Lord Kelvin) mit Hilfe seiner Theorie der elektrischen Bilder oder der reciproken Radii vectores gelöst worden. Und zwar ergibt sich das Resultat in sehr eleganter Form nach Kugelfunctionen dipolarer Coordinaten geordnet.[1]

In dem Folgenden habe ich versucht, dasselbe Problem nach einer anderen Methode zu behandeln, deren Grundgedanke auch in der bekannten Methode von Murphy liegt und die gewissermassen als Durchführung der letzteren betrachtet werden kann. Das Resultat meiner Arbeit ist die Darstellung des Potentiales durch eine unendliche Doppelreihe von Functionen rechtwinkliger Coordinaten, ist also complicirter als das Thomson'sche, welche das Potential in Gestalt einer einfachen unendlichen Reihe gibt.

Dagegen ist es vielleicht ein Vortheil der hier angegebenen Formel, dass sie sich leicht auf specielle Fälle (auf den Fall zweier leitenden Kugeln zum Beispiel) anwenden lässt, was beim Thomson'schen Resultate nicht der Fall ist, da die Entwicklung auch der einfachsten Functionen nach Kugelfunctionen dipolarer Coordinaten sehr mühsam ist.

---

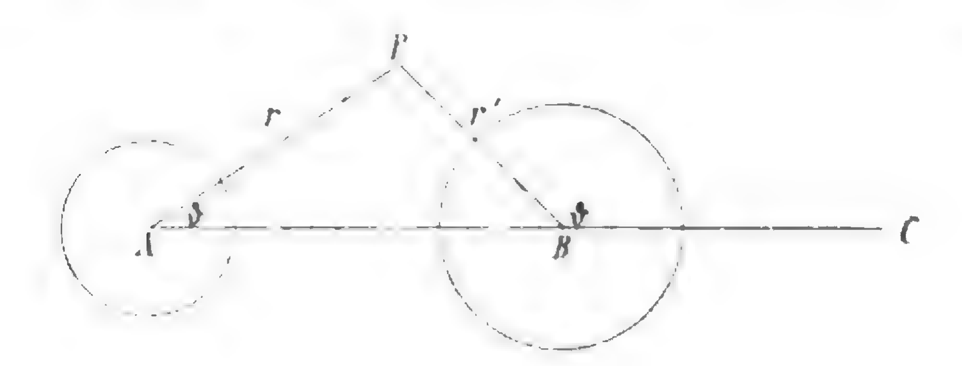
[1] Siehe Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl., II, S. 268.

Endlich gestattet die hier angewandte Methode, wie es ja bei einer Durchführung der Murphy'schen nicht anders zu erwarten ist, die Verallgemeinerung auf den Fall, dass statt einer, beliebig viele Kugeln vorhanden sind, auf deren Oberfläche das Potential vorgeschriebene Werthe annehmen muss.

Ich habe zum Schlusse dieser Arbeit auch die Lösung dieses Problems angegeben oder wenigstens die ersten Glieder der betreffenden Reihenentwicklung berechnet, aus denen die weiteren in gegebener Weise folgen, mich jedoch dabei auf den Fall beschränkt, dass das Potential auf allen Kugeln constant ist. Der allgemeine Fall ist in derselben Weise zu behandeln, doch würde das Resultat so complicirt, dass es nicht mehr als formellen Werth besässe.

1.

Wir nennen die beiden Kugeln, deren Centrum in A und B liegt (siehe die Figur), kurz die Kugel (A), respective die Kugel (B).



Der Radius der ersteren sei a, der der letzteren b. Die Distanz AB sei gleich d.

Die Lage eines beliebigen Punktes P fixiren wir durch Polarcoordinaten, als deren Scheitel wir nach Bequemlichkeit A oder B wählen werden. Die entsprechenden Radien-Vectoren seien r und r'; als Axe wählen wir AC, von der ab wir die Polwinkel ϑ und ϑ' zählen; endlich werde die Ebene ABP durch den Winkel φ bestimmt, den sie mit einer anderen fixen Ebene durch AC einschliesst.

Die Coordinaten von P sind also r, ϑ, φ oder r', ϑ', φ'. (Zwischen diesen sechs Grössen bestehen natürlich drei unabhängige Relationen; speciell ist $\varphi = \varphi'$.)

Das Potential soll also auf der Oberfläche dieser beiden Kugeln eine gegebene Function von ϑ, φ, respective von ϑ', φ' sein.

Es sei also etwa:

$$V_{r=a} = \psi(\vartheta, \varphi) \quad \text{und} \quad V_{r'=b} = \chi(\vartheta', \varphi').$$

Diese beiden Functionen entwickeln wir nach Kugelflächenfunctionen; wir setzen also

$$\psi(\vartheta, \varphi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} S_\mu(\vartheta, \varphi); \quad \chi(\vartheta', \varphi') = \sum_{\mu=0}^{\infty} s_\mu(\vartheta', \varphi'), \tag{1}$$

wo also S_μ eine Kugelflächenfunction μ^{ter} Ordnung von ϑ und φ; s_μ eine solche Function von ϑ' und φ' bedeutet.

Nun setzen wir das Potential an einer beliebigen Stelle des äusseren Raumes:

$$V = \sum_{\mu=0}^{\infty} S_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\infty} s_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1} + Q_1.$$

Dabei hat die Function Q_1 folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Sie muss der Laplace'schen Gleichung genügen.

2. Sie muss an der Oberfläche der Kugel (A) den entgegengesetzt gleichen Werth annehmen, den die Function $\sum_{\mu=0}^{\infty} s_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1}$ an dieser Oberfläche annimmt; es muss also

$$Q_{1\,r=a} = -\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} s_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1}\right|_{r=a} \tag{2}$$

sein.

3. Sie muss an der Oberfläche der Kugel (B) den entgegengesetzt gleichen Werth annehmen, den die Function $\sum_{\mu=0}^{\infty} S_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1}$ an dieser Oberfläche annimmt, es muss also

$$Q_{1\,r'=b} = -\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} S_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1}\right|_{r'=b} \tag{3}$$

sein.

Gelingt es, eine solche Function Q_1 aufzufinden, so ist unser Problem gelöst; denn das Potential genügt dann der Laplace'schen Gleichung, und es reducirt sich offenbar auf der Oberfläche der Kugeln (A) und (B) auf ΣS_μ, respective Σs_μ.

Diese Function Q_1 hat also auf der Oberfläche der beiden Kugeln vorgeschriebene Werthe und soll im ganzen Raume der Laplace'schen Gleichung genügen. Wir sind also scheinbar um keinen Schritt weiter gekommen, da das Problem, die Function Q_1 zu finden, dasselbe ist, wie das ursprüngliche, das Potential V zu bestimmen.

Der einzige Unterschied ist, dass die Werthe, welche die Function Q_1 an der Oberfläche der beiden Kugeln annehmen muss, im Allgemeinen kleiner sein werden als die, welche der Function V an diesen Stellen vorgeschrieben sind, so dass der Gedanke nahe liegt, durch Fortsetzung dieses Verfahrens das Potential in eine Reihe zu entwickeln, über deren Convergenz dann natürlich nachträglich entschieden werden muss.[1]

Wir wollen also mit Q_1 ebenso vorgehen wie früher mit V. Wir entwickeln die Werthe, welche Q_1 an der Oberfläche von (A) und (B) annehmen muss nach Kugelfunctionen. [Diese Werthe sind durch (2) und (3) gegeben.] Wir setzen also:

$$(Q_1)_{r=a} = \sum_{\mu=0}^{\infty} S'_\mu(\vartheta,\varphi); \qquad (Q_1)_{r'=b} = \sum_{\mu=0}^{\infty} s'_\mu(\vartheta',\varphi'),$$

dann wird:

$$Q_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty} S'_\mu\left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\infty} s'_\mu\left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1} + Q_2. \tag{4}$$

Q_2 muss dann wieder der Laplace'schen Gleichung genügen, und ferner muss

$$(Q_2)_{r=a} = -\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} s'_\mu\left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1}\right)_{r=a}$$

[1] Dieser Convergenzbeweis kann auch allgemein geführt werden, siehe Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, S. 357. In unserem Fall ergibt sich, wie folgt, die Convergenz des Resultates direct.

und

$$Q_2|_{r'=b} = -\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} S'_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1}\right|_{r'=b}$$

sein.

Wir entwickeln nun wieder diese Werthe nach Kugelfunctionen:

$$|Q_2|_{r=a} = \sum_{\mu=0}^{\infty} S''_\mu(\vartheta,\varphi); \qquad Q_2|_{r'=b} = \sum_{\mu=0}^{\infty} s''_\mu(\vartheta',\varphi')$$

und setzen ebenso wie früher:

$$Q_2 = \sum_{\mu=0}^{\infty} S''_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} + \sum_{\mu=0}^{\infty} s''_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{2\mu+1} + Q_3.$$

Wenden wir nun auf Q_3 dasselbe Verfahren an und fahren so fort, so erhalten wir endlich:

$$\begin{aligned} V = & \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} (S_\mu + S'_\mu + S''_\mu + \ldots) \\ & + \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1} (s_\mu + s'_\mu + s''_\mu + \ldots). \end{aligned} \tag{5}$$

Damit ist das Problem formell gelöst — die Convergenz der Reihen natürlich vorausgesetzt.

(Besonders einfach gestaltet sich das Verfahren für den Fall, dass die beiden Kugeln concentrisch liegen; man gelangt so sehr rasch zu dem bekannten Resultate.)

2.

Wir wollen nun versuchen, die im letzten Abschnitte definirten Functionen Q zu bestimmen. Und zwar wollen wir der Einfachheit halber annehmen, dass sich die Kugelfunctionenreihen in Gleichung (1) auf je eine einzige solche Function reduciren. Es sei also das Potential auf der Oberfläche von (A) gleich $S_\mu(\vartheta,\varphi)$, auf der von (B) gleich $s_\mu(\vartheta',\varphi')$.

Das Resultat für diesen Fall haben wir dann in Bezug auf μ von 0 bis unendlich zu summiren, wodurch wir dann die Lösung des allgemeinen Problems erhalten.

Wir setzen also:

$$V = S_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} + s_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1} + Q_1.$$

Die Function Q_1 muss dann auf der Oberfläche von (B) den entgegengesetzten Werth annehmen wie die Function $S_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1}$ auf A den entgegengesetzten Werth wie $s_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1}$.

Wir führen nun zwei rechtwinklige Coordinatensysteme ein; das eine (xyz) habe seinen Ursprung in A, das zweite (x', y', z') in B. Die gemeinsame X-Axe falle mit AC zusammen, derart dass

$$x' = x - d$$
$$y' = y$$
$$z' = z.$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$S_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} = \frac{f(x, y, z)}{r^{2\mu+1}} = F(x, y, z)$$

$$s_\mu \left(\frac{b}{r'}\right)^{\mu+1} = \frac{e(x', y', z')}{r'^{2\mu+1}} = E(x', y', z'),$$

wobei $r^2 = x^2+y^2+z^2$; $r'^2 = x'^2+y'^2+z'^2$ ist.

Nun setzen wir

$$Q_1 = -\left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1} \frac{f\left(-\left[x'+\frac{b^2}{d}\right]+PR^2, y', z'\right)}{\left[\left(x'+\frac{b^2}{d}\right)^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} -$$

$$-\left(\frac{a}{d}\right)^{2\mu+1} \frac{e\left(-\left[x-\frac{a^2}{d}\right]-\Pi\rho^2, y, z\right)}{\left[\left(x-\frac{a^2}{d}\right)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} + Q_2, \qquad (6)$$

worin R und ρ dieselben Ausdrücke bezeichnen, welche auch im Nenner des betreffenden Bruches vorkommen, also

$$R^2 = \left(x' + \frac{b^2}{d}\right)^2 + y'^2 + z'^2$$

$$\rho^2 = \left(x - \frac{a^2}{d}\right)^2 + y^2 + z^2$$

und P und Π Constante sind.

Wir können uns leicht überzeugen, dass Q_1 den im vorigen Abschnitt aufgestellten Bedingungen genügt. Vor Allem erfüllen die beiden Brüche die Laplace'sche Gleichung. Man kann dies durch Ausführung der betreffenden Differentiationen einsehen — oder einfacher dadurch, dass man die Zähler nach Potenzen von PR^2, respective von $\Pi\rho^2$ entwickelt. Dadurch erhält man eine Anzahl von Ausdrücken der Form:

$$\frac{\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f\left(-\left(x' + \frac{b^2}{d}\right), y', z'\right)}{\left[\left(x' + \frac{b^2}{d}\right)^2 + y'^2 + z'^2\right]^{\frac{2(\mu-\lambda)+1}{2}}},$$

welche einzeln der Laplace'schen Gleichung genügen. Denn wenn $f(xyz)$ eine räumliche Kugelfunction μ^{ter} Ordnung ist, so ist ja $\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f(xyz)$ * und ebenso $\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f(-x, y, z)$ eine räumliche Kugelfunction von der Ordnung $\mu-\lambda$; daher

$$\frac{\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda} f(-x, y, z)}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{2(\mu-\lambda)+1}{2}}}$$

eine räumliche Kugelfunction von der Ordnung $-(\mu-\lambda)-1$, die der Laplace'schen Gleichung gehorchen muss.

Ferner sieht man auch leicht, dass der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (6) auf der Kugel *(B)* denselben Werth

* Siehe etwa Thomson und Tait, Treatise on natural phylosophie, II. Auflage, S. 180, Gleichung (15).

annimmt wie $\frac{f(x,y,z)}{r^{2\mu+1}}$; der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (6) auf der Kugel *(A)* denselben Werth annimmt wie $\frac{e(x',y',z')}{r'^{2\mu+1}}$, wenn man den Constanten P und Π die Werthe:

$$P = \frac{d}{b^2}; \quad \Pi = \frac{d}{a^2}$$

beilegt. Denn es ist

$$\text{für } r' = b: \qquad x = -\left(x' + \frac{b^2}{d}\right) + \frac{d}{b^2} R^2$$

$$\text{für } r = a: \qquad x' = -\left(x - \frac{a^2}{d}\right) - \frac{d}{a^2} \rho^2.$$

Die Zähler werden also einander gleich; und ferner heben sich auch die Nenner und die Factoren $\left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1}$, respective $\left(\frac{a}{d}\right)^{2\mu+1}$ weg. Denn es ist ja:

$$\text{für } r' = b: \qquad r^2 = \frac{d^2}{b^2}\left[\left(x' + \frac{b^2}{d}\right)^2 + y'^2 + z'^2\right]$$

$$\text{für } r = a: \qquad r'^2 = \frac{d^2}{a^2}\left[\left(x - \frac{a^2}{d}\right)^2 + y^2 + z^2\right].$$

(Es ist dies zugleich der Grundsatz der Theorie der reciproken Radii vectores. Es liesse sich auch Gleichung (6) mit Hilfe dieser Theorie ableiten; da dies aber etwas umständlich ist, habe ich vorgezogen, diese Gleichung hinzuschreiben und nachträglich ihre Richtigkeit zu zeigen, umsomehr als dies auch der Weg ist, auf dem ich den Satz gefunden habe, der durch Gleichung (6) ausgedrückt ist.)

Wir schreiben nun der Kürze halber Gleichung (6) in der folgenden Form:

$$Q_1 = -\left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1} F\left\{-\left(x' + \frac{b^2}{d}\right), y', z', P\right\} -$$

$$-\left(\frac{a}{d}\right)^{2\mu+1} E\left\{-\left(x - \frac{a^2}{d}\right), y, z, -\Pi\right\} + Q_2. \qquad (6')$$

wobei also allgemein

$$\frac{f(\pm(x+\alpha) \pm P[(x+\alpha)^2+y^2+z^2], y, z)}{[(x+\alpha)^2+y^2+z^2]^{\frac{2\mu+1}{2}}} =$$

$$= F\{\pm(x+\alpha), y, z, \pm P\} \qquad (7)$$

gesetzt ist.

Wir können nun leicht auch den Ausdruck Q_2 bilden. Dazu entwickeln wir, wie bereits oben gezeigt wurde, $F\left(-\left(x'+\frac{b^2}{d}\right), y', z', P\right)$ nach Kugelfunctionen von $-\left(x'+\frac{b^2}{d}\right)$, y', z' und können dann auf jede einzelne den Satz (6) anwenden. Analog verfahren wir mit $E\left(-\left(x-\frac{a^2}{d}\right), y, z, -\Pi\right)$ und erhalten so:

$$Q_2 = \left(\frac{ba}{d\Delta_1}\right)^{2\mu+1} \frac{f\left(x-\frac{a^2}{\Delta_1}+P_1R_1^2, y, z\right)}{\left[\left(x-\frac{a^2}{\Delta_1}\right)^2+y^2+z^2\right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} +$$

$$+\left(\frac{ab}{d\delta_1}\right)^{2\mu+1} \frac{e\left(x'+\frac{b^2}{\delta_1}-\Pi_1\rho_1^2, y', z'\right)}{\left[\left(x'+\frac{b^2}{\delta_1}\right)^2+y'^2+z'^2\right]^{\frac{2\mu+1}{2}}} + Q_3,$$

worin

$$\Delta_1 = d-\frac{b^2}{d}; \quad \delta_1 = d-\frac{a^2}{d},$$

ferner analog dem früheren:

$$R_1^2 = \left(x-\frac{a^2}{\Delta_1}\right)^2+y^2+z^2; \quad \rho_1^2 = \left(x'+\frac{b^2}{\delta_1}\right)^2+y'^2+z'^2$$

gesetzt ist und

$$P_1 = \frac{\Delta_1 d^2}{a^2b^2}; \quad \Pi_1 = \frac{\delta_1 d^2}{a^2b^2}$$

ist. Der durch Gleichung (7) angegebenen symbolischen Bezeichnungsweise nach setzen wir

$$Q_2 = \left(\frac{ba}{d\Delta_1}\right)^{2\mu+1} F\left(x - \frac{a^2}{\Delta_1}, y, z, P_1\right) +$$

$$+ \left(\frac{ab}{d\delta_1}\right)^{2\mu+1} E\left(x' + \frac{b^2}{\delta_1}, y', z', -\Pi_1\right) + Q_3.$$

So fortfahrend können wir alle Q nacheinander bestimmen; wir erhalten etwa noch als allgemeine Glieder:

$$Q_{2i-2} = \left(\frac{ba\ldots a}{d\Delta_1\ldots\Delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} \frac{f\left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}} + P_{2i-1}R^2_{2i-1}, y, z\right)}{R^{2\mu+1}_{2i-1}} +$$

$$+ \left(\frac{ab\ldots b}{d\delta_1\ldots\delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} \frac{e\left(x' + \frac{b^2}{\delta_{2i-1}} - \Pi_{2i-1}\rho^2_{2i-1}, y', z'\right)}{\rho^{2\mu+1}_{2i-1}} +$$

$$+ Q_{2i-1}$$

$$= \left(\frac{ba\ldots a}{d\Delta_1\ldots\Delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} F\left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}, y, z, P_{2i-1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{ab\ldots b}{d\delta_1\ldots\delta_{2i-1}}\right)^{2\mu+1} E\left(x' + \frac{b^2}{\delta_{2i-1}}, y', z', -\Pi_{2i-1}\right) + Q_{2i-1}$$

und

$$Q_{2i-1} =$$

$$= -\left(\frac{ba\ldots ab}{d\Delta_1\ldots\Delta_{2i-1}\Delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} \frac{f\left(-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right) + P_{2i}R^2_{2i}, y', z'\right)}{R^{2\mu+1}_{2i}}$$

$$- \left(\frac{ab\ldots ba}{d\delta_1\ldots\delta_{2i-1}, \delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} \frac{e\left(-\left(x - \frac{a^2}{\delta_{2i}}\right) - \Pi_{2i}\rho^2_{2i}, y, z\right)}{\rho^{2\mu+1}_{2i}} + Q_{2i}$$

$$= -\left(\frac{ba\ldots ab}{d\Delta_1\ldots\Delta_{2i-1}\Delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} F\left(-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right), y', z', P_{2i}\right) -$$

$$- \left(\frac{ab\ldots ba}{d\delta_1\ldots\delta_{2i-1}\delta_{2i}}\right)^{2\mu+1} E\left(-\left(x - \frac{a^2}{\delta_{2i}}\right), y, z, -\Pi_{2i}\right) + Q_{2i}$$

Hierin ist:

$$R_{2i-1}^2 = \left(\left(x - \frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}\right)^2 + y^2 + z^2\right); \quad \rho_{2i-1}^2 = \left(x' + \frac{b^2}{\delta_{2i-1}}\right)^2 + y'^2 + z'^2$$

$$R_{2i}^2 = \left(\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right)^2 + y'^2 + z'^2\right) \qquad \rho_{2i}^2 = \left(x - \frac{a^2}{\delta_{2i}}\right)^2 + y^2 + z^2.$$

Die Grössen Δ und δ bestimmen sich aus der folgenden Reihe von Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \Delta_1 = d - \dfrac{b^2}{d} & \delta_1 = d - \dfrac{a^2}{d} \\ \Delta_2 = d - \dfrac{a^2}{\Delta_1} & \delta_2 = d - \dfrac{b^2}{\delta_1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{2i-1} = d - \dfrac{b^2}{\Delta_{2i-2}} & \delta_{2i-1} = d - \dfrac{a^2}{\delta_{2i-2}} \\ \Delta_{2i} = d - \dfrac{a^2}{\Delta_{2i-1}} & \delta_{2i} = d - \dfrac{b^2}{\delta_{2i}} \end{array} \tag{8}$$

Die Grössen P und Π hingegen ergeben sich aus den vorhergehenden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} P_{2i-1} &= \frac{\Delta_{2i-1}}{a^2} + \frac{\Delta_{2i-1}^2}{a^2} P_{2i-2} \\ P_{2i} &= \frac{\Delta_{2i}}{b^2} + \frac{\Delta_{2i}^2}{b^2} P_{2i-1} \\ \Pi_{2i-1} &= \frac{\delta_{2i-1}}{b^2} + \frac{\delta_{2i-1}^2}{b^2} \Pi_{2i-2} \\ \Pi_{2i} &= \frac{\delta_{2i}}{a^2} + \frac{\delta_{2i}^2}{a^2} \Pi_{2i-1} \end{aligned} \tag{9}$$

Von der Richtigkeit dieser allgemeinen Glieder der Reihenentwickelung kann man sich noch nachträglich überzeugen, da sie aus denselben Gründen wie Q_1 der Laplace'schen Gleichung genügen und ferner

auf *(B)*

$$F\left\{x-\frac{a^2}{\Delta_{2i-1}},\, y,\, z,\, P_{2i-1}\right\} =$$

$$= \left(\frac{b}{\Delta_{2i}}\right)^{2n+1} F\left\{-\left(x'+\frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right),\, y',\, z',\, P_{2i}\right\}$$

$$E\left\{-\left(x-\frac{a^2}{\delta_{2i}}\right),\, y,\, z,\, -\Pi_{2i}\right\} =$$

$$= \left(\frac{b}{\delta_{2i+1}}\right)^{2n+1} E\left\{x'+\frac{b^2}{\delta_{2i+1}},\, y',\, z',\, -\Pi_{2i+1}\right\}$$

auf *(A)* (9*a*)

$$F\left\{-\left(x'+\frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right),\, y',\, z',\, P_{2i}\right\} =$$

$$= \left(\frac{a}{\Delta_{2i+1}}\right)^{2n+1} F\left\{\left(x-\frac{a^2}{\Delta_{2i+1}}\right),\, y,\, z,\, P_{2i+1}\right\}$$

$$E\left\{x'+\frac{b^2}{\delta_{2i+1}},\, y',\, z',\, -\Pi_{2i+1}\right\} =$$

$$= \left(\frac{a}{\delta_{2i+2}}\right)^{2n+1} E\left\{-\left(x-\frac{a^2}{\delta_{2i+2}}\right),\, y,\, z,\, -\Pi_{2i+2}\right\}$$

wird.

Da ja für $r' = b$:

$$x-\frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}+P_{2i-1}\left[\left(x-\frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}\right)^2+y^2+z^2\right] =$$

$$= -\left(x'+\frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right)+P_{2i}\left[\left(x'+\frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right)^2+y'^2+z'^2\right]$$

und

$$\left[\left(x-\frac{a^2}{\Delta_{2i-1}}\right)^2+y^2+z^2\right] = \left(\frac{\Delta_{2i}}{b}\right)^2\left[\left(x'+\frac{b^2}{\Delta_{2i}}\right)^2+y'^2+z'^2\right]$$

ist, wenn für die Grossen P die durch Gleichung (9) gegebene Recursionsformel gilt. Die Richtigkeit der drei übrigen Gleichungen (9*a*) lässt sich ganz analog nachweisen.

dann erhalten wir als Ausdruck für das Potential im äusseren Raume:

$$
\begin{aligned}
V = \; & \\
& F(x, y, z) && + E(x', y', z') \\
& + \left(\frac{b}{d}\frac{a}{\Delta_1}\right)^{2\mu+1} F\left(x - \frac{a^2}{\Delta_1}, y, z, P_1\right) && + \left(\frac{a}{d}\frac{b}{\delta_1}\right)^{2\mu+1} E\left(x' + \frac{b^2}{\delta_1}, y', z', -\Pi_1\right) \\
& + \left(\frac{b}{d}\frac{a}{\Delta_1}\frac{b}{\Delta_2}\frac{a}{\Delta_3}\right)^{2\mu+1} F\left(x - \frac{a^2}{\Delta_3}, y, z, P_3\right) && + \left(\frac{a}{d}\frac{b}{\delta_1}\frac{a}{\delta_2}\frac{b}{\delta_3}\right)^{2\mu+1} E\left(x' + \frac{b^2}{\delta_3}, y', z', -\Pi_3\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \qquad (10) \\
& - \left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1} F\left\{-\left(x' + \frac{b^2}{d}\right), y', z', P\right\} && - \left(\frac{a}{d}\right)^{2\mu+1} E\left\{-\left(x - \frac{a^2}{d}\right), y, z, -\Pi\right\} \\
& - \left(\frac{b}{d}\frac{a}{\Delta_1}\frac{b}{\Delta_2}\right)^{2\mu+1} F\left\{-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_2}\right), y', z', P_2\right\} && - \left(\frac{a}{d}\frac{b}{\delta_1}\frac{a}{\delta_2}\right)^{2\mu+1} E\left\{-\left(x - \frac{a^2}{\delta_2}\right), y, z, -\Pi_2\right\} \\
& - \left(\frac{b}{d}\frac{a}{\Delta_1}\frac{b}{\Delta_2}\frac{a}{\Delta_3}\frac{b}{\Delta_4}\right)^{2\mu+1} F\left\{-\left(x' + \frac{b^2}{\Delta_4}\right), y', z', P_4\right\} && - \left(\frac{a}{d}\frac{b}{\delta_1}\frac{a}{\delta_2}\frac{b}{\delta_3}\frac{a}{\delta_4}\right)^{2\mu+1} E\left\{-\left(x - \frac{a^2}{\delta_4}\right), y, z, -\Pi_4\right\} \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Damit die successiven Operationen, durch welche Gleichung (10) erlangt wird, stets so wie die erste durchführbar seien, ist nothwendig, dass:

$$\begin{aligned} \Delta_{2i} > b; \quad \Delta_{2i+1} > a \\ \delta_{2i} > a; \quad \delta_{2i+1} > b \end{aligned} \tag{10a}$$

sei. Die Richtigkeit dieser Ungleichungen folgt aus einer einfachen geometrischen Betrachtung und auch aus der folgenden Darstellung der Δ und δ durch p und q (siehe S. 1679).

Wir können Gleichung (10) auf folgende Weise eine elegantere Gestalt geben. Wir betrachten das folgende System von Gleichungen:[1]

$$\begin{aligned} p_0 &= 1; & q_0 &= 0 \\ bp_1 &= kp_0 - aq_0; & bq_1 &= dp_0 - aq_0 \\ bp_2 &= kp_1 - dq_1; & bq_2 &= dp_1 - aq_1 \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ bp_{n+1} &= kp_n - dq_n; & bq_{n+1} &= dp_n - aq_n, \end{aligned} \tag{11}$$

worin

$$k = \frac{d^2 - b^2}{a}$$

gesetzt ist.

Man sieht sofort, dass:

$$\frac{d}{b} = \frac{q_1}{p_0}$$

$$\frac{\Delta_1}{a} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{\Delta_2}{b} = \frac{q_2}{p_1}.$$

und wenn man die Recursionsformeln (9) und (11) vergleicht, dass allgemein:

[1] Betreffs dieser Gleichungen vergleiche: Vorlesungen über die im umgekehrten Quadrat der Entfernung wirkenden Kräfte von P. G. Lejeune-Dirichlet, herausgegeben von Dr. F. Grube. 2. Auflage, S. 120, Gleichung (1). Siehe auch Anmerkung 1 auf S. 20 dieser Arbeit.

$$\frac{\Delta_{2x-1}}{a} = \frac{p_x}{q_x}$$

$$\frac{\Delta_{2x}}{b} = \frac{q_{x+1}}{p_x}. \qquad (12)$$

Wählt man aber in den Gleichungen (11) statt 1 und 0 als Anfangsglieder d und a, bildet die folgenden Grössen genau wie früher und bezeichnet sie zum Unterschiede mit p'_n und q'_n (also $p'_0 = d$; $q'_0 = a$), so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$\frac{d}{a} = \frac{p'_0}{q'_0}$$

$$\frac{\delta_1}{b} = \frac{q'_1}{p'_0}$$

$$\frac{\delta_2}{a} = \frac{p'_1}{q'_1}$$

und allgemein:

$$\frac{\delta_{2x}}{a} = \frac{p'_x}{q'_x}$$

$$\frac{\delta_{2x+1}}{b} = \frac{q'_{x+1}}{p'_x}. \qquad (13)$$

Benützen wir dies, so ergibt sich Folgendes:

$$\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{\Delta_1} \cdot \frac{b}{\Delta_2} \cdots \frac{b}{\Delta_{2x}} \cdot \frac{a}{\Delta_{2x+1}} = \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{q_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{p_x}{q_{x+1}} \cdot \frac{q_{x+1}}{p_{x+1}} =$$

$$= \frac{p_0}{p_{x+1}} = \frac{1}{p_{x+1}},$$

ferner:

$$\frac{b}{d} \cdot \frac{a}{\Delta_1} \cdot \frac{b}{\Delta_2} \cdots \frac{a}{\Delta_{2x+1}} \cdot \frac{b}{\Delta_{2x+2}} = \frac{p_0}{q_1} \cdot \frac{q_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{q_2} \cdots \frac{q_{x+1}}{p_{x+1}} \cdot \frac{p_{x+1}}{q_{x+2}} =$$

$$= \frac{p_0}{q_{x+2}} = \frac{1}{q_{x+2}},$$

desgleichen:

$$\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{\delta_1}\cdot\frac{a}{\delta_2}\cdots\cdots\frac{a}{\delta_{2\varkappa}}\cdot\frac{b}{\delta_{2\varkappa+1}}=\frac{q'_0}{p'_0}\cdot\frac{p'_0}{q'_1}\cdot\frac{q'_1}{p'_1}\cdots\cdots\frac{q'_\varkappa}{p'_\varkappa}\cdot\frac{p'_\varkappa}{q'_{\varkappa+1}}=$$

$$=\frac{q'_0}{q'_{\varkappa+1}}=\frac{a}{q'_{\varkappa+1}}$$

und

$$\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{\delta_1}\cdot\frac{a}{\delta_2}\cdots\cdots\frac{b}{\delta_{2\varkappa+1}}\cdot\frac{a}{\delta_{2\varkappa+2}}=\frac{q'_0}{p'_0}\cdot\frac{p'_0}{q'_1}\cdot\frac{q'_1}{p'_1}\cdots\cdots\frac{p'_\varkappa}{q'_{\varkappa+1}}\cdot\frac{q'_{\varkappa+1}}{p'_{\varkappa+1}}=$$

$$=\frac{q'_0}{p'_{\varkappa+1}}=\frac{a}{p'_{\varkappa+1}}.$$

Setzen wir dies in Gleichung (10) ein, so erhalten wir endlich:

$$\begin{aligned}V=&\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_\varkappa}\right)^{2\mu+1}F\left(x-a\frac{q_\varkappa}{p_\varkappa},y,z,P_{2\varkappa-1}\right)\\&-\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q_{\varkappa+1}}\right)^{2\mu+1}F\left(-\left(x'+b\frac{p_\varkappa}{q_{\varkappa+1}}\right),y',z',P_{2\varkappa}\right)\\&+\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left(\frac{a}{q'_\varkappa}\right)^{2\mu+1}E\left(x'+b\frac{p'_{\varkappa-1}}{q'_\varkappa},y',z',-\Pi_{2\varkappa-1}\right)\\&-\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left(\frac{a}{p'_\varkappa}\right)^{2\mu+1}E\left(-\left(x-a\frac{q'_\varkappa}{p'_\varkappa}\right),y,z,-\Pi_{2\varkappa}\right).\end{aligned}\tag{14}$$

wobei aber noch festgesetzt werden muss, dass $p'_{-1}=P_{-1}=$ $=\Pi_{-1}=0$ sei.

Die Grössen $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$ lassen sich[1] als Summe der allgemeinen Glieder zweier geometrischer Progressionen darstellen. Und zwar ist

$$\begin{aligned}p_\varkappa&=\rho\,\omega^\varkappa+\rho'\,\omega^{-\varkappa}\\q_\varkappa&=\rho\,\frac{k-b\,\omega}{d}\,\omega^\varkappa+\rho'\,\frac{k-b\,\omega^{-1}}{d}\,\omega^{-\varkappa}.\end{aligned}\tag{15}$$

[1] Siehe Dirichlet, Grube l. c.

Dabei bestimmen sich ρ und ρ' durch die Gleichungen:

$$p_0 = \rho + \rho'$$
$$q_0 = \rho \frac{k - b\omega}{d} + \rho' \frac{k - b\omega^{-1}}{d}. \qquad (15a)$$

ω ist die Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$b\omega^2 + (a-k)\omega + b = 0,$$

welche zwischen 0 und 1 liegt.

($p'_\varkappa$ und $q'_\varkappa$ bestimmen sich auf dieselbe Weise, wobei bloss ρ und ρ' einen anderen Werth haben, der sich aus den Gleichungen (15a) bestimmt, wenn man in ihnen p_0 und q_0 mit p'_0 und q'_0 vertauscht.)

Wir können uns nun leicht von der Convergenz der Reihen, welche in Gleichung (14) auftreten, überzeugen. (Eigentlich ist dies nach der in Anmerkung 1, S. 4 gemachten Bemerkung nicht mehr nöthig.) Betrachten wir zuerst die erste von ihnen und entwickeln ihr $\varkappa$tes Glied nach Potenzen von $P_{2\varkappa-1}$; dadurch erhalten wir eine Anzahl Glieder von der Form:

$$\left(\frac{1}{p_\varkappa}\right)^{2\mu+1} P^\lambda_{2\varkappa-1}\, \varphi\left(x - \frac{p_\varkappa}{p_\varkappa}, y, z\right) = M_{\varkappa,\lambda},$$

wobei λ die Werthe 0, 1, 2 . . . μ annehmen kann. (Der Zusammenhang zwischen φ und F ist sehr einfach, es kommt hier jedoch nicht darauf an.) Der entsprechende Bestandtheil des $(\varkappa+1)$ten Gliedes der ersten Reihe (14) ist:

$$\left(\frac{1}{p_{\varkappa+1}}\right)^{2\mu+1} P^\lambda_{2\varkappa+1}\, \varphi\left(x - \frac{q_{\varkappa+1}}{p_{\varkappa+1}}, y, z\right) = M_{\varkappa+1,\lambda}.$$

Die Convergenz der Reihe ist bewiesen, wenn gezeigt werden kann, dass

$$\lim_{\varkappa - \infty} \frac{M_{\varkappa,\lambda}}{M_{\varkappa+1,\lambda}} > 1$$

ist. Nun ist nach Gleichung (15):

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{p_{\varkappa+1}}{p_\varkappa} = \lim_{\varkappa=\infty} \frac{\rho\omega^{\varkappa+1} + \rho'\omega^{-\varkappa-1}}{\rho\omega^\varkappa + \rho'\omega^{-\varkappa}} = \lim_{\varkappa=\infty} \frac{\rho'\omega^{-\varkappa-1}}{\rho'\omega^{-\varkappa}} = \frac{1}{\omega} > 1,$$

und

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{q_\varkappa}{p_\varkappa} = \lim_{\varkappa=\infty} \frac{\rho \frac{k-b\omega}{d}\omega^\varkappa + \rho' \frac{k-b\omega^{-1}}{d}\omega^{-\varkappa}}{\rho\omega^\varkappa + \rho'\omega^{-\varkappa}} = \frac{k-b\omega^{-1}}{d}.$$

hat also einen bestimmten Werth. Demnach ist:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{\varphi\left(x - \frac{q_\varkappa}{p_\varkappa}, y, z\right)}{\varphi\left(x - \frac{q_{\varkappa+1}}{p_{\varkappa+1}}, y, z\right)} = 1,$$

da ja die Stetigkeit von φ ausser Frage steht. Ferner ist nach Gleichung (9)

$$P_{2\varkappa+1} = \frac{1}{a}\frac{p_{\varkappa+1}}{q_{\varkappa+1}} + \frac{1}{b}\frac{p^2_{\varkappa+1}}{q_{\varkappa+1}p_\varkappa} + \left(\frac{p_{\varkappa+1}}{p_\varkappa}\right)^2 P_{2\varkappa-1}.$$

Da nun P mit $\varkappa$ unendlich gross wird, fallen die endlichen Grössen fort und man hat:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{P_{2\varkappa-1}}{P_{2\varkappa+1}} = \left(\frac{p_\varkappa}{p_{\varkappa+1}}\right)^2.$$

Somit wird:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{M_{\varkappa,\lambda}}{M_{\varkappa+1,\lambda}} = \lim_{\varkappa=\infty} \left(\frac{p_{\varkappa+1}}{p_\varkappa}\right)^{2(\mu-\lambda)+1} = \left(\frac{1}{\omega}\right)^{2(\mu-\lambda)+1} > 1,$$

und damit ist die unbedingte Convergenz der ersten Reihe (14) nachgewiesen.

In ähnlicher Weise findet man noch:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{P_{2\varkappa+2}}{P_{2\varkappa}} = \left(\frac{q_{\varkappa+2}}{q_{\varkappa+1}}\right)^2,$$

ferner:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{q_{\varkappa+1}}{q_\varkappa} > 1$$

und dass:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \frac{p_\varkappa}{q_{\varkappa+1}} = \frac{\omega d}{k-b\omega^{-1}},$$

also auch einen bestimmten, endlichen Werth hat; da nun dasselbe auch von p'_x und q'_x gilt, so ist die Convergenz sämmtlicher Reihen, die in (14) auftreten, bewiesen.

Ferner folgt aus den Gleichungen (11) leicht, dass stets

$$p_n > q_n; \quad q_{n+1} > p_n$$

$$p'_n > q'_n; \quad q'_{n+1} > p'_n.$$

Betrachtet man nun die Gleichungen (12) und (13), so folgt daraus unmittelbar die Richtigkeit der Ungleichungen (10*a*).

Das Resultat, das durch die Gleichung (14) ausgesprochen wird, genügt offenbar allen Bedingungen des Problems; denn alle darin auftretenden Functionen F und E genügen der Laplace'schen Gleichung, wie auch den anderen Bedingungen des Potentials. Ferner reducirt sich die rechte Seite der Gleichung (10) oder (14) für $r = a$

$$\{F(x, y, z)\}_{r=a} = S_\mu(\vartheta, \varphi)$$

und für $r' = b$ auf

$$\{E(x', y', z')\}_{r'=b} = s_\mu(\vartheta', \varphi'),$$

da ja die anderen Glieder sich in diesen Fällen paarweise aufheben, wie ja bereits früher gezeigt wurde. Im allgemeineren Falle, dass das Potential auf der Oberfläche der Kugel (A) durch die Reihe

$$S_0 + S_1 + \ldots + S_\mu + \ldots$$

auf der Kugel (B) durch die Reihe

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_\mu + \ldots$$

gegeben ist, setzen wir

$$S_\mu \left(\frac{a}{r}\right)^{\mu+1} = F_\mu(xyz)$$

$$s_\mu \left(\frac{b}{r}\right)^{\mu+1} = E_\mu(x'y'x')$$

und erhalten als Resultat:

$$V = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{p_\varkappa}\right)^{2\mu+1} F\left(x-a\frac{q_\varkappa}{p_\varkappa}, y, z, P_{2\varkappa}\right)\right.$$

$$-\left(\frac{1}{q_{\varkappa+1}}\right)^{2\mu+1} F\left(-\left(x'+\frac{p_\varkappa}{q_{\varkappa+1}}\right), y', z', P_{2\varkappa}\right)$$

$$+\left(\frac{a}{q'_\varkappa}\right)^{2\mu+1} E\left(x'+b\frac{p'_{\varkappa-1}}{q'_\varkappa}, y', z', -\Pi_{2\varkappa-1}\right)$$

$$\left.-\left(\frac{a}{p'_\varkappa}\right)^{2\mu+1} E\left(-\left(x-a\frac{q'_\varkappa}{p'_\varkappa}\right), y, z, -\Pi_{2\varkappa}\right)\right\}.$$

Es ist mir bisher nicht gelungen, die Identität dieses Resultates mit dem von Thomson nachzuweisen; doch war es wohl von vorneherein unwahrscheinlich, dass dies leicht durchzuführen sei, da ja die zwei Ausdrücke ganz verschiedene Grössen enthalten.

3.

Wir wollen nun Gleichung (14) auf einen speciellen Fall anwenden. Es soll nämlich das Potential auf den zwei Kugeln constant sein, sich also zwei leitende Kugeln gegenüberstehen, und wir wollen die Dichte der elektrischen Ladung an ihrer Oberfläche bestimmen. Hier ist also $\mu = 0$ und der Zähler aller Brüche eine Constante.

Wir wollen in allen Ausdrücken von (14) die Coordinaten xyz einführen. Es ist nun, wenn wir die Gleichungen (12) und (13) berücksichtigen:

$$x'+b\frac{p_\varkappa}{q_{\varkappa+1}} = x-\left(d-\frac{b^2}{\Delta_{2\varkappa}}\right) = x-\Delta_{2\varkappa+1} = x-a\frac{p_{\varkappa+1}}{q_{\varkappa+1}}$$

$$x'+b\frac{p'_{\varkappa-1}}{q'_\varkappa} = x-\left(d-\frac{b^2}{\delta_{2\varkappa-1}}\right) = x-\delta_{2\varkappa} = x-a\frac{p'_\varkappa}{q'_\varkappa}.$$

Führen wir dies nun in (14) ein, so erhalten wir:

$$V = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{p_\varkappa}\right) F\left(x-a\frac{q_\varkappa}{p_\varkappa}, y, z\right) - \left(\frac{1}{q_{\varkappa+1}}\right) F\left(x-a\frac{p_{\varkappa+1}}{q_{\varkappa+1}}, y, z\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a}{q'_\varkappa}\right) E\left(x-a\frac{p'_\varkappa}{q'_\varkappa}, y, z\right) - \left(\frac{a}{p'_\varkappa}\right) E\left(x-a\frac{q'_\varkappa}{p'_\varkappa}, y, z\right)\right\}.$$

Das Potential soll also auf der Kugel (A) den constanten Werth $4\pi P$, auf der Kugel (B) den constanten Werth $4\pi Q$ haben.

Dann wird also:

$$F(x,y,z) = \frac{4\pi Pa}{r}\,;\ E(x',y',z') = \frac{4\pi Qb}{r'}\,.$$

Ferner wird allgemein:

$$F(x-g,y,z) = \frac{4\pi Pa}{\sqrt{r^2-2gx+g^2}} = \frac{4\pi Pa}{\sqrt{r^2-2gr\cos\vartheta+g^2}}\,.$$

Da nun die Dichte der elektrischen Belegung auf (A)

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a}$$

ist, so haben wir zu bilden

$$-\frac{1}{4\pi}\left|\frac{\partial F(x-g,y,z)}{\partial r}\right|_{r=a} = P\left|\frac{(r-rg\cos\vartheta)a}{(r^2-2gr\cos\vartheta+g^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{r=a} =$$

$$= P\,\frac{a^2(1-g\cos\vartheta)}{(a^2-2ga\cos\vartheta+g^2)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

analoges gilt bei $E(x',y',z')$.

Und so erhalten wir nach einigen einfachen Transformationen:

$$\sigma = \frac{1}{a}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left\{P\,\frac{p_\varkappa^2-q_\varkappa^2}{(p_\varkappa^2-2p_\varkappa q_\varkappa\cos\vartheta+q_\varkappa^2)^{\frac{3}{2}}} - \right.$$

$$\left. - Qb\,\frac{p_\varkappa'^2-q_\varkappa'^2}{(p_\varkappa'^2-2p_\varkappa' q_\varkappa'\cos\vartheta+q_\varkappa'^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\,,$$

und dieses Resultat stimmt mit dem von Poisson, der ja dieses Problem zuerst behandelt hat, vollständig überein.[1]

[1] Siehe Dirichlet-Grube l. c., S. 126; ich habe hier dieselben Buchstaben gewählt, die sich auch dort finden. Auf die Darstellung der Δ und δ durch die Grössen p_n und q_n wurde ich eben durch Anwendung der Formel (10) auf diesen Specialfall und Vergleich mit der citirten Gleichung geführt.

4.

Wir wollen uns jetzt dem allgemeinen Problem zuwenden, das Potential im ganzen Raume zu bestimmen, wenn es auf der Oberfläche beliebig vieler, beliebig im Raume vertheilter Kugeln gegeben ist.

Im zweiten Abschnitt hatten wir folgenden Satz abgeleitet: Entwickelt man die Werthe, welche die räumliche Kugelfunction $-(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $F(xyz)$ auf einer Kugel (B) annimmt, welche mit dem Radius b um den Punkt $x = d$; $y = z = 0$ geschlagen ist, nach Kugelflächenfunctionen der Polarcoordinaten der letzteren Kugel, und bezeichnet diese Entwicklung mit $\sum_{\lambda=0}^{\infty} s'_\lambda(\vartheta', \varphi')$, so ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} s'_\lambda \left(\frac{b}{r'}\right)^{\lambda+1} = \left(\frac{b}{d}\right)^{2\mu+1} F\left(-\left(x'+\frac{b^2}{d}\right), y', z', P\right).$$

Wenn wir uns jedoch, wie bereits in der Einleitung erwähnt, auf den Fall beschränken, dass das Potential auf den Kugeln constant sein soll, so wird der Zähler des letzten Ausdruckes eine Constante, so dass wir dafür bloss

$$\frac{b}{d} F\left(x'+\frac{b^2}{d}, y', z'\right)$$

setzen können.

Wir wollen nun den Werth derselben Summe für den Fall bestimmen, dass das Centrum der Kugel (B) sich nicht auf der X-Axe, sondern in einem beliebigen Punkte, dessen Coordinaten etwa ξ, η, ζ sind, befinde.

Wir führen ein neues Coordinatensystem ein, dessen Ursprung mit dem der xyz zusammenfällt, dessen X-Axe jedoch durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ geht; die neue Y und Z-Axe sollen senkrecht dazu, im Übrigen aber beliebig gerichtet sein. (Die beiden Coordinatensysteme sollen gleichstimmig sein, also durch Drehung zur Deckung gebracht werden können.) Die neuen Coordinaten sollen etwa mit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ bezeichnet werden und mit den xyz durch das folgende Schema verbunden sein:

	x	y	z
$\bar{x}$	a_{11}	a_{21}	a_{31}
$\bar{y}$	a_{12}	a_{22}	a_{32}
$\bar{z}$	a_{13}	a_{23}	a_{33}

Nun transformiren wir $F(xyz)$ in die neuen Coordinaten. Es sei also

$$F(xyz) = \Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F(a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}\bar{z};\ a_{21}\bar{x} + \ldots);$$

offenbar ist auch $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ebenso wie $F(xyz)$ eine räumliche Kugelfunction.

Jetzt liegt aber die Kugel (B) auf der $\bar{X}$-Axe, und wir können unseren früheren Satz ohne weiteres anwenden und erhalten für unsere frühere Summe den Werth

$$\left(\frac{b}{d}\right) \Psi\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d};\ \bar{y}', \bar{z}'\right),$$

wobei

$$\bar{x}' = \bar{x} - d;\ \bar{y}' = \bar{y};\ \bar{z}' = \bar{z} \text{ und endlich } d^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

ist; wir können dafür auch setzen:

$$\left(\frac{b}{d}\right) F\left(a_{11}\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d}\right) + a_{12}\bar{y}' + a_{13}\bar{z}';\right.$$
$$\left. a_{21}\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d}\right) + a_{22}\bar{y}' + a_{23}\bar{z}';\ a_{31}\left(\bar{x}' + \frac{b^2}{d}\right) + a_{32}\bar{y}' + a_{33}\bar{z}'\right).$$

Führen wir nun abermals ein neues Coordinatensystem (x', y', z') ein, das, dem ursprünglichen (xyz) parallel, seinen Ursprung in $(\xi\eta\zeta)$ hat, also mit den Coordinaten $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}$ durch dasselbe Schema zusammenhängt, wie x, y, z mit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$; so erhalten wir endlich für unsere Summe

$$\left(\frac{b}{d}\right) F\left(x' + a_{11}\frac{b^2}{d},\ y' + a_{21}\frac{b^2}{d},\ z' + a_{31}\frac{b^2}{d}\right)$$

oder in leicht verständlicher anderer Bezeichnungsweise:

$$\left(\frac{b}{d}\right) F\left(x' + \cos(xd)\frac{b^2}{d},\ y' + \cos(yd)\frac{b^2}{d},\ z' + \cos(zd)\frac{b^2}{d}\right).$$

und dabei ist also

$$x' = x - \xi$$
$$y' = y - \eta$$
$$z' = z - \zeta.$$

Wir haben nun noch den Fall zu erledigen, dass man bei Beibehaltung derselben Bezeichnungsweise — mit $F(x+\varepsilon_1, y+\varepsilon_2, z+\varepsilon_3)$ in derselben Weise zu verfahren hat. Man führt dann das Coordinatensystem x_1, y_1, z_1 ein, derart, dass

$$x_1 = x+\varepsilon_1$$
$$y_1 = y+\varepsilon_2$$
$$z_1 = z+\varepsilon_3$$

wird. Setzt man dann noch

$$D^2 = (\xi+\varepsilon_1)^2+(\eta+\varepsilon_2)^2+(\zeta+\varepsilon_3)^2$$
$$\cos(Dx) = \frac{\xi+\varepsilon_1}{D}; \text{ u. s. w.,}$$

so wird unsere Function

$$= \left(\frac{b}{D}\right) F\left(x'+\cos(Dx)\frac{b^2}{D}, y'+\cos(Dy)\frac{b^2}{D}, z'+\cos(Dz)\frac{b^2}{d}\right),$$

wobei wieder

$$x' = x_1-(\xi+\varepsilon_1) = x-\xi$$
$$y' = y_1-(\eta+\varepsilon_2) = y-\eta$$
$$z' = z_1-(\zeta+\varepsilon_3) = z-\zeta$$

ist.

Wir sind nun im Stande, die Lösung des Problems, das am Anfange dieses Paragraphen erwähnt wurde, hinzuschreiben.

Wir nehmen also an, wir hätten n Kugeln, deren Repräsentanten wir kurz mit K_i bezeichnen. Die Kugel K_i habe den Radius a_i, die Centrumscoordinaten ξ_i, η_i, ζ_i; auf ihrer Oberfläche habe das Potential den constanten Werth C_i. Die Distanz zwischen den Centren der Kugeln K_i und K_k bezeichnen wir mit d_{ik}. Ferner verlegen wir in das Centrum jeder Kugel den Ursprung eines Coordinatensystems (x_i, y_i, z_i), das dem ursprünglichen (xyz) parallel sein soll. Endlich setzen wir

$$C_i \frac{a_i}{r_i} = F_i(x_i, y_i, z_i),$$

wobei $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

Dann ist das Potential

$$V = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i, y_i, z_i) + Q_1.$$

Q_1 muss auf der Oberfläche jeder Kugel K_λ den entgegengesetzten Werth annehmen, wie

$$^{(\lambda)}\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i, y_i, z_i),$$

wobei das Symbol $^{(\lambda)}\Sigma$ bedeutet, dass die Summe über alle Kugeln mit Ausnahme der λ^{ten} zu nehmen ist.

Daher wird nach dem Früheren:

$$Q_1 = -\sum_{\lambda=1}^{n} {}^{(\lambda)}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_\lambda}{d_{i\lambda}}\right) F_i\left(x_i + \cos(x d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}},\right.$$
$$\left. y_i + \cos(y d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}},\ z_i + \cos(z d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}\right) + Q_2.$$

Q_2 muss an der ν^{ten} Kugel denselben Werth annehmen, wie

$$^{(\nu)}\sum_{\lambda=1}^{n} {}^{(\lambda)}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_\lambda}{d_{i\lambda}}\right) F_i\left(x_\lambda + \cos(x d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}},\ y_\lambda + \cos(y d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}},\right.$$
$$\left. z_\lambda + \cos(z d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}\right),$$

daher wird also:

$$Q_2 = \sum_{\nu=1}^{n} {}^{(\nu)}\sum_{\lambda=1}^{n} {}^{(\lambda)}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_\lambda a_\nu}{d_{i\lambda} D_{\nu\lambda}}\right) F_i\left(x_\nu + \cos(x D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}},\right.$$
$$\left. y_\nu + \cos(y D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}},\ z_\nu + \cos(z D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}}\right) + Q_3.$$

wobei

$$D_{\nu\lambda}^2 = \left(\xi_\nu - \xi_\lambda + \cos(x d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}\right)^2 + \left(\eta_\nu - \eta_\lambda + \cos(y d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}\right)^2 + \left(\zeta_\nu - \zeta_\lambda + \cos(z d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}\right)^2$$

und

$$\cos(D_{\nu\lambda} x) = \frac{\xi_\nu - \xi_\lambda + \cos(x d_{i\lambda}) \frac{a_\lambda^2}{d_{i\lambda}}}{D_{\nu\lambda}}; \ldots$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir etwa noch:

$$Q_3 = \sum_{\pi=1}^{n} {}^{(\nu)}\sum_{\nu=1}^{n} {}^{(\lambda)}\sum_{\lambda=1}^{n} {}^{(i)}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_\lambda a_\nu a_\pi}{d_{i\lambda} D_{\nu\lambda} D'_{\pi\nu}}\right) \cdot F_i\left(x_\pi + \cos(x D'_{\pi\nu}) \frac{a_\pi^2}{D'_{\pi\nu}}, y_\pi + \cos(y D'_{\pi\nu}) \frac{a_\pi^2}{D'_{\pi\nu}}, z_\pi + \cos(z D'_{\pi\nu}) \frac{a_\pi^2}{D'_{\pi\nu}}\right) + Q_4,$$

wobei

$$D'^2_{\pi\nu} = \left(\xi_\pi - \xi_\nu + \cos(x D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}}\right)^2 + \left(\eta_\pi - \eta_\nu + \cos(y D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}}\right)^2 + \left(\zeta_\pi - \zeta_\nu + \cos(z D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}}\right)^2$$

und

$$\cos(D'_{\pi\nu} x) = \frac{\xi_\pi - \xi_\nu + \cos(x D_{\nu\lambda}) \frac{a_\nu^2}{D_{\nu\lambda}}}{D'_{\pi\nu}}; \ldots$$

bedeutet. (Der vor dem Summenzeichen eingeklammerte Buchstabe zeigt also, wie schon bemerkt, stets an, dass die durch denselben bezeichnete Kugel bei der Summation auszulassen ist.)

So fortfahrend, könnte man alle Q nacheinander bestimmen, und das Resultat würde durch Summation der Ausdrücke $Q_1 - Q_2$; $Q_2 - Q_3$; ... erhalten werden.

Die Convergenz der so entstehenden Reihe lässt sich nicht so unmittelbar erkennen, wie es beim Problem der zwei Kugeln der Fall war. Doch ergibt sie sich aus den allgemeinen Betrachtungen, die sich über die Methode von Murphy anstellen lassen. (Siehe die Anmerkung auf Seite 1670 dieser Arbeit.)

Nachtrag.

Als die vorliegende Arbeit bereits im Drucke war, wurde mir eine Arbeit von Wirtinger[1] bekannt, in welcher die Green'sche Function eines von getrennten sphärischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Gebietes angegeben ist, in welcher das Problem jedoch in anderer Form behandelt ist.

Ausserdem hatte Herr Prof. Wirtinger die Freundlichkeit, mich auf den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Lösungen des Problems aufmerksam zu machen; ich hoffe demnächst darauf zurückkommen zu können.

[1] W. Wirtinger, Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Classe, 1897, Heft 3.



